

К АНАЛИЗУ ДИНАМИКИ ВОЗМУЩЕНИЯ ФОРМЫ ГРАНИЦЫ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ СТУПЕНЧАТОГО ДИСКА

Предложен способ исследования методом малого параметра динамики возмущения формы границы и возможной потери несущей способности вращающегося ступенчатого кругового диска. Получено в первом приближении характеристическое уравнение относительно критического радиуса пластической зоны. Численно найдены значения критической угловой скорости вращения при различных параметрах диска.

Ключевые слова: упругопластическая задача, метод возмущения формы границы, вращающийся диск, потеря устойчивости, потеря несущей способности, критическая угловая скорость

Введение

Аналитический метод возмущения формы границы [1] является достаточно общим и успешно используется при решении многочисленных краевых задач из различных разделов механики сплошных сред и выявления характерных механических эффектов. Полученные решения могут быть приложены к различным задачам теории устойчивости [2, 3]. В работах [4-9] на основе предложенного в книге Д.Д. Ивлева и Л.В. Ершова [10] варианта приближенного метода малого параметра, имеющего прямую аналогию с методом возмущения формы границы, решена плоская упругопластическая задача [11, 12] для некоторых канонических областей с учетом объемных сил. При этом схема определения границы упругой и пластической областей распространена на вращающиеся ступенчатые диски и диски произвольного профиля [13, 14]. Указан способ учета геометрии дисков [15-17] и параметров их нагружения в условиях сопряжения на неизвестной границе для определения критической угловой скорости, при достижении которой наступает потеря устойчивости по самоуравновешенной или эксцентричной форме [18-21].

В настоящей работе излагается способ определения скорости вращения неустойчивого однородного и изотропного ступенчатого кругового диска, соответствующей указанному положению возмущенной упругопластической границы. Получено характеристическое уравнение с параметром относительно критического радиуса пластической области, достигшей внешнего края диска. Все результаты установлены при рассмотрении плоского напряженного состояния. Контурные нагрузки задаются так, как и в работах [9, 14, 18].

Постановка задачи

Изучим динамику возмущения формы границы вращающегося ступенчатого кольцевого диска после принятия им в плоскости вращения формы, отличной от круговой. При этом диск будем считать близким к круговому и уравнение внешней границы в его срединной плоскости, являющейся плоскостью симметрии диска, с точностью до бесконечно малых первого порядка представим в виде

$$r = b + d \cos n\theta, \quad n \geq 2, \quad d = \text{const},$$

или

$$\rho = 1 + \delta \cos n\theta, \tag{1}$$

где b — внешний радиус невозмущенного диска, $\rho = r/b$ — безразмерный текущий радиус, δ — малый параметр, $n \in \mathbb{N}$, θ — полярный угол (рис. 1). Внутренний радиус диска обозначим a , предел текучести материала σ_s , модуль упругости E , плотность γ , коэффициент Пуассона ν , постоянную угловую скорость вращения ω , текущий радиус пластической зоны невозмущенного диска r_0 . Предположим, что максимальная из толщин $2h_1, 2h_2, \dots, 2h_{n_0}$ кольцевых зон диска радиусов $r_1, r_2, \dots, r_{n_0} = b$ мала по сравнению с остальными его размерами. На основе этого предположения наличие сосредоточенных на внутреннем и внешнем контурах диска нагрузок будем считать результатом определенных усилий $p_i = p_{i0} + \tilde{p}_i$ и $p_e = p_{e0} + \tilde{p}_e$, действующих на диск в его срединной плоскости.

Требуется для описываемой зависимостью (1) формы границы диска получить в первом приближении характеристическое уравнение для критического радиуса пластической зоны r_0^* и определить

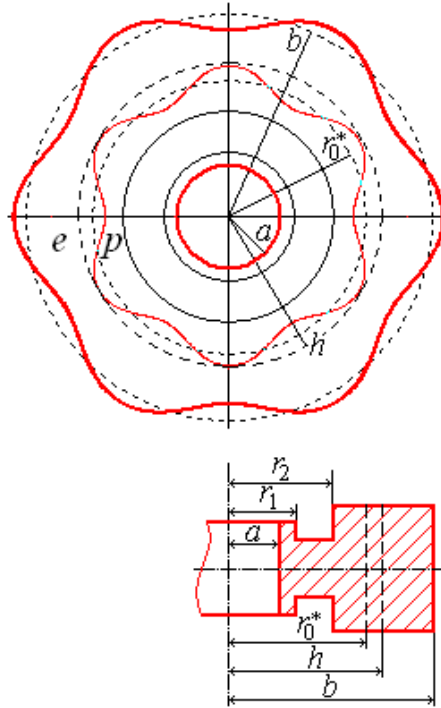


Рис. 1: Возмущенная упругопластическая граница $r = r_0^*$ неустойчивого ступенчатого диска достигает окружности $r = h$.

соответствующую величину критической угловой скорости вращения ω^* . Для этого надлежит установить аналитически условие касания возмущенной упругопластической границы и окружности данного радиуса, решив предварительно систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} + \frac{d\sigma_{rr}^0}{dr}u &= 0, & \sigma_{r\theta} - \frac{\sigma_{\theta\theta}^0 - \sigma_{rr}^0}{b} \frac{du}{d\theta} &= 0, & r &= b, \\ \sigma_{rr} &= 0, & \sigma_{r\theta} &= 0, & \sigma_{\theta\theta} + \frac{d\sigma_{\theta\theta}^0}{dr}u &= 0, & r &= r_0, \end{aligned}$$

относительно $u(r_0)$ и произвольных постоянных, входящих в выражения для компонент напряжений и перемещений σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{\theta\theta}$, u , определяющих напряженно-деформированное состояние неподвижной упругой ступенчатой круговой кольцевой пластины (возмущенное состояние упругой области вращающегося диска), нагруженной в своей срединной плоскости системой самоуравновешенных контурных нагрузок

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \bar{a} \cos n\theta, & \sigma_{r\theta} &= \bar{b} \sin n\theta, & r &= b, \\ \sigma_{rr} &= \underline{a} \cos n\theta, & \sigma_{r\theta} &= \underline{b} \sin n\theta, & r &= r_0. \end{aligned}$$

Указанным граничным и контурным условиям должны удовлетворять решения уравнений равновесия плоской задачи

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} = 0$$

и уравнений связи между напряжениями и перемещениями

$$\begin{aligned} E \frac{\partial u}{\partial r} &= \sigma_{rr} - \nu \sigma_{\theta\theta}, & E \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right) &= \sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr}, \\ \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) &= \sigma_{r\theta}. \end{aligned}$$

Проверка условий возможна после определения из уравнения квазистатического равновесия

$$\frac{r}{y} \frac{d}{dr} (\sigma_{rr} y) + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} + \gamma \omega^2 r^2 = 0$$

и уравнений связи

$$E \frac{du}{dr} = \sigma_{rr} - \nu \sigma_{\theta\theta}, \quad E \frac{u}{r} = \sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr}$$

в упругой зоне и условия текучести

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_s$$

в пластической зоне невозмущенного напряженного состояния (обозначено верхним индексом 0) вращающегося диска произвольного (ступенчатого) профиля $y(r)$.

