

УДК 539.3

**КОЭФФИЦИЕНТЫ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ТЕРМОУПРУГОМ ИЗГИБЕ ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН С ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННЫМ РАЗРЕЗОМ В СЛУЧАЕ СИММЕТРИЧНОГО ТЕПЛООБМЕНА**

*Н.С. Бондаренко, А.С. Гольцев*

Для описания термоупругого изгиба изотропных пластин, содержащих теплоизолированный разрез, использованы уравнения обобщённой теории тонкостенных элементов конструкций в варианте  $\{1,0\}$ -аппроксимации. Рассмотрен случай симметричного теплообмена с внешней средой. Используемая уточнённая теория позволила напрямую находить коэффициенты интенсивности напряжений для поперечного и продольного сдвига и уйти от понятия коэффициента интенсивности моментов при антисимметричном распределении напряжений. Исследовано влияние параметра теплообмена на коэффициенты интенсивности напряжений.

*Ключевые слова:* изотропная пластина, теплоизолированный разрез,  $\{1,0\}$ -аппроксимация, термоупругость, изгиб, коэффициенты интенсивности напряжений.

**Введение.** Пластинчатые элементы конструкций широко используются в современной технике: в авиационной и космической технике, машиностроении, судостроении, жилищном и промышленном строительстве и т.д. Тепловые воздействия относятся к основному виду нагрузки, которой подвергаются объекты и изделия современной промышленности. Наличие концентраторов напряжений (например, дефектов типа трещин) приводит к значительному снижению несущей способности элементов конструкций и может привести к их разрушению. Дополнительные трудности в проведение прочностных расчётов вносит учёт условий теплообмена с окружающей средой.

Свидетельством актуальности задач термомеханики разрушения являются регулярные публикации и, в частности, монографии [1, 2]. Интерес к этой тематике не пропадает как у нас в стране [3–5], так и за рубежом [6]. При этом задачи термомеханики разрушения, связанные с термоупругим изгибом, рассмотрены лишь для случая постоянного температурного момента в тонкостенном элементе с трещиной [7, 8]. При наличии градиентов температурного момента предложена методика, основанная на использовании классической теории пластин и оболочек [2, 9]. Недостатком этой методики является невозможность находить коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) для поперечного и продольного сдвига, связанные с градиентами температурного момента. Определяется лишь интегральная величина – коэффициент интенсивности моментов при антисимметричном распределении напряжений [2]. Это является следствием недостатков классической теории тонкостенных элементов конструкций.

В данной работе использована обобщённая теория [10] в варианте  $\{1,0\}$ -аппроксимации [11], основанная на разложении искомым функций в ряды по полиномам Лежандра  $P_k$  от поперечной координаты. Данный вариант аппроксимации позволяет учитывать поперечные сдвиги и является аналогом теории С.П. Тимошенко [11]. Такой подход позволяет находить КИН для поперечного и продольного сдвига и уйти от понятия коэффициента интенсивности моментов при антисимметричном распределении напряжений.

**Постановка задачи.** Рассмотрим изотропную пластину толщины  $2h$  в прямоугольной декартовой системе координат  $x, y, z$ , содержащую теплоизолированный разрез  $L$ . На лицевых поверхностях пластины происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона с внешней средой нулевой температуры.

Предполагаем, что теплообмен с внешней средой является симметричным, т.е. параметры теплообмена на лицевых поверхностях пластины одинаковы ( $Bi^+ = Bi^- = Bi$ , где  $Bi^\pm$  – критерий Био при  $z = \pm h$ ). В этом случае задача распадается на две независимые задачи: о безмоментном термоупругом состоянии и о состоянии термоупругого изгиба.

В качестве исходной используем обобщённую теорию пластин и оболочек в варианте  $\{1,0\}$ -аппроксимации [11]. Если в пластине возникает только состояние термоупругого изгиба, то компоненты вектора перемещений имеют вид

$$u_x = \gamma_x h P_1, \quad u_y = \gamma_y h P_1, \quad u_z = w_0 P_0,$$

где  $w_0$  – прогиб пластины,  $\gamma_x, \gamma_y$  – углы поворота нормали.

