

УДК 539.3

С. А. Калоеров, А. И. Занько

РЕЗУЛЬТАТЫ НОВЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО ИЗГИБУ
МНОГОСВЯЗНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛИТЫ

С помощью новых представлений комплексных потенциалов теории изгиба анизотропных плит даны решения задач об изгибе плиты с эллиптическими контурами под действием изгибающих моментов на контурах или распределенных усилий по основанию. Для нахождения общих представлений функций используются конформные отображения, разложения функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера, для удовлетворения граничным условиям в случае односвязных областей – метод рядов, для многосвязных областей – обобщенный метод наименьших квадратов. Численными исследованиями изучено влияние геометрических и физико-механических характеристик плиты на значения изгибающих моментов. В случае распределенных усилий по основанию плиты показано существенное отличие получаемых результатов от известных данных других авторов.

Ключевые слова: анизотропная тонкая плита, плита с отверстием, комплексные потенциалы, дифференциальная форма граничных условий, обобщенный метод наименьших квадратов

Несмотря на большую потребность решения практических задач для тонких многосвязных анизотропных плит, находящихся в условиях изгиба, до сих пор в этом направлении исследований выполнено недостаточно. Для решения таких задач С. Г. Лехницким [1] были введены комплексные потенциалы теории изгиба анизотропных плит, решена задача об изгибе бесконечной плиты с эллиптическим отверстием. В дальнейшем эти функции были использованы для решения задачи об изгибе опертой по контуру анизотропной сплошной эллиптической плиты [2], получены некоторые результаты для плиты с двумя эллиптическими отверстиями [3], эллиптической плиты с эллиптическим отверстием [4–6], для многосвязных анизотропных [7, 8].

В статье [9] исследованы общие свойства комплексных потенциалов, получены их общие представления для конечной и бесконечной многосвязной области, исследованы их логарифмические особенности, их поведение в окрестности бесконечно удаленной точки. В данной работе с использованием результатов последней статьи даны решения ряда задач, проведены численные исследования, исследована достоверность получаемых результатов и их согласование с известными.

1. Основные соотношения для комплексных потенциалов. Рассмотрим тонкую анизотропную плиту постоянной толщины $2h$, имеющую в каждой точке плоскость упругой симметрии, параллельную срединной плоскости. Отнесем плиту к прямоугольной системе координат $Oxuz$, плоскость Oxu которой совместим со срединной плоскостью плиты. Пусть срединная плоскость плиты занимает конечную многосвязную область S , ограниченную контурами L_l , которые нагружены внешними воздействиями в виде поперечных усилий и моментов или жестко подкреплены.

Определение напряженно-деформированного состояния рассматриваемой плиты сводится к нахождению комплексных потенциалов изгиба $W_k(z_k)$ из соответствующих граничных условий. После нахождения этих функций основные характеристики изгиба плиты (прогиб, углы поворотов, моменты, перерезывающие силы) вычисляются по формулам [9, 10]

$$w = w_0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 W_k(z_k); \quad (1.1)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}, \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (1, \mu_k) W_k'(z_k); \quad (1.2)$$

$$(M_x, M_y, H_{xy}) = (M_{x0}, M_{y0}, H_{xy0}) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (p_k, q_k, r_k) W_k''(z_k); \quad (1.3)$$

$$(N_x, N_y) = (N_{x0}, N_{y0}) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (\mu_k s_k, -s_k) W_k'''(z_k), \quad (1.4)$$

где $w_0(x, y)$ – частное решение неоднородного дифференциального уравнения

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y); \quad (1.5)$$

$D_{ij} = B_{ij} D_0$ – жесткости материала плиты, в которых

$$\begin{aligned} B_{11} &= (a_{22}a_{66} - a_{26}^2)/\Delta, & B_{12} &= (a_{16}a_{26} - a_{12}a_{66})/\Delta, & B_{16} &= (a_{12}a_{26} - a_{16}a_{22})/\Delta, \\ B_{22} &= (a_{11}a_{66} - a_{16}^2)/\Delta, & B_{26} &= (a_{12}a_{16} - a_{26}a_{11})/\Delta, & B_{66} &= (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)/\Delta, \\ \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{vmatrix}; \end{aligned} \quad (1.6)$$

a_{ij} – коэффициенты деформации материала; $D_0 = 2h^3/3$;

$$\begin{aligned} M_{x0} &= - \left(D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right), \\ M_{y0} &= - \left(D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right), \\ H_{xy0} &= - \left(D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2D_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right); \\ N_{x0} &= - \left(D_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + 3D_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + D_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right), \\ N_{y0} &= - \left(D_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + 3D_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right); \end{aligned} \quad (1.7)$$

