

УДК 539.3

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ В ЗАДАЧАХ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ  
ДЛЯ ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН С ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННЫМ РАЗРЕЗОМ**

*Н. С. Бондаренко, А. С. Гольцев*

Задача теплопроводности для изотропных пластин с теплоизолированным разрезом решена с использованием обобщенной теории, основанной на разложении температуры в ряд Фурье по полиномам Лежандра. Учитывается конвективный теплообмен с внешней средой по закону Ньютона. Проведены расчёты возмущенного температурного поля в окрестности разреза. Исследовано влияние теплообмена на величину погрешности расчёта температуры, найденной из уравнений, полученных операторным методом в предположении линейного распределения температуры по толщине. Сделаны обобщающие выводы.

*Ключевые слова:* изотропная пластина, теплоизолированный разрез, обобщенная теория, полиномы Лежандра, преобразование Фурье.

**Введение.** В данной статье найдено решение задачи теплопроводности для изотропной пластины, содержащей теплоизолированный разрез. При этом использована обобщенная теория, в рамках которой сведение трёхмерного уравнения теплопроводности к системе двумерных уравнений осуществляется за счёт разложения температуры в ряд Фурье по полиномам Лежандра [1, 2]. Такой подход позволяет рассматривать не только тонкие пластины, но и пластины средней и большой толщины. Из работ, в которых искомые функции представляются в виде рядов Фурье по полиномам Лежандра, можно отметить следующие статьи [3-5] и монографии [6, 7]. Задачи теплопроводности и термоупругости для тел с трещинами являются весьма актуальными. В плоском случае эти задачи достаточно хорошо изучены [8].

Целью данной работы является развитие обобщенной теории применительно к задачам теплопроводности для пластин с разрезами. Необходимо также оценить уточнение, обусловленное использованием приближения порядка  $N$  уравнения теплопроводности вместо уравнений, полученных операторным методом и предполагающих линейное распределение температуры по толщине [9].

**Постановка задачи.** Рассмотрим изотропную пластину толщины  $2h$  в прямоугольной декартовой системе координат  $x, y, z$ . На лицевых поверхностях пластины происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона с внешней средой постоянной температуры  $\theta^\pm$  ( $z = \pm h$ ). Пластина имеет теплоизолированный разрез  $L$ .

В рамках приближения порядка  $N$  температура  $T^*$  представляется в виде ряда Фурье по полиномам Лежандра  $P_k$  [1]:

$$T^* = \sum_{k=0}^N T_k^* P_k\left(\frac{z}{h}\right), \quad T_k^* = \frac{2k+1}{2h} \int_{-h}^h T^* P_k\left(\frac{z}{h}\right) dz, \quad (1)$$

где коэффициенты разложения  $T_k^*$  удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям [10]:

$$\Delta T_k^* + \sum_{m=0}^N A_{km} \frac{T_m^*}{h^2} = -\frac{\theta_k}{h^2} \quad (k = \overline{0, N}), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (2)$$

Структура матрицы  $A_N = \|A_{km}\|$  и правых частей  $\theta_k$  описана в работе [10].

Из вида уравнений (2) следует, что учёт температуры окружающей среды добавляет только постоянные составляющие в компоненты температуры  $T_k^*$ . Эти постоянные необходимо учитывать лишь при практических расчётах. Поэтому принимаем  $\theta^+ = \theta^- = 0$ .

В случае теплоизолированного разреза теплота не проходит через линию разреза. Поэтому граничные условия на линии разреза  $L$  имеют вид [8]:

$$\left(\frac{\partial T_k^*}{\partial n}\right)^\pm = 0 \quad (k = \overline{0, N}). \quad (3)$$

Знаками «+», «-» обозначены граничные значения функций в соответствии с выбранным направлением нормали  $\vec{n}$ .

Температурное поле в пластине с разрезом представим в виде суммы двух компонент

$$T_k^* = T_k^o + T_k \quad (k = \overline{0, N}), \quad (4)$$

где  $T_k^o$  – компоненты температуры в сплошной пластине (основное температурное поле, которое считается известным);  $T_k$  – компоненты возмущенного температурного поля, вызванного наличием разреза.