Вспомогательный результат

Невозмущенное плоское напряженное состояние ступенчатого кругового кольцевого диска (все напряжения отнесены к σ_s ; верхний индекс p указывает на пластическую зону, e — на упругую) определяется следующим образом [5, 15, 18]:

$$\sigma_{rr}^{0p} = \begin{cases} 1 - \frac{\sigma}{3\sigma_s}\rho^2 + \frac{C_1}{\rho}, & \rho \in [\beta, \rho_1), \\ 1 - \frac{\sigma}{3\sigma_s}\rho^2 + \frac{C_2}{\rho}, & \rho \in (\rho_1, \rho_2), \\ \dots \\ 1 - \frac{\sigma}{3\sigma_s}\rho^2 + \frac{C_j}{\rho}, & \rho \in (\rho_{j-1}, \beta_0), \end{cases} \quad (2)$$

$$\sigma_{rr}^{0e} = \begin{cases} \tilde{C}_{1,j} + \tilde{C}_{2,j}\rho^{-2} - \tilde{\alpha}\rho^2, & \rho \in (\beta_0, \rho_j), \\ \tilde{C}_{1,j+1} + \tilde{C}_{2,j+1}\rho^{-2} - \tilde{\alpha}\rho^2, & \rho \in (\rho_j, \rho_{j+1}), \\ \dots \\ \tilde{C}_{1,n_0} + \tilde{C}_{2,n_0}\rho^{-2} - \tilde{\alpha}\rho^2, & \rho \in (\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0}], \end{cases} \quad (3)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{0e} = \begin{cases} \tilde{C}_{1,j} - \tilde{C}_{2,j}\rho^{-2} - \tilde{\beta}\rho^2, & \rho \in (\beta_0, \rho_j), \\ \tilde{C}_{1,j+1} - \tilde{C}_{2,j+1}\rho^{-2} - \tilde{\beta}\rho^2, & \rho \in (\rho_j, \rho_{j+1}), \\ \dots \\ \tilde{C}_{1,n_0} - \tilde{C}_{2,n_0}\rho^{-2} - \tilde{\beta}\rho^2, & \rho \in (\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0}], \end{cases} \quad (4)$$

где $\beta = a/b$, $\beta_0 = r_0/b$, $\rho_1 = r_1/b, \dots, \rho_{n_0} = r_{n_0}/b$, $\tilde{\alpha} = \sigma(\nu+3)/(8\sigma_s)$, $\tilde{\beta} = \sigma(3\nu+1)/(8\sigma_s)$, а константы C_1, \dots, C_j и $\tilde{C}_{1,j}, \tilde{C}_{2,j}, \dots, \tilde{C}_{1,n_0}, \tilde{C}_{2,n_0}$ определяются как решения систем уравнений

$$\begin{aligned} -\frac{p_i}{\sigma_s} &= 1 - \frac{\sigma}{3\sigma_s}\beta^2 + \frac{C_1}{\beta}, \\ h_1 \left(1 - \frac{\sigma}{3\sigma_s}\rho_1^2 + \frac{C_1}{\rho_1}\right) &= h_2 \left(1 - \frac{\sigma}{3\sigma_s}\rho_1^2 + \frac{C_2}{\rho_1}\right), \\ &\dots \\ h_{j-1} \left(1 - \frac{\sigma}{3\sigma_s}\rho_{j-1}^2 + \frac{C_{j-1}}{\rho_{j-1}}\right) &= h_j \left(1 - \frac{\sigma}{3\sigma_s}\rho_{j-1}^2 + \frac{C_j}{\rho_{j-1}}\right) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{1,j} + \tilde{C}_{2,j}x_j &= s_j^-, & \tilde{C}_{1,j} - \tilde{C}_{2,j}x_j &= t_j^-, \\ \tilde{C}_{1,j+1} + \tilde{C}_{2,j+1}x_{j+1} &= s_{j+1}^-, & \tilde{C}_{1,j+1} - \tilde{C}_{2,j+1}x_{j+1} &= t_{j+1}^-, \\ &\dots \\ \tilde{C}_{1,n_0} + \tilde{C}_{2,n_0} &= s_{n_0}, & \tilde{C}_{1,n_0} - \tilde{C}_{2,n_0} &= t_{n_0} \end{aligned}$$

соответственно. Здесь $x_j = 1/\rho_j^2, \dots, x_{n_0-1} = 1/\rho_{n_0-1}^2$,

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{\sigma_s} &= \frac{\omega^2}{q^2} = \frac{8}{\nu+3} \frac{\frac{p_e}{\sigma_s} - (RA_{n_0} - R^*B_{n_0})\frac{p_i}{\sigma_s} - (SA_{n_0} - S^*B_{n_0})}{QA_{n_0} - Q^*B_{n_0} + D_{n_0} - 1}, & q &= \frac{1}{b} \sqrt{\frac{\sigma_s}{\gamma}}, \\ Q &= d_0 \frac{(3\nu+1)\beta_0^2 + 24\delta_2\beta_0^{-1}}{3(\nu+3)} - f_0 \frac{(3\nu+1)\beta_0^2}{\nu+3}, & R &= d_0\delta_1\beta_0^{-1}, & S &= d_0\delta_3\beta_0^{-1} + 1, \\ Q^* &= -f_0 \frac{(3\nu+1)\beta_0^2 + 24\delta_2\beta_0^{-1}}{3(\nu+3)} + d_0 \frac{(3\nu+1)\beta_0^2}{\nu+3}, & R^* &= -f_0\delta_1\beta_0^{-1}, & S^* &= -f_0\delta_3\beta_0^{-1} + 1, \end{aligned}$$

$d_0 = \frac{x_0+x_j}{2x_0}$, $f_0 = \frac{x_j-x_0}{2x_0}$, $x_0 = \frac{1}{\beta_0^2}$, $\delta_1 = -\frac{h_1}{h_j}\beta$, $\delta_2 = -\frac{1}{3h_j} \sum_{k=1}^j (h_{k-1} - h_k)\rho_{k-1}^3$, $\delta_3 = \frac{1}{h_j} \sum_{k=1}^j (h_{k-1} - h_k)\rho_{k-1}$, $h_0 = 0$, $\rho_0 = \beta$, тогда как $s_j^-, t_j^-, \dots, s_{n_0-1}^-, t_{n_0-1}^-$, s_{n_0}, t_{n_0} и $A_{n_0}, B_{n_0}, D_{n_0}$ определяются из рекур-