μ_k – корни характеристического уравнения

$$D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{16}\mu + D_{11} = 0; \quad (1.8)$$

$$p_k = D_{11} + 2D_{16}\mu_k + D_{12}\mu_k^2, \quad q_k = D_{12} + 2D_{26}\mu_k + D_{22}\mu_k^2,$$

$$r_k = D_{16} + 2D_{66}\mu_k + D_{26}\mu_k^2, \quad s_k = -D_{16} - (D_{12} + 2D_{66})\mu_k - 3D_{26}\mu_k^2 - D_{22}\mu_k^3. \quad (1.9)$$

Производные комплексных потенциалов $W'_k(z_k)$ на контурах плиты удовлетворяют определенным граничным условиям. Если контур L_l загружен или жестко подкреплен, то граничные условия имеют вид [9]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{kli} W'_k(z_k) = f_{li} \quad (i = \overline{1, 2}), \quad (1.10)$$

причем в случае загруженного контура L_l

$$g_{kl1} = \frac{p_k}{\mu_k}, \quad g_{kl2} = q_k,$$

$$f_{l1} = - \int_0^s (f_l dx + m_l dy) + J_{01} - c_l x + c_{l1}, \quad f_{l2} = - \int_0^s (m_l dx - f_l dy) - J_{02} + c_l y + c_{l2},$$

$$J_{01} = \int_0^s (N_{xy0} - H_{xy0}) dx + M_{x0} dy, \quad J_{02} = \int_0^s -M_{y0} dx + (N_{xy0} + H_{xy0}) dy,$$

$$f_l(s) = \int_0^s p_l(s) ds, \quad N_{xy0} = \int_0^s N_{n0} ds, \quad N_{n0} = -N_{y0} \frac{dx}{ds} + N_{x0} \frac{dy}{ds}, \quad (1.11)$$

в случае подкрепленного контура

$$g_{kl1} = 1, \quad g_{kl2} = \mu_k, \quad f_{l1} = -\frac{\partial w_0}{\partial x} + w_n^* \frac{dy}{ds} + \frac{\partial w^*}{\partial x} \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \frac{\partial w^*}{\partial y} \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds},$$

$$f_{l2} = -\frac{\partial w_0}{\partial y} - w_n^* \frac{dx}{ds} + \frac{\partial w^*}{\partial x} \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial w^*}{\partial y} \left(\frac{dy}{ds} \right)^2, \quad (1.12)$$

c_l – вещественная, c_{1l}, c_{2l} – комплексные постоянные; $w^*(s), w_n^* = (\partial w / \partial n)^*$ – заданные на контуре L_l значения прогиба и ее производной по нормали.

В общем случае функции $W'_k(z_k)$ имеют вид [9]

$$W'_k(z_k) = \sum_{l=1}^L (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl}) + W'_{0k}(z_k), \quad (1.13)$$

в котором A_{kl}, B_{kl} – постоянные, вычисляемые из решения систем

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i A_{kl} = \left(0, 0, 0, \frac{P_l}{2\pi D_{11}} \right), \quad (1.14)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i B_{kl} = \left(0, 0, -\frac{M_{xl}}{2\pi D_{22}}, -\frac{M_{yl}}{2\pi D_{11}} \right), \quad (1.15)$$

P_l – главный вектор приложенных к L_l поперечных сил; M_{xl}, M_{yl} – компоненты главного момента, относительно начала координат, внешних воздействий, распределенных по контуру L_l ; z_{kl} – точки, соответствующие при аффинных преобразованиях

$$z_k = x + \mu_k y \quad (1.16)$$

произвольным точкам z_l внутри контуров отверстий L_l ; $W'_{0k}(z_k)$ – функции, голоморфные в многосвязных областях S_k , ограниченных контурами L_{kl} , соответствующими при аффинных преобразованиях контурам L_l . Исходя из приведенных соотношений, приведем решения конкретных задач.

2. Изгиб эллиптической плиты усилиями, распределенными по верхнему основанию. Рассмотрим эллиптическую плиту с контуром L_0 и полуосями a_0 и b_0 (рис. 1). Плита по верхнему основанию находится под действием равномерного давления интенсивности q_0 . По контуру L_0 она жестко заделана.

