УДК 519.832.3+519.711.2

ЕДИНСТВЕННОЕ РЕШЕНИЕ В ОБЩЕЙ СТРОГОЙ ЗАДАЧЕ УСТРАНЕНИЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ТРЁХМОДЕЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ С ПРИНЦИПОМ ГАРАНТИРОВАНО МИНИМАЛЬНЫХ АБСОЛЮТНЫХ ОТКЛОНЕНИЙ

В.В. Романюк
Хмельницкий национальный университет, г. Хмельницкий

Рассматривается обобщённая задача строгого устранения трёхэлементной (трёхмодельной) неопределённости, где критерием такого устранения является применение специального вероятностного распределения на задаваемом трёхэлементном множестве. Это вероятностное распределение является элементом множества оптимальных стратегий второго игрока в матричной 3×3 -игре, порождаемой условием полной неопределённости в минимизации абсолютных отклонений принимаемых значений от реального. Доказывается единственность решения задачи определения такого вероятностного распределения по критерию максимального приближения его к равномерному распределению.

Ключевые слова: неопределённость, трёхэлементная неопределённость, минимизация максимально возможных отклонений, оптимальная стратегия второго игрока, континуум оптимальных стратегий.

Введение. Задачи устранения неопределённостей являются актуальными как с теоретической, так и с практической точек зрения, поскольку неопределённости возникают в любом процессе количественного оценивания. Наиболее простым типом неопределённостей следует считать параметрические неопределённости, где на конечном или бесконечном множестве значений параметра необходимо установить единственное, характеризующее, собственно, данный параметр [1]. Впрочем, существуют и менее строгие требования, где единственное значение параметра необходимо выбрать из континуального множества, границы (граница) которого определены границами (границей) исходного множества возможных (зафиксированных) значений параметра. Что касается наиболее сложных типов неопределённостей и соответствующих им задач, то таковыми являются объектные неопределённости, в которых каждый из объектов представляется своим набором параметров [2]. В качестве объекта может выступать как физическая система или комплекс, так и логическая (то есть математическая модель, критерий, принцип, решающее правило, нейронная сеть).

Главным образом, принцип нестрогого устранения неопределённостей, то есть выбор решения (точки или, возможно, интервала) из континуального множества, границы которого определены границами исходного множества зафиксированных значений параметра, состоит в вычислении ожидаемого значения [3, 4], которым в частном случае выступает среднее арифметическое (СА). Задача строгого устранения неопределённостей, то есть выбор значения параметра из предоставляемого изначально множества, решается с помощью соответствующего критерия такого выбора, коим может послужить [2, 5, 6] минимизация максимально возможных потерь (отклонений). И, конечно же, если устранять объектные неопределённости в форме нескольких математических моделей [7], то в случае с одним их выходным параметром упомянутый критерий предусматривает антагонистическую модель с реализацией наиболее осторожной стратегии второго игрока, персонифицирующего исследователя [5].

Постановка задачи. Будем рассматривать строгую задачу устранения неопределённостей с минимальным количеством значений, которые могут быть как значениями некоего параметра v, так и модельными значениями. Это количество равняется трём, поскольку двухзначная неопределённость устраняется тривиальным равновероятным выбором, если не оговорены дополнительные условия перевеса одного из объектов в неопределённости. Таким образом, задача состоит в выборе одной из трёх однопараметрических математических моделей, которые в каждый момент фиксации значений их выходного параметра дают трёхэлементное множество

$$\{v_i\}_{i=1}^{3} = \{v_1, v_1 + a, v_1 + a + b\}, \ \ v_1 \in \mathbb{R}, \ \ a > 0, \ \ b > 0. \tag{1}$$

Естественно, однопараметричность позволяет свести поставленную задачу к строгому выбору

$$\hat{v} \in \{v_1, v_1 + a, v_1 + a + b\} \tag{2}$$

оценки $\hat{v}$ исследуемого параметра v.

