

УДК 539.3 : 534.1

КОЛЕБАНИЯ НЕПРЕРЫВНО-НЕОДНОРОДНОЙ ПО ТОЛЩИНЕ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ С ЖЕСТКИМИ ТОРЦАМИ

М.В. Фоменко

Рассмотрена трехмерная задача об установившихся колебаниях непрерывно-неоднородной по толщине упругой пластины, плоские грани которой жестко защемлены. Получены однородные решения системы уравнений движения в перемещениях в виде суммы вихревого и потенциального состояний. Выполнены численные исследования дисперсионного уравнения, описывающего частотный спектр Р-SV волн. Исследовано влияние показателя неоднородности материала на изменение собственных значений, фазовых скоростей, частот запираения. Представлены диаграммы спектральных кривых, графики изменения фазовых скоростей, значения частот запираения, собственные значения соответствующей задачи статики.

Ключевые слова: поперечно-неоднородная изотропная пластина, жесткое защемление, установившиеся колебания, метод однородных решений, собственные функции, собственные значения, дисперсионный спектр, фазовые скорости, частоты запираения.

Введение. Непрерывное изменение упругих свойств материала по одной из координат характерно для многих тел. Поперечно-неоднородные пластины широко применяются в качестве составных элементов многих современных конструкций. Проблемы проектирования, моделирования и исследования в области функционально-градиентных материалов отражены, например, в работах [1, 2]. Решение конкретных краевых задач теории упругости для функционально-градиентных сред сопряжено с необходимостью учета неоднородности материала. Анализ математических теорий поперечно-неоднородных упругих плит отражен в монографии [3], где отмечается, что актуальным является развитие аналитических методов исследования напряженно-деформированного состояния и волновых полей в поперечно-неоднородных плитах на основе уравнений пространственной теории упругости. Одним из эффективных точных аналитических методов решения трехмерных краевых задач о колебаниях неоднородных, в частности, слоистых пластин является метод однородных решений [4–7], который был впервые предложен в работе [8]. Однородные решения краевых задач об упругом равновесии и колебаниях трехслойных пластин с неоднородными слоями описаны спектральными задачами для дифференциальных операторов с переменными коэффициентами в работе [7].

Целью данной работы является получение однородных решений уравнений упругих гармонических колебаний непрерывно-неоднородной по толщине изотропной пластины с экспоненциальным изменением модуля сдвига и плотности в случае жестко защемленных плоских граней.

Постановка задачи. Рассмотрим пластину постоянной толщины $2h$, отнесенную к размерным прямоугольным декартовым координатам $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$. Координатную плоскость $O\tilde{x}_1\tilde{x}_2$ совместим со срединной плоскостью пластины, а ось \tilde{x}_3 направим перпендикулярно торцам пластины. Лицевые грани пластины ($\tilde{x}_3 = \pm h$) жестко защемлены, а на ее боковой поверхности действуют внешние гармонически изменяющиеся во времени с круговой частотой ω усилия. Предполагается, что модуль сдвига $\tilde{G} = \tilde{G}(\tilde{x}_3)$ и плотность $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(\tilde{x}_3)$ материала пластины являются функциями поперечной координаты и изменяются по экспоненциальному закону

$$\tilde{G}(\tilde{x}_3) = \tilde{G}_0 e^{\alpha \tilde{x}_3/h}, \quad \tilde{\rho}(\tilde{x}_3) = \tilde{\rho}_0 e^{\alpha \tilde{x}_3/h}, \quad \nu, \tilde{G}_0, \tilde{\rho}_0, \alpha = \text{const}.$$

Введем безразмерные координаты и величины

$$\begin{aligned} x_1 &= \tilde{x}_1/R, \quad x_2 = \tilde{x}_2/R, \quad x_3 = \tilde{x}_3/h = \tilde{x}_3/(\lambda R), \quad \lambda = h/R, \\ u_i(x_1, x_2, x_3) &= \tilde{u}_i(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)/R, \quad \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3) = \tilde{\sigma}_{ij}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)/(2\tilde{G}_0) \quad (i, j = \overline{1, 3}), \\ G(x_3) &= \tilde{G}(\tilde{x}_3)/\tilde{G}_0, \quad \rho(x_3) = \tilde{\rho}(\tilde{x}_3)/\tilde{\rho}_0, \quad \Omega = h\omega/c_S, \end{aligned} \tag{1}$$

где R – характерный линейный размер пластины в плане, Ω – приведенная частота упругих колебаний, $c_S = \sqrt{\tilde{G}_0/\tilde{\rho}_0}$ – скорость сдвиговой объемной волны в материале однородной пластины.