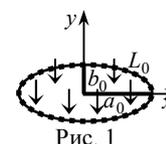


Рис. 1

В данном случае функции (1.13) имеют вид

$$W'_k(z_k) = W'_{0k0}(z_k), \quad (2.1)$$

в котором $W'_{0k0}(z_k)$ – функции, голоморфные в односвязных областях S_k , ограниченных эллипсами L_{k0} , соответствующими контуру L_0 при аффинных преобразованиях (1.16). В этих областях функции можно разложить в ряды по полиномам Фабера [11]

$$W'_{0k0}(z_k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{k0n} P_n(z_k), \quad (2.2)$$

где $P_n(z_k)$ – полиномы Фабера, для которых имеют место равенства

$$P_0 = 1, \quad P_n(z_k) = \zeta_{k0}^n + m_{k0}^n / \zeta_{k0}^n; \quad (2.3)$$

ζ_{k0} – переменные, определяемые из конформных отображений внешности единичных кругов $|\zeta_{k0}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{k0} [12]:

$$z_k = R_{k0} (\zeta_{k0} + m_{k0} / \zeta_{k0}); \quad (2.4)$$

$$R_{k0} = (a_0 - i\mu_k b_0) / 2, \quad m_{k0} = (a_0 + i\mu_k b_0) / (a_0 - i\mu_k b_0).$$

В рассматриваемом случае частное решение дифференциального уравнения (1.5) выберем в виде

$$w_0(x, y) = d_0(x^2 + y^2)^2, \quad (2.5)$$

в котором d_0 – постоянная. Тогда

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} = 4d_0x(x^2 + y^2), \quad \frac{\partial w_0}{\partial y} = 4d_0y(x^2 + y^2); \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} M_{x0} &= -4d_0 \left[D_{11}(3x^2 + y^2) + D_{12}(3y^2 + x^2) + 4D_{16}xy \right], \\ M_{y0} &= -4d_0 \left[D_{12}(3x^2 + y^2) + D_{22}(3y^2 + x^2) + 4D_{26}xy \right], \\ H_{xy0} &= -4d_0 \left[D_{16}(3x^2 + y^2) + D_{26}(3y^2 + x^2) + 4D_{66}xy \right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

и из (1.5) и (2.5) с учетом того, что в данном случае $q(x, y) = q_0$, получим, что

$$d_0 = \frac{q_0}{8 \left[3(D_{11} + D_{22}) + 2(D_{12} + 2D_{66}) \right]}.$$

На контуре диска $x = a_0 \cos \vartheta$, $y = b_0 \sin \vartheta$, где ϑ – параметр параметрического задания эллипса, изменяющийся от 0 до 2π . Тогда

$$x = \frac{a_0}{2} \left(\sigma + \frac{1}{\sigma} \right), \quad y = -\frac{ib_0}{2} \left(\sigma - \frac{1}{\sigma} \right), \quad x^2 + y^2 = \frac{a_0^2 - b_0^2}{4} \left(\sigma^2 + \frac{1}{\sigma^2} \right) + \frac{a_0^2 + b_0^2}{2}, \quad (2.8)$$

где $\sigma = e^{i\vartheta}$. Кроме того, $\zeta_{k0} = \sigma$. Подставляя функции (2.1) с учетом выражений (2.6), (2.8) в граничные условия (1.12) и применяя метод рядов, находим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 \left[a_{k0n} m_{k0}^n + \bar{a}_{k0n} \right] &= -\frac{d_0 a_0}{2} \left[(3a_0^2 + b_0^2) \delta_{1n} + (a_0^2 - b_0^2) \delta_{3n} \right], \\ \sum_{k=1}^2 \left[\mu_k a_{k0n} m_{k0}^n + \bar{\mu}_k \bar{a}_{k0n} \right] &= -\frac{d_0 i b_0}{2} \left[(a_0^2 + 3b_0^2) \delta_{1n} + (a_0^2 - b_0^2) \delta_{3n} \right], \\ a_{k0n} &= 0, \quad n \neq 1, \quad n \neq 3. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь δ_{ij} – символ Кронекера. Тогда функции (2.1) будут такими:

$$W'_k(z_k) = \sum_{n=1,3} a_{k0n} \left(\zeta_{k0}^n + \frac{m_{k0}^n}{\zeta_{k0}^n} \right) = \frac{a_{k01} z_k}{R_{k0}} + a_{k03} \left(\frac{z_k^3}{R_{k0}^3} - 3m_{k0} \frac{z_k}{R_{k0}} \right), \quad (2.10)$$

а для моментов (1.3) найдем

$$(M_x, M_y, H_{xy}) = (M_{x0}, M_{y0}, H_{xy0}) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (p_k, q_k, r_k) \left[\frac{a_{k01}}{R_{k0}} + 3a_{k03} \left(\frac{z_k^2}{R_{k0}^3} - \frac{m_{k0}}{R_{k0}} \right) \right], \quad (2.11)$$

Были проведены численные исследования распределения изгибающих моментов в плите из материалов: КАСТ–В изотропный (материал М1) [13], дигидрофосфат аммония $\text{NH}_4\text{H}_2\text{PO}_4$ (М2) [14], стеклопластик косоугольной намотки (М3) [15, 16], сосна (М4) [10]. Коэффициенты a_{ij} деформаций для этих материалов приведены в табл. 1.