Строгая задача устранения однопараметрической трёхмодельной неопределённости по данным (1). Понятно, что СА в строгом выборе (2) применимо лишь в случае $a = b$. Поэтому решим задачу такого выбора, минимизируя максимально возможные отклонения (МВО)

$$u_{kj} = |v_k - v_j| \quad \forall \ k = \overline{1, 3} \ \text{ и } \ \forall \ j = \overline{1, 3} \tag{3}$$

в игре

$$\left\langle \{m_k\}_{k=1}^{3}, \{s_j\}_{j=1}^{3}, \left[u_{kj}\right]_{3\times 3} \right\rangle \tag{4}$$

с множеством $\{m_k\}_{k=1}^{3}$ чистых стратегий первого игрока, указывающих на соответствующие модельные значения во множестве (1), и с множеством $\{s_j\}_{j=1}^{3}$ чистых стратегий второго игрока (исследователя), предписывающих выбор соответствующих модельных значений во множестве (1). Сначала покажем, что в игре (4) при МВО (3) исследователь обладает континуумом оптимальных стратегий (ОС).

Лемма. В игре (4)

$$\left\langle \{m_k\}_{k=1}^{3}, \{s_j\}_{j=1}^{3}, \begin{bmatrix} 0 & a & a+b \\ a & 0 & b \\ a+b & b & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \tag{5}$$

с целью минимизировать МВО (3) исследователь обладает континуумом ОС

$$\breve{\boldsymbol{Q}} = \begin{bmatrix} \breve{q}_1 & \breve{q}_2 & \breve{q}_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{Q} \tag{6}$$

в пределах фундаментального двумерного симплекса (равностороннего треугольника)

$$\mathcal{Q} = \left\{ \boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : q_j \in [0;\, 1] \;\forall\; j = \overline{1,\, 3},\, q_1 + q_2 + q_3 = 1 \right\}, \tag{7}$$

причём

$$\breve{\boldsymbol{Q}} = \begin{bmatrix} \breve{q}_1 & \breve{q}_2 & \breve{q}_3 \end{bmatrix} \in \breve{\mathcal{Q}} =$$

$$= \left\{ \breve{\boldsymbol{Q}} = \begin{bmatrix} \frac{b}{2a}\left(\frac{a-b}{b} + \lambda\right) & \frac{a+b}{2a}(1-\lambda) & \frac{1}{2}\lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \lambda \in [0;\, 1] \right\} \subset \mathcal{Q} \quad \text{для} \quad a > b, \tag{8}$$

$$\breve{\boldsymbol{Q}} = \begin{bmatrix} \breve{q}_1 & \breve{q}_2 & \breve{q}_3 \end{bmatrix} \in \breve{\mathcal{Q}} = \left\{ \breve{\boldsymbol{Q}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\lambda & 1-\lambda & \frac{1}{2}\lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \lambda \in [0;\, 1] \right\} \subset \mathcal{Q} \quad \text{для} \quad a = b, \tag{9}$$

$$\breve{\boldsymbol{Q}} = \begin{bmatrix} \breve{q}_1 & \breve{q}_2 & \breve{q}_3 \end{bmatrix} \in \breve{\mathcal{Q}} =$$

$$= \left\{ \breve{\boldsymbol{Q}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\lambda & \frac{a+b}{2b}(1-\lambda) & \frac{a}{2b}\left(\frac{b-a}{a} + \lambda\right) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \lambda \in [0;\, 1] \right\} \subset \mathcal{Q} \quad \text{для} \quad a < b. \tag{10}$$

Доказательство. Применяя метод задачи линейного программирования (ЗЛП), построим по отношению к увеличенной на единицу матрице игры (5) расширенную 4×7-матрицу $[g_{zw}]_{4\times 7}$, в которой элементы $\{g_{z1}\}_{z=1}^{3}$ являются свободными членами в ограничениях, элементы $\{g_{4w}\}_{w=2}^{4}$ равны коэффициентам целевой функции (ЦФ), элементы с пятого по седьмой столбик получаются из введения этих столбиков в качестве базисных, а элемент g_{41} указывает значение ЦФ, взятое с противоположным знаком. Вводя в базис элемент g_{32} на первой итерации, последовательно получаем:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a_1 & c_1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a_1 & 1 & b_1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & c_1 & b_1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{11}$$

$$\begin{bmatrix} c_0/c_1 & 0 & ac_2/c_1 & c_0c_2/c_1 & 1 & 0 & -1/c_1 \\ b/c_1 & 0 & -ab/c_1 & bc_2/c_1 & 0 & 1 & -a_1/c_1 \\ 1/c_1 & 1 & b_1/c_1 & 1/c_1 & 0 & 0 & 1/c_1 \\ -1/c_1 & 0 & ac_1 & c_0/c_1 & 0 & 0 & -1/c_1 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix} 1/c_2 & 0 & a/c_0 & 1 & c_1/(c_0c_2) & 0 & -1/(c_0c_2) \\ 0 & 0 & -2ab/c_0 & 0 & -b/c_0 & 1 & -a/c_0 \\ 1/c_2 & 1 & b/c_0 & 0 & -1/(c_0c_2) & 0 & c_1/(c_0c_2) \\ -2/c_2 & 0 & 0 & 0 & -1/c_2 & 0 & -1/c_2 \end{bmatrix}, \tag{13}$$

