

УДК 539.3

Лиля Д.М.

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и методики обучения математике, Черкасский национальный университет имени Богдана Хмельницкого

К АНАЛИЗУ ДИНАМИКИ ВОЗМУЩЕНИЯ ФОРМЫ ГРАНИЦЫ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО РАДИАЛЬНО НЕОДНОРОДНОГО СТУПЕНЧАТОГО КОЛЬЦЕВОГО ДИСКА

Предложен способ исследования методом малого параметра динамики возмущения формы границы и возможной потери несущей способности вращающегося радиально неоднородного ступенчатого кругового кольцевого диска. Получено в первом приближении характеристическое уравнение относительно критического радиуса пластической зоны. Численно найдены значения критической угловой скорости вращения при различных параметрах диска.

Ключевые слова: упругопластическая задача, метод возмущения формы границы, вращающийся диск, потеря устойчивости, потеря несущей способности, критическая угловая скорость

Введение

Как известно [1-3], основные уравнения теории устойчивости пространственных деформируемых тел, получаемые путем линеаризации нелинейных уравнений, содержат члены, определяемые через компоненты основного невозмущенного состояния. Это является источником сложностей задачи о потере устойчивости, т.к. в основные уравнения входит параметр нагрузки, определяющий критические усилия. Использование приближенного подхода [4, 5] для исследования устойчивости пространственных упругих тел, при котором компоненты возмущенного состояния принимаются в виде $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma'_{ij}$, упрощает задачу как за счет удовлетворения возмущениями σ'_{ij} исходным уравнениям равновесия, так и за счет введения параметра нагружения в граничные условия на возмущенной исходной поверхности тела. Параметр нагружения определяется из существенно более простых характеристических уравнений [6]. Для решения задач устойчивости пространственных тел именно в такой постановке может быть использован метод возмущений [7]. В частности, упомянутый приближенный метод малого параметра, имеющий определенную аналогию со вторым вариантом метода возмущений формы границы [8], подходит для решения плоских упругопластических задач [9-11] теории идеальной пластичности [12-14] для областей с криволинейными отверстиями.

Одной из таких актуальных задач является определение критической скорости вращения упругопластического кругового диска [15-21], теряющего устойчивость вследствие перегрузки растягивающими центробежными усилиями. Уточнить и распространить первые результаты по расчету возможной потери устойчивости сплошных плоских дисков из несжимаемого материала [22] и исчерпанию несущей способности дисков в частном случае возмущения контурной окружности [23] удалось в работах [24-37]. Здесь рассмотрены как свободные от контурных усилий, так и нагруженные однородные сплошные и кольцевые быстровращающиеся диски, ступенчатые диски, некоторые диски произвольного профиля, а также составные и радиально неоднородные диски. В каждом из случаев

в рамках аналитического метода малого параметра указан способ учета геометрических особенностей, физических свойств и характера нагружения при получении характеристического уравнения относительно критического радиуса пластической зоны диска. В данной статье исследуется динамика малого (гармонического по полярному углу) возмущения формы границы вращающегося неустойчивого изотропного радиально неоднородного ступенчатого кольцевого кругового диска, нагруженного по контуру в срединной плоскости радиальным давлением, пропорциональным квадрату угловой скорости. Изложен способ определения скорости вращения, соответствующей указанному положению возмущенной упругопластической границы. Получено характеристическое уравнение с параметром относительно критического радиуса пластической области, достигшей внешнего края диска. Все результаты установлены при рассмотрении плоского напряженного состояния. Контурные нагрузки задаются так, как и в работах [24, 26, 27, 29] и др. Предполагается, что материал диска (с условием пластичности Сен-Венана) не обладает упрочнением.

Постановка задачи

Объектом исследования является быстровращающийся радиально неоднородный по материалу ступенчатый кольцевой круговой диск \mathbf{D} (рис. 1). \mathbf{D} выполнен в виде единого целого диска путем жесткого соединения однородных и изотропных кольцевых дисков $\mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_{n_0}$ с внешними радиусами $r_1, \dots, r_{n_0} = b$ соответственно. Внутренний радиус диска \mathbf{D} равен a . Предел текучести материала кольцевых секций \mathbf{D}_j , $j = 1, \dots, n_0$, обозначен σ_{sj} , модуль упругости — E_j , плотность — γ_j , коэффициент Пуассона — ν_j , постоянная угловая скорость вращения — ω , текущий радиус пластической зоны невозмущенного диска — r_0 .

Предмет исследования составляет динамика возмущения формы границы неустойчивого диска \mathbf{D} , когда уравнение внешней его границы в срединной плоскости, являющейся плоскостью симметрии диска, с точностью до бесконечно малых первого порядка представлено в виде

$$r = b + d \cos n\theta, \quad n \geq 2, \quad d = \text{const},$$

или

$$\rho = 1 + \delta \cos n\theta, \quad (1)$$

где $\rho = r/b$ — безразмерный текущий радиус, δ — малый параметр, $n \in \mathbb{N}$, θ — полярный угол. Внутренняя кольцевая область $a \leq r < r_0^* + u'(r_0^*)$ диска \mathbf{D} пластическая, тогда как внешняя его область пребывает в упругом состоянии (в работах [25, 33] такой сценарий развития неустойчивости назван (а) или особым (о2)). Предполагается, что максимальная из толщин $2h_1, \dots, 2h_{n_0}$ кольцевых зон $\mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_{n_0}$ мала по сравнению с остальными размерами диска \mathbf{D} . Наличие распределенных на внутреннем и внешнем контурах диска радиальных нагрузок $p_i = p_{i0} + \tilde{p}_i$ и $p_e = p_{e0} + \tilde{p}_e$ будем считать результатом определенных усилий, действующих на диск в его срединной плоскости. Здесь слагаемые p_{i0} и p_{e0} имеют постоянную величину, а слагаемые \tilde{p}_i и \tilde{p}_e , равные нулю при $\omega = 0$, отображают изменение контурных нагрузок в динамике. Такая постановка соответствует, к примеру, насадке на вал с натягом исследуемого диска, по ободу которого смонтированы с обжатием лопатки, и учету при вращении сжимающего действия вала и растягивающего действия лопаток.

Требуется для описываемой зависимостью (1) формы границы диска получить в первом приближении характеристическое уравнение с параметром δ для критического радиуса пластической зоны $r_0 = r_0^*$ и определить соответствующую величину критической угловой скорости вращения $\omega = \omega^*$. Напомним ([23, 28] и др.), что для этого нужно

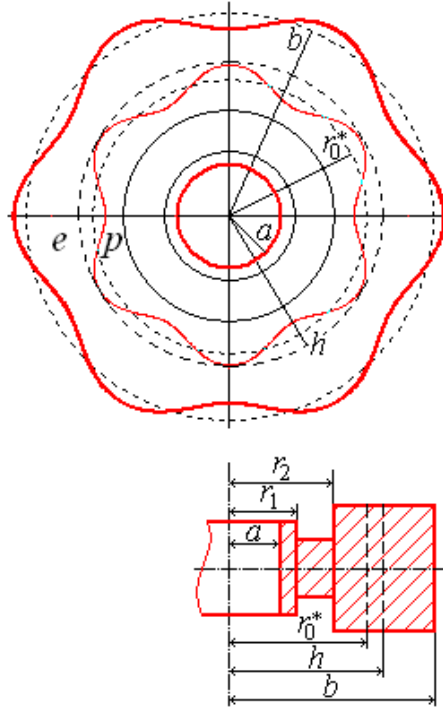


Рис. 1: Возмущенная упругопластическая граница $r = r_0^*$ неустойчивого радиально неоднородного ступенчатого диска достигает окружности $r = h$.