С учетом введенных обозначений (1) задача построения однородных решений сводится к интегрированию системы уравнений движения (равновесия при $\Omega = 0$) в перемещениях

$$\begin{aligned} \lambda^2 \nu_0 \partial_1 \theta + (\lambda^2 D^2 + \partial_3^2) u_1 + \alpha (\lambda \partial_1 u_3 + \partial_3 u_1) + \Omega^2 u_1 &= 0, \\ \lambda^2 \nu_0 \partial_2 \theta + (\lambda^2 D^2 + \partial_3^2) u_2 + \alpha (\lambda \partial_2 u_3 + \partial_3 u_2) + \Omega^2 u_2 &= 0, \\ \lambda \nu_0 \partial_3 \theta + (\lambda^2 D^2 + \partial_3^2) u_3 + 2\alpha (\partial_3 u_3 + \lambda \nu \nu_0 \theta) + \Omega^2 u_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

с учетом граничных условий на торцах пластины ($x_3 = \pm 1$)

$$u_i(x_1, x_2, \pm 1) = 0 \quad (i = \overline{1, 3}). \quad (3)$$

Здесь

$$\partial_i = \partial / \partial x_i \quad (i = \overline{1, 3}), \quad D^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad \theta = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \lambda^{-1} \partial_3 u_3, \quad \nu_0 = 1 / (1 - 2\nu).$$

Следует отметить, что исходную задачу из-за несимметричного по толщине строения пластины невозможно разделить на симметричную и косимметричную подзадачи, как в случае однородной пластины [9]. Приведение трехмерной краевой задачи (2), (3) к двумерной осуществим методом однородных решений.

Построение однородных решений задач. Решение краевой задачи (2), (3) представим суммой вихревого и потенциального состояний

$$\begin{Bmatrix} u_1(x_1, x_2, x_3) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} p_k(x_3) \partial_2 B_k(x_1, x_2) \\ -p_k(x_3) \partial_1 B_k(x_1, x_2) \\ 0 \end{Bmatrix} + \sum_{p=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} n_p(x_3) \partial_1 C_p(x_1, x_2) \\ n_p(x_3) \partial_2 C_p(x_1, x_2) \\ q_p(x_3) C_p(x_1, x_2) \end{Bmatrix}. \quad (4)$$

В выражениях (4) функции $B_k(x_1, x_2)$, $C_p(x_1, x_2)$ являются метагармоническими

$$D^2 B_k(x_1, x_2) - (\delta_k / \lambda)^2 B_k(x_1, x_2) = 0, \quad D^2 C_p(x_1, x_2) - (\gamma_p / \lambda)^2 C_p(x_1, x_2) = 0,$$

а собственные функции $p_k(x_3)$ и собственные значения δ_k вихревого состояния находятся из спектральной задачи

$$p''(x_3) + \alpha p'(x_3) + (\Omega^2 + \delta^2) p(x_3) = 0, \quad p(\pm 1) = 0$$

и получаются такими

$$\begin{aligned} p_k(x_3) &= e^{-\alpha x_3 / 2} \sin \frac{\pi k}{2} (1 - x_3), \\ \delta_k &= \sqrt{\left(\frac{\pi k}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \Omega^2} \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (5)$$

Собственные функции $n_p(x_3)$, $q_p(x_3)$ потенциального состояния определяются из решения задачи

$$\begin{aligned} n'' + \alpha n' + ((1 + \nu_0) \gamma^2 + \Omega^2) n + \lambda \nu_0 q' + \alpha \lambda q &= 0, \\ q'' + \alpha q' + \frac{\gamma^2 + \Omega^2}{1 + \nu_0} q + \frac{\nu_0 \gamma^2}{\lambda(1 + \nu_0)} n' + \frac{\alpha(\nu_0 - 1) \gamma^2}{\lambda(1 + \nu_0)} n &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$n(\pm 1) = 0, \quad q(\pm 1) = 0, \quad (7)$$

где γ – параметр разделения переменных.