Для кругового диска в зависимости от центрального угла θ , отсчитываемого от положительного направления оси Ox , в табл. 2 с точностью до q_0 приведены значения изгибающих моментов M_n , M_s (возникающих от нормальных напряжений σ_n и σ_s на площадках, касательных и перпендикулярных к

Таблица 1

Материал	Постоянные материала				$\frac{a_{11}}{a_{22}}$
	$a_{11} \cdot 10^{-4}$, МПа ⁻¹	$a_{22} \cdot 10^{-4}$, МПа ⁻¹	$a_{12} \cdot 10^{-4}$, МПа ⁻¹	$a_{66} \cdot 10^{-4}$, МПа ⁻¹	
М1	72,100	72,100	-8,600	161,500	1,000
М2	0,435	0,175	-0,115	1,150	2,486
М3	10,000	2,800	-0,770	27,000	3,571
М4	2,381	0,100	-0,024	1,333	23,810

контур) в точках контура L_0 , где они достигают максимальных значений. Из данных табл. 2 видно, что, чем выше «степень анизотропии», т. е. степень отличия a_{11}/a_{22} от 1, тем больше уровень концентрации изгибающих момен-

Таблица 2

θ , рад	Материал							
	M1	M2	M3	M4	M1	M2	M3	M4
	Моменты M_n				Моменты M_s			
0	-0,125	-0,077	-0,064	-0,012	-0,015	-0,050	-0,017	-0,003
$\pi/12$	-0,125	-0,080	-0,064	-0,018	-0,015	-0,055	-0,028	-0,016
$\pi/6$	-0,125	-0,092	-0,074	-0,042	-0,015	-0,064	-0,048	-0,042
$\pi/4$	-0,125	-0,116	-0,105	-0,099	-0,015	-0,068	-0,058	-0,055
$\pi/3$	-0,125	-0,149	-0,156	-0,181	-0,015	-0,064	-0,048	-0,042
$5\pi/12$	-0,125	-0,179	-0,206	-0,259	-0,015	-0,055	-0,028	-0,016
$\pi/2$	-0,125	-0,191	-0,227	-0,290	-0,015	-0,050	-0,017	-0,003

тов M_n (максимальное по модулю их значение), для изотропного материала, как и следовало ожидать, значения моментов не зависят от угла θ , вблизи контура диска моменты всегда отрицательны.

3. Изгиб эллиптической кольцевой плиты распределенными по контурам изгибающими моментами. Рассмотрим теперь кольцевую плиту, с внешним и внутренним эллиптическими контурами L_0 и L_1 , имеющими полуоси a_0, b_0 и a_1, b_1 (рис. 2). Будем считать, что центры эллипсов совпадают, на их контурах L_l ($l = 0, 1$) заданы распределенные изгибающие моменты m_l .

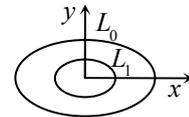


Рис.2

В данном случае функции $W'_k(z_k)$ представим в виде

$$W'_k(z_k) = W'_{0k0}(z_k) + W'_{0k1}(z_k), \tag{3.1}$$

где $W'_{0k0}(z_k)$ – функции, голоморфные внутри контуров L_{k0} , получаемых из L_0 аффинными преобразованиями (1.16) и представимые рядами по полиномам Фабера (2.2), которые можно, как и выше, представлять рядами Тейлора по степеням z_k/R_{k0} ; $W'_{0k1}(z_k)$ – функции, голоморфны вне контуров L_{k1} соответствующих контуру L_1 . Для нахождения общего вида последних функций используем конформные отображения.

Отобразим внешность единичных кругов $|\zeta_{k1}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{k1} :

$$z_k = R_{k1}(\zeta_{k1} + m_{k1}/\zeta_{k1}). \tag{3.2}$$

Здесь

$$R_{k1} = (a_1 - i\mu_k b_1)/2, \quad m_{k1} = (a_1 + i\mu_k b_1)/(a_1 - i\mu_k b_1).$$

Функции $W'_{0k1}(z_k)$, голоморфные вне эллипсов L_{k1} , в конформно отображенных областях будут голоморфными вне кругов $|\zeta_{k1}| \geq 1$ и их можно разложить в ряды Лорана по отрицательным степеням ζ_{k1} . Следовательно, для комплексных потенциалов окончательно получим

$$W'_{0k}(z_k) = a_{k00} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_{k0n} \left(\frac{z_k}{R_{k0}} \right)^n + \frac{a_{k1n}}{\zeta_{k1}^n} \right], \tag{3.3}$$

где a_{kln} – неизвестные постоянные.