установить аналитически условие касания возмущенной упругопластической границы и окружности данного радиуса, решив предварительно систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} + \frac{d\sigma_{rr}^0}{dr}u &= 0, & \sigma_{r\theta} - \frac{\sigma_{\theta\theta}^0 - \sigma_{rr}^0}{b} \frac{du}{d\theta} &= 0, & r &= b, \\ \sigma_{rr} &= 0, & \sigma_{r\theta} &= 0, & \sigma_{\theta\theta} + \frac{d\sigma_{\theta\theta}^0}{dr}u &= 0, & r &= r_0, \end{aligned}$$

относительно $u(r_0)$ и произвольных постоянных, входящих в выражения для компонент напряжений и перемещений σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{\theta\theta}$ и u , определяющих возмущенное напряженно-деформированное состояние вращающегося диска **D**. Указанные линеаризованные возмущения первого порядка малости удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия плоской задачи

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} = 0$$

и уравнениям связи между напряжениями и перемещениями [8] в частных производных

$$\begin{aligned} E \frac{\partial u}{\partial r} &= \sigma_{rr} - \nu \sigma_{\theta\theta}, & E \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right) &= \sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr}, \\ \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) &= \sigma_{r\theta}, \end{aligned}$$

тогда как невозмущенное напряженное состояние (обозначено верхним индексом 0) определено обыкновенными дифференциальными уравнениями квазистатического равновесия

$$r \frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} + \gamma \omega^2 r^2 = 0$$

и уравнениями связи

$$E \frac{du}{dr} = \sigma_{rr} - \nu \sigma_{\theta\theta}, \quad E \frac{u}{r} = \sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr}$$

в упругой зоне или условием текучести

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_s$$

— в пластической зоне.

Вспомогательные результаты

Невозмущенное плоское напряженное состояние радиально неоднородного ступенчатого кругового кольцевого диска \mathbf{D} (все напряжения отнесены к σ_{sn_0} ; верхний индекс p указывает на пластическую зону, e — на упругую зону) с упругопластической границей в кольцевой области \mathbf{D}_j , $j \in \{1, \dots, n_0\}$, получено в работе [29] в виде

$$\sigma_{rr}^{0p} = \begin{cases} \Sigma_1 - 8\Gamma_1 y \rho^2 + C_1 \rho^{-1}, & \rho \in [\beta, \rho_1), \\ \Sigma_2 - 8\Gamma_2 y \rho^2 + C_2 \rho^{-1}, & \rho \in (\rho_1, \rho_2), \\ \dots \\ \Sigma_j - 8\Gamma_j y \rho^2 + C_j \rho^{-1}, & \rho \in (\rho_{j-1}, \beta_0), \end{cases} \quad (2)$$

$$\sigma_{rr}^{0e} = \begin{cases} \tilde{C}_{1,j} + \tilde{C}_{2,j} \rho^{-2} - \alpha'_j \rho^2, & \rho \in (\beta_0, \rho_j), \\ \tilde{C}_{1,j+1} + \tilde{C}_{2,j+1} \rho^{-2} - \alpha'_{j+1} \rho^2, & \rho \in (\rho_j, \rho_{j+1}), \\ \dots \\ \tilde{C}_{1,n_0} + \tilde{C}_{2,n_0} \rho^{-2} - \alpha'_{n_0} \rho^2, & \rho \in (\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0}], \end{cases} \quad (3)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{0e} = \begin{cases} \tilde{C}_{1,j} - \tilde{C}_{2,j} \rho^{-2} - \beta'_j \rho^2, & \rho \in (\beta_0, \rho_j), \\ \tilde{C}_{1,j+1} - \tilde{C}_{2,j+1} \rho^{-2} - \beta'_{j+1} \rho^2, & \rho \in (\rho_j, \rho_{j+1}), \\ \dots \\ \tilde{C}_{1,n_0} - \tilde{C}_{2,n_0} \rho^{-2} - \beta'_{n_0} \rho^2, & \rho \in (\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0}], \end{cases} \quad (4)$$

где $\beta_0 = r_0/b$, $\beta = \rho_0 = a/b$, $\rho_1 = r_1/b, \dots, \rho_{n_0} = r_{n_0}/b$, $y = \gamma_{n_0} b^2 \omega^2 / (24\sigma_{sn_0})$, $\Sigma_k = \sigma_{sk} / \sigma_{sn_0}$, $\Gamma_k = \gamma_k / \gamma_{n_0}$, $\alpha'_k = 3(\nu_k + 3)\Gamma_k y$, $\beta'_k = 3(3\nu_k + 1)\Gamma_k y$, $k = 1, \dots, n_0$, а константы C_1, \dots, C_j и $\tilde{C}_{1,j}, \tilde{C}_{2,j}, \dots, \tilde{C}_{1,n_0}, \tilde{C}_{2,n_0}$ определяются как решения систем уравнений

$$\begin{aligned} -p_i / \sigma_s &= \Sigma_1 - 8\Gamma_1 \beta^2 y + C_1 \beta^{-1}, \\ h_1 (\Sigma_1 - 8\Gamma_1 \rho_1^2 y + C_1 \rho_1^{-1}) &= h_2 (\Sigma_2 - 8\Gamma_2 \rho_1^2 y + C_2 \rho_1^{-1}), \\ &\dots \\ h_{j-1} (\Sigma_{j-1} - 8\Gamma_{j-1} \rho_{j-1}^2 y + C_{j-1} \rho_{j-1}^{-1}) &= h_j (\Sigma_j - 8\Gamma_j \rho_{j-1}^2 y + C_j \rho_{j-1}^{-1}) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{1,j} + \tilde{C}_{2,j} x_j &= s_j^-, & \tilde{C}_{1,j} - \tilde{C}_{2,j} x_j &= t_j^-, \\ \tilde{C}_{1,j+1} + \tilde{C}_{2,j+1} x_{j+1} &= s_{j+1}^-, & \tilde{C}_{1,j+1} - \tilde{C}_{2,j+1} x_{j+1} &= t_{j+1}^-, \\ &\dots \\ \tilde{C}_{1,n_0} + \tilde{C}_{2,n_0} &= s_{n_0}, & \tilde{C}_{1,n_0} - \tilde{C}_{2,n_0} &= t_{n_0}. \end{aligned}$$

