

МАТЕМАТИКА

УДК 519.21

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОГО РЕЗУЛЬТАТА БЕНИНГА-КОРОЛЕВА

Б.В. Бондарев, М.Е. Королёв

В работе [1] рассмотрен процесс риска

$$R(t) = u + c\Lambda(t) - \sum_{k=1}^{\nu(\Lambda(t))} \xi_k,$$

где $\{\xi_i\}_{i \geq 1}$ - независимые одинаково распределенные случайные величины с $M\xi_i = a$, $M\xi_i^2 = b < \infty$ - величины страховых исков предъявляемых к страховой компании; $\nu(t)$ - пуассоновский процесс с интенсивностью 1, описывающий число исков, поступивших за время $(0, t)$, то есть $M\nu(t) = t$, $c\Lambda(t)$ - суммарные премии за $(0, t)$.

Таким образом $\nu(\Lambda(t))$ является процессом Кокса (называемый также дважды стохастическим пуассоновским процессом)

В работе [1], в предположении ограниченности величин исков константой M , установлено вероятностное неравенство

$$P\{R(t) < 0\} \leq \exp\left\{-\frac{u}{4M}\right\}. \quad (1)$$

Мы, как и в [1] будем предполагать, что процесс $\Lambda(t)$ не зависит не только от $\nu(t)$ но и от последовательности $\{\xi_i\}_{i \geq 1}$, $\Lambda(t), t \geq 0$ - случайный процесс с неубывающими почти наверное конечными траекториями, непрерывный справа, выходящий из нуля. Величины исков удовлетворяют условиям: мера:

$$M\xi_k = a, \left|M\xi_k^m\right| \leq \frac{bH^{m-2}m!}{2}, m \geq 2,$$

$c > a$ - ставка страховой премии, u - нач

$$P\left\{\sup_{0 \leq t \leq \mu} \left[\sum_{k=1}^{v(t)} \xi_k - ct \right] > u\right\} \leq \begin{cases} \exp\left\{-\frac{[u + \mu(c-a)]^2}{4\mu b}\right\}, & \frac{[u + \mu(c-a)]}{\mu b} \leq \frac{1}{H}, \\ \exp\left\{-\frac{u + \mu(c-a)}{4H}\right\}, & \frac{[u + \mu(c-a)]}{\mu b} > \frac{1}{H}. \end{cases} \quad (2)$$

Доказательство. Воспользуемся представлением сложного пуассоновского процесса в виде стохастического интеграла [3,4], в силу которого

$$\sum_{k=1}^{v(\mu)} \xi_k = \int_0^\mu \int_A u v(du, ds) = \int_0^\mu \int_A u \tilde{v}(du, ds) + \int_0^\mu \int_A u F(du) ds = \int_0^\mu \int_A u \tilde{v}(du, ds) + a\mu,$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{v(\mu)} \xi_k - a\mu = \int_0^\mu \int_A u \tilde{v}(du, ds),$$

где $\tilde{v}(du, ds) = v(du, ds) - F(du)ds$.

Положим

$$\gamma_z(s) = \exp\left\{\int_0^\mu \int_A zu \tilde{v}(du, ds) - \int_0^\mu \int_A [\ell^{zu} - 1 - zu] F(du) ds\right\}.$$

Покажем, что случайный процесс $\gamma_z(\mu)$ – мартингал относительно семейства

$$\mathfrak{T}_0^s = \sigma\left\{\int_0^\mu \int_A u \tilde{v}(du, ds), 0 \leq \tau \leq \mu\right\}.$$

Пусть

$$\zeta_\mu^z = \int_0^\mu \int_A zu \tilde{v}(du, ds) - \int_0^\mu \int_A [\ell^{zu} - 1 - zu] F(du) ds,$$

$$P\left\{\sup_{0 \leq t \leq \mu} \left[\sum_{k=1}^{\nu(t)} \xi_k - ct \right] > u\right\} = P\left\{\sup_{0 \leq t \leq \mu} \zeta_t^z > zu - b\mu z^2 + \mu z(c-a)\right\} \leq \exp\left\{-zu + b\mu z^2 - \mu z(c-a)\right\}$$

Рассмотрим функцию $f(z) = -z[u + \mu(c-a)] + \mu bz^2$, найдём её минимум при $\frac{c-a}{b} \leq z \leq \frac{1}{2H}$.

В силу того, что $f'(z) = -[u + \mu(c-a)] + 2\mu bz = 0$ имеем $z^* = \frac{u + \mu(c-a)}{2\mu b}$.

Если $z^* \in \left[\frac{c-a}{b}, \frac{1}{2H}\right]$, то минимум равен

$$f(z^*) = -\frac{[u + \mu(c-a)]^2}{4\mu b}. \quad (4)$$

Если $z^* > \frac{1}{2H}$, то есть

$$u + \mu(c-a) > \frac{\mu b}{H}, \quad (5)$$

то положив $z = \frac{1}{2H}$ имеем с учётом (5)

$$f\left(\frac{1}{2H}\right) = -\frac{u + \mu(c-a)}{2H} + \frac{\mu b}{4H^2} \leq -\frac{u + \mu(c-a)}{2H} + \frac{1}{4H} \frac{\mu b}{H} \leq -\frac{u + \mu(c-a)}{4H}. \quad (6)$$

Лемма доказана.

Замечание 1. Если $\frac{1}{2H} < \frac{c-a}{b}$, то

$$P\left\{\sup_{0 \leq t \leq \mu} \left[\sum_{k=1}^{\nu(t)} \xi_k - ct \right] > u\right\} = P\left\{\sup_{0 \leq t \leq \mu} \zeta_t^z > zu - b\mu z^2 + \mu z(c-a)\right\} \leq \exp\{-zu\}. \quad (7)</$$

Доказательство. В силу того, что

$$P\{\exists t \in [0, T]: u + R(t) < 0\} = P\left\{\inf_{0 \leq t \leq T} [u + R(t)] < 0\right\} = P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} \left[\sum_{k=1}^{\nu(\Lambda(t))} \xi_k - c\Lambda(t)\right] > u\right\} \leq$$

$$\leq P\left\{\sup_{0 \leq t \leq \Lambda(T)} \left[\sum_{k=1}^{\nu(t)} \xi_k - ct\right] > u\right\} = \int_0^{+\infty} P\left\{\sup_{0 \leq t \leq \mu} \left[\sum_{k=1}^{\nu(t)} \xi_k - ct\right] > u\right\} dP\{\Lambda(T) < \mu\},$$

имеем с учётом (2)

$$P\{\exists t \in [0, T]: u + R(t) < 0\} \leq P\{\Lambda(T) < x_0\} + \int_{x_0}^{x_1} \exp\left\{-\frac{[u + \mu(c-a)]^2}{4\mu b}\right\} dP\{\Lambda(T) < \mu\} +$$

$$+ \int_{x_1}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{[u + \mu(c-a)]}{4H}\right\} dP\{\Lambda(T) < \mu\} \leq \int_0^{+\infty} \exp\left\{-\frac{[u + \mu(c-a)]}{4H}\right\} dP\{\Lambda(T) < \mu\} \leq$$

$$\leq \exp\left\{-\frac{u}{4H}\right\} \int_0^{+\infty} \exp\left\{-\frac{(c-a)\mu}{4H}\right\} dP\{\Lambda(T) < \mu\} \leq \exp\left\{-\frac{u}{4H}\right\},$$
(10)

где $x_i = \frac{-u}{c-a-\frac{ib}{H}}, i=0,1$.

Воспользовавшись результатом замечания имеем

$$P\{\exists t \in [0, T]: u + R(t) < 0\} \leq$$

$$\leq \exp\left\{-\frac{u}{2H}\right\} \int_0^{+\infty} \exp\left\{-\frac{(c-a)\mu}{2H}\right\} dP\{\Lambda(T) < \mu\} \leq \exp\left\{-\frac{u}{2H}\right\}.$$
(11)

Из (10) и (11) следует утверждение теоремы.

УДК 519.21

VERSION OF STRONG INVARIANCE PRINCIPLE FOR MIXING RANDOM FIELDS

George G. Zhyrnyy

1. Introduction. There are numerous results on strong invariance principle for random fields and related topics and it is simply impossible to mention all of them. It is necessary to mention recent overview work [1] by Zinchenko that gives excellent coverage for the domain of interest. It also suggests that problem of present article looks somewhat undeveloped in comparison with both case of multi-indexed sums of independent identically distributed random variables and case of single-indexed sums of independent and, resp., dependent random variables. In case of multi-indexed sums of independent identically distributed random variables to give more references for reader we suggest to review works [2-4], which are valuable in themselves and where more references can be found in turn. In present paper some version of strong invariance principle for mixing random fields is proved using results of Berkes and Morrow [5]. But we consider piecewise linear approximation to Wiener field instead of sums (as it done in [5]) thus obtaining results for continuous argument from $[0,1]^q$ instead of unbounded discrete one (as it done in [5]). Such consideration was inspired by work of S.A. Utev [6].

2. Main results. Let Z_+^q , resp. R_+^q , denote the set of all q -dimensional vectors with natural, resp. positive real, coordinates. Let ξ_t , $t \in Z_+^q$ be a random field with the following properties:

$$E\xi_t = 0, E|\xi_t|^{2+\delta} \leq C \forall t \in Z_+^q$$

with some $\delta > 0, C > 0$ and the following mixing condition holds

$$\rho(S_1, S_2) = \sup_{\substack{A \in \sigma\{\xi_t, t \in S_1\} \\ B \in \sigma\{\xi_t, t \in S_2\}}} |P(AB) - P(A)P(B)| \leq C_1 \left(\inf_{\substack{t \in S_1 \\ s \in S_2}} |t - s| \right)^{-q(1+\varepsilon)(1+2/\delta)}$$

with some $0 < \varepsilon < 1/2, C_1 > 0$, where $\sigma\{\bullet\}$ denotes the sigma-field generated by the random variables in the brackets. We assume also ξ_t to be weakly stationary, i.e. there exists real valued function $p(x)$ of vector argument $x \in Z_+^q$ such that $E\xi_s \xi_t = p(s - t)$.

It is easy to give an example of such random field different from set of independent random variables. Assume $\alpha_{i,j}$, $(i,j) \in Z_+^2$ to be a set of independent random variables which are integrable in power $2 + \delta$ and have a zero mean. Then define

$$\xi_{i,j} = a_1 \alpha_{i,j} + a_2 \alpha_{i+1,j} + a_3 \alpha_{i,j+1} + a_4 \alpha_{i+1,j+1}$$

with some fixed real numbers $a_1, \dots, a_4$. One can see this field satisfies all above assumptions.

Define for $t = (t_1, \dots, t_q)$

$$[t] = \prod_{i=1}^q t_i$$

and for $d \in (0,1)$

$$G_d = \bigcap_{k=1}^q \left\{ t \in Z_+^q : t_k \geq \prod_{\substack{i=1,q, \\ i \neq k}} t_i^d \right\}.$$

For $n > 0, t \in Z_+^q, t_i \leq n \forall i = \overline{1,q}$ define $r_t = \left(\frac{t_1}{n}, \dots, \frac{t_q}{n} \right)$

and

$$S_t = \sum_{(1, \dots, 1) \leq s \leq t} \xi_s.$$

Denote also $\tilde{\eta}_n(x), x \in [0,1]^q$ the linear function with nodes $\tilde{\eta}_n(r_t) = \frac{S_t}{[n]^{1/2}}$ where coordinates of t run all the positive integer values not greater than n .