Ненулевые компоненты тензора напряжений определяются следующим образом:

$$\sigma_x = \frac{3M_x}{2h^2} P_1 \quad (x \rightarrow y), \quad \tau_{xz} = \frac{Q_{x0}}{2h} (P_0 - P_2) \quad (x \rightarrow y), \quad \tau_{xy} = \frac{3H}{2h^2} P_1, \quad (1)$$

где  $M_x, M_y$  – изгибающие моменты,  $H$  – крутящий момент;  $Q_{x0}, Q_{y0}$  – перерезывающие силы.

Температура имеет представление:  $T = T_1 P_1$  [12], где  $T_1$  – температурный момент.

Система уравнений термоупругости на базе принятой модели тонкостенных элементов конструкции, записанная для состояния термоупругого изгиба в безразмерной системе координат  $x_1 = x/h$ ,  $x_2 = y/h$ ,  $x_3 = z/h$ , имеет вид [11, 12]:

$$\Delta T_1 - \rho_1^2 T_1 = 0; \quad (2)$$

$$M_1 = D_0 \{ \partial_1 \gamma_1 + \nu \partial_2 \gamma_2 - \alpha(1 + \nu) T_1 \}, \quad M_2 = D_0 \{ \partial_2 \gamma_2 + \nu \partial_1 \gamma_1 - \alpha(1 + \nu) T_1 \},$$

$$H = (1 - \nu) D_0 (\partial_2 \gamma_1 + \partial_1 \gamma_2) / 2, \quad Q_{j0} = \Lambda_0 (\gamma_j + \partial_j w_0) \quad (j=1,2), \quad (3)$$

$$\partial_1 M_1 + \partial_2 H - Q_{10} = 0, \quad \partial_1 H + \partial_2 M_2 - Q_{20} = 0, \quad \partial_1 Q_{10} + \partial_2 Q_{20} = 0. \quad (4)$$

В формулах (2)–(4) введены обозначения

$$\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad \rho_1^2 = 15(Bi + 1) / (Bi + 6);$$

$$\partial_j = \partial / \partial x_j \quad (j=1,2), \quad D_0 = 2 / (3(1 - \nu^2)), \quad \Lambda_0 = 5 / (6(1 + \nu));$$

$\alpha$ ,  $\nu$  – температурный коэффициент линейного расширения и коэффициент Пуассона соответственно; Перерезывающие силы в (3) определены в отношении к величине  $Eh$ , а моменты – в отношении к величине  $Eh^2$ , где  $E$  – модуль Юнга.

Граничные условия (ГУ) на линии теплоизолированного разреза  $L$  с нормалью  $\vec{n} = (n_1, n_2)$  формулируются в предположении свободных берегов разреза и отсутствия контакта между ними. Они записываются следующим образом:

$$\left. \frac{\partial T_1}{\partial n} \right|_L = 0; \quad M_n|_L = 0, \quad H_{nt}|_L = 0, \quad Q_n|_L = 0,$$

где

$$M_n = n_1^2 M_1 + 2n_1 n_2 H + n_2^2 M_2, \quad H_{nt} = n_1 n_2 (M_1 - M_2) + (n_2^2 - n_1^2) H, \quad Q_n = n_1 Q_{10} + n_2 Q_{20}.$$

Явный вид ГУ на внешнем граничном контуре пластины не актуален. Считаем их заданными в терминах корректной постановки соответствующих краевых задач.

Компоненты исходного состояния термоупругого изгиба пластины с разрезом  $G^*$  представим в виде суммы  $G^* = G^o + G$ , где  $G^o$  – компоненты основного термоупругого состояния, т.е. термоупругого состояния в сплошной пластине;  $G$  – компоненты возмущённого термоупругого состояния, вызванного наличием разреза. Основное термоупругое состояние  $G^o$  будем считать известным. Тогда задача состоит в определении возмущённого термоупругого состояния, компоненты которого удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (2)–(4).