Здесь $x_j = 1/\rho_j^2, \dots, x_{n_0-1} = 1/\rho_{n_0-1}^2$,

$$y = \frac{\omega^2}{24q^2} = \frac{\frac{pe}{\sigma_{sn_0}} - (RA_{n_0} - R^*B_{n_0}) \frac{p_i}{\sigma_{sn_0}} - (SA_{n_0} - S^*B_{n_0})}{QA_{n_0} - Q^*B_{n_0} + D_{n_0} - 3(\nu_{n_0} + 3)}, \quad q = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{\sigma_{sn_0}}{\gamma_{n_0}}},$$

$$\begin{aligned} Q &= d_0 \delta_2 \beta_0^{-1} + (1 - 2f_0)(3\nu_j + 1)\Gamma_j x_0^{-1}, & R &= d_0 \delta_1 \beta_0^{-1}, & S &= d_0 \delta_3 \beta_0^{-1} + \Sigma_j, \\ Q^* &= -f_0 \delta_2 \beta_0^{-1} + (1 + 2d_0)(3\nu_j + 1)\Gamma_j x_0^{-1}, & R^* &= -f_0 \delta_1 \beta_0^{-1}, & S^* &= -f_0 \delta_3 \beta_0^{-1} + \Sigma_j, \end{aligned}$$

$d_0 = (x_0 + x_j)/(2x_0)$, $f_0 = (x_j - x_0)/(2x_0)$, $x_0 = \beta_0^{-2}$, $\delta_1 = -\beta h_1/h_j$, $\delta_2 = -(8/h_j) \sum_{k=1}^j (h_{k-1}\Gamma_{k-1} - h_k\Gamma_k)\rho_k$
 $\delta_3 = (1/h_j) \sum_{k=1}^j (h_{k-1}\Sigma_{k-1} - h_k\Sigma_k)\rho_{k-1}$, $h_0 = 0$, $\Gamma_0 = 0$, $\Sigma_0 = 0$, тогдa как $s_j^-, t_j^-, \dots, s_{n_0-1}^-, t_{n_0-1}^-, s_{n_0}, t_{n_0}$ и $A_{n_0}, B_{n_0}, D_{n_0}$ определяются из рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} s_j^- &= Qy + R \frac{p_i}{\sigma_{s_{n_0}}} + S, & t_j^- &= Q^*y + R^* \frac{p_i}{\sigma_{s_{n_0}}} + S^*, \\ s_{j+1}^- &= A_{j+1}s_j^- - B_{j+1}t_j^- + C_{j+1}, & t_{j+1}^- &= A_{j+1}^*s_j^- - B_{j+1}^*t_j^- + C_{j+1}^*, \\ s_{j+2}^- &= A_{j+2}s_j^- - B_{j+2}t_j^- + C_{j+2}, & t_{j+2}^- &= A_{j+2}^*s_j^- - B_{j+2}^*t_j^- + C_{j+2}^*, \\ & \dots & & \\ s_{n_0} &= A_{n_0}s_j^- - B_{n_0}t_j^- + C_{n_0}, & t_{n_0} &= A_{n_0}^*s_j^- - B_{n_0}^*t_j^- + C_{n_0}^*, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_{j+1} &= d_j a_j - f_j c_j, & B_{j+1} &= f_j e_j, & C_{j+1} &= d_j b_j - f_j l_j, \\ A_{j+1}^* &= -f_j a_j + d_j c_j, & B_{j+1}^* &= -d_j e_j, & C_{j+1}^* &= -f_j b_j + d_j l_j, \\ A_{j+2} &= d_{j+1} a_{j+1} A_{j+1} - f_{j+1} (c_{j+1} A_{j+1} + e_{j+1} A_{j+1}^*), \\ B_{j+2} &= d_{j+1} a_{j+1} B_{j+1} - f_{j+1} (c_{j+1} B_{j+1} + e_{j+1} B_{j+1}^*), \\ C_{j+2} &= d_{j+1} (a_{j+1} C_{j+1} + b_{j+1}) - f_{j+1} (c_{j+1} C_{j+1} + e_{j+1} C_{j+1}^* + l_{j+1}), \\ A_{j+2}^* &= -f_{j+1} a_{j+1} A_{j+1} + d_{j+1} (c_{j+1} A_{j+1} + e_{j+1} A_{j+1}^*), \\ B_{j+2}^* &= -f_{j+1} a_{j+1} B_{j+1} + d_{j+1} (c_{j+1} B_{j+1} + e_{j+1} B_{j+1}^*), \\ C_{j+2}^* &= -f_{j+1} (a_{j+1} C_{j+1} + b_{j+1}) + d_{j+1} (c_{j+1} C_{j+1} + e_{j+1} C_{j+1}^* + l_{j+1}), \\ & \dots & & & & \\ A_{n_0} &= d_{n_0-1} a_{n_0-1} A_{n_0-1} - f_{n_0-1} (c_{n_0-1} A_{n_0-1} + e_{n_0-1} A_{n_0-1}^*), \\ B_{n_0} &= d_{n_0-1} a_{n_0-1} B_{n_0-1} - f_{n_0-1} (c_{n_0-1} B_{n_0-1} + e_{n_0-1} B_{n_0-1}^*), \\ C_{n_0} &= d_{n_0-1} (a_{n_0-1} C_{n_0-1} + b_{n_0-1}) - f_{n_0-1} (c_{n_0-1} C_{n_0-1} + e_{n_0-1} C_{n_0-1}^* + l_{n_0-1}), \\ A_{n_0}^* &= -f_{n_0-1} a_{n_0-1} A_{n_0-1} + d_{n_0-1} (c_{n_0-1} A_{n_0-1} + e_{n_0-1} A_{n_0-1}^*), \\ B_{n_0}^* &= -f_{n_0-1} a_{n_0-1} B_{n_0-1} + d_{n_0-1} (c_{n_0-1} B_{n_0-1} + e_{n_0-1} B_{n_0-1}^*), \\ C_{n_0}^* &= -f_{n_0-1} (a_{n_0-1} C_{n_0-1} + b_{n_0-1}) + d_{n_0-1} (c_{n_0-1} C_{n_0-1} + e_{n_0-1} C_{n_0-1}^* + l_{n_0-1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_k &= D_k y, & k &= j+1, \dots, n_0, \\ D_{j+1} &= d_j g_j - f_j m_j, & D_{j+1}^* &= -f_j g_j + d_j m_j, \\ D_{j^*} &= d_{j^*-1} (a_{j^*-1} D_{j^*-1} + g_{j^*-1}) - f_{j^*-1} (c_{j^*-1} D_{j^*-1} + e_{j^*-1} D_{j^*-1}^* + m_{j^*-1}), \\ D_{j^*}^* &= -f_{j^*-1} (a_{j^*-1} D_{j^*-1} + g_{j^*-1}) + d_{j^*-1} (c_{j^*-1} D_{j^*-1} + e_{j^*-1} D_{j^*-1}^* + m_{j^*-1}), \\ & j^* &= j+2, \dots, n_0, \\ a_k &= \frac{h_k}{h_{k+1}}, & b_k &= \frac{\alpha'_{k+1} - a_k \alpha'_k}{x_k}, & e_k &= \frac{E_{k+1}}{E_k}, & c_k &= a_k \nu_{k+1} - e_k \nu_k, \\ d_k &= \frac{x_k + x_{k+1}}{2x_k}, & f_k &= \frac{x_{k+1} - x_k}{2x_k}, & l_k &= \frac{\beta'_{k+1} - e_k \beta'_k - c_k \alpha'_k}{x_k}, \\ g_k &= 3 [(\nu_{k+1} + 3)\Gamma_{k+1} - a_k (\nu_k + 3)\Gamma_k] x_k^{-1}, \\ m_k &= 3 [(3\nu_{k+1} + 1)\Gamma_{k+1} - e_k (3\nu_k + 1)\Gamma_k - c_k (\nu_k + 3)\Gamma_k] x_k^{-1}, & k &= j, \dots, n_0 - 1. \end{aligned}$$