Theorem 1. Under above assumptions it is possible to redefine random field ξ_t on a new probability space together with a q -parameter Wiener field $W(x), x \in [0,1]^q$ such that a.s. holds

$$\sup_{x \in H_{d,n}} |\eta_n(x) - W(x)| = O\left(\max\left([n]^{-\lambda+0.5}, [n]^{-\frac{1+\kappa}{2}}\right)\right),$$

where $\lambda = \frac{\varepsilon^{6q} \delta^5 d^4}{8^{q+9}}$, $\kappa \in \left(0, \frac{\varepsilon^q \delta}{8^q}\right)$, $H_{d,n} = \{x \in [0,1]^q : \text{Int}(nx) \in G_d\}$, $\text{Int}(x)$ is a coordinate-

wise integer part of x , and $\eta_n(x) = \tilde{\eta}_n(x)/\sigma$, provided $\sigma > 0$, where value of $\sigma^2 = \sum_{v \in Z^q} p(v)$

is well-defined since right hand side series converge absolutely.

For $\beta > 0$ set

$$G_\beta^* = \bigcap_{k=1}^q \left\{ t \in Z_+^q : t_k \geq \ln^\beta \left(\prod_{\substack{i=1, q, \\ i \neq k}} t_i \right) \right\}.$$

Theorem 2. Under above assumptions there exist positive constants β and λ such that it is possible to redefine random field ξ_t on a new probability space together with a q -parameter Wiener field $W(x), x \in [0,1]^q$ such that a.s. holds

$$\sup_{x \in H_{\beta,n}^*} |\eta_n(x) - W(x)| = O([n]^{0.5} (\ln \ln [n])^{-\lambda}),$$

where $H_{\beta,n}^* = \{x \in [0,1]^q : \text{Int}(nx) \in G_\beta^*\}$, $\text{Int}(x)$ is a coordinate-wise integer part of x , and $\eta_n(x) = \tilde{\eta}_n(x)/\sigma$, provided $\sigma > 0$, where value of $\sigma^2 = \sum_{v \in Z^q} p(v)$ is well-defined since right

hand side series converge absolutely.

3. Proof of the main results. To simplify notations we conduct the proof for $q=2$. Consider partition of $[0,1]^2$

$$\beta_n = \left\{ [(s_k, t_l), (s_{k+1}, t_{l+1})], s_k = \frac{k}{n}, t_l = \frac{l}{n}, k = \overline{1, n}, l = \overline{1, n} \right\}.$$

It is obvious that regardless to how random fields are defined the following inequality holds

$$\begin{aligned} \sup_{(s,t) \in H_{d,n}} |\eta_n(s,t) - W(s,t)| &\leq \sup_{(s_k, t_l) \in H_{d,n}} |\eta_n(s_k, t_l) - W(s_k, t_l)| + \\ &+ \sup_{(s_k, t_l), (s,t) \in [(s_k, t_l), (s_{k+1}, t_{l+1})] \cap H_{d,n}} |\eta_n(s,t) - \eta_n(s_k, t_l)| + \\ &+ \sup_{(s_k, t_l), (s,t) \in [(s_k, t_l), (s_{k+1}, t_{l+1})] \cap H_{d,n}} |W(s,t) - W(s_k, t_l)| \end{aligned} \quad (1)$$

For the third term in (1) we have

$$\begin{aligned}
 & P \left\{ \sup_{(s,t) \in [(s_k, t_l), (s_{k+1}, t_{l+1})]} |W(s, t) - W(s_k, t_l)| > \varepsilon \right\} = \\
 & = 2P \left\{ \sup_{(s,t) \in [(s_k, t_l), (s_{k+1}, t_{l+1})]} (W(s, t) - W(s_k, t_l)) > \varepsilon \right\} = \\
 & = 2P \left\{ \sup_{(s,t) \in [(0,0), (s_{k+1} - s_k, t_{l+1} - t_l)]} (W(s + s_k, t + t_l) - W(s_k, t_l)) > \varepsilon \right\}.
 \end{aligned}$$

It is easy to find that due to results of [7] random field $u(s, t) = W(s + s_k, t + t_l) - W(s_k, t_l)$ is Wiener field with respect to Wiener filtration where $(s, t) \in [(0,0), (s_{k+1} - s_k, t_{l+1} - t_l)]$. Using standard martingale technique we obtain

$$P \left\{ \sup_{(s,t) \in [(s_k, t_l), (s_{k+1}, t_{l+1})]} |W(s, t) - W(s_k, t_l)| > \varepsilon \right\} \leq 2 \exp \left(-\frac{\varepsilon^2 n^2}{2} \right).$$

Consider first term in (1). Take probability space and Wiener field $\tilde{W}(s, t)$ from the theorem 1 of [5] and set

$$\begin{aligned}
 & W(s, t) = n^{-1} \tilde{W}(ns, nt). \text{ One can see that } EW(s, t) \equiv 0 \text{ and} \\
 & E(\Delta[(s_0, t_0), (s, t)]W)^2 = n^{-2} (nsnt + nsnt_0 + ns_0nt + ns_0nt_0 - \\
 & \quad - 2nsnt_0 - 2ns_0nt + 2ns_0nt_0 + 2ns_0nt_0 - \\
 & \quad - 2ns_0nt_0 - 2ns_0nt_0) = (s - s_0)(t - t_0)
 \end{aligned}$$

Further, $W(0, t) \equiv W(s, 0) \equiv 0$ hold a.s. since $\tilde{W}(0, t) \equiv \tilde{W}(s, 0) \equiv 0$ a.s. Results of [7] now yield that $W(s, t)$ is a Wiener field on $[0, 1]^2$. Theorem 1 of [5] now implies that we have found the probability space and Wiener field $W(s, t)$ such that a.s. holds

$$\sup_{(s_k, t_l) \in H_{d,n}} |\eta_n(s_k, t_l) - W(s_k, t_l)| = O(n^{0.5-\lambda}).$$

In turn, theorem 2 of [5] implies that we have found the probability space and Wiener field $W(s, t)$ such that a.s. holds

$$\sup_{x \in H_{\beta,n}} |\eta_n(x) - W(x)| = O(n^{0.5} (\ln \ln n)^{-\lambda}).$$

Second term in (1) can be treated in following manner.

$$\begin{aligned}
 & P \left\{ \sup_{(s_k, t_l), (s, t) \in [(s_k, t_l), (s_{k+1}, t_{l+1})] \cap H_{d,n}} |\eta_n(s, t) - \eta_n(s_k, t_l)| > \varepsilon \right\} \leq \\
 & \leq P \left\{ \sup_{(s_k, t_l), (s_{k+1}, t_{l+1}) \in H_{d,n}} |\eta_n(s_{k+1}, t_{l+1}) - \eta_n(s_k, t_l)| > \varepsilon / 3 \right\} + \\
 & + P \left\{ \sup_{(s_k, t_l), (s_k, t_{l+1}) \in H_{d,n}} |\eta_n(s_k, t_{l+1}) - \eta_n(s_k, t_l)| > \varepsilon / 3 \right\} + \\
 & + P \left\{ \sup_{(s_k, t_l), (s_{k+1}, t_l) \in H_{d,n}} |\eta_n(s_{k+1}, t_l) - \eta_n(s_k, t_l)| > \varepsilon / 3 \right\} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= P \left\{ \sup_{(s_k, t_l), (s_{k+1}, t_{l+1}) \in H_{d,n}} \frac{1}{\sigma} \left| \sum_{j=1}^l \xi_{k+1,j} \right| > \frac{\varepsilon}{3} \right\} + \\
 &+ P \left\{ \sup_{(s_k, t_l), (s_{k+1}, t_{l+1}) \in H_{d,n}} \frac{1}{\sigma} \left| \sum_{i=1}^k \xi_{i,l+1} \right| > \frac{\varepsilon}{3} \right\} + \\
 &+ P \left\{ \sup_{(s_k, t_l), (s_{k+1}, t_{l+1}) \in H_{d,n}} \frac{1}{\sigma} \left| \xi_{k+1,l+1} \right| > \frac{\varepsilon}{3} \right\}.
 \end{aligned}$$

Due to lemma 7 of [5] each of these three probabilities has upper bound $\text{const}(\varepsilon n)^{-(2+\alpha)}$, $\alpha = \frac{\varepsilon^q \delta}{8^q}$,

where *const* everywhere in this article stands for some universal constants.

To finish the proof of theorems apply Borel-Cantelli lemma to probability bounds for second and third terms of (1).

4. Acknowledgements. This research was partially supported by INTAS Project 99-00016. Author thanks to professor B.V. Bondarev (Donetsk National University) for suggestion to review work [6].

РЕЗЮМЕ

Доказан вариант сильного принципа инвариантности для кусочно-линейной функции с узлами в нормированных частичных суммах случайного поля, удовлетворяющего условию сильного перемешивания, с дискретным временем.

SUMMARY

Version of strong invariance principle is proved for piecewise linear functions with nodes at normed partial sums of strongly mixed random field with discrete time.

REFERENCES:

1. Zinchenko N.M. Skorokhod representation and strong invariance principle // Probability Theory and Math. Stat. – 2000. - № 63 – p. 49-60 (in Ukrainian).
2. Zinchenko N.M. Generalization of strong invariance principle for multiple sums of independent random variables from the domain of attraction by stable law // Probability Theory and Math. Stat. – 1997. - № 57. – p. 31-40 (in Ukrainian).
3. Rio E. Strong approximation for set-indexed partial-sum processes, via KMT construction I // The Annals of Probability. – 1993. – Vol. 21, No.1. – 759-790.
4. Rio E. Strong approximation for set-indexed partial-sum processes, via KMT construction II // The Annals of Probability. – 1993. – Vol. 21, No.3. – 1706-1727.
5. Berkes I., Morrow G.J. Strong Invariance Principles for Mixing Random Fields // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete. – 1981. – N57. – P.15-37.
6. Utev S.A. Inequalities for the sums of weakly random variables and estimation of the rate of convergence in invariance principle. – In book: Limit theorems for the sums of random variables. – Novosibirsk: Nauka, 1984. – pp. 50-77 (in Russian).
7. Knopov P.S. Optimal estimators for parameters of stochastic systems –Kiev: Naukova Dumka. – 1981. – 152 p. (in Russian).

Надійшла до редакції 10.03.2002 р.

УДК 519.21

ПОБУДОВА ОЦІНОК КВАЗІМАКСИМАЛЬНОЇ ПРАВДОПОДІБНОСТІ НЕВІДОМИХ ПАРАМЕТРІВ

Ю.М. Полшков

Задача оцінювання невідомих параметрів у коефіцієнтах класичних стохастичних рівнянь Іто, дослідження властивостей оцінок привертала увагу багатьох математиків. Ці дослідження знайшли широке відображення, як у статейної, так і в монографічній літературі. Водночас, очевидно, що стохастичні диференціальні рівняння в їхньому класичному виді лише приблизно описують процеси, що відбуваються в реальності. Більш точно реальні процеси будуть описуватися стохастичними рівняннями з “фізичним” білим шумом [1], тобто рівняннями виду

$$\begin{aligned}\frac{dX_{\varepsilon}^{\theta_0}(t)}{dt} &= a(t, X_{\varepsilon}^{\theta_0}(t), \theta_0) + \sigma(t)\eta(t/\varepsilon), \\ X_{\varepsilon}^{\theta_0}(0) &= x_0,\end{aligned}\quad (1)$$

де $\theta_0 \in \Theta \subset R^k$ - невідомий параметр, що слід оцінити по реалізації $\{X_{\varepsilon}^{\theta_0}(t), t \in [0, T]\}$, осцилюючий процес $\eta(t), t \geq 0$ - стаціонарний у вузькому сенсі випадковий процес з нульовим середнім, задовольняючий умові абсолютної регулярності, тобто

$$M \sup_{B \in \mathfrak{R}_{t+\tau}^{+\infty}} |P(B/\mathfrak{R}_0^t) - P(B)| = \beta(\tau) \rightarrow 0, \tau \rightarrow \infty.$$