рентных соотношений

$$\begin{aligned}
 s_j^- &= Q\tilde{\alpha} + R\frac{p_i}{\sigma_s} + S, & t_j^- &= Q^*\tilde{\alpha} + R^*\frac{p_i}{\sigma_s} + S^*, \\
 s_{j+1}^- &= A_{j+1}s_j^- - B_{j+1}t_j^- + C_{j+1}, & t_{j+1}^- &= A_{j+1}^*s_j^- - B_{j+1}^*t_j^- + C_{j+1}^*, \\
 s_{j+2}^- &= A_{j+2}s_j^- - B_{j+2}t_j^- + C_{j+2}, & t_{j+2}^- &= A_{j+2}^*s_j^- - B_{j+2}^*t_j^- + C_{j+2}^*, \\
 & \dots & & \\
 s_{n_0} &= A_{n_0}s_j^- - B_{n_0}t_j^- + C_{n_0}, & t_{n_0} &= A_{n_0}^*s_j^- - B_{n_0}^*t_j^- + C_{n_0}^*,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 A_{j+1} &= d_j a_j + \nu f_j c_j, & B_{j+1} &= f_j, & C_{j+1} &= d_j b_j - \nu f_j b_j, \\
 A_{j+1}^* &= -f_j a_j - \nu d_j c_j, & B_{j+1}^* &= -d_j, & C_{j+1}^* &= -f_j b_j + \nu d_j b_j, \\
 A_{j+2} &= d_{j+1} a_{j+1} A_{j+1} - f_{j+1}(-\nu c_{j+1} A_{j+1} + A_{j+1}^*), \\
 B_{j+2} &= d_{j+1} a_{j+1} B_{j+1} - f_{j+1}(-\nu c_{j+1} B_{j+1} + B_{j+1}^*), \\
 C_{j+2} &= d_{j+1}(a_{j+1} C_{j+1} + b_{j+1}) - f_{j+1}(-\nu c_{j+1} C_{j+1} + C_{j+1}^* + \nu b_{j+1}), \\
 A_{j+2}^* &= -f_{j+1} a_{j+1} A_{j+1} + d_{j+1}(-\nu c_{j+1} A_{j+1} + A_{j+1}^*), \\
 B_{j+2}^* &= -f_{j+1} a_{j+1} B_{j+1} + d_{j+1}(-\nu c_{j+1} B_{j+1} + B_{j+1}^*), \\
 C_{j+2}^* &= -f_{j+1}(a_{j+1} C_{j+1} + b_{j+1}) + d_{j+1}(-\nu c_{j+1} C_{j+1} + C_{j+1}^* + \nu b_{j+1}), \\
 & \dots & & & & \\
 A_{n_0} &= d_{n_0-1} a_{n_0-1} A_{n_0-1} - f_{n_0-1}(-\nu c_{n_0-1} A_{n_0-1} + A_{n_0-1}^*), \\
 B_{n_0} &= d_{n_0-1} a_{n_0-1} B_{n_0-1} - f_{n_0-1}(-\nu c_{n_0-1} B_{n_0-1} + B_{n_0-1}^*), \\
 C_{n_0} &= d_{n_0-1}(a_{n_0-1} C_{n_0-1} + b_{n_0-1}) - f_{n_0-1}(-\nu c_{n_0-1} C_{n_0-1} + C_{n_0-1}^* + \nu b_{n_0-1}), \\
 A_{n_0}^* &= -f_{n_0-1} a_{n_0-1} A_{n_0-1} + d_{n_0-1}(-\nu c_{n_0-1} A_{n_0-1} + A_{n_0-1}^*), \\
 B_{n_0}^* &= -f_{n_0-1} a_{n_0-1} B_{n_0-1} + d_{n_0-1}(-\nu c_{n_0-1} B_{n_0-1} + B_{n_0-1}^*), \\
 C_{n_0}^* &= -f_{n_0-1}(a_{n_0-1} C_{n_0-1} + b_{n_0-1}) + d_{n_0-1}(-\nu c_{n_0-1} C_{n_0-1} + C_{n_0-1}^* + \nu b_{n_0-1}), \\
 C_k &= \tilde{\alpha} D_k, & k &= j+1, \dots, n_0, \\
 D_{j+1} &= g_j(d_j - \nu f_j), \\
 D_{j^*} &= d_{j^*-1}(a_{j^*-1} D_{j^*-1} + g_{j^*-1}) - f_{j^*-1}(-\nu c_{j^*-1} D_{j^*-1} + D_{j^*-1}^* + \nu g_{j^*-1}), \\
 j^* &= j+2, \dots, n_0, \\
 a_k &= \frac{h_k}{h_{k+1}}, & b_k &= \frac{h_{k+1}-h_k}{h_{k+1}} \frac{\tilde{\alpha}}{x_k}, & c_k &= \frac{h_{k+1}-h_k}{h_{k+1}}, \\
 d_k &= \frac{x_k+x_{k+1}}{2x_k}, & f_k &= \frac{x_{k+1}-x_k}{2x_k}, & g_k &= \frac{h_{k+1}-h_k}{h_{k+1}} \frac{1}{x_k}, & k &= j, \dots, n_0-1.
 \end{aligned}$$

Зависимости (2-4) с учетом соотношения $\sigma_{\theta\theta}^{0p} = 1$ задают нулевое приближение к решению задачи о пластическом равновесии. При этом

$$\begin{aligned}
 A_1 = \frac{d\sigma_{rr}^{0e}(1)}{d\rho} &= (A_{n_0}^* Q - B_{n_0}^* Q^* - 3) \tilde{\alpha} + (A_{n_0}^* R - B_{n_0}^* R^*) \frac{p_i}{\sigma_s} - \frac{p_e}{\sigma_s} + \\
 &+ A_{n_0}^* S - B_{n_0}^* S^* + C_{n_0}^*,
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$A_2 = \sigma_{\theta\theta}^{0e}(1) - \sigma_{\rho\rho}^{0e}(1) = A_1 + 3\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}, \tag{6}$$

где в случае $\varkappa_i \neq 0$

$$\begin{aligned}
 \frac{p_i}{\sigma_s} = \xi(\beta_0) &= \frac{\varepsilon_i \tau + \frac{8\varkappa_i(\beta^{-1}-\beta^2)}{\nu+3} (\varepsilon_e - \mu \varepsilon_i - [SA_{n_0} - S^* B_{n_0}])}{\tau - \frac{8\varkappa_i(\beta^{-1}-\beta^2)}{\nu+3} (\mu - [RA_{n_0} - R^* B_{n_0}])}, \\
 0 \leq \varepsilon_i < 1, & \quad 0 \leq \varepsilon_e < 1, \quad \mu = \frac{\varkappa_e \bar{\gamma}}{\varkappa_i \gamma} \frac{\varphi^3 - 1}{\beta^{-1} - \beta^2}, \quad \varkappa_e \geq 0, \quad \bar{\gamma} > 0, \quad \varphi > 1, \\
 \tau &= QA_{n_0} - Q^* B_{n_0} + D_{n_0} - 1, \\
 \frac{p_e}{\sigma_s} &= \varepsilon_e + \mu \left(\frac{p_i}{\sigma_s} - \varepsilon_i \right),
 \end{aligned}$$

а в случае $\varkappa_e \neq 0$ —

$$\frac{p_e}{\sigma_s} = \eta(\beta_0) = \frac{\varepsilon_e \tau - \frac{8\varkappa_e(\varphi^3-1)}{\nu+3} \frac{\pi}{\gamma} [(\varepsilon_i - \mu^{-1} \varepsilon_e)(RA_{n_0} - R^* B_{n_0}) + (SA_{n_0} - S^* B_{n_0})]}{\tau - \frac{8\varkappa_e(\varphi^3-1)}{\nu+3} \frac{\pi}{\gamma} [1 - \mu^{-1}(RA_{n_0} - R^* B_{n_0})]},$$

$$\frac{p_i}{\sigma_s} = \varepsilon_i + \mu^{-1} \left(\frac{p_e}{\sigma_s} - \varepsilon_e \right).$$