Поэтому (см. (2)-(4))

$$A_1 = \frac{d\sigma_{rr}^{0e}(1)}{d\rho} = [A_{n_0}^* Q - B_{n_0}^* Q^* - 9(\nu_{n_0} + 3)] y + [A_{n_0}^* R - B_{n_0}^* R^*] \frac{p_i}{\sigma_{sn_0}} - \frac{p_e}{\sigma_{sn_0}} + [A_{n_0}^* S - B_{n_0}^* S^* + C_{n_0}^*], \quad (5)$$

$$A_2 = \sigma_{\theta\theta}^{0e}(1) - \sigma_{rr}^{0e}(1) = A_1 + 24y, \quad (6)$$

$$A_3 = \frac{d\sigma_{\theta\theta}^{0e}(\beta_0)}{d\rho} = [(Q - Q^*)x_j^{-1}\beta_0^{-3} - 6(3\nu_j + 1)\Gamma_j\beta_0] y + (R - R^*)x_j^{-1}\beta_0^{-3} \frac{p_i}{\sigma_{sn_0}} + (S - S^*)x_j^{-1}\beta_0^{-3}, \quad (7)$$

где

$$\frac{p_i}{\sigma_{sn_0}} = \varepsilon_i + \frac{\varkappa_i \gamma_{n_0} b^2 \omega^2}{\sigma_{sn_0}} = \varepsilon_i + 24\varkappa_i \tilde{y}, \quad \frac{p_e}{\sigma_{sn_0}} = \varepsilon_e + \frac{\varkappa_e \gamma_{n_0} b^2 \omega^2}{\sigma_{sn_0}} = \varepsilon_e + 24\varkappa_e \tilde{y},$$

$$\tilde{y} = \frac{\varepsilon_e - \varepsilon_i (RA_{n_0} - R^* B_{n_0}) - (SA_{n_0} - S^* B_{n_0})}{QA_{n_0} - Q^* B_{n_0} + D_{n_0} - 3(\nu_{n_0} + 3) - 24\varkappa_e + 24\varkappa_i (RA_{n_0} - R^* B_{n_0})},$$

ε_i , ε_e , \varkappa_i и \varkappa_e — заданные коэффициенты.

Кроме невозмущенного состояния диска \mathbf{D} необходимо также знать возмущенное состояние его внешней упругой области. Отнесенные к σ_{sn_0} возмущения первого порядка малости σ_{rr}^{1e} , $\sigma_{\theta\theta}^{1e}$, $\sigma_{r\theta}^{1e}$ соответствующих компонент напряжения и отнесенные к b возмущения радиального u^{1e} и окружного v^{1e} смещений в первом приближении определяются в крайней кольцевой секции \mathbf{D}_{n_0} зависимостями [38, 7, 27, 29]

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{1e} &= [a_I(\rho_{n_0-1}, \rho)\Phi_{n_0} + a_{II}(\rho_{n_0-1}, \rho)\Phi_{n_0-1} + a_{III}(\rho_{n_0-1}, \rho)\Psi_{n_0} + \\ &\quad + a_{IV}(\rho_{n_0-1}, \rho)\Psi_{n_0-1}] \cos n\theta, \\ \sigma_{\theta\theta}^{1e} &= [b_I(\rho_{n_0-1}, \rho)\Phi_{n_0} + b_{II}(\rho_{n_0-1}, \rho)\Phi_{n_0-1} + b_{III}(\rho_{n_0-1}, \rho)\Psi_{n_0} + \\ &\quad + b_{IV}(\rho_{n_0-1}, \rho)\Psi_{n_0-1}] \cos n\theta, \\ \sigma_{r\theta}^{1e} &= [c_I(\rho_{n_0-1}, \rho)\Phi_{n_0} + c_{II}(\rho_{n_0-1}, \rho)\Phi_{n_0-1} + c_{III}(\rho_{n_0-1}, \rho)\Psi_{n_0} + \\ &\quad + c_{IV}(\rho_{n_0-1}, \rho)\Psi_{n_0-1}] \sin n\theta, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} u^{1e} &= \frac{\sigma_{sn_0}}{E_{n_0}} [d_I(\rho_{n_0-1}, \rho, \nu_{n_0})\Phi_{n_0} + d_{II}(\rho_{n_0-1}, \rho, \nu_{n_0})\Phi_{n_0-1} + d_{III}(\rho_{n_0-1}, \rho, \nu_{n_0})\Psi_{n_0} + \\ &\quad + d_{IV}(\rho_{n_0-1}, \rho, \nu_{n_0})\Psi_{n_0-1}] \cos n\theta, \\ v^{1e} &= \frac{\sigma_{sn_0}}{E_{n_0}} [e_I(\rho_{n_0-1}, \rho, \nu_{n_0})\Phi_{n_0} + e_{II}(\rho_{n_0-1}, \rho, \nu_{n_0})\Phi_{n_0-1} + e_{III}(\rho_{n_0-1}, \rho, \nu_{n_0})\Psi_{n_0} + \\ &\quad + e_{IV}(\rho_{n_0-1}, \rho, \nu_{n_0})\Psi_{n_0-1}] \sin n\theta, \end{aligned}$$