Окончательно функции $W'_k(z_k)$ и их производные запишем в виде

$$W'_k(z_k) = \sum_{l=0}^1 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{kln} a_{kln}, \quad W''_k(z_k) = \sum_{l=0}^1 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi'_{kln} a_{kln}, \tag{3.4}$$

в котором

$$\varphi_{k0n} = \left(\frac{z_k}{R_{k0}} \right)^n, \quad \varphi_{k1n} = \frac{1}{\zeta_{k1}^n}, \quad \varphi'_{k0n} = \frac{n z_k^{n-1}}{R_{k0}^n}, \quad \varphi'_{k1n} = -\frac{n}{\zeta_{k1}^{n-1} R_{k1} (\zeta_{k1}^2 - m_{k1})}. \tag{3.5}$$

Для определения постоянных a_{kln} удовлетворим граничным условиям на контурах кольца, которые будем использовать в дифференциальной форме. Продифференцировав условия (1.11) по дуге контура, найдем [19]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{kli} \delta_k W_k''(t_k) = f_{li1} \quad (i = \overline{1, 2}), \quad (3.6)$$

где

$$\delta_k = \frac{dz_k}{ds}, \quad f_{l11} = -m_l \frac{dy}{ds} - c_l \frac{dx}{ds}, \quad f_{l21} = -m_l \frac{dx}{ds} + c_l \frac{dy}{ds}; \quad (3.7)$$

Граничным условиям будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [11, 17, 18]. Для этого на контурах плиты выберем набор точек t_m ($m = \overline{1, M}$), в которых удовлетворим условиям (3.6), получим

$$2 \operatorname{Re} \sum_{l=0}^1 \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} g_{kli} \delta_k \phi'_{kln}(t_{klm}) a_{kln} = f_{li1} \quad (i = \overline{1, 2}). \quad (3.8)$$

Эту систему дополним уравнениями однозначности прогиба [9] для контура L_1 :

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i a_{k11} R_{k1} = 0. \quad (3.9)$$

После нахождения решения системы (3.8), (3.9) с использованием метода сингулярного разложения постоянные a_{kln} , а следовательно и функции $W'_k(z_k)$, будут известными и по ним можно вычислять изгибающие моменты (1.3).

Для кругового кольца из материалов М1 и М4 при действии моментов m_0 на внешнем контуре и незагруженном внутреннем контуре в зависимости от центрального угла θ и значения отношения a_1/a_0 в табл. 3 с точностью до m_0 приведены значения моментов M_s , в точках контуров L_0, L_1 , где они достигают максимальных значений. Для изотропного материала М1 значения моментов не зависят от угла θ . Видно, что с увеличением отношения a_1/a_0 (с уменьшением ширины кольца) значения изгибающих моментов резко возрастают, приближаясь к одинаковым значениям.

Влияние «степени анизотропии» для рассматриваемой задачи значительно меньше, чем в задаче о диске при действии давления по основанию.

Заметим, что полученные результаты достаточно хорошо согласуются с найденными в работе [4], где для удовлетворения граничным условиям использовался метод рядов. Но там рассмотрены лишь случаи, когда радиус отверстия мал ($a_1/a_0 = 0,2$) и поэтому влияние отверстия на значения моментов около внешнего контура незначительно (см. табл. 3 при $a_1/a_0 = 0,1$).

4. Изгиб эллиптической кольцевой плиты под действием равномерного давления по основанию. Пусть рассмотренная в предыдущем пункте плита по контуру L_0 жестко заделана, по контуру L_1 свободна или жестко подкреплена, по верхнему основанию она загружена равномерным давлением интенсивности q_0 (рис. 3).

В данном случае функции $W'_k(z_k)$ и их производные имеют вид (3.4).