ГУ для компонент возмущённого термоупругого состояния  $G$  на линии разреза в силу линейности постановки задачи записываются так:

$$\left. \frac{\partial T_1}{\partial n} \right|_L = - \left. \frac{\partial T_1^o}{\partial n} \right|_L; \quad (5)$$

$$M_n|_L = -M_n^o|_L, \quad H_{nt}|_L = -H_{nt}^o|_L, \quad Q_n|_L = -Q_n^o|_L. \quad (6)$$

Будем рассматривать только такие пластины, в которых разрез  $L$  удалён от внешнего граничного контура на расстояние, значительно превышающее длину разреза. В этом случае компоненты возмущённого термоупругого состояния  $G$  не распространяются до линии внешней границы и определяются лишь ГУ, заданными на линии разреза.

**Методика решения задачи.** Решение задачи основано на применении двумерного интегрального преобразования Фурье к разрешающим уравнениям (2)–(4) с учётом разрывного характера искомых функций [13]. Решение задачи теплопроводности (2), (5) построено в статье [14].

Применяя двумерное интегральное преобразование Фурье к системе (3), (4), запишем трансформанты моментов и перерезывающих сил

$$\tilde{M}_j = \frac{1}{2\pi} \int \sum_{L, k=1}^6 \tilde{L}_{jk} \psi_k e^{i(\vec{\xi}, \vec{x}')} dL, \quad \tilde{H} = \frac{1}{2\pi} \int \sum_{L, k=1}^6 \tilde{L}_{3k} \psi_k e^{i(\vec{\xi}, \vec{x}')} dL,$$

$$\tilde{Q}_{j0} = \frac{1}{2\pi} \int \sum_{L,k=1}^5 \tilde{l}_{jk} \Psi_k e^{i(\tilde{\xi}, \tilde{x}')} dL \quad (j=1,2). \quad (7)$$

Здесь  $\tilde{x}' = (x'_1, x'_2)$  – координаты точки на линии  $L$ ;  $\tilde{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$  – координаты текущей точки в пространстве трансформант;  $\tilde{l}_{jk}, \tilde{l}'_{jk}$  – трансформанты ядер интегральных представлений, например

$$\tilde{L}_{31} = \frac{2i\xi_1\xi_2^2}{3p^4} \left( 1 - \frac{3\Lambda_0}{p^2 + 2,5} \right), \quad p^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2; \quad (8)$$

$\Psi_j = \Psi_j(s)$  ( $j = \overline{1,6}$ ) – неизвестные функции ( $s$  – длина дуги кривой  $L$ )

$$\Psi_j = \frac{d[\gamma_j]}{ds} \quad (j=1,2), \quad \Psi_3 = \frac{d[w_0]}{ds}, \quad \Psi_{j+3} = [\gamma_j] \quad (j=1,2), \quad \Psi_6 = [T_1],$$

где  $[G]$  – скачок функции  $G$  при переходе через линию  $L$ .

Для получения интегральных представлений внутренних силовых факторов в исходном пространстве используем обратное преобразование Фурье. Методику обращения покажем на примере ядра  $L_{31}$ . Применяя формулу обращения к выражению (8), получим

$$L_{31}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \Psi_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)/3 - \Lambda_0 \Psi_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= x_1 - x'_1, \quad \bar{x}_2 = x_2 - x'_2, \\ \Psi_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) &= \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\xi_1 \xi_2^2}{p^4} \sin \xi_1 \bar{x}_1 \cos \xi_2 \bar{x}_2 d\xi_1 d\xi_2, \\ \Psi_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) &= \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\xi_1 \xi_2^2}{p^4 (p^2 + 2,5)} \sin \xi_1 \bar{x}_1 \cos \xi_2 \bar{x}_2 d\xi_1 d\xi_2. \end{aligned}$$

Перейдём в интегралах  $\Psi_1, \Psi_2$  к полярным координатам по формулам

$$\bar{x}_1 = r \cos \varphi, \quad \bar{x}_2 = r \sin \varphi, \quad \xi_1 = \rho \cos \theta, \quad \xi_2 = \rho \sin \theta.$$

Тогда

$$\Psi_1 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta \int_0^\infty Y d\rho, \quad \Psi_2 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta \int_0^\infty \frac{Y d\rho}{\rho^2 + 2,5}. \quad (10)$$

Здесь, согласно разложению Якоби-Ангера [15], имеем

$$Y = 2 \sum_{n=0}^\infty (-1)^n J_{2n+1}(r\rho) \cos(2n+1)\varphi \cos(2n+1)\theta,$$

где  $J_\nu(z)$  – функция Бесселя первого рода порядка  $\nu$ .