Опираясь на (4), дополнительно находим

$$A_3 = \frac{d\sigma_{\theta\theta}^{0e}(\beta_0)}{d\rho} = x_j^{-1} \beta_0^{-3} \left((Q - Q^*) \tilde{\alpha} + (R - R^*) \frac{p_i}{\sigma_s} + (S - S^*) \right) - 2\tilde{\beta} \beta_0. \quad (7)$$

Кроме невозмущенного состояния вращающегося диска для дальнейшего необходимо знать возмущенное состояние его внешней упругой области. Отнесенные к σ_s возмущения первого порядка малости $\sigma'_{\rho\rho}$, $\sigma'_{\theta\theta}$, $\sigma'_{\rho\theta}$ соответствующих компонент напряжения и отнесенные к b возмущения радиального u'^e и тангенциального v'^e смещений в первом приближении определяются в крайней n_0 -ой кольцевой секции $\rho_{n_0-1} < \rho \leq 1$ из зависимостей [18, 22, 23]

$$\begin{aligned} \sigma'_{rr} &= [a_I(\rho_{n_0-1}, \rho) a_{n_0} + a_{II}(\rho_{n_0-1}, \rho) a_{n_0-1} + a_{III}(\rho_{n_0-1}, \rho) b_{n_0} + \\ &\quad + a_{IV}(\rho_{n_0-1}, \rho) b_{n_0-1}] \cos n\theta, \\ \sigma'_{\theta\theta} &= [b_I(\rho_{n_0-1}, \rho) a_{n_0} + b_{II}(\rho_{n_0-1}, \rho) a_{n_0-1} + b_{III}(\rho_{n_0-1}, \rho) b_{n_0} + \\ &\quad + b_{IV}(\rho_{n_0-1}, \rho) b_{n_0-1}] \cos n\theta, \\ \sigma'_{r\theta} &= [c_I(\rho_{n_0-1}, \rho) a_{n_0} + c_{II}(\rho_{n_0-1}, \rho) a_{n_0-1} + c_{III}(\rho_{n_0-1}, \rho) b_{n_0} + \\ &\quad + c_{IV}(\rho_{n_0-1}, \rho) b_{n_0-1}] \sin n\theta, \\ u'^e &= \frac{\sigma_s}{E} [d_I(\rho_{n_0-1}, \rho) a_{n_0} + d_{II}(\rho_{n_0-1}, \rho) a_{n_0-1} + d_{III}(\rho_{n_0-1}, \rho) b_{n_0} + \\ &\quad + d_{IV}(\rho_{n_0-1}, \rho) b_{n_0-1}] \cos n\theta, \\ v'^e &= \frac{\sigma_s}{E} [e_I(\rho_{n_0-1}, \rho) a_{n_0} + e_{II}(\rho_{n_0-1}, \rho) a_{n_0-1} + e_{III}(\rho_{n_0-1}, \rho) b_{n_0} + \\ &\quad + e_{IV}(\rho_{n_0-1}, \rho) b_{n_0-1}] \sin n\theta, \end{aligned} \quad (8)$$

где $a_I(\cdot), \dots, e_{IV}(\cdot)$ — известные рациональные функции двух переменных, а $a_{n_0}, a_{n_0-1}, b_{n_0}$ и b_{n_0-1} — неопределенные коэффициенты. Соотношения (8) для $(n_0 - 1)$ -ой кольцевой секции $\rho_{n_0-2} < \rho < \rho_{n_0-1}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma'_{rr} &= \left[a_I \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}} \right) \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} a_{n_0-1} + a_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}} \right) a_{n_0-2} + \right. \\ &\quad \left. + a_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}} \right) \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} b_{n_0-1} + a_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}} \right) b_{n_0-2} \right] \cos n\theta, \\ \sigma'_{\theta\theta} &= \left[b_I \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}} \right) \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} a_{n_0-1} + b_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}} \right) a_{n_0-2} + \right. \\ &\quad \left. + b_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}} \right) \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} b_{n_0-1} + b_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}} \right) b_{n_0-2} \right] \cos n\theta, \\ \sigma'_{r\theta} &= \left[c_I \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}} \right) \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} a_{n_0-1} + c_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}} \right) a_{n_0-2} + \right. \\ &\quad \left. + c_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}} \right) \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} b_{n_0-1} + c_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}} \right) b_{n_0-2} \right] \sin n\theta, \\ u'^e &= \rho_{n_0-1} \frac{\sigma_s}{E} \left[d_I \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}} \right) \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} a_{n_0-1} + d_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}} \right) a_{n_0-2} + \right. \\ &\quad \left. + d_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}} \right) \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} b_{n_0-1} + d_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}} \right) b_{n_0-2} \right] \cos n\theta, \\ v'^e &= \rho_{n_0-1} \frac{\sigma_s}{E} \left[e_I \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}} \right) \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} a_{n_0-1} + e_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}} \right) a_{n_0-2} + \right. \\ &\quad \left. + e_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}} \right) \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} b_{n_0-1} + e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}} \right) b_{n_0-2} \right] \sin n\theta, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} a_{n_0-2} &= q_{1,n_0-2} a_{n_0} + q_{2,n_0-2} a_{n_0-1} + q_{3,n_0-2} b_{n_0} + q_{4,n_0-2} b_{n_0-1}, \\ b_{n_0-2} &= q_{5,n_0-2} a_{n_0} + q_{6,n_0-2} a_{n_0-1} + q_{7,n_0-2} b_{n_0} + q_{8,n_0-2} b_{n_0-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_{1,n_0-2} &= \frac{\rho_{n_0-1}}{\Delta_{n_0-2}} \left[d_I(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1}) e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) - e_I(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1}) d_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) \right], \\
 q_{2,n_0-2} &= \frac{\rho_{n_0-1}}{\Delta_{n_0-2}} \left[\left\{ d_{II}(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1}) - d_I \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) \rho_{n_0-1} \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} \right\} e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \left\{ e_{II}(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1}) - e_I \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) \rho_{n_0-1} \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} \right\} d_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) \right], \\
 q_{3,n_0-2} &= \frac{\rho_{n_0-1}}{\Delta_{n_0-2}} \left[d_{III}(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1}) e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) - e_{III}(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1}) d_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) \right], \\
 q_{4,n_0-2} &= \frac{\rho_{n_0-1}}{\Delta_{n_0-2}} \left[\left\{ d_{IV}(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1}) - d_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) \rho_{n_0-1} \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} \right\} e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \left\{ e_{IV}(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1}) - e_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) \rho_{n_0-1} \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} \right\} d_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) \right], \\
 q_{5,n_0-2} &= \frac{\rho_{n_0-1}}{\Delta_{n_0-2}} \left[e_I(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1}) d_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) - d_I(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1}) e_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) \right], \\
 q_{6,n_0-2} &= \frac{\rho_{n_0-1}}{\Delta_{n_0-2}} \left[\left\{ e_{II}(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1}) - e_I \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) \rho_{n_0-1} \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} \right\} d_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \left\{ d_{II}(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1}) - d_I \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) \rho_{n_0-1} \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} \right\} e_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) \right], \\
 q_{7,n_0-2} &= \frac{\rho_{n_0-1}}{\Delta_{n_0-2}} \left[e_{III}(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1}) d_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) - d_{III}(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1}) e_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) \right], \\
 q_{8,n_0-2} &= \frac{\rho_{n_0-1}}{\Delta_{n_0-2}} \left[\left\{ e_{IV}(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1}) - e_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) \rho_{n_0-1} \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} \right\} d_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \left\{ d_{IV}(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1}) - d_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) \rho_{n_0-1} \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} \right\} e_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) \right], \\
 \Delta_{n_0-2} &= \rho_{n_0-1}^2 \left[d_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) - d_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) e_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) \right].
 \end{aligned}$$