где $a_1 = a+1$, $b_1 = b+1$, $c_0 = a+b$, $c_1 = a+b+1$, $c_2 = a+b+2$. На второй итерации в базис был введён элемент g_{14}. Из (13) выписываем одну из ОС исследователя

$$\breve{\boldsymbol{Q}} = [\breve{q}_1 \quad \breve{q}_2 \quad \breve{q}_3] = (1/c_2 + 1/c_2)^{-1} \cdot [1/c_2 \quad 0 \quad 1/c_2] = [1/2 \quad 0 \quad 1/2]. \tag{14}$$

Но после первой итерации в эквивалентных преобразованиях (11) – (13) в базис можно вводить и элемент g_{24}: имеем (11), (12),

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2a & 0 & 1 & -c_0/b & a/b \\ 1/c_2 & 0 & -a/c_2 & 1 & 0 & c_1/(bc_2) & -a_1/(bc_2) \\ 1/c_2 & 1 & (b+2)/c_2 & 0 & 0 & -1/(bc_2) & b_1/(bc_2) \\ -2/c_2 & 0 & 2a/c_2 & 0 & 0 & -c_0/(bc_2) & (a-b)/(bc_2) \end{bmatrix}, \tag{15}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1/(2a) & -c_0/(2ab) & 1/(2b) \\ 1/c_2 & 0 & 0 & 1 & 1/(2c_2) & 1/(2b) & -(a+2)/(2bc_2) \\ 1/c_2 & 1 & 0 & 0 & -(b+2)/(2ac_2) & 1/(2a) & 1/(2c_2) \\ -2/c_2 & 0 & 0 & 0 & -1/c_2 & 0 & -1/c_2 \end{bmatrix}, \tag{16}$$

где введение в базис элемента g_{13} на третьей итерации очевидно для условия $2a/c_2 \geq (a-b)/(bc_2)$, а из (16) опять получаем (14). ОС исследователя (14) выплывет и при условии $2a/c_2 < (a-b)/(bc_2)$, так как будет (11), (12), (15), после чего в базис вводится элемент g_{17} и окончательно получаются матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2b & 0 & b/a & -c_0/a & 1 \\ 1/c_2 & 0 & (a+2)/c_2 & 1 & a_1/(ac_2) & -1/(ac_2) & 0 \\ 1/c_2 & 1 & -b/c_2 & 0 & -b_1/(ac_2) & c_1/(ac_2) & 0 \\ -2/c_2 & 0 & 2b/c_2 & 0 & (b-a)/(ac_2) & -c_0/(ac_2) & 0 \end{bmatrix} \tag{17}$$

и (16) благодаря тому, что $(b-a)/(ac_2) < 0$ при оговоренном условии, а на последней итерации в базис вводится элемент g_{13}. Далее, допустим, что $a > b$. Тогда на первой итерации в базис можно вводить элемент g_{13}. Из (11) имеем

$$\begin{bmatrix} 1/a_1 & 1/a_1 & 1 & c_1/a_1 & 1/a_1 & 0 & 0 \\ a/a_1 & a(a+2)/a_1 & 0 & ab/a_1 & -1/a_1 & 1 & 0 \\ (a-b)/a_1 & ac_2/a_1 & 0 & -bc_2/a_1 & -b_1/a_1 & 0 & 1 \\ -1/a_1 & a/a_1 & 0 & -b/a_1 & -1/a_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{18}$$

$$\begin{bmatrix} c_0/(ac_2) & 0 & 1 & c_0/a & c_1/(ac_2) & 0 & -1/(ac_2) \\ 2b/c_2 & 0 & 0 & 2b & b/c_2 & 1 & -(a+2)/c_2 \\ (a-b)/(ac_2) & 1 & 0 & -b/a & -b_1/(ac_2) & 0 & a_1/(ac_2) \\ -2/c_2 & 0 & 0 & 0 & -1/c_2 & 0 & -1/c_2 \end{bmatrix}, \tag{19}$$