Тут $\mathfrak{R}_0^t$ - σ -алгебра, породжена процесом $\eta(s), s \in [0, t]$, $\mathfrak{R}_{t+\tau}^{+\infty}$ - σ -алгебра, породжена процесом $\eta(s), t + \tau \leq s < +\infty, \tau \geq 0$. Впливи, що робляться таким процесом, саме і прийнято називати “фізичним” білим шумом (або впливами швидкими випадковими осциляціями). Коефіцієнт $\beta(\tau)$ називається коефіцієнтом абсолютної регулярності. Будемо також припускати, що виконуються умови

$$\begin{aligned}|a(t, x, \theta_1) - a(t, x, \theta_2)| &\leq L|\theta_1 - \theta_2|, \\ |a(t, x, \theta) - a(t, y, \theta)| &\leq L|x - y|, \\ |a(t, x, \theta)| + |\sigma(t)| &\leq C, 0 < \nu \leq |\sigma(t)|.\end{aligned}\quad (2)$$

Однією з задач, раніше вирішеною автором [2], була така: знайти оцінку швидкості збіжності рішень задачі (1) до рішення відповідного “близького” рівняння з вінеровським процесом. При наявності таких результатів, їх можна застосовувати в задачах оцінювання невідомих параметрів у системах, схильних впливу швидкими випадковими осциляціями. Пов'язано це з тим, що при спробах виписати щільності міри рішення вихідної системи (1) щодо деякої опорної міри виникають непереборні труднощі (у всякому разі, автору невідомі позитивні результати в даному напрямку). І тут, напевно, найбільше прийнятний шлях - робити розрахунки на підставі “близького” рівняння з випадковою добавкою. Природно, що після розрахунків варто переконатися в тому, чи будуть “гарними” одержані оцінки для невідомих параметрів вихідної системи (1). Відповідям на ці питання і присвячена дана робота.

Відповідно до результатів роботи [2], “близькими” (у сенсі близькості траєкторій із швидкістю збіжності степеневого виду) для траєкторій задачі (1), будуть траєкторії

$$\begin{aligned}d\xi_{\varepsilon}^{\theta_0}(t) &= a(t, X_0^{\theta_0}(t), \theta_0)dt + \sqrt{\varepsilon}\sigma(t)dw(t), \\ \xi_{\varepsilon}^{\theta_0}(0) &= x_0,\end{aligned}\quad (3)$$

де $X_0^{\theta_0}(t)$ - рішення задачі

$$\begin{aligned}\frac{dX_0^{\theta_0}(t)}{dt} &= a(t, X_0^{\theta_0}(t), \theta_0), \\ X_0^{\theta_0}(0) &= x_0.\end{aligned}\quad (4)$$

Результати роботи [2] знадобляться для подальших міркувань, тому резюмуємо їх такою теоремою.

Т е о р е м а 1. Нехай виконані умови:

1) $\eta(t)$ - стаціонарний у вузькому сенсі випадковий процес із нульовим середнім, для якого з ймовірністю 1 має місце нерівність

$$|\eta(t)| \leq D < \infty;$$

2) процес $\eta(t)$ задовольняє умові абсолютної регулярності з коефіцієнтом перемішування $\beta(\tau)$ таким, що для деяких $\gamma \geq 3$, $m \geq 3$ (γ, m - цілі числа), $\delta > 0$ і $j(\gamma) = 2 \min(k \in N : 2k \geq \gamma)$ виконуються умови

$$a(\beta, \gamma, \delta) = \sum_{k=0}^{+\infty} [\beta(k)]^{\delta / \gamma(\gamma+\delta)} < +\infty,$$

$$b(\beta, \gamma, \delta) = \sum_{k=0}^{+\infty} [\beta(k)]^{\delta / j(\gamma)+\delta} (k+1)^{j(\gamma)-2} < +\infty,$$

$$0 < c_m = \int_0^{+\infty} [\beta(\tau)]^{1/2m} d\tau < +\infty.$$

Тоді: а) буде справедливим розклад

$$\zeta_\varepsilon(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \eta(s/\varepsilon) ds = \sqrt{\varepsilon} \int_0^{t/\varepsilon} \eta(s) ds = \sigma_0 w_\varepsilon(t) + \rho_\varepsilon(t), \quad w(t) \quad (5)$$

де $0 < \sigma_0^2 = 2 \int_0^\infty M\eta(0)\eta(s) ds \leq 8D^2 c_m$, $w_\varepsilon(t) = \sqrt{\varepsilon} w(t/\varepsilon)$, - стандартний вінерівський процес;

б) має місце оцінка

$$P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} |\rho_\varepsilon(t)| > 2\varepsilon^\alpha\right\} \leq p_{m,\alpha,\nu}(\varepsilon), \quad (6)$$

де $0 < \alpha < 2/9$, $\nu = \min(m, \gamma)$ і

$$p_{m,\alpha,\nu}(\varepsilon) = c_0(m) \varepsilon^{\nu(1-2\alpha)-1} + 2 \exp\{-1/(2\varepsilon^\alpha)\};$$

в) справедлива оцінка

$$P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} |\zeta_\varepsilon(t)| > R\right\} \leq \frac{c_4(m)}{R - 2\varepsilon^\alpha} \exp\{-c_5(m)(R - 2\varepsilon^\alpha)^2\} + p_{m,\alpha,\nu}(\varepsilon), \quad (7)$$

де $R > 2\varepsilon^\alpha$;

г) справедлива оцінка

$$P\left\{\sqrt{\varepsilon} \int_0^{T/\varepsilon} (|\eta(s)| - M|\eta(s)|) ds > r\right\} \leq \frac{c_4(m)}{r - 2\varepsilon^\alpha} \exp\{-c_5(m)(r - 2\varepsilon^\alpha)^2\} + p_{m,\alpha,\nu}(\varepsilon), \quad (8)$$

де $r > 2\varepsilon^\alpha$;

д) при малому $\varepsilon > 0$ рішення задач (1) і (3) "близькі", причому вірна оцінка "близькості"

$$\begin{aligned} P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} \frac{|X_\varepsilon^{\theta_0}(t) - \xi_\varepsilon^{\theta_0}(t)|}{\sqrt{\varepsilon}} > R\right\} &\leq \frac{2c_4(m)\sqrt{\varepsilon}}{1 - 2\varepsilon^\alpha\sqrt{\varepsilon}} \exp\left\{-\frac{c_5(m)}{\varepsilon} (1 - 2\varepsilon^\alpha\sqrt{\varepsilon})^2\right\} + \\ &+ \frac{4c_4(m)}{[R - 2\mu(\varepsilon)]c_{15} - 4\varepsilon^\alpha} \exp\left\{-\frac{c_5(m)}{4} ([R - 2\mu(\varepsilon)]c_{15} - 4\varepsilon^\alpha)^2\right\} + 4p_{m,\alpha,\nu}(\varepsilon) + \\ &+ c_{14}(m)[\mu(\varepsilon)]^{\nu(1-2\alpha)-1/\alpha} + 4 \exp\{-1/[2c_{13}\mu(\varepsilon)]\} \stackrel{def}{=} q_\varepsilon(R), \end{aligned} \quad (9)$$

де $\mu(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$, $2\varepsilon^\alpha < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, $R - 2\mu(\varepsilon) > \frac{4\varepsilon^\alpha}{c_{15}}$.

З а у в а ж е н н я 1. Позитивні константи $c_0(m)$, c_{15} і т.д. теореми 1 визначені в [2] і не наводяться в силу своєї громіздкості.

З а у в а ж е н н я 2. Використовуючи умови теореми 1 при $\nu \geq 3$ й узявши, наприклад, $R = \varepsilon^{-1/9}$, $r = \varepsilon^{-1/9}$, $\mu(\varepsilon) = \varepsilon^{1/9}$, $\alpha = \frac{1}{9}$, можна наблизити ε до 0 справа і переконатися в тому, що права частина оцінки (9) буде прямувати до 0.

Перейдемо безпосередньо до виконання цілей даної роботи. Нехай μ_ε^θ - міра, породжена в просторі траєкторій рішенням рівняння

$$\begin{aligned} d\xi_\varepsilon^\theta(t) &= a(t, X_0^\theta(t), \theta)dt + \sqrt{\varepsilon}\sigma(t)dw(t), \\ \xi_\varepsilon^\theta(0) &= x_0, \end{aligned} \quad (10)$$

де $\theta \in \Theta$; $\mu_\varepsilon^{\theta_0}$ - міра, породжена в просторі траєкторій рішенням рівняння (3). Тоді, відповідно до [3], μ_ε^θ міра абсолютно неперервна щодо $\mu_\varepsilon^{\theta_0}$ міри і щільність має вигляд

$$\begin{aligned} \rho_\varepsilon(\theta_0) &= \frac{d\mu_\varepsilon^\theta}{d\mu_\varepsilon^{\theta_0}}(\xi_\varepsilon^{\theta_0}(\cdot)) = \exp \left\{ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^T \frac{a(t, X_0^\theta(t), \theta) - a(t, X_0^{\theta_0}(t), \theta_0)}{\sigma(t)} dw(t) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^T \frac{[a(t, X_0^\theta(t), \theta) - a(t, X_0^{\theta_0}(t), \theta_0)]^2}{\sigma^2(t)} dt \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

де вінеровський процес $w(t), t \in [0, T]$ визначається через рішення рівняння (3):

$$dw(t) = \frac{d\xi_\varepsilon^{\theta_0}(t) - a(t, X_0^{\theta_0}(t), \theta_0)dt}{\sqrt{\varepsilon}\sigma(t)}.$$

Таким чином, (11) можна переписати в такому вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_\varepsilon^\theta}{d\mu_\varepsilon^{\theta_0}}(\xi_\varepsilon^{\theta_0}(\cdot)) &= \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \frac{[a(t, X_0^\theta(t), \theta) - a(t, X_0^{\theta_0}(t), \theta_0)] d\xi_\varepsilon^{\theta_0}(t)}{\sigma^2(t)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\varepsilon} \left(\int_0^T \frac{a^2(t, X_0^\theta(t), \theta)}{\sigma^2(t)} dt - \int_0^T \frac{a^2(t, X_0^{\theta_0}(t), \theta_0)}{\sigma^2(t)} dt \right) \right\}. \end{aligned}$$

Функціонал щільності на траєкторії $X(t), t \in [0, T]$ буде мати вигляд (див. [3])

$$\begin{aligned} \rho_\varepsilon(X(\cdot), \theta, \theta_0) &= \frac{d\mu_\varepsilon^\theta}{d\mu_\varepsilon^{\theta_0}}(X(\cdot)) = \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \frac{[a(t, X_0^\theta(t), \theta) - a(t, X_0^{\theta_0}(t), \theta_0)] dX(t)}{\sigma^2(t)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\varepsilon} \left(\int_0^T \frac{a^2(t, X_0^\theta(t), \theta)}{\sigma^2(t)} dt - \int_0^T \frac{a^2(t, X_0^{\theta_0}(t), \theta_0)}{\sigma^2(t)} dt \right) \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Оцінкою квазімаксимальної правдоподібності θ_ε назовемо оцінку, що надає максимум функціоналу (12), узятому на траєкторії рішення рівняння (1):

$$\max_{\theta \in \Theta} \rho_\varepsilon(X_\varepsilon^{\theta_0}(\cdot), \theta, \theta_0) = \rho_\varepsilon(X_\varepsilon^{\theta_0}(\cdot), \theta_\varepsilon, \theta_0). \quad (13)$$

Якщо є неперервна залежність від θ функціоналу $\rho_\varepsilon(X_\varepsilon^{\theta_0}(\cdot), \theta, \theta_0)$ і Θ - параметрична множина-компакт, то θ_ε існує.