Аналоги (8) и (9) для всех остальных упругих кольцевых секций $\rho_{n_0-k} < \rho < \rho_{n_0-(k-1)}$, $k \in \{3, \dots, n_0 - (j-1)\}$ (при $k = n_0 - (j-1)$ полагаем $\rho_{n_0-k} := \beta_0$), записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr}^e &= \left[a_I \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) \frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}} a_{n_0-(k-1)} + \right. \\
 &+ a_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) a_{n_0-k} + a_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) \frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}} b_{n_0-(k-1)} + \\
 &\quad \left. + a_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) b_{n_0-k} \right] \cos n\theta, \\
 \sigma_{\theta\theta}^e &= \left[b_I \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) \frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}} a_{n_0-(k-1)} + \right. \\
 &+ b_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) a_{n_0-k} + b_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) \frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}} b_{n_0-(k-1)} + \\
 &\quad \left. + b_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) b_{n_0-k} \right] \cos n\theta, \\
 \sigma_{r\theta}^e &= \left[c_I \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) \frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}} a_{n_0-(k-1)} + \right. \\
 &+ c_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) a_{n_0-k} + c_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) \frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}} b_{n_0-(k-1)} + \\
 &\quad \left. + c_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) b_{n_0-k} \right] \sin n\theta, \tag{10} \\
 u^e &= \rho_{n_0-(k-1)} \frac{\sigma_s}{E} \left[d_I \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) \frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}} a_{n_0-(k-1)} + \right. \\
 &+ d_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) a_{n_0-k} + d_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) \frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}} b_{n_0-(k-1)} + \\
 &\quad \left. + d_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) b_{n_0-k} \right] \cos n\theta, \\
 v^e &= \rho_{n_0-(k-1)} \frac{\sigma_s}{E} \left[e_I \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) \frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}} a_{n_0-(k-1)} + \right. \\
 &+ e_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) a_{n_0-k} + e_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) \frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}} b_{n_0-(k-1)} + \\
 &\quad \left. + e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) b_{n_0-k} \right] \sin n\theta,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 a_{n_0-k} &= q_{1,n_0-k}a_{n_0} + q_{2,n_0-k}a_{n_0-1} + q_{3,n_0-k}b_{n_0} + q_{4,n_0-k}b_{n_0-1}, \\
 b_{n_0-k} &= q_{5,n_0-k}a_{n_0} + q_{6,n_0-k}a_{n_0-1} + q_{7,n_0-k}b_{n_0} + q_{8,n_0-k}b_{n_0-1}, \\
 q_{1,n_0-k} &= \gamma_{2,n_0-k}q_{1,n_0-(k-1)} + \gamma_{4,n_0-k}q_{5,n_0-(k-1)}, \\
 q_{2,n_0-k} &= \gamma_{1,n_0-k} + \gamma_{2,n_0-k}q_{2,n_0-(k-1)} + \gamma_{4,n_0-k}q_{6,n_0-(k-1)}, \\
 q_{3,n_0-k} &= \gamma_{2,n_0-k}q_{3,n_0-(k-1)} + \gamma_{4,n_0-k}q_{7,n_0-(k-1)}, \\
 q_{4,n_0-k} &= \gamma_{3,n_0-k} + \gamma_{2,n_0-k}q_{4,n_0-(k-1)} + \gamma_{4,n_0-k}q_{8,n_0-(k-1)}, \\
 q_{5,n_0-k} &= \gamma_{6,n_0-k}q_{1,n_0-(k-1)} + \gamma_{8,n_0-k}q_{5,n_0-(k-1)}, \\
 q_{6,n_0-k} &= \gamma_{5,n_0-k} + \gamma_{6,n_0-k}q_{2,n_0-(k-1)} + \gamma_{8,n_0-k}q_{6,n_0-(k-1)}, \\
 q_{7,n_0-k} &= \gamma_{6,n_0-k}q_{3,n_0-(k-1)} + \gamma_{8,n_0-k}q_{7,n_0-(k-1)}, \\
 q_{8,n_0-k} &= \gamma_{7,n_0-k} + \gamma_{6,n_0-k}q_{4,n_0-(k-1)} + \gamma_{8,n_0-k}q_{8,n_0-(k-1)}, \\
 \gamma_{1,n_0-k} &= \frac{\rho_{n_0-(k-2)}\rho_{n_0-(k-1)}}{\Delta_{n_0-k}} \left[d_I \left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}, \frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}} \right) e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) \frac{h_{n_0-(k-3)}}{h_{n_0-(k-2)}} - \right. \\
 &\quad \left. - e_I \left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}, \frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}} \right) d_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) \frac{h_{n_0-(k-3)}}{h_{n_0-(k-2)}} \right], \\
 \gamma_{2,n_0-k} &= \frac{\rho_{n_0-(k-1)}^2}{\Delta_{n_0-k}} \left[\left\{ d_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}, \frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}} \right) \frac{\rho_{n_0-(k-2)}}{\rho_{n_0-(k-1)}} - d_I \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) \right\} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}} \right\} e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) - \left\{ e_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}, \frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}} \right) \frac{\rho_{n_0-(k-2)}}{\rho_{n_0-(k-1)}} - \right. \\
 &\quad \left. - e_I \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) \frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}} \right\} d_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) \right], \\
 \gamma_{3,n_0-k} &= \frac{\rho_{n_0-(k-2)}\rho_{n_0-(k-1)}}{\Delta_{n_0-k}} \left[d_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}, \frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}} \right) e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) \frac{h_{n_0-(k-3)}}{h_{n_0-(k-2)}} - \right. \\
 &\quad \left. - e_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}, \frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}} \right) d_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) \frac{h_{n_0-(k-3)}}{h_{n_0-(k-2)}} \right], \\
 \gamma_{4,n_0-k} &= \frac{\rho_{n_0-(k-1)}^2}{\Delta_{n_0-k}} \left[\left\{ d_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}, \frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}} \right) \frac{\rho_{n_0-(k-2)}}{\rho_{n_0-(k-1)}} - d_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) \right\} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}} \right\} e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) - \left\{ e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}, \frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}} \right) \frac{\rho_{n_0-(k-2)}}{\rho_{n_0-(k-1)}} - \right. \\
 &\quad \left. - e_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) \frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}} \right\} d_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) \right], \\
 \gamma_{5,n_0-k} &= \frac{\rho_{n_0-(k-2)}\rho_{n_0-(k-1)}}{\Delta_{n_0-k}} \left[e_I \left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}, \frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}} \right) d_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) \frac{h_{n_0-(k-3)}}{h_{n_0-(k-2)}} - \right. \\
 &\quad \left. - d_I \left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}, \frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}} \right) e_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) \frac{h_{n_0-(k-3)}}{h_{n_0-(k-2)}} \right], \\
 \gamma_{6,n_0-k} &= \frac{\rho_{n_0-(k-1)}^2}{\Delta_{n_0-k}} \left[\left\{ e_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}, \frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}} \right) \frac{\rho_{n_0-(k-2)}}{\rho_{n_0-(k-1)}} - e_I \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) \right\} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}} \right\} d_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) - \left\{ d_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}, \frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}} \right) \frac{\rho_{n_0-(k-2)}}{\rho_{n_0-(k-1)}} - \right. \\
 &\quad \left. - d_I \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) \frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}} \right\} e_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) \right], \\
 \gamma_{7,n_0-k} &= \frac{\rho_{n_0-(k-2)}\rho_{n_0-(k-1)}}{\Delta_{n_0-k}} \left[e_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}, \frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}} \right) d_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) \frac{h_{n_0-(k-3)}}{h_{n_0-(k-2)}} - \right. \\
 &\quad \left. - d_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}, \frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}} \right) e_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) \frac{h_{n_0-(k-3)}}{h_{n_0-(k-2)}} \right], \\
 \gamma_{8,n_0-k} &= \frac{\rho_{n_0-(k-1)}^2}{\Delta_{n_0-k}} \left[\left\{ e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}, \frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}} \right) \frac{\rho_{n_0-(k-2)}}{\rho_{n_0-(k-1)}} - e_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) \right\} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}} \right\} d_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) - \left\{ d_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}, \frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}} \right) \frac{\rho_{n_0-(k-2)}}{\rho_{n_0-(k-1)}} - \right. \\
 &\quad \left. - d_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) \frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}} \right\} e_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) \right], \\
 \Delta_{n_0-k} &= \rho_{n_0-(k-1)}^2 \left[d_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) - \right. \\
 &\quad \left. - d_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) e_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) \right].
 \end{aligned}$$