Уравнения (6) для рассматриваемого случая неоднородности материала пластины являются системой обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение системы (6) имеет вид

$$a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0, \quad (8)$$

в котором

$$a_0 = 2(1-\nu), \quad a_1 = 4\alpha(1-\nu), \quad a_2 = 2(1-\nu)(\alpha^2 + 2\gamma^2) + (3-4\nu)\Omega^2, \\ a_3 = 4\alpha(1-\nu)\gamma^2 + \alpha(3-4\nu)\Omega^2, \quad a_4 = (\gamma^2 + \Omega^2)(2(1-\nu)\gamma^2 + (1-2\nu)\Omega^2) - 2\alpha^2\nu\gamma^2.$$

Корни данного уравнения получаются такими:

$$s_1 = -\frac{\alpha}{2} + i\gamma_1, \quad s_2 = -\frac{\alpha}{2} - i\gamma_1, \quad s_3 = -\frac{\alpha}{2} + i\gamma_2, \quad s_4 = -\frac{\alpha}{2} - i\gamma_2,$$

где

$$\gamma_1^2 = \gamma^2 + \frac{1-2\nu}{2-2\nu}\Omega^2 - \frac{\alpha^2}{4} + d_1, \quad \gamma_2^2 = \gamma^2 + \Omega^2 - \frac{\alpha^2}{4} - d_1, \\ d_1 = \frac{\Omega^2 - d}{4(1-\nu)}, \quad d = \sqrt{\Omega^4 + 16\alpha^2\gamma^2\nu(1-\nu)}; \quad i^2 = -1. \quad (9)$$

Следовательно, решением краевой задачи (6), (7) являются функции

$$n_p(x_3) = H_{1p}e^{s_{1p}x_3} + H_{2p}e^{s_{2p}x_3} + H_{3p}e^{s_{3p}x_3} + H_{4p}e^{s_{4p}x_3}, \\ q_p(x_3) = Q_{1p}e^{s_{1p}x_3} + Q_{2p}e^{s_{2p}x_3} + Q_{3p}e^{s_{3p}x_3} + Q_{4p}e^{s_{4p}x_3}.$$

Здесь

$$H_1 = ((a_3 + a_4 - 2a_2)\cos\gamma_1 \sin\gamma_2 - (a_3 - a_4)\sin\gamma_1 \cos\gamma_2)\cos\gamma_2, \\ H_2 = -((a_3 + a_4 - 2a_1)\cos\gamma_1 \sin\gamma_2 + (a_3 - a_4)\sin\gamma_1 \cos\gamma_2)\cos\gamma_2, \\ H_3 = -((a_1 - a_2)\cos\gamma_1 \sin\gamma_2 - (a_1 + a_2 - 2a_4)\sin\gamma_1 \cos\gamma_2)\cos\gamma_1, \\ H_4 = -((a_1 - a_2)\cos\gamma_1 \sin\gamma_2 + (a_1 + a_2 - 2a_3)\sin\gamma_1 \cos\gamma_2)\cos\gamma_1; \\ a_1 = (\alpha_1 + 2I\gamma_1)(\kappa^2 + d), \quad a_2 = (\alpha_1 - 2I\gamma_1)(\kappa^2 + d), \\ a_3 = (\alpha_1 + 2I\gamma_2)(\kappa^2 - d), \quad a_4 = (\alpha_1 - 2I\gamma_2)(\kappa^2 - d), \\ \alpha_1 = -\alpha(1-4\nu), \quad \kappa^2 = 2\gamma^2 + \Omega^2; \\ Q_j = a_j H_j / \Delta \quad (j=\overline{1,4}), \quad \Delta = 4\lambda(\Omega^2 + \gamma^2 - 4\alpha^2\nu(1-\nu)). \quad (10)$$