Основна задача буде складатися в побудові нерівності вигляду

$$P\{\varphi(\varepsilon)|\theta_\varepsilon - \theta_0| > R\} \leq C_1 \exp\{-C_2 R\} + p(\varepsilon), \quad (14)$$

де $\varphi(\varepsilon) \rightarrow +\infty$, $p(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Функції $\varphi(\varepsilon)$, $p(\varepsilon)$ повинні бути виписані в явному вигляді.

На підставі нерівностей виду (14) можна побудувати надійний інтервал для невідомого параметра θ_0 . Дійсно, за будь-яким, як завгодно малим, наперед заданим $\gamma > 0$ знайдемо R_γ таке, щоб

$$C_1 \exp\{-C_2 R\} \leq \gamma.$$

Тоді буде виконуватися нерівність

$$|\theta_\varepsilon - \theta_0| < \frac{R_\gamma}{\varphi(\varepsilon)}$$

з ймовірністю не меншої, чим $1 - \gamma - p(\varepsilon)$. Причому інтервал може стати як завгодно "вузьким" у виду того, що $\varphi(\varepsilon) \rightarrow +\infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, тобто якщо мало ε . У подальших судженнях будуть задіяні ідеї й елементи доведень із [4].

Теорема 2. Нехай:

1) θ_ε - оцінка квазімаксимальної правдоподібності, тобто така, що

$$\max_{\theta \in \Theta} \rho_\varepsilon(X_\varepsilon^{\theta_0}(\cdot), \theta, \theta_0) = \rho_\varepsilon(X_\varepsilon^{\theta_0}(\cdot), \theta_\varepsilon, \theta_0);$$

2) функції $|a(t, x, \theta)|$, $|a'_x(t, x, \theta)|$, $|a'_t(t, x, \theta)|$, $|\sigma(t)|$, $|\sigma'(t)|$ обмежені сталою C і виконуються

умови

$$|a'_x(t, x, \theta) - a'_x(t, y, \theta)| + |a(t, x, \theta) - a(t, y, \theta)| \leq L|x - y|, \quad |\sigma(t)| \geq \nu > 0, \quad (15)$$

$$|a'_t(t, x, \theta_1) - a'_t(t, x, \theta_2)| + |a'_x(t, x, \theta_1) - a'_x(t, x, \theta_2)| + |a(t, x, \theta_1) - a(t, x, \theta_2)| \leq L|\theta_1 - \theta_2|^\alpha;$$

3) для будь-якого $\theta \in \Theta$ справедлива нерівність

$$\int_0^T \frac{[a(t, X_0^\theta(t), \theta) - a(t, X_0^{\theta_0}(t), \theta_0)]^2}{\sigma^2(t)} dt \geq \frac{p_0 |\theta - \theta_0|^{2\alpha}}{C^2}, \quad (16)$$

де $p_0 > 0$, $\alpha > 0$;

4) виконані відсутні умови теореми 1.

Тоді справедлива оцінка

$$P\left\{\varepsilon^{-\frac{1}{2\alpha}} |\theta_\varepsilon - \theta_0| > H\right\} \leq D_0 \exp\{-b_0 H^{2\alpha}\} + q_\varepsilon(R), \quad (17)$$

де $q_\varepsilon(R)$ визначена в оцінці (9) теореми 1, D_0 і b_0 - деякі позитивні сталі,

$$R = \frac{H^\alpha p_0 \nu^2}{4C^3 TL} \left(\frac{1}{TC} + \frac{2}{\nu} + \frac{1}{C} + 1 \right)^{-1}.$$

Доведення. Нехай $u = \varphi(\varepsilon)(\theta - \theta_0)$, тоді, відповідно до [4] стор. 62, маємо

$$\begin{aligned} P\{\varphi(\varepsilon)|\theta_\varepsilon - \theta_0| > H\} &= P\left\{\sup_{|u|>H} \rho_\varepsilon\left(X_\varepsilon^{\theta_0}(\cdot), \theta_0 + \frac{u}{\varphi(\varepsilon)}, \theta_0\right) \geq 1\right\} \leq \\ &\leq \sum_{r=0}^{+\infty} P\left\{\sup_{\Gamma_r} \rho_\varepsilon\left(X_\varepsilon^{\theta_0}(\cdot), \theta_0 + \frac{u}{\varphi(\varepsilon)}, \theta_0\right) \geq 1\right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Тут уведено множину $U_\varepsilon = \varphi(\varepsilon)(\Theta - \theta_0)$, а Γ_r - пересічення U_ε з кульовим прошарком $\{H + r \leq |u| < H + r + 1\}$. Таким чином, з огляду на (12), одержимо

$$\begin{aligned}
 P\{\varphi(\varepsilon)|\theta_\varepsilon - \theta_0| > H\} &\leq \sum_{r=0}^{+\infty} P\left\{ \sup_{\Gamma_r} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^T \frac{\left[a\left(t, X_0^{\theta_0 + \frac{u}{\varphi(\varepsilon)}}(t), \theta_0 + \frac{u}{\varphi(\varepsilon)}\right) - a(t, X_0^{\theta_0}(t), \theta_0) \right]}{\sigma(t)} dw(t) \geq \right. \\
 &\geq \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^T \frac{\left[a\left(t, X_0^{\theta_0 + \frac{u}{\varphi(\varepsilon)}}(t), \theta_0 + \frac{u}{\varphi(\varepsilon)}\right) - a(t, X_0^{\theta_0}(t), \theta_0) \right]^2}{\sigma^2(t)} dt - \\
 &\quad \left. - \sup_{0 \leq t \leq T} \frac{|X_\varepsilon^{\theta_0}(t) - \xi_\varepsilon^{\theta_0}(t)|}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{CTL}{\nu^2} \left(\frac{1}{TC} + \frac{2}{\nu} + \frac{1}{C} + 1 \right) \frac{(H+r+1)^\alpha}{\sqrt{\varepsilon}[\varphi(\varepsilon)]^\alpha} \right\}. \quad (19)
 \end{aligned}$$

З (16) іде оцінка

$$\inf_{\Gamma_r} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^T \frac{\left[a(t, X_0^{\theta_0}(t), \theta_0) - a(t, X_0^{\theta_0}(t), \theta_0) \right]^2}{\sigma^2(t)} dt \geq \inf_{\Gamma_r} \frac{p_0}{2C^2} \frac{|u|^{2\alpha}}{\varepsilon[\varphi(\varepsilon)]^{2\alpha}}, \quad (20)$$

з урахуванням якої при $\varphi(\varepsilon) = \varepsilon^{-\frac{1}{2\alpha}}$ нерівність (19) буде мати вигляд

$$\begin{aligned}
 P\left\{ \varepsilon^{-\frac{1}{2\alpha}} |\theta_\varepsilon - \theta_0| > H \right\} &\leq \\
 &\leq \sum_{r=0}^{+\infty} P\left\{ \sup_{\Gamma_r} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^T \frac{\left[a\left(t, X_0^{\theta_0 + \frac{u}{\varphi(\varepsilon)}}(t), \theta_0 + \frac{u}{\varphi(\varepsilon)}\right) - a(t, X_0^{\theta_0}(t), \theta_0) \right]}{\sigma(t)} dw(t) \geq \right. \\
 &\geq \frac{p_0}{2C^2} (H+r)^{2\alpha} - R \frac{CTL}{\nu^2} \left(\frac{1}{TC} + \frac{2}{\nu} + \frac{1}{C} + 1 \right) (H+r+1)^\alpha \left. \right\} + P\left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \frac{|X_\varepsilon^{\theta_0}(t) - \xi_\varepsilon^{\theta_0}(t)|}{\sqrt{\varepsilon}} > R \right\}. \quad (21)
 \end{aligned}$$

Розглянемо випадкову функцію

$$\zeta(u) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^T \frac{\left[a\left(t, X_0^{\theta_0 + \frac{u}{\varphi(\varepsilon)}}(t), \theta_0 + \frac{u}{\varphi(\varepsilon)}\right) - a(t, X_0^{\theta_0}(t), \theta_0) \right]}{\sigma(t)} dw(t).$$

Розіб'ємо прошарок $\{H+r \leq |u| < H+r+1\}$ на N частин діаметром не більше h кожна. Таке розбиття можна здійснити так (див. [4] стор. 63), щоб $N \leq B' \frac{(H+r)}{h^{k-1}}$. Виразимо розбиття Γ_r через $\Gamma_r^1, \Gamma_r^2, \dots, \Gamma_r^{N'}, N' \leq N$ і виберемо в Γ_r^j точку u_j . Тоді

$$\begin{aligned} & P \left\{ \sup_{\Gamma_r} \zeta(u) > \frac{p_0}{2C^2} (H+r)^{2\alpha} \left[1 - \frac{2RC^3TL}{p_0\nu^2} \left(\frac{1}{TC} + \frac{2}{\nu} + \frac{1}{C} + 1 \right) \left(\frac{H+r+1}{H+r} \right)^\alpha \frac{1}{(H+r)^\alpha} \right] \right\} \leq \\ & \leq P \left\{ \sup_{\Gamma_r} \zeta(u) > \frac{p_0}{2C^2} (H+r)^{2\alpha} \left[1 - \frac{2RC^3TL}{p_0\nu^2} \left(\frac{1}{TC} + \frac{2}{\nu} + \frac{1}{C} + 1 \right) \frac{1}{(H+r)^\alpha} \right] \right\} \leq \\ & \leq P \left\{ \sup_{\Gamma_r} \zeta(u) > \frac{p_0}{4C^2} (H+r)^{2\alpha} \right\}, \end{aligned} \quad (22)$$

якщо вибрати $\frac{2RC^3TL}{H^\alpha p_0\nu^2} \left(\frac{1}{TC} + \frac{2}{\nu} + \frac{1}{C} + 1 \right) = \frac{1}{2}$, тобто

$$R = \frac{H^\alpha p_0\nu^2}{4C^3TL} \left(\frac{1}{TC} + \frac{2}{\nu} + \frac{1}{C} + 1 \right)^{-1}. \quad (23)$$

З урахуванням розбиття Γ_r , із (22) випливає

$$\begin{aligned} & P \left\{ \sup_{\Gamma_r} \zeta(u) > \frac{p_0}{4C^2} (H+r)^{2\alpha} \right\} \leq \sum_{j=1}^{N'} P \left\{ \zeta(u_j) > \frac{p_0}{8C^2} (H+r)^{2\alpha} \right\} + \\ & + P \left\{ \sup_{|u-v| \leq h} |\zeta(u) - \zeta(v)| > \frac{p_0}{8C^2} (H+r)^{2\alpha}; |u|, |v| \leq H+r+1 \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Оцінемо перший доданок у (24). Нехай $z > 0$, тоді

$$\begin{aligned} & P \left\{ \zeta(u_j) > \frac{p_0}{8C^2} (H+r)^{2\alpha} \right\} = \\ & = P \left\{ \frac{z}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^T \frac{a \left(t, X_0^{\theta_0 + \frac{u_j}{\varphi(\varepsilon)}}(t), \theta_0 + \frac{u_j}{\varphi(\varepsilon)} \right) - a(t, X_0^{\theta_0}(t), \theta_0)}{\sigma(t)} dw(t) > \frac{zp_0}{8C^2} (H+r)^{2\alpha} \right\} \leq \\ & \leq P \left\{ \frac{z}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^T \frac{a \left(t, X_0^{\theta_0 + \frac{u_j}{\varphi(\varepsilon)}}(t), \theta_0 + \frac{u_j}{\varphi(\varepsilon)} \right) - a(t, X_0^{\theta_0}(t), \theta_0)}{\sigma(t)} dw(t) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2\varepsilon} \int_0^T \frac{\left[a\left(t, X_0^{\theta_0 + \frac{u_j}{\varphi(\varepsilon)}}(t), \theta_0 + \frac{u_j}{\varphi(\varepsilon)}\right) - a(t, X_0^{\theta_0}(t), \theta_0) \right]^2}{\sigma^2(t)} dt > \\
 & > \frac{zp_0}{8C^2} (H+r)^{2\alpha} - \frac{z^2 L^2 (H+r+1)^{2\alpha} T}{2\nu^2} \Bigg\} \leq \exp \left\{ -\frac{zp_0}{8C^2} (H+r)^{2\alpha} + \frac{z^2 L^2 (H+r+1)^{2\alpha} T}{2\nu^2} \right\}. \quad (25)
 \end{aligned}$$