Выберем частное решение дифференциального уравнения (1.5) в виде (2.5). На основе (2.5), (1.7), (1.11), (2.7) находим

$$f_l(s) = \int_0^s p_l(s) ds = 0;$$

$$N_{x0} = -8d_0 [(3D_{11} + D_{12} + 2D_{66})x + 3(D_{16} + D_{26})y],$$

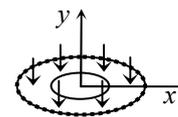


Рис. 3

$$\begin{aligned}
 N_{y0} &= -8d_0 [3(D_{16} + D_{26})x + (D_{12} + 2D_{66} + 3D_{22})y]; \\
 f_{01}(s) &= -4d_0 \left\{ 2 \left[xy(3D_{11} - 3D_{22} - 2D_{66}) - x^2(3D_{16} + 2D_{26}) + y^2D_{16} \right] \frac{dx}{ds} + \right. \\
 &\quad \left. + \left[D_{11}(3x^2 + y^2) + D_{12}(3y^2 + x^2) + 4D_{16}xy \right] \frac{dy}{ds} \right\}, \\
 f_{02}(s) &= -4d_0 \left\{ - \left[D_{12}(3x^2 + y^2) + D_{22}(3y^2 + x^2) + 4D_{26}xy \right] \frac{dx}{ds} + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \left[xy(3D_{11} - 3D_{22} + 2D_{66}) - x^2D_{26} + y^2(2D_{16} + 3D_{26}) \right] \frac{dy}{ds} \right\}; \\
 N_{n0} &= -8d_0 \left\{ (3D_{11} + D_{12} + 2D_{66}) \frac{dy}{ds} x - 3(D_{16} + D_{26}) \left(\frac{dx}{ds} x - \frac{dy}{ds} y \right) - \right. \\
 &\quad \left. - (D_{12} + 2D_{66} + 3D_{22}) \frac{dx}{ds} y \right\}, \\
 N_{xy0} &= -24d_0 \left\{ xy(D_{11} - D_{22}) - \frac{1}{2}(D_{16} + D_{26})(x^2 - y^2) \right\}.
 \end{aligned}$$

Для определения постоянных a_{kln} удовлетворим граничным условиям на контурах кольца, которыми будем удовлетворять в дифференциальной форме (3.6). Причем для данной задачи

$$f_{l11} = f_{01}(s) - m_l dy/ds - c_l dx/ds, \quad f_{l21} = -f_{02}(s) - m_l dx/ds + c_l dy/ds; \quad (3.10)$$

для загруженного контура;

$$f_{l11} = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds}, \quad f_{l21} = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{dy}{ds}; \quad (3.11)$$

для жестко подкрепленного контура.

Дальнейшие рассуждения проводятся по аналогии с предыдущим параграфом.

Для кругового кольца с неподкрепленным и незагруженным внутренним контуром и жестко заделанным внешним контуром в зависимости от центрального угла θ и отношения a_1/a_0 с точностью до q_0 в табл. 4 и табл. 5 приведены значения моментов M_n и M_s соответственно. При этом на контуре отверстия $M_n = 0$, поэтому в табл. 4 даны их значения только для контура L_0 . Для изотропного материала М1 значения моментов не зависят от угла θ и поэтому они в таблицах приведены только для $\theta = 0$. Видно, что с увеличением отношения a_1/a_0 (с уменьшением ширины кольца) значения изгибающих моментов M_s по модулю уменьшаются.

В табл. 6 приведены результаты, аналогичные данным табл. 4, 5, когда внутренний контур кольца жестко подкреплен. Как и ранее, кольцо загружено равномерно распределенными по верхнему основанию усилиями интенсивности q_0 . Видно, что с увеличением отношения a_1/a_0 (с уменьшением ширины кольца) значения изгибающих моментов M_s по модулю уменьшаются.

Таблица 4

Материал	θ , рад	a_1/a_0		
		0,1	0,5	0,9
M1	0	-0,127	-0,134	-0,045
M4	0	-0,012	-0,014	-0,045
	$\pi/12$	-0,018	-0,022	-0,058
	$\pi/6$	-0,042	-0,056	-0,079
	$\pi/4$	-0,099	-0,146	-0,064
	$\pi/3$	-0,185	-0,249	-0,035
	$5\pi/12$	-0,265	-0,240	-0,015
	$\pi/2$	-0,294	-0,201	-0,009

Таблица 5

Материал	θ , рад	a_1/a_0					
		L_0			L_1		
		0,1	0,5	0,9	0,1	0,5	0,9
M1	0	-0,015	0,060	-0,005	0,135	-0,016	0,002
M4	0	-0,003	-0,003	-0,011	0,400	0,351	0,105
	$\pi/12$	-0,016	-0,019	-0,052	0,331	0,223	0,010
	$\pi/6$	-0,042	-0,056	-0,079	0,186	0,054	-0,026
	$\pi/4$	-0,056	-0,082	-0,036	0,090	-0,008	-0,007
	$\pi/3$	-0,043	-0,058	-0,008	0,045	-0,015	-0,001
	$5\pi/12$	-0,016	-0,015	-0,001	0,025	-0,009	0,000
	$\pi/2$	-0,003	-0,002	0,000	0,019	-0,006	0,000