Перейдем в безразмерную систему координат  $x_1, x_2, x_3$ , определенную с точностью до полутолщины пластины  $h$ , тогда для определения возмущенного температурного поля имеем систему, которая следует из (2):

$$\Delta T_k + \sum_{m=0}^N A_{km} T_m = 0 \quad (k = \overline{0, N}). \quad (5)$$

Из краевых условий на линии разреза  $L$  (3) и представлений (4) следуют граничные условия для компонент возмущенного температурного поля

$$\left(\frac{\partial T_k}{\partial n}\right)^\pm = -\left(\frac{\partial T_k^o}{\partial n}\right)^\pm \quad (k = \overline{0, N}). \quad (6)$$

Таким образом, приближение порядка  $N$  уравнения теплопроводности (5) с граничными условиями (6) и требованием убывания возмущенного температурного поля составляют граничную задачу теплопроводности для пластины с теплоизолированным разрезом.

**Построение решения задачи.** Применяя двумерное интегральное преобразование Фурье к системе (5) с учётом разрывного характера искомым функций [11], получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) порядка  $N+1$  для трансформант компонент возмущенного температурного поля  $\tilde{T}_k$

$$-p^2 \tilde{T}_k + \sum_{m=0}^N A_{km} \tilde{T}_m = D(T_k) \quad (k = \overline{0, N}), \quad (7)$$

где

$$p^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2, \quad D(T_k) = \frac{i}{2\pi} \int_L (\bar{\xi}, \bar{n}) [T_k] e^{i(\bar{\xi}, \bar{x}')} dL,$$

$\bar{n} = (n_1, n_2)$ ,  $n_1, n_2$  – направляющие косинусы нормали  $\bar{n}$  к линии  $L$ ;  $[T_k] = T_k^+ - T_k^-$  – скачок компоненты возмущенного температурного поля  $T_k$  при переходе через линию  $L$ ;  $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$  – координаты текущей точки в пространстве трансформант;  $\bar{x}' = (x'_1, x'_2)$  – координаты точки на линии  $L$ .

Решение СЛАУ (7) находим по правилу Крамера:

$$\tilde{T}_k(\bar{\xi}) = \frac{\Delta_k(\bar{\xi})}{\Delta(p^2)} \quad (k = \overline{0, N}), \quad (8)$$

где  $\Delta(\mu) = \det(A_N - \mu E)$  – характеристический многочлен матрицы  $A_N$ ;  $\Delta_k(\bar{\xi})$  – определитель, получающийся заменой  $k$ -го столбца матрицы  $A_N - p^2 E$  столбцом свободных членов системы (7):

$$\Delta_k(\bar{\xi}) = \sum_{m=0}^N M_{mk}(p^2) D(T_m) \quad (k = \overline{0, N}), \quad (9)$$

где  $M_{mk}(\mu)$  – алгебраическое дополнение элемента  $m$ -ой строки и  $k$ -го столбца матрицы  $A_N - \mu E$ . Заметим, что  $M_{mk}(\mu)$  представляет собой многочлен степени  $N$  относительно  $\mu$  при  $m = k$  и многочлен степени  $N-1$  при  $m \neq k$ .

В работе [10] было доказано, что все характеристические корни матрицы  $A_N$  действительные и отрицательные и кратность собственных значений матрицы  $A_N$  не превышает 2. В дальнейшем будем предполагать, что матрица  $A_N$  имеет лишь простые характеристические корни.

Трансформанты компонент возмущенного температурного поля (8) с учётом (9) примут вид

$$\tilde{T}_k = \frac{1}{2\pi} \int_L \sum_{m=0}^N \tilde{B}_{km} [T_m] e^{i(\bar{\xi}, \bar{x}')} dL \quad (k = \overline{0, N}), \quad (10)$$

где

$$\tilde{B}_{km} = i \tilde{M}_{mk}(\rho^2)(\bar{\xi}, \bar{n}) \pm, \quad \tilde{M}_{mk} = M_{mk}(\rho^2) / \Delta(\rho^2) \quad (k, m = \overline{0, N}). \quad (11)$$

С учётом свойств собственных значений матрицы  $A_N$  СЛАУ (7) может быть представлен в виде

$$\Delta(\rho^2) = (-1)^{N+1} \prod_{j=0}^N (\rho^2 + \rho_j^2),$$

где  $\rho_j^2$  – характеристические корни матрицы  $A_N$ , взятые со знаком «-».