В результате преобразования интегралов (10) получим

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \frac{1}{2} \cos \varphi \int_0^\infty J_1(r\rho) d\rho + \frac{1}{2} \cos 3\varphi \int_0^\infty J_3(r\rho) d\rho, \\ \Psi_2 &= \frac{1}{2} \cos \varphi \int_0^\infty \frac{J_1(r\rho)}{\rho^2 + 2,5} d\rho + \frac{1}{2} \cos 3\varphi \int_0^\infty \frac{J_3(r\rho)}{\rho^2 + 2,5} d\rho. \end{aligned}$$

Используя значение несобственного интеграла

$$\int_0^\infty J_\nu(bx) dx = \frac{1}{b} \quad (\operatorname{Re} \nu > -1, b > 0)$$

и интегральное представление специальной  $G$ -функции [15]

$$G_{n,\nu}(rz) = (-1)^n \left( \frac{r}{2} \right)^{\nu-n} \int_0^\infty \frac{\rho^{\nu-n+1} J_{\nu+n}(r\rho)}{\rho^2 + z^2} d\rho, \quad r > 0, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < n + \frac{3}{2},$$

получим

$$\Psi_1 = \frac{1}{2r}(\cos \varphi + \cos 3\varphi), \quad \Psi_2 = \frac{r}{4} \left\{ -\cos \varphi G_{1,0}(\sqrt{2}, 5r) + \cos 3\varphi G_{2,1}(\sqrt{2}, 5r) \right\}.$$

Окончательное выражение для ядра (9) имеет вид

$$L_{31} = \frac{\cos \varphi \cos 2\varphi}{3r} + \frac{\Lambda_0}{4} r \left\{ \cos \varphi G_{1,0}(\sqrt{2}, 5r) - \cos 3\varphi G_{2,1}(\sqrt{2}, 5r) \right\}.$$

Оригиналы остальных ядер интегральных представлений (7) находятся аналогично.

Рассмотрим прямолинейный теплоизолированный разрез длины  $2l$  в безразмерной системе координат  $x_1, x_2, x_3$ , расположенный вдоль оси  $Ox_1$  симметрично относительно начала координат

$$L = \left\{ (x_1, x_2) \in R^2 : |x_1| \leq l, x_2 = 0 \right\}. \quad (11)$$

Для разреза (11) интегральные представления искомых функций (7) записываются следующим образом:

$$M_j(x_1, x_2) = -\frac{l}{2\pi} \int_{-1}^1 \sum_{k=1}^6 L_{jk}(x_1 - ls, x_2) \Psi_k ds, \quad (j=1,2), \quad (ls, 0) \in L,$$

$$H(x_1, x_2) = -\frac{l}{2\pi} \int_{-1}^1 \sum_{k=1}^6 L_{3k}(x_1 - ls, x_2) \Psi_k ds, \quad Q_{j0}(x_1, x_2) = -\frac{l}{2\pi} \int_{-1}^1 \sum_{k=1}^5 l_{jk}(x_1 - ls, x_2) \Psi_k ds. \quad (12)$$

Подставляя интегральные представления (12) в ГУ (6), получим систему сингулярных интегральных уравнений (СИУ) для определения неизвестных функций  $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$ :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Psi_2(s)}{s-\zeta} ds + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 E_1(\zeta-s) \Psi_2(s) ds = F_1(\zeta),$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Psi_1(s)}{s-\zeta} ds + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 E_2(\zeta-s) \Psi_1(s) ds + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 E_3(\zeta-s) \Psi_3(s) ds = F_2(\zeta),$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Psi_3(s)}{s-\zeta} ds + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 E_4(\zeta-s) \Psi_1(s) ds + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 E_5(\zeta-s) \Psi_3(s) ds = F_3(\zeta). \quad (13)$$