Основной результат

Удовлетворение функциями (8)–(10) граничным условиям

$$\sigma_{rr}^{\prime e} + A_1 u^{\prime e} = 0, \quad \sigma_{r\theta}^{\prime e} - A_2 \frac{du^{\prime e}}{d\theta} = 0, \quad \rho = 1,$$

и условиям сопряжения

$$\sigma_{rr}^{\prime e} = 0, \quad \sigma_{r\theta}^{\prime e} = 0, \quad \sigma_{\theta\theta}^{\prime e} + A_3 u^{\prime e} = 0, \quad \rho = \beta_0,$$

приводит к системе линейных уравнений относительно a_{n_0} , a_{n_0-1} , b_{n_0} , b_{n_0-1} и $u^{\prime e}(\beta_0)$:

$$\begin{aligned} a_{n_0} + A_1 &= 0, & b_{n_0} + nA_2 &= 0, \\ q_{1,j-1}a_{n_0} + q_{2,j-1}a_{n_0-1} + q_{3,j-1}b_{n_0} + q_{4,j-1}b_{n_0-1} &= 0, \\ q_{5,j-1}a_{n_0} + q_{6,j-1}a_{n_0-1} + q_{7,j-1}b_{n_0} + q_{8,j-1}b_{n_0-1} &= 0, \\ (w_1a_{n_0} + w_2a_{n_0-1} + w_3b_{n_0} + w_4b_{n_0-1}) \cos n\theta + A_3 u^{\prime e}(\beta_0) &= 0, \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned} w_1 &= b_I(\zeta, \zeta)zq_{1,j} + b_{II}(\zeta, \zeta)q_{1,j-1} + b_{III}(\zeta, \zeta)zq_{5,j} + b_{IV}(\zeta, \zeta)q_{5,j-1}, \\ w_2 &= b_I(\zeta, \zeta)zq_{2,j} + b_{II}(\zeta, \zeta)q_{2,j-1} + b_{III}(\zeta, \zeta)zq_{6,j} + b_{IV}(\zeta, \zeta)q_{6,j-1}, \\ w_3 &= b_I(\zeta, \zeta)zq_{3,j} + b_{II}(\zeta, \zeta)q_{3,j-1} + b_{III}(\zeta, \zeta)zq_{7,j} + b_{IV}(\zeta, \zeta)q_{7,j-1}, \\ w_4 &= b_I(\zeta, \zeta)zq_{4,j} + b_{II}(\zeta, \zeta)q_{4,j-1} + b_{III}(\zeta, \zeta)zq_{8,j} + b_{IV}(\zeta, \zeta)q_{8,j-1}, \\ \zeta &= \beta_0/\rho_j, \quad z = h_{j+1}/h_j. \end{aligned}$$

Решение системы (11) имеет вид

$$\begin{aligned} a_{n_0} &= -A_1, & a_{n_0-1} &= \frac{A_1(q_{1,j-1}q_{8,j-1} - q_{4,j-1}q_{5,j-1}) + nA_2(q_{3,j-1}q_{8,j-1} - q_{4,j-1}q_{7,j-1})}{q_{2,j-1}q_{8,j-1} - q_{4,j-1}q_{6,j-1}}, \\ b_{n_0} &= -nA_2, & b_{n_0-1} &= \frac{A_1(q_{2,j-1}q_{5,j-1} - q_{1,j-1}q_{6,j-1}) + nA_2(q_{2,j-1}q_{7,j-1} - q_{3,j-1}q_{6,j-1})}{q_{2,j-1}q_{8,j-1} - q_{4,j-1}q_{6,j-1}}, \\ u^{\prime e}(\beta_0) &= U(\beta_0) \cos n\theta, \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$U(\beta_0) = -(w_1a_{n_0} + w_2a_{n_0-1} + w_3b_{n_0} + w_4b_{n_0-1})A_3^{-1}.$$

Как следствие, характеристическое уравнение относительно радиуса пластической зоны, соответствующего моменту касания возмущенной упругопластической границы с указанной окружностью $\rho = h/b = \alpha$, приобретает вид

$$\alpha - \beta_0 - \delta |U(\beta_0)| = 0. \tag{13}$$

Соответствующее критическому значению радиуса пластической области $\beta_0 = \beta_0^*$, $\beta_0^* \in [\beta_{0*}, \alpha]$ (β_{0*} — критический радиус пластической зоны, при котором исследуемый диск теряет устойчивость), критическое значение угловой скорости ω^* получаем по известным из работ [14, 18] формулам в зависимости от того, какое из соотношений $\varkappa_i \neq 0$, $\varkappa_e \neq 0$ или $\varkappa_i = \varkappa_e = 0$ имеет место.

Замечание 1. Характеристическое уравнение (13) получено без учета особенностей динамики малых возмущений упругопластической границы, находящейся в непосредственной близости к очередной ступени диска (рис. 2). Возможность появления пластического состояния вдоль заданной окружности путем распространения возмущений упругопластической границы с "дальних" (внутренних) кольцевых секций в соседние секции с большими номерами исключается.