Мінімізуючи праву частину (25) за $z > 0$, одержуємо при $z = \frac{p_0(H+r)^{2\alpha} \nu^2}{8C^2 L^2 (H+r+1)^{2\alpha} T}$ нерівність

$$\begin{aligned}
 & P \left\{ \zeta(u_j) > \frac{p_0}{8C^2} (H+r)^{2\alpha}; H+r \leq u_j \leq H+r+1 \right\} \leq \\
 & \leq \exp \left\{ -\frac{p_0 \nu^2 (H+r)^{2\alpha}}{2(8C^2)^2 L^2 T} \left(\frac{H}{H+1} \right)^{2\alpha} \right\}. \quad (26)
 \end{aligned}$$

Приступимо до оцінки другого доданку в (24). За нерівностями для стохастичних інтегралів [5], маємо

$$\begin{aligned}
 & E |\zeta(x+h) - \zeta(x)|^{2m} = \\
 & = E \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^T \frac{\left[a\left(t, X_0^{\theta_0 + \frac{x+h}{\varphi(\varepsilon)}}(t), \theta_0 + \frac{x+h}{\varphi(\varepsilon)}\right) - a\left(t, X_0^{\theta_0 + \frac{x}{\varphi(\varepsilon)}}(t), \theta_0 + \frac{x}{\varphi(\varepsilon)}\right) \right]}{\sigma(t)} dw(t) \right]^{2m} \leq \\
 & \leq m(2m-1)^m T^m L^{2m} |h|^{2m}, \quad (27)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & E |\zeta(x)|^{2m} = E \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^T \frac{\left[a\left(t, X_0^{\theta_0 + \frac{x}{\varphi(\varepsilon)}}(t), \theta_0 + \frac{x}{\varphi(\varepsilon)}\right) - a(t, X_0^{\theta_0}(t), \theta_0) \right]}{\sigma(t)} dw(t) \right]^{2m} \leq \\
 & \leq m(2m-1)^m T^m L^{2m} |x|^{2m} \leq m(2m-1)^m T^m L^{2m} (H+r+1)^{2m}, \quad (28)
 \end{aligned}$$

якщо $H+r \leq |x| \leq H+r+1$. З теореми 1 П. 19 [4] слідує, що для $H+r \leq |x| \leq H+r+1$ виконується

$$\begin{aligned}
 & E \sup_{|u-v| \leq h; |u|, |v| \leq H+r+1} |\zeta(u) - \zeta(v)| \leq B_0 \left[m(2m-1)^m T^m L^{2m} (H+r+1)^{2m} \right]^{\frac{1}{2m}} (H+r+1)^k |h|^{\frac{2m-k}{2m}} = \\
 & = B_0 m^{\frac{1}{2m}} (2m-1)^{\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{2}} L (H+r+1)^{k+1} |h|^{\frac{2m-k}{2m}}, \quad (29)
 \end{aligned}$$

причому B_0 залежить тільки від m і k . Підставивши оцінки (29) і (26) у (24), одержимо

$$P\left\{\sup_{\Gamma_r} \zeta(u) > \frac{p_0}{4C^2}(H+r)^{2\alpha}\right\} \leq \frac{B'(H+r)}{|h|^{k-1}} \exp\left\{-\frac{p_0 \nu^2 (H+r)^{2\alpha}}{128C^4 L^2 T} \left(\frac{H}{H+1}\right)^{2\alpha}\right\} +$$

$$+ \frac{B_0 m^{\frac{1}{2m}} (2m-1)^{\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{2}} L (H+r+1)^{k+1} (8C^2)^{2m} |h|^{\frac{2m-k}{2m}}}{p_0^{2m} (H+r)^{4\alpha m}}. \quad (30)$$

Дотепер h було довільним. Положимо $h = \exp\left\{-\frac{2m}{2m-k+2m(k-1)} B(H+r)^{2\alpha}\right\}$,

де $B = \frac{p_0^2 \nu^2}{128C^4 L^2 T} \left(\frac{H}{H+1}\right)^{2\alpha}$. Тепер маємо

$$P\left\{\sup_{\Gamma_r} \zeta(u) > \frac{p_0}{4C^2}(H+r)^{2\alpha}\right\} \leq \left[B'(H+r) + \frac{B_0 m^{\frac{1}{2m}} (2m-1)^{\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{2}} L \left(\frac{H+1}{H}\right)^{k+1} (8C^2)^{2m}}{p_0^{2m} (H+r)^{4\alpha m-k-1}} \right] \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{2m-k}{2m-k+2m(k-1)} \frac{p_0 \nu^2}{128C^4 L^2 T} \left(\frac{H}{H+1}\right)^{2\alpha} (H+r)^{2\alpha}\right\} \stackrel{\text{def}}{=} \\ \stackrel{\text{def}}{=} \left[D_1(H+r) + \frac{D_2}{(H+r)^{4\alpha m-k-1}} \right] \exp\left\{-\frac{2m-k}{2m-k+2m(k-1)} B(H+r)^{2\alpha}\right\}. \quad (31)$$

Підставимо оцінку (31) у співвідношення (21). З урахуванням (23), одержимо

$$P\left\{\varepsilon^{-\frac{1}{2\alpha}} |\theta_\varepsilon - \theta_0| > H\right\} \leq$$

$$\leq \sum_{r=0}^{+\infty} \left[D_1(H+r) + \frac{D_2}{(H+r)^{4\alpha m-k-1}} \right] \exp\left\{-\frac{2m-k}{2m-k+2m(k-1)} B(H+r)^{2\alpha}\right\} +$$

$$+ P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} \frac{|X_\varepsilon^{\theta_0}(t) - \xi_\varepsilon^{\theta_0}(t)|}{\sqrt{\varepsilon}} > \frac{H^\alpha p_0 \nu^2}{4C^3 T L} \left(\frac{1}{TC} + \frac{2}{\nu} + \frac{1}{C} + 1\right)^{-1}\right\} \leq D_0 \exp\{-b_0 H^{2\alpha}\} + q_\varepsilon(R),$$

де $q_\varepsilon(R)$ визначено в теоремі 1, а $R = \frac{H^\alpha p_0 \nu^2}{4C^3 T L} \left(\frac{1}{TC} + \frac{2}{\nu} + \frac{1}{C} + 1\right)^{-1}$. Сталі D_0 і b_0 визначені з умов, що забезпечують оцінку ряду

$$\sum_{r=0}^{+\infty} \left[D_1(H+r) + \frac{D_2}{(H+r)^{4\alpha m-k-1}} \right] \exp\left\{-\frac{2m-k}{2m-k+2m(k-1)} B(H+r)^{2\alpha}\right\}$$

експонентою $D_0 \exp\{-b_0 H^{2\alpha}\}$, що існує в силу того, що $y^\gamma e^{-y} \rightarrow 0$ при $y \rightarrow +\infty$. Теорема 2 доведена.

Основним висновком даної роботи є те, що за допомогою граничних систем і оцінок швидкості збіжності можна достатньо ефективно будувати оцінки невідомих параметрів для дограничних систем.

РЕЗЮМЕ

Работа посвящена нахождению оценки неизвестного параметра в сносе стохастического уравнения с быстрыми случайными осцилляциями. Оценка получена на основании соответствующей плотности семейств мер. Данная плотность построена по предельному уравнению Ито и в нее подставляется траектория исходного уравнения. Эта оценка доставляет максимум плотности и в данной работе называется оценкой квазиказимального правдоподобия.

SUMMARY

In the given work, the estimator of the unknown parameter in the drift of a stochastic equation with fast random oscillation is studied. The estimator is derived using corresponding density of a family of measures. This density is constructed based on the limit Ito's equation. The trajectory of initial equation is substituted in this density. The estimator, for which the density takes the maximum, is a quasi-maximal likelihood estimator.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Анулова С.В., Веретенников А.Ю., Крылов Н.В и др. Стохастическое исчисление // Итоги науки и техники. – 1989. – т. 45. – С. 5-253.
2. Polshkov Yu.N. On an estimate of the convergence rate // Theory of Stochastic Processes. – 2000. – V. 6 (22), N. 1-2. – P. 116-124.
3. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977. – 568 с.
4. Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З. Асимптотическая теория оценивания. – М.: Наука, 1979. – 528 с.
5. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 612 с.

Надійшла до редакції 15.03.2002 р.

УДК 531.38

ВЕРОЯТНОСТЬ РАЗОРЕНИЯ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ С МУЛЬТИНОМИАЛЬНЫМ ЧИСЛОМ СТРАХОВЫХ ВЫПЛАТ

Л.С. Жилина

Предполагается, что число страховых выплат одному клиенту распределено по мультиномиальному закону. Пусть рассматриваются n независимых испытаний (n дней в течение срока страхования). Обозначим через ξ величину иска. В каждом из n испытаний может произойти одно из $m+1$ событий:

$$\begin{aligned} A_0 &= \{0 \leq \xi < y_0\}, \\ A_1 &= \{y_0 \leq \xi < y_1\}, \\ &\dots \\ A_i &= \{y_{i-1} \leq \xi < y_i\}, \\ &\dots \\ A_m &= \{y_{m-1} \leq \xi < y_m\}, \end{aligned}$$

где $y_0, y_1, \dots, y_m$ - установленные страховой компанией уровни.

Если величина иска не превышает уровня y_0 , так называемую франшизу, то компания не выплачивает клиенту страховое возмещение. Если же величина иска $y_{i-1} \leq \xi < y_i$, $i = \overline{1, m}$, то страховая компания выплачивает клиенту величину, равную $z_i = \frac{y_{i-1} + y_i}{2}$, $i = \overline{1, m}$.

Таким образом, величина страховой выплаты в каждом из n независимых испытаний может принимать одно из $m+1$ значений: $0, z_1, z_2, \dots, z_m$.

Пусть $P(A_0) = p_0, P(A_1) = p_1, \dots, P(A_m) = p_m$ и $\sum_{i=0}^m p_i = 1$.

Пусть случайная величина v_i , $i = \overline{0, m}$ обозначает сколько раз произошло событие A_i в n независимых испытаниях. Видно, что $\sum_{i=0}^m v_i = n$.

По формуле мультиномиального распределения вероятность одного исхода равна:

$$P\{v_0 = k_0, v_1 = k_1, \dots, v_m = k_m\} = \frac{n!}{k_0! k_1! \dots k_m!} p_0^{k_0} p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m},$$

где $k_0 + k_1 + \dots + k_m = n$.

Предположим, что страховая компания сочетает в себе и функцию банка, это означает, что, если клиент не обратился в течение периода страхования с иском к страховой компании, либо все его иски были меньше франшизы y_0 , то в конце периода страхования с иском к страховой компании, либо все его иски были меньше франшизы y_0 , то в конце периода страхования он получает сумму, равную страховому полису с процентами. Она равна $c(1+r)$, где c - цена страхового полиса, r - процентная ставка.

Случайная величина

$$\eta = c(1+r)I\{v_0 = n\} + I\{v_0 < n\} \sum_{i=1}^m z_i v_i$$

равна сумме, выплачиваемой клиенту за весь период страхования, где $I(A)$ - индикатор события A .