Здесь

$$E_1(\zeta-s) = 0, 3\sqrt{2}, 5\Lambda_0 \operatorname{sign}(\zeta-s) \left\{ IG_{2,2}(\sqrt{2}, 5l|\zeta-s|) - IG_{0,0}(\sqrt{2}, 5l|\zeta-s|) \right\} -$$

$$-1, 5\Lambda_0 l^2 (\zeta-s) G_{2,0}(\sqrt{2}, 5l|\zeta-s|), \quad F_1(\zeta) = -3M_2^0 \Big|_{x_2=0}, \quad IG_{n,\nu}(s) = \int_0^s G_{n,\nu}(t) dt,$$

$$E_2(\zeta-s) = 1, 5\Lambda_0 l^2 (\zeta-s) G_{2,0}(\sqrt{2}, 5l|\zeta-s|) +$$

$$+ 0, 3\sqrt{2}, 5\Lambda_0 \operatorname{sign}(\zeta-s) \left\{ 5IG_{0,0}(\sqrt{2}, 5l|\zeta-s|) - IG_{2,2}(\sqrt{2}, 5l|\zeta-s|) \right\},$$

$$E_3(\zeta-s) = 3\Lambda_0 l G_{1,1}(\sqrt{2}, 5l|\zeta-s|), \quad F_2(\zeta) = -3H^0 \Big|_{x_2=0} + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 E_0(\zeta-s) \Psi_6(s) ds,$$

$$E_0(\zeta-s) = -\frac{\alpha}{\zeta-s} + \frac{\alpha l^2 \rho_1^2}{2} (\zeta-s) G_{2,0}(l\rho_1|\zeta-s|),$$

$$E_4(\zeta-s) = -\frac{l}{2} \left\{ G_{0,0}(\sqrt{2}, 5l|\zeta-s|) + G_{1,1}(\sqrt{2}, 5l|\zeta-s|) \right\} - \frac{1}{2} G_{1,0}(\sqrt{2}, 5l|\zeta-s|) + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2}, 5\gamma l}{2} - \frac{1}{4},$$

$$E_5(\zeta-s) = -\frac{5l^2}{4} (\zeta-s) G_{1,0}(\sqrt{2}, 5l|\zeta-s|), \quad F_3(\zeta) = -\frac{1}{\Lambda_0} Q_{20}^0 \Big|_{x_2=0},$$

$\ln \gamma = 0, 5772\dots$  – постоянная Эйлера.

Из требования непрерывности скачков  $\gamma_1, \gamma_2, w_0$  в вершинах разреза следуют дополнительные условия на искомые функции

$$\int_{-1}^1 \psi_k(s) ds = 0 \quad (k = \overline{1,3}). \quad (14)$$

Система (13) представляет собой систему СИУ типа Коши первого рода, которая может быть решена численно. После решения системы (13) функции  $\psi_4, \psi_5$  находятся по формулам

$$\psi_{k+3}(s) = \int_{-1}^s \psi_k(t) dt \quad (k = 1, 2),$$

а моменты и перерезывающие силы – по формулам (12).

Термоупругое состояние в окрестностях концов разреза имеет сингулярный характер с особенностью вида  $r^{-1/2}$ . Такое поведение внутренних силовых факторов обусловлено наличием ядер Коши в интегральных представлениях (12). При решении задач механики разрушения необходимо найти коэффициенты при особенностях – КИН. Из структуры правых частей системы СИУ (13) следует, что КИН в условиях термоупругого нагружения представимы в виде двух слагаемых, первое из которых определяется силовыми компонентами основного термоупругого состояния, а второе – возмущённым температурным полем. При решении задач термомеханики разрушения вторые компоненты и являются предметом исследования. Для этого необходимо принять силовые компоненты основного термоупругого состояния на линии разреза равными нулю, т.е.