Таблиця 6

Моменты	Материал	θ , рад	a_1/a_0					
			0,1	0,5	0,9	0,1	0,5	0,9
			L_0			L_1		
M_n	M1	0	-0,124	-0,094	-0,024	0,124	0,094	0,024
	M4	0	-0,012	-0,011	-0,003	0,001	-0,001	0,002
		$\pi/12$	-0,018	-0,016	-0,004	0,017	0,010	0,003
		$\pi/6$	-0,042	-0,035	-0,008	0,060	0,041	0,008
		$\pi/4$	-0,098	-0,072	-0,018	0,120	0,086	0,019
		$\pi/3$	-0,179	-0,127	-0,034	0,179	0,139	0,035
		$5\pi/12$	-0,255	-0,195	-0,049	0,222	0,183	0,049
		$\pi/2$	-0,290	-0,226	-0,056	0,238	0,201	0,055
M_s	M1	0	-0,015	-0,011	-0,003	0,015	0,011	0,003
	M4	0	-0,003	-0,003	-0,001	0,000	0,000	0,000
		$\pi/12$	-0,016	-0,014	-0,003	0,015	0,009	0,003
		$\pi/6$	-0,042	-0,035	-0,008	0,060	0,041	0,008
		$\pi/4$	-0,055	-0,040	-0,010	0,067	0,048	0,011
		$\pi/3$	-0,042	-0,029	-0,008	0,042	0,032	0,008
		$5\pi/12$	-0,016	-0,012	-0,003	0,014	0,011	0,003
		$\pi/2$	-0,003	-0,002	-0,001	0,002	0,002	0,001

Заметим, что наши результаты значительно отличаются от ранее полученных [7]. Так, если рассматривать как в указанной работе, эллиптическое кольцо, для которого $b_0/a_0 = 0,4$, $a_1/a_0 = 0,2$, $b_1/a_0 = 0,1$, то значения моментов M_n в точках внешнего контура при углах θ , равных 0 , $\pi/4$, $\pi/2$, по нашему решению получаются такими: -0,0686, -0,0250, -0,0363, тогда как в работе [7] они соответственно равны: 0,1948, 0,3508, 1,0476. Для тех же размеров значения моментов M_s по нашему решению такие: -0,0018, -0,0305, -0,0115, а в работе [7] приведены значения: 0,0056, 0,4263, 0,3325. Расхождения наших результатов с данными работы [7] для точек внутреннего контура еще более значительные. Эталонами для изучения достоверности результатов могут служить числовые значения величин по точному аналитическому решению задачи об изгибе сплошного эллиптического диска, на основе которого для моментов получены выражения (2.11).

Для случаев малых отверстий в кольце, когда их влиянием около внешнего контура можно пренебречь, значения моментов в точках внешнего контура должны быть такими же, как и в задаче о сплошном эллиптическом диске. Значения моментов M_n и M_s в сплошном диске, вычисленные по формулам (2.11) для указанных выше θ , равных 0 , $\pi/4$, $\pi/2$, получаются такими: -0,0714, -0,0274, -0,0368 и -0,0019, -0,0334, -0,0116. Как видно, эти значения хорошо согласуются с приведенными выше (-0,0686, -0,0250, -0,0363 и -0,0018, -0,0305, -0,0115) для сравнительно небольшого отверстия ($b_0/a_0 = 0,4$, $a_1/a_0 = 0,2$, $b_1/a_0 = 0,1$), а не с данными работы [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лехницкий С. Г. О некоторых вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит / С. Г. Лехницкий // Прикладная математика и механика. – 1938. – Т. 2, вып. 2. – С. 181–209.
2. Меглинский В. В. Изгиб анизотропной эллиптической плиты, опертой по контуру / В. В. Меглинский // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел. – 1971. – Вып. 5. – С. 102–110.
3. Меглинский В. В. Изгиб эллиптической анизотропной плиты с двумя эллиптическими отверстиями / В. В. Меглинский // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел. – 1966. – Вып. 6. – С. 19–27.
4. Иванов Г. М. Чистый изгиб анизотропной эллиптической плиты с отверстием / Г. М. Иванов, В. В. Меглинский // Некоторые задачи о концентрации напряжений и деформаций в упругих телах. – 1969. – Вып. 4. – С. 111–115.
5. Душутина Н. И. Об изгибе эллиптической плиты с внецентренным эллиптическим отверстием / Н. И. Душутина, В. В. Меглинский // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел. – 1967. – Вып. 4. – С. 116–122.
6. Копнина В. И. Исследование напряженно-деформированного состояния эллиптической анизотропной плиты с отверстием / В. И. Копнина, В. В. Меглинский // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел. – 1971. – Вып. 6. – С. 67–73.
7. Меглинский В. В. Некоторые задачи изгиба тонких многосвязных анизотропных плит / В. В. Меглинский // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел. – 1967. – Вып. 3. – С. 97–127.
8. Космодамианский А. С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями / А. С. Космодамианский. – К., Донецк: Вища шк., 1976. – 200 с.
9. Калоеров С. А. Комплексные потенциалы теории изгиба многосвязных анизотропных плит / С. А. Калоеров //