Применяя формулу обращения для двумерного преобразования Фурье к трансформантам ядер (11), получим:

$$B_{km}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{B}_{km}(\xi_1, \xi_2) e^{-i(\xi_1 \bar{x}_1 + \xi_2 \bar{x}_2)} d\xi_1 d\xi_2 \quad (k, m = \overline{0, N}), \quad (12)$$

где обозначено  $\bar{x}_1 = x_1 - x'_1$ ,  $\bar{x}_2 = x_2 - x'_2$ .

С учётом соотношений (11) ядра (12) примут вид:

$$B_{km} = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{M}_{mk}(\rho^2)(\bar{\xi}, \bar{n}) e^{-i(\xi_1 \bar{x}_1 + \xi_2 \bar{x}_2)} d\xi_1 d\xi_2 \quad (k, m = \overline{0, N}). \quad (13)$$

Выделяя в подынтегральной функции (13) чётные и нечётные части, найдём

$$B_{km} = \frac{2}{\pi} n_1 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \tilde{M}_{mk}(\rho^2) \xi_1 \sin \xi_1 \bar{x}_1 \cos \xi_2 \bar{x}_2 d\xi_1 d\xi_2 + \\ + \frac{2}{\pi} n_2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \tilde{M}_{mk}(\rho^2) \xi_2 \cos \xi_1 \bar{x}_1 \sin \xi_2 \bar{x}_2 d\xi_1 d\xi_2 = \frac{2}{\pi} (n_1 \Psi_1 + n_2 \Psi_2). \quad (14)$$

Вычислим интеграл  $\Psi_1$ , для чего перейдём в полярную систему координат по формулам

$$\bar{x}_1 = r \cos \varphi, \quad \bar{x}_2 = r \sin \varphi, \quad \xi_1 = \rho \cos \theta, \quad \xi_2 = \rho \sin \theta,$$

тогда  $\Psi_1$  примет вид:

$$\Psi_1 = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \tilde{M}_{mk}(\rho^2) \cos \theta \sin(r \rho \cos \varphi \cos \theta) \cos(r \rho \sin \varphi \sin \theta) d\rho, \quad \tilde{M}_{mk}(\rho^2) = \frac{M_{mk}(\rho^2) \rho^2}{\Delta(\rho^2)}$$

Применяя разложение Якоби-Ангера [12], получим

$$\Psi_1 = \frac{\pi}{2} \cos \varphi \int_0^{\infty} \tilde{M}_{mk}(\rho^2) J_1(r \rho) d\rho,$$

где  $J_1(z)$  — функция Бесселя первого рода.

Аналогично находим  $\Psi_2$ :

$$\Psi_2 = \frac{\pi}{2} \sin \varphi \int_0^{\infty} \tilde{M}_{mk}(\rho^2) J_1(r \rho) d\rho.$$

Подставляя  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  в формулу (14), найдём

$$B_{km} = n_0 \int_0^{\infty} \tilde{M}_{mk}(\rho^2) J_1(r \rho) d\rho \quad (k, m = \overline{0, N}), \quad n_0 = n_1 \cos \varphi + n_2 \sin \varphi. \quad (15)$$

Раскладывая дробь, входящую в подынтегральное выражение (15), на сумму простейших дробей, получим

$$\tilde{M}_{mk}(\rho^2) = -\delta_{km} + \sum_{j=0}^N \frac{C_{kmj}}{\rho^2 + \rho_j^2} \quad (k, m = \overline{0, N}), \quad (16)$$

где  $\delta_{km}$  — символ Кронекера;

$$C_{kmj} = \left\{ \mu M_{mk}(\mu) \left( \frac{d\Delta(\mu)}{d\mu} \right)^{-1} \right\}_{\mu=-\rho_j^2} \quad (k, m, j = \overline{0, N}).$$