Собственные значения γ_p находятся из дисперсионного уравнения

$$P(\gamma, \Omega; \nu, \alpha) = \alpha^2 d^2 \cos\gamma_1 \sin\gamma_1 \cos\gamma_2 \sin\gamma_2 + \\ + (\gamma_2(\kappa^2 - d)\cos\gamma_1 \sin\gamma_2 - \gamma_1(\kappa^2 + d)\sin\gamma_1 \cos\gamma_2) \times \\ \times (\gamma_2(\kappa^2 - d)\sin\gamma_1 \cos\gamma_2 - \gamma_1(\kappa^2 + d)\cos\gamma_1 \sin\gamma_2) = 0. \quad (11)$$

Частотное уравнение (11), связывающее собственное значение γ и частоту Ω при заданных значениях коэффициента Пуассона ν и параметра неоднородности α , описывает частотный спектр P-SV волн. Корни γ_p этого уравнения могут быть действительными, мнимыми или комплексными. Действительные и комплексные корни γ отвечают краевым стоячим (нераспространяющимся) волнам. Мнимые корни γ соответствуют распространяющимся (бегущим) волнам, которые имеют основное значение для исследования процесса переноса энергии.

Описываемый уравнением (11) частотный спектр содержит, в частности, две специфические моды, которые задаются соотношениями $\gamma_1 = 0$ или $\gamma_2 = 0$. Корни характеристического уравнения (8) для этих решений являются кратными. Поэтому им соответствует иная структура собственных функций $n_p(x_3)$, $q_p(x_3)$ и эти случаи требуют дополнительных исследований. В отличие от однородной пла-

стины ($\alpha = 0$), кривая каждой такой моды состоит из действительной, начинающейся при нулевой частоте Ω , и мнимой ветвей.

Полагая в выражениях (5)–(11) частоту $\Omega = 0$ получаем решение соответствующей задачи о равновесии неоднородной пластины.

Анализ распространения волн в пластине предполагает получение соответствующих асимптотических выражений для уравнения (11) при больших и малых значениях величин γ , Ω .

Для мнимых мод при малых значениях γ имеем длинноволновое приближение (диапазон). В этом случае для всех мнимых участков дисперсионных ветвей характерно наличие частот запирания распространяющихся волн [10]. Для их определения полагаем в соотношении (11) $\gamma = 0$ и получаем две независимые серии частот запирания

$$\Omega_{k1} = \sqrt{\frac{2-2\nu}{1-2\nu} \left(\left(\frac{\pi k}{2} \right)^2 + \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \right)}, \quad \Omega_{k2} = \sqrt{\left(\frac{\pi k}{2} \right)^2 + \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2} \quad (k=1,2,\dots). \quad (12)$$

Как видно, частоты запирания в обеих сериях с увеличением α также увеличиваются, причем частоты второй серии не зависят от значений коэффициента Пуассона ν .

Оценим предельные значения фазовых скоростей $v_p = \Omega/\gamma$ ($\gamma = \text{Im } \gamma$) распространяющихся мод в высокочастотной области коротковолнового диапазона (большие значения γ). При $\gamma \rightarrow \infty$ из дисперсионного соотношения (11) для всех распространяющихся мод получаем выражение

$$v_p = 1.$$

Таким образом, фазовая скорость c_p получается такой же, как и скорость сдвиговых объемных волн

$c_S = \sqrt{\tilde{G}_0/\tilde{\rho}_0}$ в материале однородной пластины с физико-механическими характеристиками ν , \tilde{G}_0 , $\tilde{\rho}_0$.

Для малых значений частоты Ω и параметра неоднородности α с помощью асимптотического анализа получаем соответствующее предельное выражение для уравнения (11), а именно, при $\Omega, \alpha \rightarrow 0$ имеем [11]

$$((3-4\nu)\sin 2\gamma - 2\gamma)((3-4\nu)\sin 2\gamma + 2\gamma) = 0.$$

Результаты численных исследований. Результаты численного решения дисперсионного уравнения (11) представлены на рис. 1 в виде спектральных кривых – зависимостей собственных значений γ от частоты Ω при $\nu = 0,3$ и $\alpha = 1$.