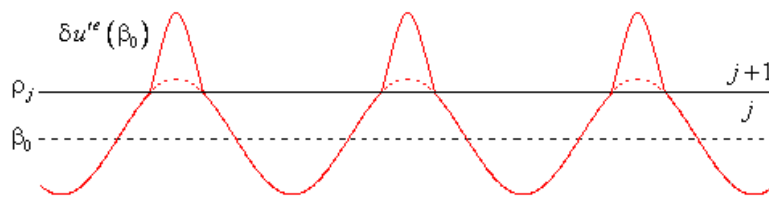


Рис. 2: К динамике возмущений упругопластической границы.

Замечание 2. Характеристическое уравнение с параметром относительно критического радиуса пластической области, достигшей внешнего края диска, имеет вид

$$1 - \beta_0 - \delta(1 - U(\beta_0)) = 0, \quad (14)$$

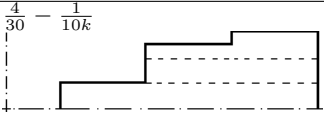

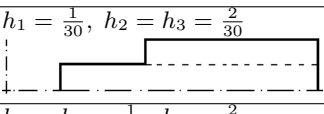
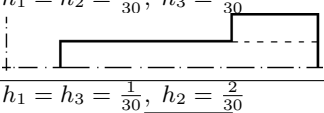
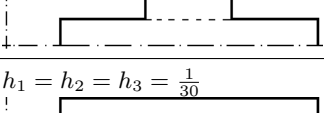
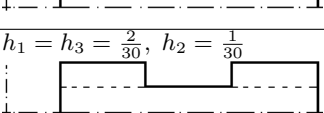
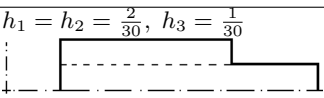

где с учетом замечания 1

$$U(\beta_0) = \frac{A_1 b_I(\beta_0, \beta_0) + n A_2 b_{III}(\beta_0, \beta_0)}{A_3} \leq 0 \quad \text{при } \delta \geq 0.$$

Замечание 3. Полагая в (2) $\beta = 0$ и $C_1 = 0$, а в (5)-(7) — $\varepsilon_i = 0$, $\varkappa_i = 0$ и $\mu^{-1} = 0$, получаем характеристические уравнения (13) и (14) для сплошного кругового ступенчатого диска.

Числовые примеры

В табл. 1 приведены результаты решения задачи по определению критического радиуса пластической области и критической угловой скорости вращения, при которых упругопластическая граница достигает внешнего края трехступенчатого диска заданного профиля h_k , $k = 1, 2, 3$. Предполагается, что все кольцевые секции ступенчатого диска имеют одинаковую ширину $(1 - \beta)/3$, где $\beta = 0, 2$ для кольцевого диска и $\beta = 0$ — для сплошного. При этом $\nu = 0, 3$, $n = 2$, $\varepsilon_i = 0$, $\varepsilon_e = 0$, $\varkappa_e = 0$, тогда как $\varkappa_i = 0$ либо $\varkappa_i = 1/3$ (для кольцевого диска). Для сравнения результатов в каждом из случаев в порядке возрастания малого параметра приведены решения характеристического уравнения (14) с $\delta = 10^{-7}$, $\delta = 10^{-5}$ и $\delta = 10^{-3}$.

h_k	$\beta_0^*; \omega^*/q$ ($\varkappa_i = 0$)	$\beta_0^*; \omega^*/q$ ($\varkappa_i = 1/3$)	$\beta_0^*; \omega^*/q$ ($\beta = 0$)
	0, 9936; 1, 4027 0, 9708; 1, 4020 0, 8657; 1, 3867	0, 9941; 1, 1961 0, 9730; 1, 1956 0, 8782; 1, 1855	0, 9934; 1, 5245 0, 9697; 1, 5238 0, 8585; 1, 5086
	0, 9937; 1, 3867 0, 9710; 1, 3859 0, 8668; 1, 3698	0, 9941; 1, 1730 0, 9732; 1, 1725 0, 8797; 1, 1621	0, 9935; 1, 4999 0, 9699; 1, 4991 0, 8600; 1, 4833
$h_1 = \frac{1}{30}, h_2 = h_3 = \frac{2}{30}$ 	0, 9935; 1, 4546 0, 9703; 1, 4538 0, 8626; 1, 4393	0, 9941; 1, 1780 0, 9732; 1, 1775 0, 8793; 1, 1691	0, 9933; 1, 5959 0, 9691; 1, 5952 0, 8543; 1, 5802
$h_1 = h_2 = \frac{1}{30}, h_3 = \frac{2}{30}$ 	0, 9936; 1, 4152 0, 9707; 1, 4143 0, 8651; 1, 3974	0, 9943; 1, 1115 0, 9739; 1, 1111 0, 8836; 1, 1020	0, 9934; 1, 5322 0, 9697; 1, 5313 0, 8581; 1, 5147
$h_1 = h_3 = \frac{1}{30}, h_2 = \frac{2}{30}$ 	0, 9933; 1, 5781 0, 9693; 1, 5776 0, 8551; 1, 5662	0, 9941; 1, 1855 0, 9731; 1, 1852 0, 8786; 1, 1798	0, 9930; 1, 7822 0, 9677; 1, 7816 0, 8432; 1, 7690
$h_1 = h_2 = h_3 = \frac{1}{30}$ 	0, 9934; 1, 5553 0, 9695; 1, 5546 0, 8566; 1, 5401	0, 9943; 1, 0998 0, 9741; 1, 0995 0, 8842; 1, 0936	0, 9931; 1, 7320 0, 9681; 1, 7312 0, 8464; 1, 7157
$h_1 = h_3 = \frac{2}{30}, h_2 = \frac{1}{30}$ 	0, 9934; 1, 5378 0, 9696; 1, 5370 0, 8578; 1, 5201	0, 9945; 1, 0432 0, 9748; 1, 0429 0, 8880; 1, 0367	0, 9932; 1, 6947 0, 9683; 1, 6938 0, 8487; 1, 6763
$h_1 = h_2 = \frac{2}{30}, h_3 = \frac{1}{30}$ 	0, 9931; 1, 7034 0, 9683; 1, 7029 0, 8478; 1, 6917	0, 9943; 1, 0906 0, 9742; 1, 0905 0, 8846; 1, 0870	0, 9928; 1, 9639 0, 9665; 1, 9632 0, 8324; 1, 9500

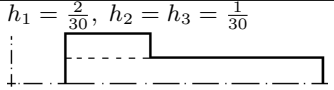
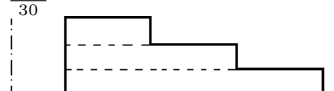
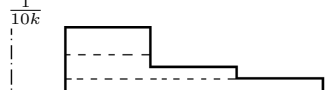
h_k	$\beta_0^*; \omega^*/q$ ($\alpha_i = 0$)	$\beta_0^*; \omega^*/q$ ($\alpha_i = 1/3$)	$\beta_0^*; \omega^*/q$ ($\beta = 0$)
$h_1 = \frac{2}{30}, h_2 = h_3 = \frac{1}{30}$ 	0,9931; 1,7168 0,9682; 1,7161 0,8472; 1,7019	0,9945; 1,0210 0,9751; 1,0208 0,8894; 1,0171	0,9928; 1,9639 0,9665; 1,9631 0,8326; 1,9466
$\frac{4-k}{30}$ 	0,9930; 1,8057 0,9675; 1,8052 0,8417; 1,7943	0,9945; 1,0388 0,9749; 1,0386 0,8881; 1,0361	0,9926; 2,1212 0,9656; 2,1206 0,8224; 2,1069
$\frac{1}{10k}$ 	0,9930; 1,8218 0,9674; 1,8212 0,8409; 1,8090	0,9945; 1,0113 0,9752; 1,0112 0,8900; 1,0086	0,9926; 2,1375 0,9655; 2,1367 0,8214; 2,1215

Табл. 1: Значения критического радиуса и относительной критической скорости.