где при введении в базис элемента g_{32} на второй итерации использовано то, что

$$\frac{a}{a_1} \cdot \left(\frac{a(a+2)}{a_1} \right)^{-1} = \frac{1}{a+2}, \quad \frac{a-b}{a_1} \cdot \left(\frac{ac_2}{a_1} \right)^{-1} = \frac{a-b}{ac_2}, \quad \frac{1}{a+2} - \frac{a-b}{ac_2} = \frac{2ba_1}{a(a+2)c_2} > 0.$$

На основании (19) выписываем ещё одну из ОС исследователя

$$\breve{\boldsymbol{Q}} = [\breve{q}_1 \quad \breve{q}_2 \quad \breve{q}_3] = \left[\frac{a-b}{2a} \quad \frac{a+b}{2a} \quad 0 \right]. \tag{20}$$

Пятым вариантом решения ЗЛП является первоначальное введение в базис элемента g_{14}. Из (11) имеем

$$\begin{bmatrix} 1/c_1 & 1/c_1 & a_1/c_1 & 1 & 1/c_1 & 0 & 0 \\ a/c_1 & ac_2/c_1 & -ab/c_1 & 0 & -b_1/c_1 & 1 & 0 \\ c_0/c_1 & c_0c_2/c_1 & bc_2/c_1 & 0 & -1/c_1 & 0 & 1 \\ -1/c_1 & c_0/c_1 & b/c_1 & 0 & -1/c_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{21}$$

$$\begin{bmatrix} 1/c_2 & 0 & (a+2)/c_2 & 1 & a_1/(ac_2) & -1/(ac_2) & 0 \\ 1/c_2 & 1 & -b/(c_2) & 0 & -b_1/(ac_2) & c_1/(ac_2) & 0 \\ 0 & 0 & 2b & 0 & b/a & -c_0/a & 1 \\ -2/c_2 & 0 & 2b/c_2 & 0 & (b-a)/(ac_2) & -c_0/(ac_2) & 0 \end{bmatrix}, \tag{22}$$

$$\begin{bmatrix} 1/c_2 & 0 & 0 & 1 & 1/(2c_2) & 1/(2b) & -(a+2)/(2bc_2) \\ 1/c_2 & 1 & 0 & 0 & -(b+2)/(2ac_2) & 1/(2a) & 1/(2c_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/(2a) & -c_0/(2ab) & 1/(2b) \\ -2/c_2 & 0 & 0 & 0 & -1/c_2 & 0 & -1/c_2 \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Здесь в базис после первой итерации введён элемент g_{22}, а введение в базис элемента g_{33} на третьей итерации очевидно. Из (23) получается та же стратегия (14). Но после первой итерации в эквивалентных преобразованиях (11), (21) – (23) в базис можно вводить и элемент g_{32}. Тогда последовательно преобразовываем (11) в (21) и (13), откуда опять получаем (14). Очевидно, континуум ОС (8) получается линейной комбинацией точек (14) и (20) на равностороннем треугольнике (7).

При $a = b$ все шесть вариантов эквивалентных преобразований матрицы (11) сохраняются, после чего, подставляя $a = b$ в (8), получаем континуум ОС (9).

В случае $a < b$ имеют место четыре преобразования с расширенной матрицей: (11) – (13); (11), (12), (15), (16); (11), (21) – (23) для условия $2b/c_2 \geq (b-a)/(ac_2)$; (11), (21), (13). Все они дают стратегию (14). Для условия $2b/c_2 < (b-a)/(ac_2)$ будут матрицы (11), (21), (22), после чего в базис вводится элемент g_{35} и окончательно получаются матрицы

$$\begin{bmatrix} 1/c_2 & 0 & -a/c_2 & 1 & 0 & c_1/(bc_2) & -a_1/(bc_2) \\ 1/c_2 & 1 & (b+2)/c_2 & 0 & 0 & -1/(bc_2) & b_1/(bc_2) \\ 0 & 0 & 2a & 0 & 1 & -c_0/b & a/b \\ -2/c_2 & 0 & 2a/c_2 & 0 & 0 & -c_0/(bc_2) & (a-b)/(bc_2) \end{bmatrix} \tag{24}$$