где $a_I(\cdot), \dots, e_{IV}(\cdot)$ — известные рациональные функции, а $\Phi_{n_0}, \Phi_{n_0-1}, \Psi_{n_0}$ и Ψ_{n_0-1} — неопределенные коэффициенты. Соотношения (8) для следующей кольцевой секции \mathbf{D}_{n_0-1} имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{1e} &= \left[a_I \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}} \right) \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} \Phi_{n_0-1} + a_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}} \right) \Phi_{n_0-2} + a_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} \Psi_{n_0-1} + a_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}} \right) \Psi_{n_0-2} \right] \cos n\theta, \\ &\quad \dots \\ v^{1e} &= \rho_{n_0-1} \frac{\sigma_{sn_0}}{E_{n_0-1}} \left[e_I \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}}, \nu_{n_0-1} \right) \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} \Phi_{n_0-1} + \right. \\ &\quad \left. + e_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}}, \nu_{n_0-1} \right) \Phi_{n_0-2} + e_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}}, \nu_{n_0-1} \right) \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} \Psi_{n_0-1} + \right. \\ &\quad \left. + e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}}, \nu_{n_0-1} \right) \Psi_{n_0-2} \right] \sin n\theta, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{n_0-2} &= q_{1,n_0-2}\Phi_{n_0} + q_{2,n_0-2}\Phi_{n_0-1} + q_{3,n_0-2}\Psi_{n_0} + q_{4,n_0-2}\Psi_{n_0-1}, \\ \Psi_{n_0-2} &= q_{5,n_0-2}\Phi_{n_0} + q_{6,n_0-2}\Phi_{n_0-1} + q_{7,n_0-2}\Psi_{n_0} + q_{8,n_0-2}\Psi_{n_0-1}, \\ q_{1,n_0-2} &= \frac{\rho_{n_0-1}e_{n_0-1}}{\Delta_{n_0-2}} \left[d_I(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1}, \nu_{n_0})e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1, \nu_{n_0-1} \right) - \right. \\ &\quad \left. - e_I(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1}, \nu_{n_0})d_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1, \nu_{n_0-1} \right) \right], \\ q_{2,n_0-2} &= \frac{\rho_{n_0-1}e_{n_0-1}}{\Delta_{n_0-2}} \left[\left\{ d_{II}(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1}, \nu_{n_0}) - \rho_{n_0-1}e_{n_0-1}a_{n_0-1}^{-1}d_I \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1, \nu_{n_0-1} \right) \right\} \times \right. \\ &\quad \times e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1, \nu_{n_0-1} \right) - \left\{ e_{II}(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1}, \nu_{n_0}) - \rho_{n_0-1}e_{n_0-1}a_{n_0-1}^{-1} \times \right. \\ &\quad \left. \left. \times e_I \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1, \nu_{n_0-1} \right) \right\} d_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1, \nu_{n_0-1} \right) \right], \\ &\quad \dots \\ q_{8,n_0-2} &= \frac{\rho_{n_0-1}e_{n_0-1}}{\Delta_{n_0-2}} \left[\left\{ e_{IV}(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1}, \nu_{n_0}) - \rho_{n_0-1}e_{n_0-1}a_{n_0-1}^{-1}e_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1, \nu_{n_0-1} \right) \right\} \times \right. \\ &\quad \times d_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1, \nu_{n_0-1} \right) - \left\{ d_{IV}(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1}, \nu_{n_0}) - \rho_{n_0-1}e_{n_0-1}a_{n_0-1}^{-1} \times \right. \\ &\quad \left. \left. \times d_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1, \nu_{n_0-1} \right) \right\} e_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1, \nu_{n_0-1} \right) \right], \\ \Delta_{n_0-2} &= e_{n_0-1}^2 \rho_{n_0-1}^2 \left[d_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1, \nu_{n_0-1} \right) e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1, \nu_{n_0-1} \right) - \right. \\ &\quad \left. - d_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1, \nu_{n_0-1} \right) e_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1, \nu_{n_0-1} \right) \right]. \end{aligned}$$

Аналоги (8) и (9) для всех остальных упругих кольцевых секций $\mathbf{D}_{n_0-(k-1)}$, $k \in \{3, \dots, n_0-(j-1)\}$ (при $k = n_0 - (j - 1)$ полагаем $\rho_{n_0-k} := \beta_0$), записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{te} &= \left[a_I \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) \frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}} \Phi_{n_0-(k-1)} + a_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) \times \right. \\ &\quad \times \Phi_{n_0-k} + a_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) \frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}} \Psi_{n_0-(k-1)} + \\ &\quad \left. + a_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) \Psi_{n_0-k} \right] \cos n\theta, \\ &\quad \dots \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} v^e &= \rho_{n_0-(k-1)} \frac{\sigma_{sn_0}}{E_{n_0-(k-1)}} \left[e_I \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) \frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}} \Phi_{n_0-(k-1)} + \right. \\ &\quad + e_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) \Phi_{n_0-k} + e_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) \times \\ &\quad \left. \times \frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}} \Psi_{n_0-(k-1)} + e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) \Psi_{n_0-k} \right] \sin n\theta, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{n_0-k} &= q_{1,n_0-k}\Phi_{n_0} + q_{2,n_0-k}\Phi_{n_0-1} + q_{3,n_0-k}\Psi_{n_0} + q_{4,n_0-k}\Psi_{n_0-1}, \\ \Psi_{n_0-k} &= q_{5,n_0-k}\Phi_{n_0} + q_{6,n_0-k}\Phi_{n_0-1} + q_{7,n_0-k}\Psi_{n_0} + q_{8,n_0-k}\Psi_{n_0-1}, \\ q_{1,n_0-k} &= \gamma_{2,n_0-k}q_{1,n_0-(k-1)} + \gamma_{4,n_0-k}q_{5,n_0-(k-1)}, \\ q_{2,n_0-k} &= \gamma_{1,n_0-k} + \gamma_{2,n_0-k}q_{2,n_0-(k-1)} + \gamma_{4,n_0-k}q_{6,n_0-(k-1)}, \\ &\quad \dots \\ q_{8,n_0-k} &= \gamma_{7,n_0-k} + \gamma_{6,n_0-k}q_{4,n_0-(k-1)} + \gamma_{8,n_0-k}q_{8,n_0-(k-1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{1,n_0-k} &= \frac{\rho_{n_0-(k-1)} \varepsilon_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)} a_{n_0-(k-2)} \Delta_{n_0-k}} \left[d_I \left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}, \frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}, \nu_{n_0-(k-2)} \right) e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. 1, \nu_{n_0-(k-1)} \right) - e_I \left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}, \frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}, \nu_{n_0-(k-2)} \right) d_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1, \nu_{n_0-(k-1)} \right) \right], \\ &\quad \dots \\ \gamma_{8,n_0-k} &= \frac{\rho_{n_0-(k-1)} \varepsilon_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)} \Delta_{n_0-k}} \left[\left\{ e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}, \frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}, \nu_{n_0-(k-2)} \right) - \frac{\rho_{n_0-(k-1)} \varepsilon_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)} a_{n_0-(k-1)}} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times e_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1, \nu_{n_0-(k-1)} \right) \right\} d_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1, \nu_{n_0-(k-1)} \right) - \left\{ d_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}, \frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \nu_{n_0-(k-2)} \right) - \frac{\rho_{n_0-(k-1)} \varepsilon_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)} a_{n_0-(k-1)}} d_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1, \nu_{n_0-(k-1)} \right) \right\} e_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1, \nu_{n_0-(k-1)} \right) \right], \\ \Delta_{n_0-k} &= e_{n_0-(k-1)}^2 \left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}} \right)^2 \left[d_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1, \nu_{n_0-(k-1)} \right) e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1, \nu_{n_0-(k-1)} \right) - \right. \\ &\quad \left. - d_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1, \nu_{n_0-(k-1)} \right) e_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1, \nu_{n_0-(k-1)} \right) \right]. \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение

Удовлетворение функциями (8)-(10) граничным условиям

$$\sigma'_{rr}{}^e + A_1 u^e = 0, \quad \sigma'_{r\theta}{}^e - A_2 \frac{du^e}{d\theta} = 0, \quad \rho = 1,$$

и условиям сопряжения

$$\sigma'_{rr}{}^e = 0, \quad \sigma'_{r\theta}{}^e = 0, \quad \sigma'_{\theta\theta}{}^e + A_3 u^e = 0, \quad \rho = \beta_0,$$

приводит к системе линейных уравнений относительно Φ_{n_0} , Φ_{n_0-1} , Ψ_{n_0} , Ψ_{n_0-1} и $u^e(\beta_0)$:

$$\begin{aligned} \Phi_{n_0} + A_1 &= 0, \quad \Psi_{n_0} + nA_2 = 0, \\ q_{1,j-1}\Phi_{n_0} + q_{2,j-1}\Phi_{n_0-1} + q_{3,j-1}\Psi_{n_0} + q_{4,j-1}\Psi_{n_0-1} &= 0, \\ q_{5,j-1}\Phi_{n_0} + q_{6,j-1}\Phi_{n_0-1} + q_{7,j-1}\Psi_{n_0} + q_{8,j-1}\Psi_{n_0-1} &= 0, \\ (w_1\Phi_{n_0} + w_2\Phi_{n_0-1} + w_3\Psi_{n_0} + w_4\Psi_{n_0-1}) \cos n\theta + A_3 u^e(\beta_0) &= 0, \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned} w_1 &= b_I(\zeta, \zeta) a_j^{-1} q_{1,j} + b_{II}(\zeta, \zeta) q_{1,j-1} + b_{III}(\zeta, \zeta) a_j^{-1} q_{5,j} + b_{IV}(\zeta, \zeta) q_{5,j-1}, \\ w_2 &= b_I(\zeta, \zeta) a_j^{-1} q_{2,j} + b_{II}(\zeta, \zeta) q_{2,j-1} + b_{III}(\zeta, \zeta) a_j^{-1} q_{6,j} + b_{IV}(\zeta, \zeta) q_{6,j-1}, \\ w_3 &= b_I(\zeta, \zeta) a_j^{-1} q_{3,j} + b_{II}(\zeta, \zeta) q_{3,j-1} + b_{III}(\zeta, \zeta) a_j^{-1} q_{7,j} + b_{IV}(\zeta, \zeta) q_{7,j-1}, \\ w_4 &= b_I(\zeta, \zeta) a_j^{-1} q_{4,j} + b_{II}(\zeta, \zeta) q_{4,j-1} + b_{III}(\zeta, \zeta) a_j^{-1} q_{8,j} + b_{IV}(\zeta, \zeta) q_{8,j-1}, \\ \zeta &= \beta_0 / \rho_j. \end{aligned}$$

Решение системы (11) имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_{n_0} &= -A_1, \quad \Phi_{n_0-1} = \frac{A_1(q_{1,j-1}q_{8,j-1} - q_{4,j-1}q_{5,j-1}) + nA_2(q_{3,j-1}q_{8,j-1} - q_{4,j-1}q_{7,j-1})}{q_{2,j-1}q_{8,j-1} - q_{4,j-1}q_{6,j-1}}, \\ \Psi_{n_0} &= -nA_2, \quad \Psi_{n_0-1} = \frac{A_1(q_{2,j-1}q_{5,j-1} - q_{1,j-1}q_{6,j-1}) + nA_2(q_{2,j-1}q_{7,j-1} - q_{3,j-1}q_{6,j-1})}{q_{2,j-1}q_{8,j-1} - q_{4,j-1}q_{6,j-1}}, \\ u^e(\beta_0) &= U(\beta_0) \cos n\theta, \end{aligned}$$

где

$$U(\beta_0) = -(w_1\Phi_{n_0} + w_2\Phi_{n_0-1} + w_3\Psi_{n_0} + w_4\Psi_{n_0-1})A_3^{-1}.$$

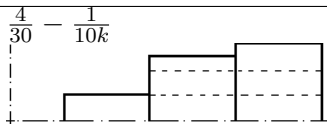
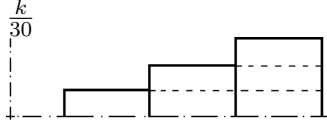
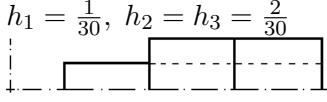
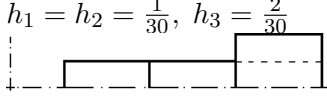
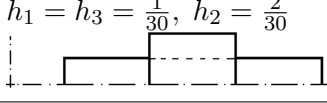
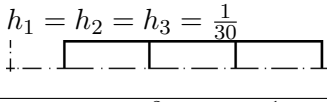
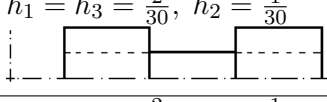
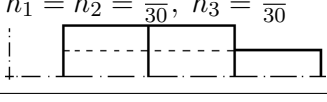
Таким образом, характеристическое уравнение относительно радиуса пластической зоны, соответствующего моменту касания возмущенной упругопластической границы с указанной окружностью $\rho = h/b = \alpha$, приобретает вид

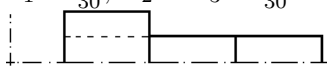
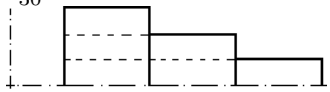
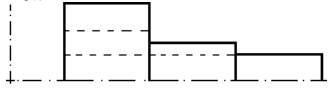
$$\alpha - \beta_0 - \delta |U(\beta_0)| = 0. \tag{12}$$

Соответствующее критическому значению радиуса пластической области $\beta_0 = \beta_0^*$, $\beta_0^* \in [\beta_{0*}, \alpha]$ (β_{0*} — критический радиус пластической зоны, при котором исследуемый диск **D** теряет устойчивость), критическое значение угловой скорости ω^* получаем с использованием формул для y и \tilde{y} из §2.