Таким образом, соотношения (15) с учётом разложений (16) примут вид

$$B_{km} = -\delta_{km} n_0 \int_0^\infty J_1(r\rho) d\rho + n_0 \sum_{j=0}^N C_{kmj} \int_0^\infty \frac{J_1(r\rho)}{\rho^2 + \rho_j^2} d\rho \quad (k, m = \overline{0, N}). \quad (17)$$

Интегралы во втором слагаемом (17) выражаются через специальную  $G$ -функцию [12]:

$$\int_0^\infty \frac{J_1(r\rho)}{\rho^2 + \rho_j^2} d\rho = -\frac{r}{2} G_{1,0}(\rho_j r) \quad (j = \overline{0, N}).$$

Окончательное выражение для ядер  $B_{km}$  записывается следующим образом:

$$B_{km}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = -n_0 \left( \frac{\delta_{km}}{r} + \frac{r}{2} \sum_{j=0}^N C_{kmj} G_{1,0}(\rho_j r) \right) \quad (k, m = \overline{0, N}), \quad r = \sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}. \quad (18)$$

Тогда компоненты возмущённого температурного поля находятся по формулам, которые следуют из (10)

$$T_k(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{L, m=0}^N B_{km}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) [T_m] dL \quad (k = \overline{0, N}), \quad (19)$$

В качестве примера рассмотрим прямолинейный теплоизолированный разрез длины  $2l$  в безразмерной системе координат  $x_i$  ( $i = \overline{1, 3}$ ), расположенный на оси  $Ox_1$  симметрично относительно начала координат. В интегральных представлениях для компонент возмущённой температуры (19) сделаем замену переменных  $x'_1 = ls$ ,  $x_1 = lx$ , тогда

$$T_k(lx, x_2) = \frac{l}{2\pi} \int_{-1, m=0}^N B_{km}(l(x-s), x_2) [T_m] ds \quad (k = \overline{0, N}), \quad (20)$$

и согласно формулам (18)

$$B_{km}(l(x-s), x_2) = -\frac{x_2}{r^2} \delta_{km} - \frac{1}{2} x_2 \sum_{j=0}^N C_{kmj} G_{1,0}(\rho_j r), \quad r = \sqrt{l^2(x-s)^2 + x_2^2}.$$

Найдём частные производные по  $x_2$  от компонент температуры (20):

$$\frac{\partial T_k(lx, x_2)}{\partial x_2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-1, m=0}^N K_{km}(x-s, x_2) [T_m] ds \quad (k = \overline{0, N}). \quad (21)$$

С учётом выражения производной от специальной  $G$ -функции [12], ядра интегральных представлений (21) равны

$$K_{km}(x-s, x_2) = l \frac{x_2^2 - l^2(x-s)^2}{r^4} \delta_{km} - \frac{l}{2} \sum_{j=0}^N C_{kmj} G_{1,0}(\rho_j r) + \frac{lx_2^2}{r^2} \sum_{j=0}^N C_{kmj} G_{1,1}(\rho_j r).$$

Подставляя интегральные представления (21) в граничные условия (6), получим систему интегральных уравнений для определения скачков компонент температуры  $[T_m]$ :

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^N \int_{-1}^1 L_{km}(x-s) [T_m] ds = F_k(x) \quad (k = \overline{0, N}), \quad (22)$$

где

$$L_{km}(x-s) = -\frac{\delta_{km}}{(x-s)^2} - \frac{l^2}{2} \sum_{j=0}^N C_{kmj} G_{1,0}(\rho_j l|x-s|), \quad F_k(x) = -l \left. \frac{\partial T_k^o(lx, x_2)}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} \quad (k, m = \overline{0, N}).$$

Применяя к интегралам, входящим в (22), формулу интегрирования по частям и учитывая свойство скачков компонент температуры

$$[T_m] \Big|_{\pm 1} = 0 \quad (m = \overline{0, N}), \quad (23)$$

которое следует из непрерывности температуры на концах разреза, приходим к системе сингулярных интегральных уравнений (СИУ)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi_k(s)}{s-x} ds + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \sum_{m=0}^N D_{km}(x-s) \Phi_m(s) ds = -F_k(x) \quad (k = \overline{0, N}), \quad (24)$$