На диаграмме дисперсионных кривых сплошные линии соответствуют вещественным и чисто мнимым корням, штриховые – проекциям комплексных ветвей частотного спектра на действительную ($\text{Re } \gamma, \Omega$) и мнимую ($\text{Im } \gamma, \Omega$) плоскости. Видно, что дисперсионный спектр подобен аналогичному для однородной пластины [9], однако имеются количественные и некоторые качественные отличия в поведении мод. Так, в области низких частот $\Omega \ll 1$ данные уравнения имеют три действительных корня γ (в случае однородной пластины – одна действительная ветвь). Для первой и второй бегущих мод нет общих точек, расстояние между ними $\approx 0,071$ (область выделена кружочком); в случае однородной пластины симметричная и антисимметричная первые моды пересекаются в точке (1,306 ; 2,771). Для неоднородной пластины существует минимальная частота $\Omega_{\min} \approx 1,648$, ниже которой отсутствуют распространяющиеся моды (для однородной пластины $\Omega_{\min} = \pi/2 \approx 1,571$).

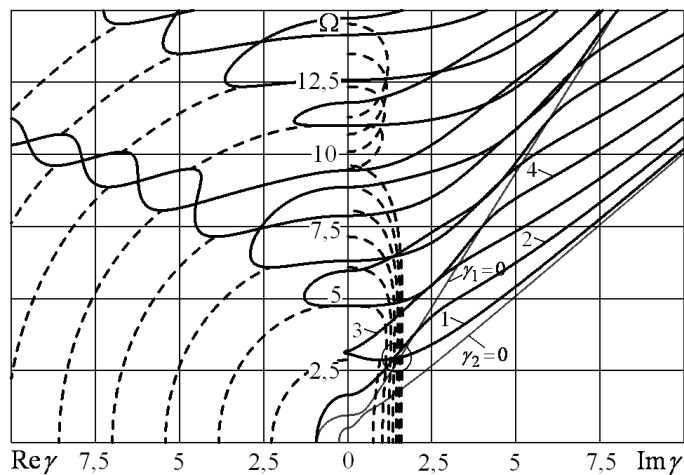


Рис. 1

На рис. 2 показаны изменения безразмерных фазовых $v_p = \Omega / \text{Im} \gamma$ скоростей распространяющихся мод в диапазоне частот $0 < \Omega \leq 10$. Сплошные линии соответствуют рассматриваемой задаче, штриховые и точечные – симметричным и косимметричным модам однородной пластины.

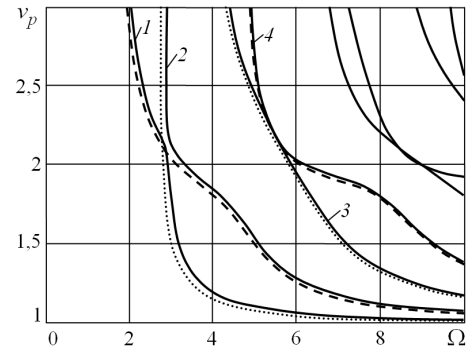


Рис. 2

Как видно из рис. 2 влияние параметра неоднородности α более заметно сказывается на поведении первых двух низших мод в области частот $2 < \Omega < 5$. В высокочастотном диапазоне неоднородность оказывает незначительное влияние на значение величины v_p : все распространяющиеся моды становятся бездисперсными, а их фазовые скорости имеют предельное значение 1.

Представляет интерес оценка влияния показателя неоднородности материала α на дисперсионные свойства распространяющихся волн.

На рис. 3 представлена низшая дисперсионная ветвь распространяющейся моды для пластины с коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$ при нескольких значениях параметра α , изменяющегося от 0 до 2. При малых значениях величины α первые дисперсионные кривые при различных γ практически совпадают. С ростом параметра α увеличивается частота запирания ($\gamma = 0$) соответствующей моды, а дисперсионная кривая смещается вверх. Однако при больших γ для всех α ветвь приближается сверху к прямой $\Omega = \text{Im} \gamma$.

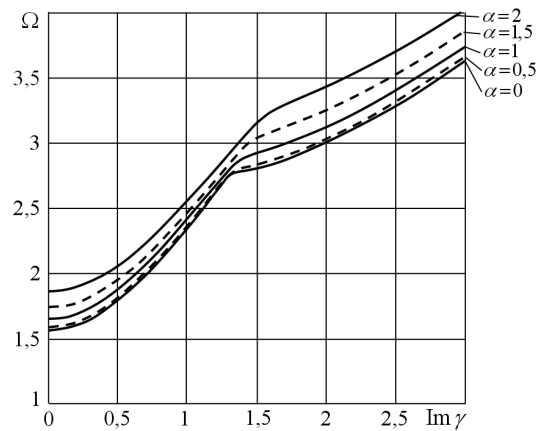


Рис. 3

В табл. 1 приведены собственные значения γ_p и значения фазовых скоростей c_p/c_S , вычисленные на основе уравнения (11). Эти данные показывают, что с увеличением частоты колебаний Ω фазовая скорость c_p/c_S нижней волны для всех значений показателя неоднородности α приближается сверху к скорости сдвиговой объемной волны c_S . С увеличением параметра α это происходит при значительно больших значениях частоты Ω .