Характеристическое уравнение с параметром относительно критического радиуса пластической области, достигшей внешнего края диска, имеет вид

$$1 - \beta_0 - \delta (1 - U(\beta_0)) = 0, \tag{13}$$

h_k	$\beta_0^*; \omega^*/q$ ($\varkappa_i = 0$)	$\beta_0^*; \omega^*/q$ ($\varkappa_i = 1/3$)	$\beta_0^*; \omega^*/q$ ($\beta = 0$)
	0, 9932; 1, 4630 0, 9689; 1, 4623 0, 8564; 1, 4469	0, 9933; 1, 4090 0, 9695; 1, 4083 0, 8601; 1, 3944	0, 9930; 1, 5846 0, 9676; 1, 5838 0, 8478; 1, 5687
	0, 9933; 1, 4406 0, 9691; 1, 4398 0, 8581; 1, 4238	0, 9934; 1, 3847 0, 9697; 1, 3840 0, 8619; 1, 3695	0, 9930; 1, 5532 0, 9679; 1, 5524 0, 8501; 1, 5368
	0, 9931; 1, 5252 0, 9682; 1, 5245 0, 8520; 1, 5097	0, 9933; 1, 4478 0, 9690; 1, 4472 0, 8573; 1, 4343	0, 9928; 1, 6668 0, 9668; 1, 6661 0, 8418; 1, 6512
	0, 9932; 1, 4680 0, 9688; 1, 4671 0, 8562; 1, 4503	0, 9934; 1, 3820 0, 9698; 1, 3813 0, 8620; 1, 3669	0, 9930; 1, 5838 0, 9676; 1, 5830 0, 8479; 1, 5666
	0, 9928; 1, 6813 0, 9667; 1, 6807 0, 8405; 1, 6689	0, 9930; 1, 5581 0, 9679; 1, 5576 0, 8493; 1, 5480	0, 9924; 1, 8900 0, 9648; 1, 8893 0, 8241; 1, 8764
	0, 9929; 1, 6386 0, 9671; 1, 6378 0, 8439; 1, 6231	0, 9932; 1, 4898 0, 9686; 1, 4892 0, 8543; 1, 4777	0, 9925; 1, 8159 0, 9654; 1, 8151 0, 8305; 1, 7996
	0, 9929; 1, 6062 0, 9674; 1, 6054 0, 8464; 1, 5885	0, 9933; 1, 4404 0, 9691; 1, 4398 0, 8578; 1, 4271	0, 9926; 1, 7618 0, 9659; 1, 7609 0, 8348; 1, 7437
	0, 9925; 1, 8221 0, 9654; 1, 8215 0, 8296; 1, 8099	0, 9930; 1, 5935 0, 9675; 1, 5931 0, 8466; 1, 5850	0, 9921; 2, 0892 0, 9632; 2, 0886 0, 8050; 2, 0749

$h_1 = \frac{2}{30}, h_2 = h_3 = \frac{1}{30}$ 	0,9925; 1,8207 0,9654; 1,8200 0,8300; 1,8054	0,9930; 1,5468 0,9680; 1,5463 0,8501; 1,5369	0,9922; 2,0697 0,9634; 2,0689 0,8075; 2,0522
$\frac{4-k}{30}$ 	0,9924; 1,9373 0,9644; 1,9368 0,8199; 1,9253	0,9929; 1,6183 0,9673; 1,6180 0,8448; 1,6109	0,9919; 2,2619 0,9620; 2,2612 0,6868; 2,2397
$\frac{1}{10k}$ 	0,9923; 1,9485 0,9643; 1,9479 0,8190; 1,9352	0,9929; 1,6024 0,9674; 1,6020 0,8459; 1,5945	0,9919; 2,2709 0,9619; 2,2701 0,6898; 2,2468

Таблиця 1: Значення критического радиуса и относительной критической скорости.

где

$$U(\beta_0) = (A_1 b_I(\beta_0, \beta_0) + n A_2 b_{III}(\beta_0, \beta_0)) A_3^{-1} \leq 0 \quad \text{при } \delta \geq 0.$$

Полагая в (2) $\beta = 0$ и $C_1 = 0$, а в (5)-(7) — $\varepsilon_i = 0$ и $\varkappa_i = 0$, получаем характеристические уравнения (12) и (13) для радиально неоднородного сплошного ступенчатого диска.

Числовые примеры и обсуждение результатов

В табл. 1 приведены результаты решения задачи по определению критического радиуса пластической области и критической угловой скорости вращения, при которых упругопластическая граница достигает внешнего края трехступенчатого диска заданного профиля h_k , $k = 1, 2, 3$. Предполагается, что все кольцевые секции диска имеют одинаковую ширину $(1-\beta)/3$, где $\beta = 0, 2$ для кольцевого диска и $\beta = 0$ — для сплошного. При этом $n = 2$; $\nu_1 = \nu_2 = 0, 3$, $\nu_3 = 0, 2$, $\Sigma_1 = \Sigma_2 = 1, 1$, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0, 9$, $e_1 = 1$, $e_2 = 1, 1$, т.е. по физическим свойствам лишь третья секция несколько отличается от двух предыдущих; $\varepsilon_i = 0$, $\varepsilon_e = 0$, $\varkappa_e = 0$, тогда как $\varkappa_i = 0$ либо $\varkappa_i = 1/3$ (для кольцевого диска). В каждом из случаев в порядке возрастания малого параметра приведены решения характеристического уравнения (13) с $\delta = 10^{-7}$, $\delta = 10^{-5}$ и $\delta = 10^{-3}$.

Сравнение полученных результатов с приведенными в работе [24] для однородных ступенчатых дисков позволяет сделать вывод об эффективности предложенного способа учета их радиальной неоднородности по плотности и параметрам упругости. Принимая во внимание метод разложения [15, 16, 37], разработанный подход к анализу динамики возмущения формы границы нагруженного быстровращающегося радиально неоднородного ступенчатого диска открывает определенные возможности аналитического расчета потери несущей способности составных дисков произвольного профиля.

Литература

- [1] Гузь А.Н. Трехмерная теория упругой устойчивости при конечных докритических деформациях // Прикл. механика. — 1972. — 8, № 12. — С. 25–44.
- [2] Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии. — К.: Наук. думка, 1979. — 143 с.
- [3] Гузь А.Н., Бабич И.Ю. Трехмерная теория устойчивости деформируемых тел. — К.: Наук. думка, 1985. — 280 с.
- [4] Ишлинский А.Ю. Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости // Укр. матем. журн. — 1954. — 6, № 2. — С. 140–146.