и (23) благодаря тому, что $(a-b)/(bc_2) < 0$, откуда снова получаем ОС (14). Ещё одно преобразование начинается с введения в базис элемента g_{33}: имеем (11),

$$\begin{bmatrix} (b-a)/b_1 & -ac_2/b_1 & 0 & bc_2/b_1 & 1 & 0 & -a_1/b_1 \\ b/b_1 & ab/b_1 & 0 & b(b+2)/b_1 & 0 & 1 & -1/b_1 \\ 1/b_1 & c_1/b_1 & 1 & 1/b_1 & 0 & 0 & 1/b_1 \\ -1/b_1 & -a/b_1 & 0 & b/b_1 & 0 & 0 & -1/b_1 \end{bmatrix}, \tag{25}$$

$$\begin{bmatrix} (b-a)/(bc_2) & -a/b & 0 & 1 & b_1/(bc_2) & 0 & -a_1/(bc_2) \\ 2a/c_2 & 2a & 0 & 0 & -(b+2)/c_2 & 1 & a/c_2 \\ c_0/(bc_2) & c_0/b & 1 & 0 & -1/(bc_2) & 0 & c_1/(bc_2) \\ -2/c_2 & 0 & 0 & 0 & -1/c_2 & 0 & -1/c_2 \end{bmatrix}, \tag{26}$$

где при введении в базис элемента g_{14} на второй итерации использовано то, что

$$\frac{b-a}{b+1} \cdot \left(\frac{bc_2}{b+1} \right)^{-1} = \frac{b-a}{bc_2}, \quad \frac{b}{b+1} \cdot \left(\frac{b(b+2)}{b+1} \right)^{-1} = \frac{1}{b+2}, \quad \frac{b-a}{bc_2} - \frac{1}{b+2} = -\frac{2a(b+1)}{b(b+2)c_2} < 0.$$

Из (26) выписываем ещё одну из ОС исследователя

$$\breve{\mathbf{Q}} = [\breve{q}_1 \quad \breve{q}_2 \quad \breve{q}_3] = \left(\frac{a+b}{bc_2} + \frac{b-a}{bc_2} \right)^{-1} \cdot \left[0 \quad \frac{a+b}{bc_2} \quad \frac{b-a}{bc_2} \right] = \left[0 \quad \frac{a+b}{2b} \quad \frac{b-a}{2b} \right], \tag{27}$$

которая в линейной комбинации с ОС (14) на равностороннем треугольнике (7) порождает континуум ОС (10). Лемма доказана.

Теперь, поскольку в игре (4) при МВО (3) исследователь обладает континуумом ОС, постаёт иная задача – выбрать одну из этих стратегий при трёх возможных соотношениях a и b. Критерием выбора такой стратегии

$$\breve{\mathbf{Q}}^* = \left[\breve{q}_1^* \quad \breve{q}_2^* \quad \breve{q}_3^* \right] \in \breve{\mathcal{Q}} \tag{28}$$

является максимальная близость вероятностей $\{\breve{q}_j^*\}_{j=1}^3$ к друг другу в пределах отрезка $\breve{\mathcal{Q}}$ или максимальная близость вероятностного распределения в (28) к равномерному распределению из равностороннего треугольника (7).

Теорема. Задача выбора (28) в смысле максимальной близости вероятностей $\{\breve{q}_j^*\}_{j=1}^3$ к друг другу в пределах отрезка $\breve{\mathcal{Q}}$ из точек (8) – (10) по квадратичной метрике эквивалентна задаче выбора (28) в смысле максимальной близости элемента $\breve{\boldsymbol{Q}}^*$ к равномерному распределению из равностороннего треугольника (7), содержащего этот отрезок, по этой же метрике, причём

$$\breve{\boldsymbol{Q}}^* = \left[\frac{2a^2+ab+b^2}{4d} \quad \frac{a^2+2ab+b^2}{4d} \quad \frac{a^2+ab+2b^2}{4d}\right], \tag{29}$$

где $d = a^2 + b^2 + ab$, независимо от соотношения между a и b, а соответствующая задача выбора (28) для (9) имеет точное решение.