Таблица 1

Дисперсионные характеристики первой распространяющейся моды ($\nu = 0,3$)

Ω Величина	2	5	10	20	50	2	5	10	20	50
α	$\alpha = 0$					$\alpha = 0,1$				
γ	0,70131	4,62760	9,85165	19,93263	49,97446	0,70074	4,62671	9,85123	19,93242	49,97438
c_p/c_S	2,85182	1,08047	1,01506	1,00338	1,00051	2,85413	1,08068	1,01510	1,00339	1,00051
α	$\alpha = 0,5$					$\alpha = 1$				
γ	0,68691	4,60534	9,84101	19,92733	49,97234	0,64161	4,53805	9,80903	19,91139	49,96596
c_p/c_S	2,91159	1,08570	1,01616	1,00365	1,00055	3,11714	1,10180	1,01947	1,00445	1,00068
α	$\alpha = 1,5$					$\alpha = 2$				
γ	0,55775	4,42413	9,75553	19,88480	49,95534	0,41280	4,26088	9,68018	19,84752	49,94046
c_p/c_S	3,58586	1,13017	1,02506	1,00579	1,00089	4,84494	1,17347	1,03304	1,00768	1,00119

Данные табл. 2 иллюстрируют влияние параметра α на значения первых пятнадцати частот запирания P-SV волн (12) для $\nu = 0,3$. Столбец для $\alpha = 0$ соответствует результатам для однородной пластины, а значки « \pm » – типу симметрии колебаний. Коэффициент G^* равен отношению максимальной жесткости к минимальной, т.е. $G^* = G(1)/G(-1)$. Из данной таблицы следует, что неоднородность материала приводит к незначительному изменению значений частот запирания. При этом соответствующая частота запирания с увеличением α увеличивается. Влияние параметра α более заметно сказывается

на распределении частот загибания для мод низких порядков. Например, при $G^* = 10$ отличие первой частоты от аналогичной для однородной пластины составляет 6,5%, а для десятой – 1%. С ростом номера частота загибания для неоднородной пластины больше аналогичной для однородной, а соответствующая разница уменьшается.

Таблица 2

Значения частот загибания

p	$\alpha = 2$ ($G^* \approx 54,6$)	$\alpha = 1,5$ ($G^* \approx 20$)	$\alpha = 1,15$ ($G^* \approx 10$)	$\alpha = 1$ ($G^* \approx 7,4$)	$\alpha = 0,5$ ($G^* \approx 2,7$)	$\alpha = 0,347$ ($G^* \approx 2$)	$\alpha = 0,1$ ($G^* \approx 1,2$)	$\alpha = 0$	
1	1,862096	1,740661	1,672730	1,648454	1,590566	1,580349	1,571592	1,570796	+
2	3,296908	3,229877	3,129391	3,083975	2,975677	2,956562	2,940179	2,938691	-
3	3,483662	3,256479	3,193780	3,181133	3,151524	3,146380	3,141990	3,141593	-
4	4,817324	4,771699	4,747340	4,738841	4,719016	4,715582	4,712654	4,712389	+
5	6,167951	6,042546	5,975015	5,951354	5,895962	5,886338	5,878126	5,877382	+
6	6,362265	6,327789	6,309441	6,303048	6,288157	6,285580	6,283384	6,283185	-
7	7,917388	7,889710	7,875002	7,869881	7,857959	7,855898	7,854141	7,853982	+
8	9,012388	8,927031	8,881459	8,865559	8,828470	8,822046	8,816569	8,816072	-
9	9,477681	9,454572	9,442302	9,438032	9,428093	9,426375	9,424911	9,424778	-
10	11,040953	11,021123	11,010598	11,006937	10,998416	10,996943	10,995688	10,995574	+
11	11,902708	11,838210	11,803883	11,791924	11,764064	11,759244	11,755136	11,754763	+
12	12,606097	12,588732	12,579519	12,576314	12,568857	12,567568	12,566470	12,566371	-
13	14,172491	14,157047	14,148856	14,146006	14,139377	14,138232	14,137255	14,137167	+
14	14,812076	14,760296	14,732779	14,723199	14,700896	14,697039	14,693752	14,693454	-
15	15,739762	15,725858	15,718484	15,715919	15,709953	15,708921	15,708043	15,707963	-