Теорема. Пусть в страховой компании застраховано N клиентов, и известна цена страхового полиса $c = M\eta + \delta$, где δ - нагрузка, тогда вероятность разорения страховой компании

$P\left\{\sum_{i=1}^N \eta_i > N(M\eta + \delta)\right\} \leq 1 - \Phi\left(\delta \sqrt{\frac{N}{D\eta}}\right) + \frac{A \cdot |\eta - M\eta|^3}{\sqrt{N(D\eta)^3}}$, где A – абсолютная положительная постоянная (см. [1]), равная 0,7975,

$$\begin{aligned} M\eta &= c(1+r)p_0^n + n \sum_{i=1}^m z_i p_i, \\ D\eta &= c^2(1+r)^2 p_0^n (1-p_0^n) + n \sum_{i=1}^m z_i^2 p_i - n \left(\sum_{i=1}^m z_i p_i \right)^2 - 2c(1+r)p_0^n n \sum_{i=1}^m z_i p_i, \\ M\eta^3 &= c^3(1+r)^3 p_0^n + n \sum_{i=1}^m z_i^3 p_i + n(n-1)(n-2) \left(\sum_{i=1}^m z_i p_i \right)^3 + \\ &+ 3n(n-1) \sum_{i=1}^m z_i^3 p_i^2 + 3n(n-1) \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^m z_i^3 z_j p_i p_j. \end{aligned}$$

Доказательство. Найдем $M\eta$.

$$\begin{aligned} M\eta &= M\left(c(1+r)I\{v_0 = n\} + I\{v_0 < n\} \sum_{i=1}^m z_i v_i \right) = \\ &= c(1+r)p_0^n + \sum_{i=1}^m z_i MI\{v_0 < n\} v_i. \end{aligned}$$

Вычислим

$$\begin{aligned} MI\{v_0 < n\} v_i &= \sum_{l=0}^{n-1} M(v_i / v_0) P\{v_0 = l\} = s \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-l} k P\{v_i = k / v_0 = l\} P\{v_0 = l\} = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-l} k P\{v_i = k, v_0 = l\}. \end{aligned}$$

Видно, что

$$\begin{aligned} P\{v_i = k, v_0 = l\} &= P\{v_1 + \dots + v_{i-1} + v_{i+1} + \dots + v_m = n - k - l\} = \\ &= \frac{p_0^l p_i^k}{k! l!} \sum_{n_1 + \dots + n_{i-1} + n_{i+1} + \dots + n_m = n - k - l} \frac{n! p_1^{n_1} \dots p_{i-1}^{n_{i-1}} p_{i+1}^{n_{i+1}} \dots p_m^{n_m}}{n_1! \dots n_{i-1}! n_{i+1}! \dots n_m!} = \\ &= \frac{n! p_0^l p_i^k}{k! l! (n - l - k)!} (p_1 + \dots + p_{i-1} + p_{i+1} + \dots + p_m)^{n-l-k} = \\ &= \frac{n! p_0^l p_i^k}{k! l! (n - l - k)!} (1 - p_0 - p_i)^{n-l-k} \end{aligned}$$

Имеем

$$MI\{v_0 < n\} v_i = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-l} k \frac{n! p_0^l p_i^k}{k! l! (n - l - k)!} (1 - p_0 - p_i)^{n-l-k} =$$

$$\begin{aligned}
 &= np_i \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{n-l-1} \frac{(n-1)! p_0^l p_i^s}{s! l! (n-l-s-1)!} (1-p_0-p_i)^{n-l-s-1} = \\
 &= np_i \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(n-1)! p_0^l}{l! (n-l-1)!} \sum_{s=0}^{n-l-1} \frac{(n-l-1)! p_i^s}{s! (n-l-s-1)!} (1-p_0-p_i)^{n-l-s-1} = \\
 &= np_i \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(n-1)! p_0^l}{l! (n-l-1)!} (1-p_0)^{n-1-l} = \\
 &= np_i (p_0 + 1 - p_0)^{n-1} = np_i.
 \end{aligned}$$

Итак,

$$M\eta = c(1+r)p_0^n + n \sum_{i=1}^m z_i p_i.$$

Выполняя аналогичные преобразования, получаем

$$\begin{aligned}
 MI\{v_0 < n\} v_i^2 &= n(n-1) p_i^2 + np_i, \\
 MI\{v_0 < n\} v_i v_j &= n(n-1) p_i p_j, \\
 MI\{v_0 < n\} v_i^3 &= np_i (1 + 3(n-1) p_i + (n-1)(n-2) p_i^2), \\
 MI\{v_0 < n\} v_i^2 v_j &= n(n-1) p_i p_j + p_i^2 p_j n(n-1)(n-2).
 \end{aligned}$$

Тогда дисперсия случайной величины η равна

$$\begin{aligned}
 D\eta &= c^2 (1+r)^2 p_0^n + \sum_{i=1}^m z_i^2 MI\{v_0 < n\} v_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m z_i z_j MI\{v_0 < n\} v_i v_j - \\
 &- \left(c(1+r) p_0^n + n \sum_{i=1}^m z_i p_i \right)^2 = c^2 (1+r)^2 p_0^n (1-p_0^n) + n \sum_{i=1}^m z_i^2 p_i - n \left(\sum_{i=1}^m z_i p_i \right)^2 - \\
 &- 2c(1+r) p_0^n n \sum_{i=1}^m z_i p_i,
 \end{aligned}$$

а третий момент равен

$$\begin{aligned}
 M\eta^3 &= c^3 (1+r)^3 p_0^n + \sum_{i=1}^m z_i^3 MI\{v_0 < n\} v_i^3 + 3 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{m-1} z_i^3 z_j MI\{v_0 < n\} v_i^3 v_j + \\
 &+ 6 \sum_{i=1}^{m-2} \sum_{j=i+1}^{m-1} \sum_{r=j+1}^m z_i z_j z_r MI\{v_0 < n\} v_i v_j v_r = \\
 &= c^3 (1+r)^3 p_0^n + n \sum_{i=1}^m z_i^3 p_i + n(n-1)(n-2) \left(\sum_{i=1}^m z_i p_i \right)^3 +
 \end{aligned}$$

$$+ 3n(n-1) \sum_{i=1}^m z_i^3 p_i^2 + 3n(n-1) \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^m z_i^3 z_j p_i p_j .$$

Пусть в страховой компании застраховано N клиентов, и цена страхового полиса равна $c = M\eta + \delta$, где δ - нагрузка, тогда вероятность разорения страховой компании имеет вид

$$P\left\{\sum_{i=1}^N \eta_i > Nc\right\} = P\left\{\sum_{i=1}^N \eta_i > N(M\eta + \delta)\right\}.$$

Воспользовавшись неравенством Берри - Эссеена (см. [1]), получим оценку вероятности разорения страховой компании

$$P\left\{\sum_{i=1}^N \eta_i > N(M\eta + \delta)\right\} = P\left\{\frac{\sum_{i=1}^N \eta_i - NM\eta}{\sqrt{ND\eta}} > \frac{N\delta}{\sqrt{ND\eta}}\right\} \leq 1 - \Phi\left(\delta \sqrt{\frac{N}{D\eta}}\right) + \frac{AM|\eta - M\eta|^3}{\sqrt{N(D\eta)^3}}.$$

где $\Phi(x)$ – нормальная (0,1) функция распределения, A – абсолютная положительная постоянная (см. [1]), равная 0,7975.

Теорема доказана.

РЕЗЮМЕ

Розглядається актуарна модель, у якій число страхових виплат розподілено за мультиноміальним законом. Знайдена оцінка ймовірності банкрутства страхової компанії.

SUMMARY

Actuarial model with multinomial amount of insurance payments is considered. The probability of ruining of insurance company is estimated.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петров В.В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.- М.: 1987, 320 с.
2. Бондарев Б.В., Шурко И.Л. Финансовая математика.- Донецк: ДонГУ, 164 с.

Надійшла до редакції 03.03.2002 р.

УДК 62 – 50

НЕЧЕТКАЯ ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

И.П. Слепцова

1. Введение.

Основным понятием математики является множество. В классической теории множеств элемент может либо принадлежать, либо не принадлежать данному множеству. Однако далеко не все процессы в реальном мире вписываются в эти жесткие рамки. Значительно чаще переход от принадлежности некоторому подмножеству к непринадлежности происходит постепенно, нечетко, и это обстоятельство нельзя не учитывать во многих сферах знаний. В 1965г. появилась работа Л.А.Заде [1], в которой были изложены основы новой теории – теории нечетких множеств. Л.Заде определил основные понятия этой теории – понятие нечеткого подмножества, элементы которого принадлежат множеству в той или иной степени, и специальную характеристическую функцию подмножества, функцию принадлежности элементов подмножеству, со значениями из интервала $[0,1]$.

В последующие годы теория нечетких множеств бурно развивалась в различных направлениях. В настоящее время наряду с применением в логике и теории информации, теории искусственного интеллекта и принятия решений, она все больше используется как средство для моделирования и оценки влияния неточно заданных параметров в математических моделях. Построены нечеткие аналоги всех основных математических понятий. Сформировались понятия нечеткого числа, нечеткой функции, производной нечеткой функции. В [2,3] введен термин “нечеткое дифференциальное уравнение”. Вопросы существования и единственности решения задачи Коши

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0 \quad (1)$$

с нечетким начальным значением y_0 рассмотрены в [4-6]. В [5,7] предложены два различных подхода к определению нечеткого решения задачи (1). В [8] получено нечеткое решение задачи Коши для линейного уравнения n -ого порядка с нечеткими начальными данными.

В данной работе рассмотрена задача Коши для некоторых уравнений второго порядка с нечеткими параметрами и нечеткими начальными данными. Следуя идеям [7], дано определение нечеткого решения этой задачи, установлены условия его существования и, как следствие, для некоторых линейных уравнений получено нечеткое решение задачи Коши в аналитическом виде.

2. Основные понятия и определения.

Л. Заде в [1] определил нечеткое подмножество $\tilde{A}$ множества X как множество упорядоченных пар $\{(x, \mu_{\tilde{A}}(x))\}$, $\forall x \in X$, где $\mu_{\tilde{A}}(x)$ – степень принадлежности x в $\tilde{A}$, $\mu_{\tilde{A}}(x): X \rightarrow [0,1]$. Если $M = [0,1]$ – множество значений функции $\mu_{\tilde{A}}(x)$, то можно сказать, что x принимает значение в M посредством функции $\mu_{\tilde{A}}(x)$, называемой также функцией принадлежности.

Нечетким числом A называется нечеткое подмножество числовой оси R , имеющее функцию принадлежности $\mu_A: R \rightarrow [0,1]$. $F(R) = \{\mu: R \rightarrow [0,1]\}$ – множество всех нечетких подмножеств числовой оси.

Нечеткое число называется нормальным, если $\max \mu_A(x) = 1, x \in R$.

Нечеткое число называется выпуклым, если $\forall x, y, z \in R, x \leq y \leq z, \mu_A(y) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(z), \mu_A \in F(R)$.

α -уровнем нечеткого числа A называется четкое подмножество R $[A]_{\alpha} = \{x \in R | \mu_A(x) \geq \alpha\}, \alpha \in (0,1]$. При этом $[A]_0$ – замыкание объединения всех $[A]_{\alpha}$ для $\alpha \in (0,1]$.

Пусть E – множество всех полунепрерывных сверху нормальных выпуклых нечетких чисел с ограниченными α -уровнями. Тогда для $A \in E$ $[A]_{\alpha} = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$ – замкнутый ограниченный интервал.

Нечеткие числа A и B называются равными, $A=B$, если $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ для всех $x \in R$. Из этого определения следует, что $A=B \Leftrightarrow [A]_{\alpha} = [B]_{\alpha}$ для всех $\alpha \in (0,1]$. $A \leq B$, если $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ для всех $x \in R$.