$$M_y^o \Big|_{y=0} = H^o \Big|_{y=0} = Q_{y0}^o \Big|_{y=0} = 0. \quad (15)$$

В принятых условиях состояния термоупругого изгиба отличными от нуля являются КИН для поперечного ( $K_{II}$ ) и продольного ( $K_{III}$ ) сдвига. Формулы для определения этих КИН выводятся, исходя из интегральных представлений внутренних силовых факторов (12) и разложений для напряжений (1). Они имеют следующий вид:

$$K_{II}^{\pm} = \mp \frac{\sqrt{\pi l}}{4} E \sqrt{h} P_1 \lim_{s \rightarrow \pm 1} \left\{ \psi_1(s) \sqrt{1-s^2} \right\},$$

$$K_{III}^{\pm} = \mp \frac{\Lambda_0 \sqrt{\pi l}}{4} E \sqrt{h} (P_0 - P_2) \lim_{s \rightarrow \pm 1} \left\{ \psi_3(s) \sqrt{1-s^2} \right\},$$

где знаки «+» и «-» относятся к правому и левому концам разреза соответственно. Из этих формул следует, что КИН  $K_{II}$  достигает максимального по модулю значения  $K_{II}^{\max}$  на лицевых поверхностях пластины ( $z = \pm h$ ), а КИН  $K_{III}$  достигает максимального по модулю значения  $K_{III}^{\max}$  в срединной плоскости пластины ( $z = 0$ ), т.е.

$$K_{II}^{\max} = \frac{\sqrt{\pi l}}{4} E \sqrt{h} \left| \lim_{s \rightarrow 1} \left\{ \psi_1(s) \sqrt{1-s^2} \right\} \right|, \quad (16)$$

$$K_{III}^{\max} = \frac{3\Lambda_0 \sqrt{\pi l}}{8} E \sqrt{h} \left| \lim_{s \rightarrow 1} \left\{ \psi_3(s) \sqrt{1-s^2} \right\} \right|. \quad (17)$$

**Анализ результатов.** Численные расчёты посвящены исследованию влияния параметра теплообмена  $Bi$  на максимальные значения КИН для поперечного (16) и продольного (17) сдвига, обусловленные возмущённым температурным полем.

Рассмотрена изотропная пластина с теплоизолированным разрезом длины  $2h$  ( $l=1$ ) в условиях симметричного теплообмена. Основное температурное поле предполагалось таким, что на линии разреза отсутствует поток средней температуры ( $T_0$ ), а действует лишь поток температурного момента

$$\partial_2 T_0^o \Big|_{x_2=0} = 0, \quad \partial_2 T_1^o \Big|_{x_2=0} = q = \text{const} \neq 0.$$

Для анализа поведения КИН, обусловленных возмущённым температурным полем, предполагалось отсутствие внутренних силовых факторов основного термоупругого состояния, т.е. выполнение условий (15).

Разрешающая система СИУ (13) совместно с дополнительными условиями (14) решалась численно методом механических квадратур [2], после чего определялись максимальные по модулю значения КИН. Расчёты проведены в широком диапазоне изменения параметра  $Bi$ . Результаты расчётов

для  $K_{II}^{\max}$  и  $K_{III}^{\max}$  представлены на рис. 1 и 2 при  $\nu = 0,3$ . Значения КИН даны в отношении к величине  $K^* = \alpha q l \sqrt{l E \sqrt{h}}$ .