- Теорет. и прикладная механика. – 2012. – Вып. 4 (50). – С. 113–132.
10. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки / С. Г. Лехницкий. – М.: Гостехиздат, 1957. – 463 с.
 11. Калоеров С. А. Концентрация напряжений в многосвязных изотропных пластинках / С. А. Калоеров, Е. В. Авдюшина, А. Б. Мироненко. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2013. – 440 с.
 12. Калоеров С. А. Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела / С. А. Калоеров, Е. С. Горянская // Концентрация напряжений. – К.: А. С. К., 1998. – С. 10–26. (Механика композитов: В 12 т., т. 7).
 13. Амбарцумян С. А. Некоторые нестационарные температурные задачи для ортотропной пластинки / С. А. Амбарцумян, С. М. Дургарьян // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1962. – № 3. – С. 120–127.
 14. Акустические кристаллы: Справочник / А. А. Блистанов, В. С. Бондаренко, В. В. Чкалова и др.; Под ред. М. П. Шаскольской. – М.: Наука, 1982. – 632 с.
 15. Справочник по композиционным материалам: В 2 кн. Кн. 1 / Под ред. Дж. Любина; пер. с англ. А. Б. Геллера, М. М. Гельмонта; под ред. Б. Э. Геллера. – М.: Машиностроение, 1988. – 448 с.
 16. Таблицы физических величин: Справочник / Под ред. акад. И. К. Кикоина. – М.: Атомиздат, 1976. – 1006 с.
 17. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1969. – 280 с.
 18. Воеводин В. В. Вычислительные основы линейной алгебры / В. В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
 19. Калоеров С. А. Изгиб многосвязной анизотропной плиты сложной конфигурации / С. А. Калоеров, А. И. Занько // Актуальные пробл. механики деформируемого твердого тела: Тр. VII Междунар. науч. конф., (Донецк–Мелекино, 11–14 июня 2013 г.). – Донецк, 2013. – Т. 1. – С. 158–162.

Поступила в редакцию 26.02.2014 г.

РЕЗЮМЕ

За допомогою нових уявлень комплексних потенціалів теорії вигину анізотропних плит дані рішення задач про вигин плити з еліптичними контурами під дією згинальних моментів на контурах або розподілених зусиль по основі. Для знаходження загальних уявлень функцій використовуються конформні відображення, розкладання функцій в ряди Лорана і за поліномами Фабера, для задоволення граничним умовам у разі однозв'язних областей – метод рядів, для багатозв'язних областей – узагальнений метод найменших квадратів. Чисельними дослідженнями вивчено вплив геометричних і фізико-механічних характеристик плити на значення згинальних моментів. У разі розподілених зусиль по основі плити показано істотну відмінність одержуваних результатів від відомих даних інших авторів.

Ключові слова: анізотропна тонка плита, плита з отвором, комплексні потенціали, диференціальна форма граничних умов, узагальнений метод найменших квадратів.

SUMMARY

With the help of new representations of complex potentials of the bending theory of anisotropic plates has given the solutions of bending plate problems with elliptical contours under the action of bending moments on the contours or distributed efforts on base. To find the common representations of functions are used conformal mapping, expansions of functions in Laurent series and by Faber polynomials, to satisfy the boundary conditions in the case of simply connected domains - series method, for multiply connected domains – generalized least-squares method. Numerical researches investigated the influence of geometrical and physical- mechanical characteristics of the plate on the values of the bending moments. In the case of dispersed efforts onto the base of the plate it is shown a significant difference of the obtained results from the known data of other authors.

Keywords: anisotropic thin plate, a plate with an aperture, the complex potentials, differential form of the boundary conditions, the generalized least-squares method.