- [5] Лейбензон Л.С. О применении гармонических функций к вопросу об устойчивости сферической и цилиндрической оболочек // Собр. тр. — М.: Изд-во АН СССР, 1951. — Т. 1. — С. 50–58.
- [6] *Ивлев Д.Д.* Механика пластических сред: в 2т. — Т. 2: Общие вопросы. Жестопластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды. — Москва: Физматлит, 2002. — 448 с.
- [7] *Ивлев Д.Д., Ершов Л.В.* Метод возмущений в теории упругопластического тела. — М.: Наука, 1978. — 208 с.
- [8] *Гузъ А.Н., Немши Ю.Н.* Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред. — К.: Вища шк., 1989. — 352 с.
- [9] *Аннин Б.Д., Черепанов Г.П.* Упруго-пластическая задача. — Новосибирск: Наука, 1983. — 240 с.
- [10] *Ильюшин А.А.* Пластичность. — М.; Л.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1948. — Ч. 1. — 378 с.
- [11] *Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д.* Математическая теория пластичности. — М.: Физматлит, 2001, 2003. — 704 с.
- [12] *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел: в 2т. — М.: Изд-во иностр. лит., 1954. — Т. 1. — 648 с.
- [13] *Соколовский В.В.* Теория пластичности. — М.: Высш. шк., 1969. — 608 с.
- [14] *Timoshenko S.P., Goodier J.N.* Theory of Elasticity. — New York: McGraw-Hill, 1934. — 415 p.
- [15] *Бицено К.Б., Граммель Р.* Техническая динамика: в 2т. — М.-Л.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1952. — Т. 2. — 640 с.
- [16] *Демьянушко И.В., Биргер И.А.* Расчет на прочность вращающихся дисков. — М.: Машиностроение, 1978. — 247 с.
- [17] *Кинасошвили Р.С.* Расчет на прочность дисков турбомашин. — М.: Оборонгиз, 1954. — 144 с.
- [18] *Маллинин Н.Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. — М.: Машиностроение, 1975. — 400 с.
- [19] *Рабинович В.П.* Прочность турбинных дисков. — М.: Машиностроение, 1969. — 151 с.
- [20] Mazière M., Besson J., Forest S., Tanguy B., Chalons H., Vogel F. Overspeed burst of elastoviscoplastic rotating disks: Part I — Analytical and numerical stability analyses // Eur. J. Mech. A-Solid. — 2009. — **28**, No 1. — P. 36–44.
- [21] Mazière M., Besson J., Forest S., Tanguy B., Chalons H., Vogel F. Overspeed burst of elastoviscoplastic rotating disks: Part II — Burst of a superalloy turbine disk // Eur. J. Mech. A-Solid. — 2009. — **28**, No 3. — P. 428–432.
- [22] Ершов Л.В., Ивлев Д.Д. О потере устойчивости вращающихся дисков // Изв. АН СССР. Отдел. техн. наук. — 1958. — № 1. — С. 124–125.
- [23] Ивлев Д.Д. О потере несущей способности вращающихся дисков, близких к круговому // Изв. АН СССР. Отдел. техн. наук. — 1957. — № 1. — С. 141–144.
- [24] Ли́ла Д.М. К анализу динамики возмущения формы границы вращающегося ступенчатого диска // Вісник ДонНУ. Сер. А: Природничі науки. — 2016. — № 1–2. — С. 55–65.
- [25] Ли́ла Д.М. Механизм потери устойчивости вращающегося составного плоского кругового диска // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2012. — **55**, № 3. — С. 111–120.
- [26] Ли́ла Д.М. О неустойчивости вращающегося упругопластического составного плоского кольцевого диска // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2013. — **56**, № 3. — С. 81–94.

- [27] Ли́ла Д.М. О неустойчивости вращающегося упругопластического ступенчатого кольцевого диска // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — **11**, № 4. — С. 124–152.
- [28] Ли́ла Д.М. О потере несущей способности вращающихся упруго-пластических дисков // Доп. НАН України. — 2012. — № 3. — С. 65–71.
- [29] Ли́ла Д.М. Потеря устойчивости вращающегося упругопластического радиально неоднородного ступенчатого кольцевого диска // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2014. — **57**, № 2. — С. 73–87.
- [30] Ли́ла Д.М. Эксцентричная форма неустойчивости вращающегося составного плоского кругового диска // Доп. НАН України. — 2012. — № 9. — С. 55–61.
- [31] Ли́ла Д.М. Эксцентричная форма потери устойчивости вращающегося ступенчатого диска // Вісник ДонНУ. Сер. А: Природничі науки. — 2016. — № 1–2. — С. 42–54.
- [32] Ли́ла Д.М. Эксцентричная форма потери устойчивости вращающегося упругопластического диска // Доп. НАН України. — 2011. — № 2. — С. 49–53.
- [33] Ли́ла Д.М., Мартынюк А.А. О неустойчивости вращающегося упругопластического составного плоского кругового диска // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2012. — **55**, № 1. — С. 145–158.
- [34] Ли́ла Д.М., Мартынюк А.А. О потере устойчивости вращающегося упругопластического кругового диска // Доп. НАН України. — 2011. — № 1. — С. 44–51.
- [35] Ли́ла Д.М., Мартынюк А.А. Развитие неустойчивости вращающегося упругопластического кольцевого диска // Прикл. механика. — 2012. — **48**, № 2. — С. 127–136.
- [36] Lila D.M., Martyniuk A.A. Analysis of dynamics of boundary shape perturbation of a rotating elastoplastic radially inhomogeneous plane circular disk: analytical approach // Appl. Math. — 2012. — **3**, No 5. — P. 451–456.
- [37] Lila D.M., Martyniuk A.A. Stability Loss of Rotating Elastoplastic Discs of the Specific Form // Appl. Math. — 2011. — **2**, No 5. — P. 579–585.
- [38] Би́цено К.Б., Граммель Р. Техническая динамика: в 2т. — М.–Л.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1950. — Т. 1. — 900 с.

Lila D.M.

PhD of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Bogdan Khmelnytsky Cherkassy National University

**TO THE ANALYSIS OF THE DYNAMICS OF THE PERTURBATION OF
THE FORM OF THE BORDER OF A ROTATING ELASTIC PLASTIC
RADIALLY INHOMOGENEOUS STEP RING WHEEL**

SUMMARY

In a linear formulation, the functions of static deflections of elastic bases in the form of fixed rectangular plates in a rigid rectangular A method for studying the shape of a boundary by the method of a small parameter and the possible loss of the bearing capacity of a rotating radially inhomogeneous step circular annular disk is proposed. The characteristic equation with respect to the critical radius of the plastic zone is obtained in the first approximation. The values of the critical angular velocity of rotation for various parameters of the disk are numerically found.

Key words: *elastoplastic problem, boundary shape perturbation method, rotating disk, loss of stability, loss of load-bearing capacity, critical angular velocity.*

Лиля Д.М.

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики і методики навчання математики, Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького

ДО АНАЛІЗУ ДИНАМІКИ ОБУРЕННЯ ФОРМИ КОРДОНУ ОБЕРТАЮЧОГО ПРУЖНОПЛАСТИЧНОГО РАДІАЛЬНО НЕОДНОРІДНОГО СТУПІНЧАСТОГО КІЛЬЦЕВОГО ДИСКУ

РЕЗЮМЕ

Запропоновано спосіб дослідження методом малого параметра динаміки обурення форми кордону і можливої втрати несучої здатності обертового радіально неоднорідного ступеневої кругового кільцевого диска. Отримано в першому наближенні характеристичне рівняння щодо критичного радіуса пластичної зони. Чисельно знайдено значення критичної кутової швидкості обертання при різних параметрах диска.

Ключові слова: *пружнопластична задача, метод обурення форми кордону, обертаючий диск, втрата стійкості, втрата несучої здатності, критична кутова швидкість*