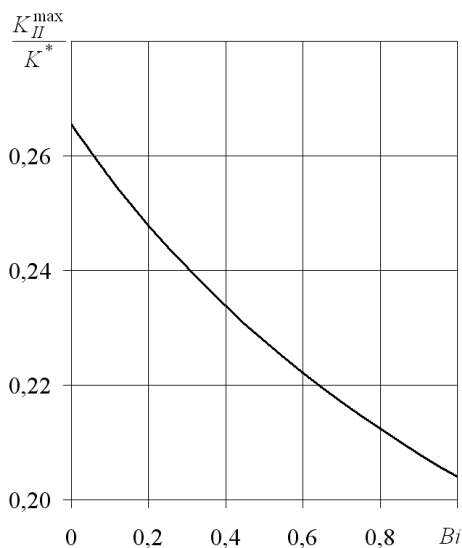


Рис. 1. Максимальное значение КИН для поперечного сдвига

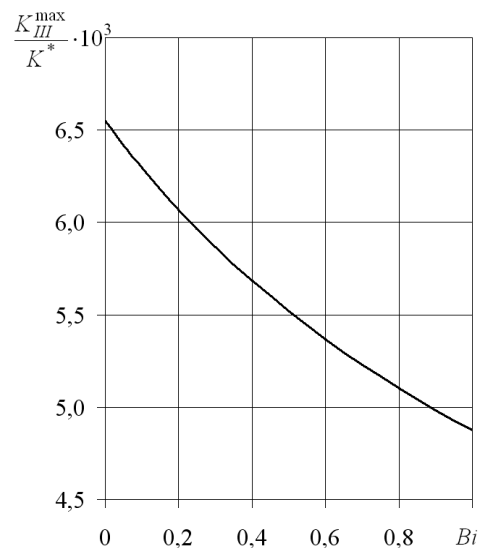


Рис. 2. Максимальное значение КИН для продольного сдвига

Из рис. 1 и 2 следует, что с увеличением интенсивности теплообмена с внешней средой величина КИН для поперечного и продольного сдвига уменьшается по модулю.

Для оценки достоверности полученных закономерностей аналогичная задача была решена также на базе классической теории тонкостенных элементов конструкций. Классическая теория позволяет определить лишь коэффициент интенсивности моментов при антисимметричном распределении напряжений  $K_4$ , который является коэффициентом при корневой асимптотике для интеграла от обобщённой перерезывающей силы. Поэтому перейти к КИН для поперечного и продольного сдвига в этом случае не удаётся. Однако оценить влияние интенсивности теплообмена на коэффициенты при асимптотике внутренних силовых факторов в терминах классической теории возможно.

На рис. 3 представлен график зависимости коэффициента интенсивности моментов при антисимметричном распределении напряжений  $K_4$  от параметра теплообмена  $Bi$  при  $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$  и  $\nu = 0,33$ . Значения  $K_4$  даны в отношении к величине  $K^{**} = E h^2 \sqrt{h}$ . Расчёты проведены для единичного потока температурного момента на линии разреза ( $q = 1^\circ\text{C}/h$ ) при нулевых усилиях и моментах основного термоупругого состояния. Из сравнения графиков на рис. 1, 2 и 3 следует, что характер зависимости КИН и коэффициента интенсивности  $K_4$  от  $Bi$  одинаков. Это является подтверждением достоверности полученных результатов.

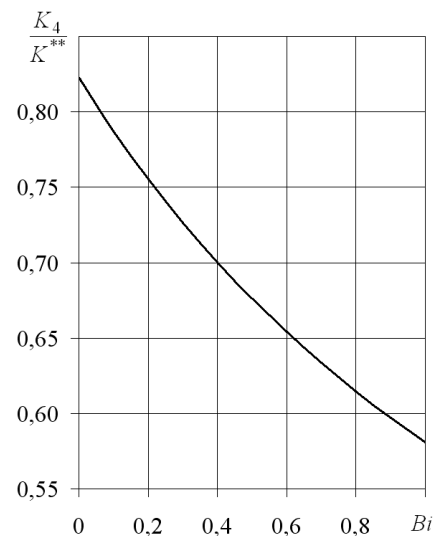


Рис. 3. Коэффициент интенсивности моментов при антисимметричном распределении напряжений

**Выводы.** При решении задач термомеханики разрушения тонкостенных элементов конструкций в случае термоупругого изгиба необходимо использовать обобщённую теорию пластин и оболочек. Она позволяет находить КИН для поперечного и продольного сдвига, что является необходимым условием для оценки трещиностойкости конструкций. На базе классической теории такую оценку для условий термоупругого изгиба провести невозможно.

Проведённые численные исследования позволяют заключить, что увеличение интенсивности теплообмена с внешней средой при его симметричном характере приводит к уменьшению абсолютных значений КИН для поперечного и продольного сдвига.

## РЕЗЮМЕ

Для опису термопружного згину ізотропних пластин, які містять теплоізолюваний розріз, використані рівняння узагальненої теорії тонкостінних елементів конструкцій у варіанті  $\{1,0\}$ -апроксимації. Розглянуто випадок симетричного теплообміну із зовнішнім середовищем. Використана уточнена теорія дозволила напряму знаходити коефіцієнти інтенсивності напружень для поперечного й поздовжнього зсуву та відійти від поняття коефіцієнту інтенсивності моментів при антисиметричному розподілі напружень. Досліджено вплив параметра теплообміну на коефіцієнти інтенсивності напружень.