Доказательство. Решим задачу

$$\arg\min_{\breve{\boldsymbol{Q}}\in\breve{\mathcal{Q}}\subset\mathcal{Q}}\left(\sum_{j=1}^{3}\sum_{p=1}^{j-1}\left(\breve{q}_p-\breve{q}_j\right)^2\right) = \arg\min_{[\breve{q}_1 \quad \breve{q}_2 \quad \breve{q}_3]\in\breve{\mathcal{Q}}\subset\mathcal{Q}}\left(\sum_{j=1}^{3}\sum_{p=1}^{j-1}\left(\breve{q}_p-\breve{q}_j\right)^2\right) \tag{30}$$

определения вероятностей $\{\breve{q}_j^*\}_{j=1}^3$ в максимальном сближении их к друг другу в смысле квадратичной метрики и задачу

$$\arg\min_{\breve{\boldsymbol{Q}}\in\breve{\mathcal{Q}}\subset\mathcal{Q}}\left(\sum_{j=1}^{3}\left(\breve{q}_j-\frac{1}{3}\right)^2\right) = \arg\min_{[\breve{q}_1 \quad \breve{q}_2 \quad \breve{q}_3]\in\breve{\mathcal{Q}}\subset\mathcal{Q}}\left(\sum_{j=1}^{3}\left(\breve{q}_j-\frac{1}{3}\right)^2\right) \tag{31}$$

определения элемента $\breve{\boldsymbol{Q}}^*$ в максимальном сближении его к равномерному распределению $[1/3 \quad 1/3 \quad 1/3]$. Если $a > b$, то необходимо решить задачу выбора

$$\breve{\boldsymbol{Q}}^* = \left[\breve{q}_1^* \quad \breve{q}_2^* \quad \breve{q}_3^*\right] \in \breve{\mathcal{Q}} = \left\{\breve{\boldsymbol{Q}} = \left[\frac{b}{2a}\left(\frac{a-b}{b}+\lambda\right) \quad \frac{a+b}{2a}(1-\lambda) \quad \frac{1}{2}\lambda\right] \in \mathbb{R}^3 : \lambda\in[0;1]\right\} \subset \mathcal{Q}. \tag{32}$$

Для задачи (30) имеем:

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{p=1}^{j-1}\left(\breve{q}_p-\breve{q}_j\right)^2 = \left(\breve{q}_1-\breve{q}_2\right)^2+\left(\breve{q}_1-\breve{q}_3\right)^2+\left(\breve{q}_2-\breve{q}_3\right)^2 =$$

$$= \frac{\left((2b+a)\lambda-2b\right)^2+(a-b)^2(1-\lambda)^2+\left(a+b-\lambda(2a+b)\right)^2}{4a^2} = h_1(\lambda), \tag{33}$$

$$\frac{dh_1}{d\lambda} = \frac{3}{2a^2}\left[2\lambda\left(a^2+b^2+ab\right)-\left(a^2+2b^2+ab\right)\right]. \tag{34}$$

Первая производная (34) функции (33) имеет единственный нуль

$$\lambda = \lambda^* = \frac{a^2+2b^2+ab}{2d} \tag{35}$$

и, поскольку

$$\frac{d^2h_1}{d\lambda^2} = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{3}{2a^2}\left[2\lambda\left(a^2+b^2+ab\right)-\left(a^2+2b^2+ab\right)\right]\right) = \frac{3d}{a^2} > 0,$$

точка (35) является точкой минимума функции (33). В свою очередь, для задачи (31) получаем

$$\sum_{j=1}^{3}\left(\breve{q}_j-\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\left(\frac{a-b}{b}+\lambda\right)-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{a+b}{2a}(1-\lambda)-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{3}\right)^2 = f_1(\lambda), \tag{36}$$

$$\frac{df_1}{d\lambda} = \frac{a^2+b^2+ab}{a^2}\lambda-\frac{a^2+2b^2+ab}{2a^2}, \tag{37}$$

где первая производная (37) функции (36) имеет единственный нуль (35), который в силу

$$\frac{d^2 f_1}{d\lambda^2} = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{a^2+b^2+ab}{a^2}\lambda - \frac{a^2+2b^2+ab}{2a^2}\right) = \frac{d}{a^2} > 0$$

является точкой минимума функции (36). Подставляя (35) в (32), получаем

$$\breve{q}_1^* = \frac{2a^2+ab+b^2}{4d}, \quad \breve{q}_2^* = \frac{a^2+2ab+b^2}{4d}, \quad \breve{q}_3^* = \frac{a^2+ab+2b^2}{4d}$$

и однозначное решение (29).