В табл. 3 приведены собственные значения γ_p ($p = \overline{1, 15}$), когда $\Omega = 0$ (задача статики).

Таблица 3

Зависимость собственных значений γ_p ($\Omega = 0$) от показателя неоднородности α

p	$\alpha = 2$		$\alpha = 1$		$\alpha = 0,5$		$\alpha = 0$		t
	$Re \gamma_p$	$Im \gamma_p$	$Re \gamma_p$	$Im \gamma_p$	$Re \gamma_p$	$Im \gamma_p$	$Re \gamma_p^t$	$Im \gamma_p^t$	
1	1,045169	0	0,924941	0	0,894003	0	0,882931	0	+
2	2,504409	0,577261	2,255518	0,756076	2,188076	0,791905	2,165035	0,803214	-
3	3,985453	0,889596	3,835733	1,035227	3,797447	1,067987	3,784603	1,078637	+
4	5,525026	1,076163	5,418103	1,210023	5,391127	1,240868	5,382112	1,250951	-
5	7,081314	1,210168	6,998088	1,338253	6,977204	1,368040	6,970235	1,377797	+
6	8,644245	1,315027	8,576085	1,439801	8,559029	1,468948	8,553342	1,478505	-
7	10,210363	1,401287	10,152636	1,523967	10,138215	1,552698	10,133409	1,562123	+
8	11,778203	1,474616	11,728133	1,595880	11,715638	1,624324	11,711475	1,633658	-
9	13,347053	1,538421	13,302843	1,658679	13,291819	1,686915	13,288147	1,696184	+
10	14,916534	1,594912	14,876954	1,714426	14,867090	1,742507	14,863804	1,751727	-
11	16,486425	1,645604	16,450597	1,764553	16,441671	1,792515	16,438698	1,801696	+
12	18,056593	1,691586	18,023867	1,810093	18,015716	1,837962	18,013002	1,847113	-
13	19,626954	1,733663	19,596835	1,851819	19,589336	1,879612	19,586838	1,888740	+
14	21,197452	1,772451	21,169555	1,890321	21,162610	1,918054	21,160298	1,927162	-
15	22,768049	1,808428	22,742069	1,926064	22,735603	1,953746	22,733449	1,962838	+

В частности, данные табл. 3, свидетельствуют о том, что как и в однородной пластине ($\alpha = 0$) [11], так и в неоднородной ($\alpha > 0$) существует действительное собственное значение γ . С увеличением номера $p \rightarrow \infty$ величина $|\gamma_p| \rightarrow \infty$.

Таким образом, показатель неоднородности α оказывает существенное влияние на изменение дисперсионных свойства мод в диапазоне малых и средних частот Ω . С увеличением номера p влиянием параметра α на изменение корней γ_p можно пренебречь. В высокочастотной области или коротковолновом диапазоне влияние неоднородности менее заметно, и дисперсионные характеристики отличаются незначительно от аналогичных для однородной пластины.

Выводы. В данной работе получены однородные решения системы уравнений движения в перемещениях для неоднородной по толщине упругой пластины с экспоненциальным изменением модуля

сдвига и плотности в случае жестко защемленных торцов. Как и в случае однородной пластины, однородные решения состоят из вихревого и потенциального состояний.

Собственные значения и собственные функции вихревого решения находятся в явном виде. Собственные функции потенциального решения также находятся в явном виде, а для определения собственных значений получено трансцендентное дисперсионное уравнение, устанавливающее связь между частотой колебаний и собственным значением при заданных параметрах. Проведены численные исследования дисперсионного соотношения.