Нечеткое число $A \in F$ называется нечетким числом L-R типа, если его функция принадлежности равна

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\frac{a-x}{\alpha}\right), & x \in [a-\alpha, a], \\ R\left(\frac{x-a}{\beta}\right), & x \in [a, a+\beta], \\ 0, & x \notin [a-\alpha, a+\beta], \end{cases}$$

где $L:[0,1] \rightarrow [0,1]$ и $R:[0,1] \rightarrow [0,1]$ – непрерывные и невозрастающие функции, $L(0)=R(0)=1$, $L(1)=R(1)=0$. Здесь a – среднее значение нечеткого числа, $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ – левый и правый коэффициенты нечеткости соответственно. Таким образом, нечеткое число можно представить в виде тройки параметров $A=(a, \alpha, \beta)$. Будем говорить, что $A > 0$, если $a - \alpha > 0$ ($A \geq 0$ при $a - \alpha \geq 0$) и $A < 0$, если $a + \beta < 0$ ($A \leq 0$, если $a + \beta \leq 0$).

Четкое число a является частным случаем нечеткого и определяется тройкой параметров $(a, 0, 0)$.

Одной из основных идей теории нечетких множеств является принцип обобщения Заде. Он позволяет расширить область определения исходного отображения φ на класс нечетких множеств. Пусть $\varphi: X \rightarrow Y$ – заданное отображение, а A – нечеткое множество в X . Тогда образ A при отображении φ есть нечеткое множество B в Y с функцией принадлежности

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(y)} \mu_A(x), \quad y \in Y, \quad \text{где } \varphi^{-1}(y) = \{x \in X \mid \varphi(x) = y\}.$$

С помощью принципа обобщения определяются арифметические операции над нечеткими числами (см., например, [9]). Укажем определение арифметических операций в терминах α -уровней. Пусть $A, B \in E$ и α -уровни A и B равны $[A]_\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$ и $[B]_\alpha = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$ соответственно, $\alpha \in (0, 1]$. Тогда

$$\begin{aligned} [A+B]_\alpha &= [a_1(\alpha) + b_1(\alpha), a_2(\alpha) + b_2(\alpha)], \\ [A-B]_\alpha &= [a_1(\alpha) - b_1(\alpha), a_2(\alpha) - b_2(\alpha)], \\ [A \cdot B]_\alpha &= [\min\{a_1(\alpha) \cdot b_1(\alpha), a_1(\alpha) \cdot b_2(\alpha), a_2(\alpha) \cdot b_1(\alpha), a_2(\alpha) \cdot b_2(\alpha)\}, \\ &\quad \max\{a_1(\alpha) \cdot b_1(\alpha), a_1(\alpha) \cdot b_2(\alpha), a_2(\alpha) \cdot b_1(\alpha), a_2(\alpha) \cdot b_2(\alpha)\}]. \end{aligned}$$

Функция $Y=Y(t)$ называется нечеткой на некотором интервале $I \subset \mathbb{R}$, если при каждом $t \in I$ $Y(t)$ является нечетким числом.

Пусть $Y(t)$ – нечеткая функция при $t \in I$ и $[Y]_\alpha = [y_1(t, \alpha), y_2(t, \alpha)]$. Будем предполагать, что $y'_i(t, \alpha)$ существуют ($i=1, 2$). В [7] дано следующее определение производной нечеткой функции, которое мы будем использовать в данной работе.

Если $[y'_1(t, \alpha), y'_2(t, \alpha)]$ – α -уровни нечеткого числа для каждого $t \in I$, то производная $Y(t)$ существует (обозначим ее $Y'(t)$) и $[Y'(t)]_\alpha = [y'_1(t, \alpha), y'_2(t, \alpha)]$.

Можно определить производную нечеткой функции иначе (подробный обзор см., например, в [7]). Если рассматривать те определения, в которых производная также является нечеткой функцией, то все они эквивалентны данному выше ([7]).

3. Определение нечеткого решения задачи Коши для уравнений второго порядка.

Рассмотрим задачу Коши

$$y' = f(t, y, k), \quad y(0) = c. \quad (2)$$

Пусть параметры k и c – нечеткие числа. Можно выделить два основных подхода к определению нечеткого решения этой задачи. Первый из них предложен С. Сеиккала в [5] и заключается в том, что по принципу обобщения вместо задачи (2) изучается нечеткая задача

$$Y' = f(t, Y, K), \quad Y(0) = C. \quad (3)$$

Ее решение – это нечеткая функция $Y=Y(t, K, C)$, имеющая нечеткую производную.

Второй подход принадлежит Дж. Бакли и Т. Фьерингу. Суть его состоит в следующем. Вначале находится решение четкой задачи Коши (2) $y=g(t, k, c)$, затем по принципу обобщения определяется нечеткая функция $Y=g(t, K, C)$. Если эта функция имеет нечеткую производную и выполнены условия $Y'=f(t, Y, K)$, $Y(0)=C$, то $Y=g(t, K, C)$ и называется нечетким решением задачи (3). В [7] получены условия существования такого решения для задачи (2) с нечеткими параметрами и рассмотрен ряд примеров. Там же отмечено, что если задача имеет нечеткое решение в смысле Бакли-Фьеринга, то это решение совпадает с нечетким решением в смысле Сеиккала. Однако задача Коши может не иметь решения в смысле Бакли-Фьеринга и иметь решение в смысле Сеиккала.

В данной работе обобщены результаты Бакли и Фьеринга на уравнения второго порядка с нечеткими параметрами.

Рассмотрим задачу Коши

$$y'' = f(t, y, k_1, \dots, k_n), \quad y(0) = h_1, \quad y'(0) = h_2, \quad (4)$$

где $k=(k_1, \dots, k_n)$, $h=(h_1, h_2)$ – векторы постоянных, $t \in I$, где I – некоторый интервал из $\mathbb{R}$, причем $0 \in I$.

Пусть $K=(K_1, \dots, K_n)$ и $H=(H_1, H_2)$ – векторы нечетких чисел L - R типа, $[K]_\alpha = [K_1]_\alpha \times \dots \times [K_n]_\alpha$, $[H]_\alpha = [H_1]_\alpha \times [H_2]_\alpha$ для $\alpha \in (0, 1]$.

Заменим в (4) четкие параметры k и h нечеткими K и H и получим нечеткую задачу Коши

$$Y'' = f(t, Y, K), \quad Y(0) = H_1, \quad Y'(0) = H_2. \quad (5)$$

Предположим, что функция f удовлетворяет всем условиям, при которых задача (4) имеет единственное решение при $t \in I^*$. Т.к. $0 \in I^*$, то в дальнейшем будем считать $I^*=I$. Обозначим это решение

$y = g(t, k, h)$, $t \in I$. Функция $y = g(t, k, h) \in C^2$ при $t \in I$. Используя принцип обобщения, получим нечеткую функцию $Y(t) = g(t, K, H)$. Ее α -уровни

$$[Y(t)]_\alpha = [y_1(t, \alpha), y_2(t, \alpha)], \quad (6)$$

где $y_1(t, \alpha) = g_1(t, \alpha) = \min \{g(t, k, h) \mid k \in [K]_\alpha, h \in [H]_\alpha\}$, $y_2(t, \alpha) = g_2(t, \alpha) = \max \{g(t, k, h) \mid k \in [K]_\alpha, h \in [H]_\alpha\}$ для $t \in I$, $\alpha \in (0, 1]$.

Предположим, что $g_i(t, \alpha)$ дважды дифференцируемы по $t \in I$ для каждого $\alpha \in (0, 1]$, $i = 1, 2$. Обозначим производные $y_i(t, \alpha)$ по t первого и второго порядков $y'_i(t, \alpha)$ и $y''_i(t, \alpha)$ соответственно ($i = 1, 2$). Пусть $\Gamma_1(t, \alpha) = [y'_1(t, \alpha), y'_2(t, \alpha)]$ и $\Gamma_2(t, \alpha) = [y''_1(t, \alpha), y''_2(t, \alpha)]$, $t \in I$, $\alpha \in (0, 1]$.

Определение 1. Если $\Gamma_1(t, \alpha)$ и $\Gamma_2(t, \alpha)$ определяют α -уровни нечетких чисел для каждого $t \in I$, то функцию $Y(t)$ назовем дважды дифференцируемой и будем обозначать

$$\begin{aligned} [Y'(t)]_\alpha &= \Gamma_1(t, \alpha) = [y'_1(t, \alpha), y'_2(t, \alpha)], \\ [Y''(t)]_\alpha &= \Gamma_2(t, \alpha) = [y''_1(t, \alpha), y''_2(t, \alpha)], \quad t \in I, \alpha \in (0, 1]. \end{aligned} \quad (7)$$

Из (6) и (7) можно записать, что

$$[Y'(t)]_\alpha = \frac{d}{dt} [Y(t)]_\alpha, \quad [Y''(t)]_\alpha = \frac{d^2}{dt^2} [Y(t)]_\alpha.$$

В [7, 10] указаны достаточные условия того, что $\Gamma_1(t, \alpha)$ и $\Gamma_2(t, \alpha)$ определяют α -уровни нечеткого числа для каждого $t \in I$:

1) $y'_i(t, \alpha)$, $y''_i(t, \alpha)$ непрерывны на $I \times [0, 1]$, ($i = 1, 2$);

2) для каждого $t \in I$ $y'_1(t, \alpha)$, $y''_1(t, \alpha)$ – монотонно возрастающие, а $y'_2(t, \alpha)$, $y''_2(t, \alpha)$ – монотонно убывающие функции α ;

3) $y'_1(t, 1) \leq y'_2(t, 1)$, $y''_1(t, 1) \leq y''_2(t, 1)$ для всех $t \in I$.

Далее получим нечеткую функцию $f(t, Y, K)$. Ее α -уровни определяются равенством

$$\begin{aligned} [f(t, Y, K)]_\alpha &= [f_1(t, \alpha), f_2(t, \alpha)], \\ \text{где } f_1(t, \alpha) &= \min \{f(t, y, k) \mid y \in [Y(t)]_\alpha, k \in [K]_\alpha\}, \\ f_2(t, \alpha) &= \max \{f(t, y, k) \mid y \in [Y(t)]_\alpha, k \in [K]_\alpha\}. \end{aligned} \quad (8)$$

для $t \in I$, $\alpha \in (0, 1]$.

Определение 2. Функция $Y(t)$ называется решением нечеткой задачи Коши (5) (в смысле Бакли-Фьеринга), если существуют $Y'(t)$ и $Y''(t)$ и

$$\begin{aligned} y''_1(t, \alpha) &= f_1(t, \alpha), \quad y_1(0, \alpha) = h_{11}(\alpha), \quad y'_1(0, \alpha) = h_{21}(\alpha), \\ y''_2(t, \alpha) &= f_2(t, \alpha), \quad y_2(0, \alpha) = h_{12}(\alpha), \quad y'_2(0, \alpha) = h_{22}(\alpha), \end{aligned} \quad (9)$$

где $[H]_\alpha = [h_{11}(\alpha), h_{12}(\alpha)]$, $i = 1, 2$.

4. Существование решений нечеткой задачи (5).

Обозначим решение задачи (5) $Y(t)$. Из его определения следует, что:

1) $Y(t) = g(t, K, H)$;

2) существуют $Y'(t)$ и $Y''(t)$;

3) $Y''(t) = f(t, Y(t), K)$, $Y(0) = H_1$, $Y'(0) = H_2$.

Теорема 1. Пусть задача (4) имеет единственное решение $y(t) = g(t, k, h)$. Тогда нечеткая функция $Y(t) = g(t, K, H)$ является решением задачи (5), если:

$$1) \frac{\partial f}{\partial y} > 0; \quad (10)$$

$$2) \frac{\partial g}{\partial h_i} > 0, \quad \frac{\partial g'}{\partial h_i} > 0, \quad i = 1, 2; \quad (11)$$

$$3) \frac{\partial g}{\partial k_i} \frac{\partial f}{\partial k_i} > 0, \quad \frac{\partial g'}{\partial k_i} \frac{\partial f}{\partial k_i} > 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (12)$$

4) $Y'(t)$ и $Y''(t)$ существуют при $t \in I$.