*Ключові слова:* ізотропна пластина, теплоізолюваний розріз,  $\{1,0\}$ -апроксимація, термопружність, згин, коефіцієнти інтенсивності напружень.

## SUMMARY

To describe the thermoelastic bending of isotropic plates with heat-insulated cut the equations of the generalized theory of thin-walled structural elements in the form  $\{1,0\}$ -approximation are used. The case of symmetric heat exchange with the environment is considered. Used improved theory allowed direct finding the stress intensity factors for the transverse and longitudinal shear and to get away from the concept of the intensity coefficient of moments in the antisymmetric stress distribution. The influence of heat exchange parameter on the stress intensity factors is investigated.

*Keywords:* isotropic plate, heat-insulated cut,  $\{1,0\}$ -approximation, thermoelasticity, bending, stress intensity factors.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кит Г.С. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами / Г.С. Кит, М.Г. Кривцун. – К.: Наук. думка, 1983. – 280 с.
2. Панасюк В.В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацьшин. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
3. Соляр Т.Я. Температурні поля і напруження біля тріщин у пластинках з тепловіддачею / Т.Я. Соляр // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. Природн. Науки. – 2008. – Вип. 1. – С. 121-126.
4. Зайденварг О.Л. Гиперсингулярные уравнения в задачах прочности элементов конструкций с трещинами при температурном нагружении / О.Л. Зайденварг, Е.А. Стрельникова // Вісн. Харківського національного ун-ту. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2009. – № 847. – С. 191-196.
5. Опанасович В.К. Термопружний стан пластини з теплоізолюваними дуговими тріщинами уздовж кола з урахуванням повного гладкого контакту їх берегів / В.К. Опанасович, Н.М. Басса // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2011. – Вип. 9. – С. 164-174.
6. Chudinovich I. The displacement initial-boundary value problem in bending of thermoelastic plates weakened by cracks / I. Chudinovich, C. Constanda // J. Math. Anal. Appl. – 2008. – Vol. 348, No 1. – P. 286-297.
7. Кулиев С.А. Температурный изгиб пластинки с разрезами / С.А. Кулиев // Изв. РАН. МТТ. – 1993. – № 2. – С. 156-165.
8. Бережницький Л.Т. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин / Л.Т. Бережницький, М.В. Делявский, В.В. Панасюк. – К.: Наук. думка, 1979. – 400 с.
9. Гольцев А.С. Термоупругость оболочек с термозолированным разрезом при наличии теплообмена / А.С. Гольцев, В.П. Шевченко // Прикл. механика. – 1985. – Т. 21, № 2. – С. 73-78.
10. Хома И.Ю. Обобщённая теория анизотропных оболочек / И.Ю. Хома. – К.: Наук. думка, 1986. – 172 с.
11. Пелех Б.Л. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений / Б.Л. Пелех, В.А. Лазько. – К.: Наук. думка, 1982. – 296 с.
12. Пелех Б.Л. Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек / Б.Л. Пелех, М.А. Сухорольский. – К.: Наук. думка, 1980. – 216 с.
13. Шевченко В.П. Задачи термоупругости тонких оболочек с разрезами: Учеб. пособие / В.П. Шевченко, А.С. Гольцев. – К.: УМК ВО, 1988. – 84 с.
14. Бондаренко Н.С. Влияние теплообмена на возмущённое температурное поле в анизотропной пластине с теплоизолированным разрезом / Н.С. Бондаренко, А.С. Гольцев // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць; Дніпропетр. нац. ун-т. – 2012. – Вип. 19. – С. 20-26.
15. Хижняк В.К. Смешанные задачи теории пластин и оболочек: учебное пособие / В.К. Хижняк, В.П. Шевченко. – Донецк: ДонГУ, 1980. – 128 с.

*Поступила в редакцію 03.07.2013 г.*