где

$$\Phi_m(s) = \frac{d}{ds} [T_m], \quad D_{km}(x-s) = -\frac{l^2}{2} \sum_{j=0}^N C_{kmj} \int_0^s G_{1,0}(\rho_j l |x-t|) dt \quad (k, m = \overline{0, N}).$$

Неизвестные функции  $\Phi_m(s)$  на основании (23) должны удовлетворять следующим условиям:

$$\int_{-1}^1 \Phi_m(s) ds = 0 \quad (m = \overline{0, N}). \quad (25)$$

Система (24) представляет собой систему СИУ типа Коши первого рода, которую можно решить методом Мультиппа [13]. После решения системы (24), (25) возмущённое температурное поле в любой точке пластины может быть найдено с помощью интегральных представлений (20) и формулы разложения температуры в ряд Фурье по полиномам Лежандра (1).

**Анализ результатов.** В качестве примера рассчитано возмущённое температурное поле в пластине с теплоизолированным разрезом единичной длины ( $l = 1$ ). Рассмотрен случай верхнего одностороннего теплообмена ( $Bi^+ = Bi$ ,  $Bi^- = 0$ , где  $Bi^\pm$  — критерий Био на лицевых поверхностях пластины  $x_3 = \pm 1$ ). Основное температурное поле предполагалось таким, что через линию разреза проходит однородный тепловой поток

$$\frac{\partial T_0^o}{\partial x_2} = 1^\circ C, \quad \frac{\partial T_k^o}{\partial x_2} = 0 \quad (k = \overline{1, N}).$$

На рис. 1, 2 показаны изотермы температуры в разных приближениях на верхней (рис. 1) и нижней (рис. 2) лицевых поверхностях пластины при  $Bi = 1$ . Кривые 1, 2, 3, 4 на рис. 1, 2 соответствуют температурам 0,1; 0,15; 0,2; 0,25 °C. На этих же рисунках представлены скачки температуры на линии разреза при  $x_3 = \pm 1$  (ось скачков температуры направлена вниз).