Заключение

Предложенный способ отслеживания и контроля динамики малого возмущения формы границы неустойчивых быстровращающихся ступенчатых дисков позволяет с определенной точностью спрогнозировать, а также предотвратить без видимых потерь мощности возможное исчерпание их несущей способности. Геометрией диска и подбором параметров нагружения можно, варьируя, удерживать критическую угловую скорость выше приемлемой эксплуатационной скорости за счет перехода к более тонким периферийным ступеням ($h_1 \geq h_2 \geq h_3$ при $p_i = p_e = 0$). Использование сплошного ступенчатого диска вместо кольцевого ступенчатого диска с неизменными радиусом внешней контурной окружности и толщинами кольцевых секций также способствует созданию "запаса упругости". Такие выводы сопоставимы с заключением относительно самоуравновешенной формы потери устойчивости, развивающейся, естественно, при несколько меньшей угловой скорости вращения и радиусе пластической зоны.

Динамика возмущения формы границы вращающегося ступенчатого диска, потерявшего устойчивость по эксцентричной форме, анализируется аналогично.

Полученные результаты применимы к анализу динамики малых возмущений во вращающихся дисках произвольного профиля.

Литература

- [1] Гузь А.Н., Немчи Ю.Н. Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред. — К.: Вища шк., 1989. — 352 с.
- [2] Гузь А.Н., Бабич И.Ю. Трехмерная теория устойчивости деформируемых тел. — К.: Наук. думка, 1985. — 280 с.
- [3] Ивлев Д.Д. Механика пластических сред: в 2т. — М.: Физматлит, 2002. — Т. 2: Общие вопросы. Жестопластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды. — 448 с.
- [4] Ершов Л.В., Ивлев Д.Д. О потере устойчивости вращающихся дисков // Изв. АН СССР, ОТН. — 1958. — № 1. — С. 124–125.
- [5] Ивлев Д.Д. О потере несущей способности вращающихся дисков, близких к круговому // Изв. АН СССР, ОТН. — 1957. — № 1. — С. 141–144.
- [6] Лиля Д.М. Эксцентричная форма потери устойчивости вращающегося упруго-пластического диска // Доп. НАН України. — 2011. — № 2. — С. 49–53.
- [7] Лиля Д.М. О потере несущей способности вращающихся упруго-пластических дисков // Доп. НАН України. — 2012. — № 3. — С. 65–71.
- [8] Лиля Д.М., Мартынюк А.А. О потере устойчивости вращающегося упруго-пластического кругового диска // Доп. НАН України. — 2011. — № 1. — С. 44–51.
- [9] Lila D.M., Martynuk A.A. Development of instability in a rotating elastoplastic annular disk // Int. Appl. Mech. — 2012. — 48, No 2. — P. 224–233.
- [10] Ивлев Д.Д., Ершов Л.В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. — М.: Наука, 1978. — 208 с.
- [11] Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел: в 2т. — М.: Изд-во иностр. лит., 1954. — Т. 1. — 648 с.

- [12] Соколовский В.В. Теория пластичности. — М.: Высш. шк., 1969. — 608 с.
- [13] Lila D.M. Loss of Stability of a Rotating Elastoplastic Radially Inhomogeneous Multidiameter Annular Disk // J. Math. Sci. — 2016. — **215**, No 1. — P. 89–109.
- [14] Lila D.M., Martynyuk A.A. Stability Loss of Rotating Elastoplastic Discs of the Specific Form // Appl. Math. — 2011. — **2**, No 5. — P. 579–585.
- [15] Демьянушко И.В., Биргер И.А. Расчет на прочность вращающихся дисков. — М.: Машиностроение, 1978. — 247 с.
- [16] Mazière M., Besson J., Forest S., Tanguy B., Chalons H., Vogel F. Overspeed burst of elastoviscoplastic rotating disks: Part I — Analytical and numerical stability analyses // Eur. J. Mech. A-Solid. — 2009. — **28**, No 1. — P. 36–44.
- [17] Mazière M., Besson J., Forest S., Tanguy B., Chalons H., Vogel F. Overspeed burst of elastoviscoplastic rotating disks: Part II — Burst of a superalloy turbine disk // Eur. J. Mech. A-Solid. — 2009. — **28**, No 3. — P. 428–432.
- [18] Ли́ла Д.М. О неустойчивости вращающегося упругопластического ступенчатого кольцевого диска // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — **11**, № 4. — С. 124–152.
- [19] Ли́ла Д.М. Упругопластическая неустойчивость вращающегося тонкого диска // Прикл. проблеми мех. і мат. — 2016. — Вип. 14. — С. 92–98.
- [20] Ли́ла Д.М. Экцентричная форма неустойчивости вращающегося составного плоского кругового диска // Доп. НАН України. — 2012. — № 9. — С. 55–61.
- [21] Ли́ла Д.М., Мартынюк А.А. Экцентричная форма потери устойчивости вращающегося упругопластического радиально неоднородного ступенчатого кругового диска // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2015. — **58**, № 4. — С. 47–57.
- [22] Бицено К.Б., Граммель Р. Техническая динамика: в 2т. — М.–Л.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1950. — Т. 1. — 900 с.
- [23] Бицено К.Б., Граммель Р. Техническая динамика: в 2т. — М.–Л.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1952. — Т. 1. — 640 с.

ON THE ANALYSIS OF DYNAMICS OF BOUNDARY SHAPE PERTURBATION OF A ROTATING STEPPED DISK

Lila D.M.

SUMMARY

A way for calculating of the failure of bearing capacity by a rotating stepped circular disc is suggested with the help of small parameter method. A characteristic equation for a critical radius of a plastic zone is obtained as a first approximation. The values of critical angular velocity of rotating at different parameters of the disc are found numerically.

Keywords: elastoplastic problem, boundary shape perturbation method, rotating disc, stability loss, failure of bearing capacity, critical angular velocity.

ДО АНАЛІЗУ ДИНАМІКИ ЗБУРЕННЯ ФОРМИ МЕЖІ СТУПІНЧАТОГО ДИСКА, ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ

Ли́ла Д.М.

РЕЗЮМЕ

Запропоновано спосіб дослідження методом малого параметра динаміки збурення форми межі та можливої втрати несучої здатності ступінчастого кругового диска, що обертається. Одержано у першому наближенні характеристичне рівняння відносно критичного радіуса пластичної зони. Чисельно знайдено значення критичної кутової швидкості обертання за різних параметрів диска.

Ключові слова: пружно-пластична задача, метод збурення форми межі, диск, що обертається, втрата стійкості, втрата несучої здатності, критична кутова швидкість.