В явном виде получены частоты запирания, множество которых состоит из двух серий. На основе численных исследований изучена зависимость собственных значений, фазовых скоростей, частот запирания P-SV волн от изменения показателя неоднородности материала пластины.

РЕЗЮМЕ

Розглянуто тривимірну задачу про усталені коливання неперервно-неоднорідної за товщиною пружної пластины, плоскі грані якої жорстко затиснені. Одержано однорідні розв'язки системи рівнянь руху в переміщеннях у вигляді суми вихревого й потенціального станів. Проведено числові дослідження дисперсійного рівняння, що описує частотний спектр P-SV хвиль. Досліджено вплив показника неоднорідності матеріалу на зміну власних значень, фазових швидкостей, частот запирання. Наведено діаграми спектральних кривих, графіки зміни фазових швидкостей, значення частот запирання, власні значення відповідної задачі статки.

Ключові слова: поперечно-неоднорідна ізотропна пластина, жорстке затиснення, усталені коливання, метод однорідних розв'язків, власні функції, власні значення, дисперсійний спектр, фазові швидкості, частоти запирання.

SUMMARY

The three-dimensional problem of steady-state vibrations of continuously inhomogeneous in the thickness elastic plate is considered. The flat faces of plate are fixed rigidly. The homogeneous solutions of the system of motion equations in displacements are received as the sum of the vortex and potential states. The computational investigations of the dispersive equation describing frequency spectrum of P-SV waves are carried out. Influence of the inhomogeneity parameter of a material on change of eigenvalues, phase velocities, cut-off frequencies is researched. Diagrams of spectral curves, curves of phase velocities, values of cut-off frequencies, eigenvalues of corresponding statics problem are represented.

Keywords: transverse-inhomogeneous isotropic plate, rigid fixing, steady-state vibration, homogeneous solutions method, eigenfunction, eigenvalues, dispersion spectrum, phase velocities, cut-off frequencies.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Birman V. Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures / V. Birman, L.W. Byrd // Appl. Mech. Rev. – 2007. – Vol. 60, No 5. – P. 195–216.
2. FGM: Design, processing and applications / Y. Miyamoto, W.A. Kaysser, B.H. Rabin et al. – Dordrecht: Kluwer Academic, 1999. – 434 p.
3. Устинов Ю.А. Математическая теория поперечно-неоднородных плит / Ю.А. Устинов. – Ростов н/Д.: ООО ЦВВР, 2006. – 257 с.
4. Алтухов Е.В. Упругие колебания трехслойных пластин симметричного строения / Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко // Тр. Ин-та прикладной математики и механики НАН Украины. – 2009. – Т. 18. – С. 3–10.
5. Алтухов Е.В. Установившиеся колебания упругих двухслойных пластин с жесткими плоскими гранями / Е.В. Алтухов, Е.В. Куцай, М.В. Фоменко // Вісн. Донецьк. нац. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2010. – № 2. – С. 38–46.
6. Космодамианский А.С. Трехмерные задачи о вынужденных колебаниях транслопных неоднородных многосвязных плит / А.С. Космодамианский, Е.В. Алтухов // Доклады АН УССР. Сер. А. – 1980. – № 11. – С. 49–52.
7. Алтухов Е.В. Однородные решения задач о равновесии и колебаниях изотропных слоисто-неоднородных упругих пластин / Е.В. Алтухов // Вісн. Донецьк. нац. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2013. – № 1. – С. 18–22.
8. Лурье А.И. К теории толстых плит / А.И. Лурье // Прикладная математика и механика. – 1942. – Т. 6, № 2-3. – С. 151–168.
9. Алтухов Е.В. Трехмерные задачи установившихся колебаний изотропных пластин / Е.В. Алтухов, Ю.В. Мысовский, Ю.В. Панченко // Теорет. и прикладная механика. – 1996. – Вып. 26. – С. 13–19.
10. Гринченко В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко. – К.: Наук. думка, 1981. – 284 с.
11. Космодамианский А.С. Метод однородных решений в смешанных задачах теории упругости и термоупругости для толстых многосвязных пластин / А.С. Космодамианский, Е.В. Алтухов, В.А. Галич // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – № 11. – С. 62–65.

Поступила в редакцию 02.09.2013 г.