Если $a < b$, то необходимо решить задачу выбора

$$\breve{\boldsymbol{Q}}^* = \begin{bmatrix}\breve{q}_1^* & \breve{q}_2^* & \breve{q}_3^*\end{bmatrix} \in \breve{\mathcal{Q}} = \left\{\breve{\boldsymbol{Q}} = \left[\frac{1}{2}\lambda \quad \frac{a+b}{2b}(1-\lambda) \quad \frac{a}{2b}\left(\frac{b-a}{a}+\lambda\right)\right] \in \mathbb{R}^3 : \lambda \in [0;\, 1]\right\} \subset \mathcal{Q}. \quad (38)$$

Для задачи (30) имеем:

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{p=1}^{j-1}\left(\breve{q}_p - \breve{q}_j\right)^2 = \left(\breve{q}_1 - \breve{q}_2\right)^2 + \left(\breve{q}_1 - \breve{q}_3\right)^2 + \left(\breve{q}_2 - \breve{q}_3\right)^2 =$$

$$= \frac{\left(\lambda(2b+a)-a-b\right)^2 + (a-b)^2(1-\lambda)^2 + \left(2a-\lambda(2a+b)\right)^2}{4b^2} = h_2(\lambda), \quad (39)$$

$$\frac{dh_2}{d\lambda} = \frac{3}{2b^2}\left[2\lambda\left(a^2+b^2+ab\right) - \left(2a^2+b^2+ab\right)\right]. \quad (40)$$

Первая производная (40) функции (39) имеет единственный нуль

$$\lambda = \lambda^* = \frac{2a^2+b^2+ab}{2d} \quad (41)$$

и, поскольку

$$\frac{d^2 h_2}{d\lambda^2} = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{3}{2b^2}\left[2\lambda\left(a^2+b^2+ab\right) - \left(2a^2+b^2+ab\right)\right]\right) = 3b^{-2}d > 0,$$

точка (41) является точкой минимума функции (39). В свою очередь, для задачи (31) получаем

$$\sum_{j=1}^{3}\left(\breve{q}_j - \frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2b}(1-\lambda) - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{2b}\left(\frac{b-a}{a}+\lambda\right) - \frac{1}{3}\right)^2 = f_2(\lambda), \quad (42)$$

$$\frac{df_2}{d\lambda} = \frac{a^2+b^2+ab}{b^2}\lambda - \frac{2a^2+b^2+ab}{2b^2}, \quad (43)$$

где первая производная (43) функции (42) имеет единственный нуль (41), который в силу

$$\frac{d^2 f_2}{d\lambda^2} = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{a^2+b^2+ab}{b^2}\lambda - \frac{2a^2+b^2+ab}{2b^2}\right) = \frac{a^2+b^2+ab}{b^2} > 0$$

является точкой минимума функции (42). Подставляя (41) в (38), получаем

$$\breve{q}_1^* = \frac{2a^2+ab+b^2}{4d}, \quad \breve{q}_2^* = \frac{a^2+2ab+b^2}{4d}, \quad \breve{q}_3^* = \frac{a^2+ab+2b^2}{4d}$$

и однозначное решение (29).

Наконец, однозначное решение (29) для случая с $a = b$ очевидным образом выплывает из эквивалентности континуума ОС в (8) и континуума ОС в (10) континууму ОС в (9) для такого случая. И легко видеть, что

$$\breve{\boldsymbol{Q}}^* = \begin{bmatrix}1/3 & 1/3 & 1/3\end{bmatrix} \text{ для } a = b, \quad (44)$$

то есть задача выбора (28) для (9) в смысле максимального сближения вероятностей в $\breve{\boldsymbol{Q}}^*$ к друг другу имеет точное решение. Теорема доказана.

Итак, задача строгого выбора (2) решается применением вероятностного распределения (29) на трёхэлементном множестве (1). Таким способом, минимизировав МВО (3), устраняется любая однопараметрическая трёхмодельная (трёхэлементная) неопределённость по данным (1).

Выводы. Само по себе устранение неопределённости невозможно, поэтому его следует понимать только в смысле применения определённого отображения по отношению к множеству, индуцирующего данную неопределённость. В настоящей статье таким отображением послужило вероятностное распределение (29) на множестве (1), однако его практическое применение в полном объёме возможно при достаточно большом количестве реализаций выбора (2). К тому же, вероятностное распределение (29) получено из континуума ОС $\breve{\mathcal{Q}}$ по критерию максимального приближения этого распределения к равномерному (один из критериев супероптимальности [8, 9]), а множество $\breve{\mathcal{Q}}$ является результатом минимизации МВО (3) в соответствующей игре (5). Другими словами, результат так называемого строгого устранения однопараметрической трёхмодельной неопределённости по данным (1) зависит от двух факторов: способа минимизации соотношений между элементами множества (1) и способа получения стратегии (28) из множества $\breve{\mathcal{Q}}$ (если только оно содержит больше одного элемента). Исследование же результата выбора (2) по распределению (29) за ограниченное количество обращений (повторов) к строгой задаче устранения однопараметрической трёхмодельной неопределённости по данным (1) опирается на модель практической реализации смешанной стратегии [6, 10], учитывающей предысторию [2, 4, 6, 10 – 13] процесса.