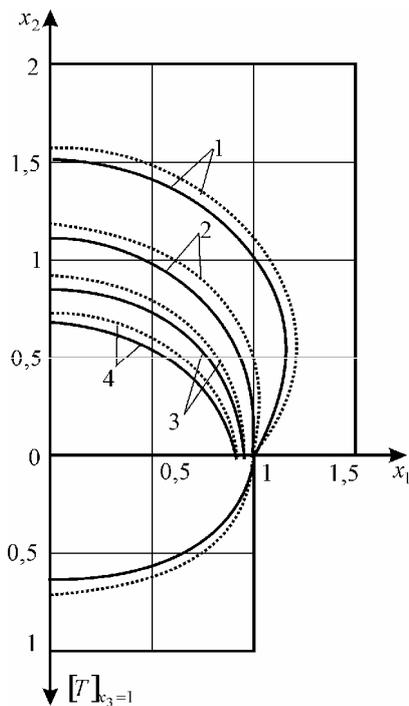


Рис. 1. Изотермы температуры при  $x_3 = 1$

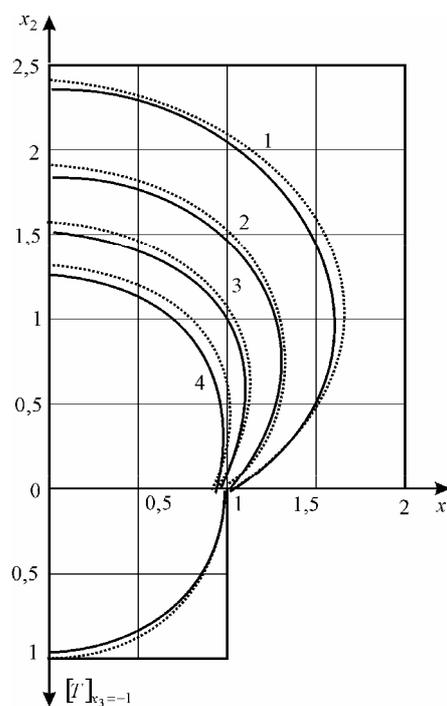


Рис. 2. Изотермы температуры при  $x_3 = -1$

Пунктирними лініями на рис. 1, 2 показані ізотерми температури, знайденої з допомогою уравнений теплопроводности, полученных с помощью операторного метода и предполагающих линейное распределение температуры по толщине [9]. Сплошные линии на рис. 1, 2 отвечают температурам в третьем и пятом приближении на базе обобщённой теории (кривые совпадают). Кривые изотерм симметричны относительно координатных осей, однако в нижней полуплоскости знак температуры меняется на противоположный. Картины изотерм наглядно демонстрируют локальность возмущённого температурного поля. Проведённые расчёты позволяют сделать вывод, что использование пятого приближения трёхмерного уравнения теплопроводности вместо третьего не вносит уточнения в расчёт возмущённого температурного поля, поэтому в разложении температуры по полиномам Лежандра достаточно ограничиться четырьмя членами.

По результатам расчёта температуры определена относительная погрешность  $\delta$  для значений температуры, найденных по уравнениям, полученных с помощью операторного метода [9]. Рассмотрен также случай симметричного теплообмена ( $Bi^+ = Bi^- = Bi$ ). Для точек с максимальным значением относительной погрешности исследована зависимость этой погрешности от величины теплообмена в широком диапазоне изменения параметра  $Bi$ . Результаты этих исследований приведены в табл. 1, где  $\delta^+$  и  $\delta^-$  — относительные погрешности для точек верхней и нижней лицевых поверхностей пластины при верхнем одностороннем теплообмене;  $\delta_{sim}$  — относительная погрешность для точек лицевых поверхностей при симметричном теплообмене.

Таблица

$Bi^+$	$10^{-4}$	$10^{-3}$	$10^{-2}$	0,1	1	5
$\delta^+$ , %	$1,64 \cdot 10^{-3}$	$1,63 \cdot 10^{-2}$	$1,61 \cdot 10^{-1}$	1,48	9,59	17,66
$\delta^-$ , %	$1,69 \cdot 10^{-3}$	$1,68 \cdot 10^{-2}$	$1,64 \cdot 10^{-1}$	1,45	8,25	16,28
$\delta_{sim}$ , %	$3,32 \cdot 10^{-3}$	$3,3 \cdot 10^{-2}$	$3,2 \cdot 10^{-1}$	2,83	17,99	45,77

Для случая умеренного теплообмена ( $0,01 \leq Bi \leq 1$ ) построены графики зависимости рассматриваемых относительных погрешностей от параметра теплообмена  $Bi$  (рис. 3).

**Выводы.** Полученные результаты позволяют заключить, что относительная погрешность определения температуры по уравнениям, полученным с помощью операторного метода, с ростом параметра теплообмена  $Bi$  на порядок, также увеличивается на порядок и может достигнуть значительной величины при интенсивном теплообмене.

При одностороннем теплообмене данная погрешность больше на той лицевой поверхности, через которую происходит теплообмен.

При симметричном теплообмене рассматриваемая погрешность на лицевых поверхностях пластины в два раза выше, чем при одностороннем теплообмене.

Таким образом, использование обобщённой теории в задачах теплопроводности для пластинчатых элементов конструкций с дефектами является оправданным, поскольку точность расчёта температуры в этом случае существенно возрастает.

**РЕЗЮМЕ**

Задача теплопроводности для изотропных пластин із теплоізолюваним розрізом розв'язана з використанням узагальноної теорії, що ґрунтується на розвиненні температури в ряд Фур'є за поліномами Лежандра. Враховується конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем за законом Ньютона. Проведені розрахунки збуреного температурного поля в околі розрізу. Досліджено вплив теплообміну на величину похибки розрахунку температури, знайденої з рівнянь, одержаних операторним методом у припущенні лінійного розподілу температури за товщиною. Зроблені узагальнюючі висновки.

*Ключові слова:* ізотропна пластина, теплоізолюваний розріз, узагальнена теорія, поліноми Лежандра, перетворення Фур'є.