РЕЗЮМЕ

Розглядається узагальнена задача строгого усунення трьохелементної (тримодельної) невизначеності, де критерієм такого усунення є застосування спеціального імовірнісного розподілу на трьохелементній множині, що задається. Цей імовірнісний розподіл є елементом множини оптимальних стратегій другого гравця у матричній 3×3 -грі, породжуваній умовою повної невизначеності в мінімізації абсолютних відхилень прийнятих значень від реального. Доводиться одиничність розв'язку задачі визначення такого імовірнісного розподілу за критерієм максимального наближення його до рівномірного розподілу.

Ключові слова: невизначеність, трьохелементна невизначеність, мінімізація максимально можливих відхилень, оптимальна стратегія другого гравця, континуум оптимальних стратегій.

SUMMARY

There is considered a generalized problem of strict convergence in three-element (three-model) uncertainty, where a criterion of such convergence is the application of a specified probabilistic distribution on the being given three-element set. This probabilistic distribution is an element of the set of optimal strategies of the second player in the matrix 3×3 game, being generated with the total uncertainty condition in minimizing absolute deviations of the being assumed values from the real one. There is proved the solution uniqueness in the problem of determining such probabilistic distribution for the criterion of drawing it nearest to the uniform distribution.

Keywords: uncertainty, three-element uncertainty, minimizing maximum possible deviations, second player optimal strategy, optimal strategies continuum.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноруцкий И.Г. Методы принятия решений / И.Г. Черноруцкий. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 416 с.
2. Трухаев Р.И. Модели принятия решений в условиях неопределённости / Р.И. Трухаев. – М.: Наука, 1981. – 258 с.
3. Тоценко В.Г. Методы и системы поддержки принятия решений. Алгоритмический аспект / В.Г. Тоценко. – К.: Наукова думка, 2002. – 381 с.
4. Волошин О.Ф. Моделі та методи прийняття рішень / О.Ф. Волошин, С.О. Мащенко. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2010. – 336 с.
5. Воробьёв Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков / Н.Н. Воробьёв. – М.: Наука, 1985. – 272 с.
6. Александров В.В. Смешанные стратегии тестирования в задачах проверки качества работы алгоритмов стабилизации / В.В. Александров, А.В. Лебедев, С.С. Лемак // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика. – 2009. – № 3. – С. 50-53.
7. Nilsen T. Models and model uncertainty in the context of risk analysis / T. Nilsen, T. Aven // Reliability Engineering & System Safety. – 2003. – Vol. 79, Iss. 3. – P. 309-317.
8. Romanuke V.V. Superoptimal mixed strategies in antagonistic games as the advantaged subset of the optimal mixed strategies set / V.V. Romanuke // Bulletin of Donetsk National University. Series A. Natural Sciences. – 2010. – No 2. – P. 289-298.
9. Harsanyi J.C. A General Theory of Equilibrium Selection in Games / J.C. Harsanyi, R. Selten. – Cambridge Mass.: The MIT Press, 1988. – 396 p.
10. Романюк В.В. Метод реалізації оптимальних змішаних стратегій у матричній грі з порожньою множиною сідлових точок у чистих стратегіях з відомою кількістю партій гри / В.В. Романюк // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2009. – № 2. – С. 45-52.
11. Горбань И. И. Теория гиперслучайных явлений / И. И. Горбань. – К.: ИПММС НАН Украины, ГП "УкрНИУЦ", 2007. – 184 с.
12. Горбань И.И. Теория гиперслучайных явлений: физические и математические основы / И.И. Горбань. – К.: Наукова думка, 2011. – 318 с.
13. Горбань І.І. Теорія ймовірностей і математична статистика для наукових працівників та інженерів / І.І. Горбань. – К.: ІПММС НАН України, 2003. – 244 с.

Поступила в редакцию 22.12.2012 г.