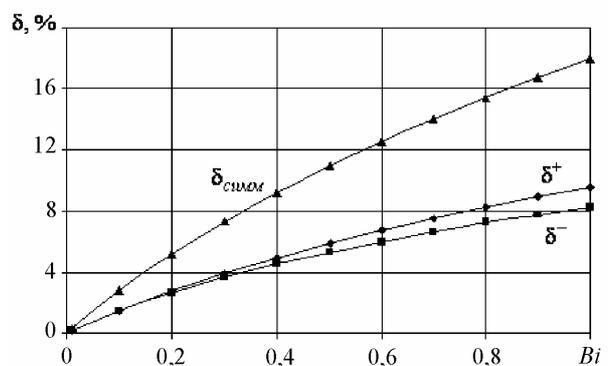


Рис. 3

**SUMMARY**

Heat conduction problem for isotropic plates with heat-insulated cut is solved using the generalized theory based on the expansion of a temperature in a Fourier series by Legendre polynomials. The convective heat exchange with the environment by Newton's law is taken into account. The calculations of the perturbed temperature field in the vicinity of the cut are carried out. The influence of heat exchange on the value of the error of calculating the temperature which found from the equations obtained by the operator method assuming a linear temperature distribution across the thickness is investigated. The general conclusions are made.

*Keywords:* isotropic plate, heat-insulated cut, generalized theory, Legendre polynomials, Fourier transform.

**СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ**

1. Пелех Б.Л. Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек / Б.Л. Пелех, М.А. Сухорольский. – К.: Наук. думка, 1980. – 216 с.
2. Немиш Ю.Н. Напряженно-деформированное состояние нетонких оболочек и пластин. Обобщенная теория (обзор) / Ю.Н. Немиш, И.Ю. Хома // Прикладная механика. – 1993. – Т. 29, № 11. – С. 3-34.
3. Волчков Ю.М. Решение контактных задач на основе уточненной теории пластин и оболочек / Ю.М. Волчков, Д.В. Важева // Прикладная механика и техническая физика. – 2008. – Т. 49, № 5. – С. 169-176.
4. Волчков Ю.М. Сведение трехмерной задачи теории упругости к двумерной на основе аппроксимации напряжений и смещений полиномами Лежандра / Ю.М. Волчков, Л.А. Дергилова // Прикладная механика и техническая физика. – 2007. – Т. 48, № 3. – С. 179-190.
5. Марчук М.В. Варіант геометрично нелінійної теорії пружних оболонок з урахуванням поперечних зсувів, стиснення та виконанням крайових умов на лицевих поверхнях / М.В. Марчук, Р.І. Тучапський // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2009. – Вип. 7. – С. 157-166.
6. Никабадзе М.У. Варианты математических теорий многослойных конструкций с несколькими базовыми поверхностями / М.У. Никабадзе. – М.: МГУ, 2008. – 127 с.
7. Никабадзе М.У. Применение систем полиномов Лежандра и Чебышева при моделировании упругих тонких тел с одним малым размером / М.У. Никабадзе. – М.: МГУ, 2008. – 287 с.
8. Кит Г.С. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами / Г.С. Кит, М.Г. Кривцун. – К.: Наук. думка, 1983. – 280 с.
9. Подстригач Я.С. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно. – К.: Наук. думка, 1972. – 308 с.
10. Bondarenko N.S. Solution of the heat conduction problem for anisotropic plates under concentrated thermal loading using legendre polynomials / N.S. Bondarenko, A.S. Gol'tsev // Journal of Mathematical Sciences. – 2011. – Vol. 174, No. 3. – P. 400-414.
11. Шевченко В.П. Задачи термоупругости тонких оболочек с разрезами / В.П. Шевченко, А.С. Гольцев. – К.: УМК ВО, 1988. – 84 с.
12. Хижняк В.К. Смешанные задачи теории пластин и оболочек/ В.К. Хижняк, В.П. Шевченко. – Донецк: ДонГУ, 1980. – 128 с.
13. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости / А.И. Каландия. – М.: Наука, 1973. – 304 с.

*Поступила в редакцию 07.10.2011 г.*