Если хотя бы одно из условий 1)-4) не выполнено (в 2) и в 3) хотя бы при одном i), то $Y(t)$ не является решением нечеткой задачи Коши (5).

Доказательство. Пусть уравнение (4) содержит только один параметр k , что не нарушает общности. Докажем теорему для случая $\frac{\partial g}{\partial k} > 0$, $\frac{\partial f}{\partial k} > 0$. Случай $\frac{\partial g}{\partial k} < 0$, $\frac{\partial f}{\partial k} < 0$ рассматривается аналогично.

Из (6), (8) и (10) $f_1(t, \alpha) = f(t, y_1(t, \alpha), k_1(\alpha))$, $f_2(t, \alpha) = f(t, y_2(t, \alpha), k_2(\alpha))$.

Пусть $y=g(t,k,h_1,h_2)$ – единственное решение задачи (4), т.е.

$$g''(t,k,h_1,h_2)=f(t,g(t,k,h_1,h_2),k),$$

$$g(0,k,h_1,h_2)=h_1, \quad g'(0,k,h_1,h_2)=h_2.$$

Предполагая, что нечеткая функция $Y(t)=g(t,K,H_1,H_2)$ дважды дифференцируема, получаем для всех $t \in I$ и $\alpha \in (0,1]$ из условий (11) и (12)

$$y_i(t,\alpha)=g_i(t,\alpha)=g(t,k_i(\alpha),h_{1i}(\alpha),h_{2i}(\alpha)),$$

$$y'_i(t,\alpha)=g'_i(t,\alpha)=g'(t,k_i(\alpha),h_{1i}(\alpha),h_{2i}(\alpha)), \quad i=1,2,$$

и из (5) и (10) $y''_i(t,\alpha) = g''_i(t,k_i(\alpha), h_{1i}(\alpha), h_{2i}(\alpha)) = f(t,g(t,\alpha), k_i(\alpha)) = f(t,g(t,k_i(\alpha),h_{1i}(\alpha),h_{2i}(\alpha)), k_i(\alpha)) = f_i(t,\alpha), i=1,2$

и $y_i(0,\alpha)=g(0,k_i(\alpha),h_{1i}(\alpha),h_{2i}(\alpha))=h_{1i}(\alpha), \quad y'_i(0,\alpha)=g'(0,k_i(\alpha),h_{1i}(\alpha),h_{2i}(\alpha))=h_{2i}(\alpha), \quad i=1,2.$

Условия (9) выполнены.

Предположим, что хотя бы одно из условий теоремы не выполнено. Пусть, например, $\frac{\partial f}{\partial y} < 0$. Ос-

тальные случаи рассматриваются аналогично. Тогда

$$f_1(t,\alpha)=f(t,y_2(t,\alpha),k_1(\alpha)), \quad f_2(t,\alpha)=f(t,y_1(t,\alpha),k_2(\alpha));$$

$$y_i(t,\alpha)=g_i(t,\alpha)=g(t,k_i(\alpha),h_{1i}(\alpha),h_{2i}(\alpha)),$$

$$y'_i(t,\alpha)=g'_i(t,\alpha)=g'(t,k_i(\alpha),h_{1i}(\alpha),h_{2i}(\alpha)), \quad i=1,2.$$

Из условий (9) $y_1''(t,\alpha)=f_1(t,\alpha)=f(t,g_2(t,\alpha),k_1(\alpha)),$ с другой стороны, $y_1''(t,\alpha)=g''_1(t,\alpha)=g''(t,k_1(\alpha),h_{11}(\alpha),h_{21}(\alpha)),$ и

$$g''(t,k_1(\alpha),h_{11}(\alpha),h_{21}(\alpha))=f(t,g(t,k_2(\alpha),h_{12}(\alpha),h_{22}(\alpha)),k_1(\alpha)),$$

т.е. $g(t,k_1(\alpha),h_{11}(\alpha),h_{21}(\alpha))$ не является решением уравнения в (9).

Теорема 1 доказана.

Замечание. Теорема 1 справедлива, если $\Gamma_i(t,\alpha)$ определяет α -уровни нечеткого числа только для $t=0$ и $\frac{\partial g'}{\partial k_i} \frac{\partial f}{\partial k_i} > 0$ при $t=0$.

Определим нечеткие решения для некоторых линейных уравнений.

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши

$$y''=ky, \quad y(0)=h_1, \quad y'(0)=h_2.$$

Предполагаем $k>0, h_1>0, h_2>0$. Здесь $f(t,y,k)=ky, \quad g(t,k,h_1,h_2)=h_1 \operatorname{ch} \sqrt{k} t + \frac{h_2}{\sqrt{k}} \operatorname{sh} \sqrt{k} t.$

Проверим условия теоремы.

Очевидно, условия (10) и (11) выполнены.

$$\frac{\partial f}{\partial k} = y > 0 \text{ для всех } t > 0;$$

$$\frac{\partial g}{\partial k} = \frac{t}{2\sqrt{k}} \left[h_1 \operatorname{sh} \sqrt{k} t + \frac{h_2}{\sqrt{k}} \operatorname{ch} \sqrt{k} t \right] - \frac{h_2}{2k\sqrt{k}} \operatorname{sh} \sqrt{k} t.$$

Нетрудно показать, что $\frac{\partial g}{\partial k} > 0$ для всех $t > 0$.

Пусть K, H_1 и H_2 – положительные нечеткие числа L-R типа, α -уровни которых $[K]_\alpha=[k_1(\alpha),k_2(\alpha)],$ $[H_1]_\alpha=[h_{11}(\alpha),h_{12}(\alpha)], \quad i=1,2.$ Из определения нечеткого числа следует, что $k_1'(\alpha)>0, \quad h_{11}'(\alpha)>0$ и $k_2'(\alpha)<0, \quad h_{12}'(\alpha)<0.$ Тогда нечеткая функция $Y(t,K,H_1,H_2),$ α -уровни которой $[Y(t)]_\alpha=[y_1(t,\alpha),y_2(t,\alpha)]$ с

$$y_i(t,\alpha)=h_{1i}(\alpha) \operatorname{ch} \sqrt{k_i(\alpha)} t + \frac{h_{2i}(\alpha)}{\sqrt{k_i(\alpha)}} \operatorname{sh} \sqrt{k_i(\alpha)} t, \quad i=1,2,$$

является решением нечеткой задачи $Y''=KY, \quad Y(0)=H_1, \quad Y'(0)=H_2.$ При этом нечеткость функций $Y(t)$ и $Y''(t)$ следует из того, что

$$\frac{\partial y_1}{\partial \alpha} = \frac{\partial y_1}{\partial h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial y_1}{\partial h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial y_1}{\partial k_1} \frac{\partial k_1}{\partial \alpha} > 0, \quad \frac{\partial y_2}{\partial \alpha} < 0,$$

$$\frac{\partial y_1''}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} (k_1(\alpha) y_1(t, \alpha)) > 0, \quad \frac{\partial y_2''}{\partial \alpha} < 0$$

и $y_1(t, 1) = y_2(t, 1)$, $y_1''(t, 1) = y_2''(t, 1)$.

Пример 2. Рассмотрим теперь задачу Коши

$y'' = ky + b$, $y(0) = h_1$, $y' = h_2$, где $k > 0$, $b > 0$, $h_i > 0$, $i = 1, 2$.

Ее единственное решение – функция

$$y = g(t, k, b, h_1, h_2) = h_1 \operatorname{ch} \sqrt{k} t + \frac{h_2}{\sqrt{k}} \operatorname{sh} \sqrt{k} t + \frac{b}{k} (\operatorname{ch} \sqrt{k} t - 1).$$

Здесь $f(t, y, k, b) = ky + b$.

Очевидно, $\frac{\partial g}{\partial h_i} > 0$, $i = 1, 2$, $\frac{\partial g}{\partial b} > 0$, $\frac{\partial f}{\partial k} > 0$, $\frac{\partial f}{\partial k} > 0$ для всех $t > 0$.

$$\frac{\partial g}{\partial k} = \operatorname{sh} \sqrt{k} t \left[\left(h_1 + \frac{b}{k} \right) \frac{t}{2\sqrt{k}} - \frac{h_2}{2k\sqrt{k}} \right] + \operatorname{ch} \sqrt{k} t \left[\frac{h_2 t}{2k} - \frac{b}{k^2} \right] + \frac{b}{k^2}.$$

При $t = 0$ $\frac{\partial g}{\partial k} = 0$, $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial g}{\partial k} \right) = 0$ и $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial g}{\partial k} \right) > 0$ для всех $t > 0$. Значит, $\frac{\partial g}{\partial k} > 0$ при $t > 0$.

Пусть теперь K , B , H_1 и H_2 – положительные нечеткие числа с α -уровнями $[K]_\alpha = [k_1(\alpha), k_2(\alpha)]$, $[B]_\alpha = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$, $[H_i]_\alpha = [h_{i1}(\alpha), h_{i2}(\alpha)]$, $i = 1, 2$. Тогда

$$y_1(t, \alpha) = h_{11}(\alpha) \operatorname{ch} \sqrt{k_1(\alpha)} t + \frac{h_{21}(\alpha)}{\sqrt{k_1(\alpha)}} \operatorname{sh} \sqrt{k_1(\alpha)} t + \frac{b_1(\alpha)}{k_1(\alpha)} (\operatorname{ch} \sqrt{k_1(\alpha)} t - 1)$$

и

$$y_2(t, \alpha) = h_{12}(\alpha) \operatorname{ch} \sqrt{k_2(\alpha)} t + \frac{h_{22}(\alpha)}{\sqrt{k_2(\alpha)}} \operatorname{sh} \sqrt{k_2(\alpha)} t + \frac{b_2(\alpha)}{k_2(\alpha)} (\operatorname{ch} \sqrt{k_2(\alpha)} t - 1)$$

являются монотонно возрастающей и, соответственно, монотонно убывающей по α функциями и определяют нечеткую функцию $Y(t)$, $[Y(t)]_\alpha = [y_1(t, \alpha), y_2(t, \alpha)]$, причем $Y''(t)$ также является нечеткой функцией (это можно показать также, как в предыдущем примере). Следовательно, согласно теореме 1, $Y(t)$ является нечетким решением задачи

$$Y'' = KY + B, \quad Y(0) = H_1, \quad Y'(0) = H_2.$$

5. Нечеткие решения задачи Коши для уравнения $y'' = f(t, y', k_1, \dots, k_n)$,

Рассмотрим нечеткую задачу Коши

$$Y'' = f(t, Y', K), \quad Y(0) = H_1, \quad Y'(0) = H_2, \quad (13)$$

где f такова, что соответствующая четкая задача имеет единственное решение $y = g(t, k, h_1, h_2)$ при $t \in I$.

Определим нечеткое решение задачи (13) так же, как нечеткое решение задачи (4).

Следующая теорема доказывается аналогично теореме 1.

Теорема 2. Пусть выполнены условия:

$$1) \quad \frac{\partial f}{\partial y'} > 0; \quad (14)$$

$$2) \quad \frac{\partial g}{\partial h_i} > 0, \quad \frac{\partial g'}{\partial h_i} > 0, \quad i = 1, 2; \quad (15)$$

$$3) \quad \frac{\partial g}{\partial k_i} \frac{\partial f}{\partial k_i} > 0 \text{ (при } t = 0), \quad \frac{\partial g'}{\partial k_i} \frac{\partial f}{\partial k_i} > 0, \quad i = 1, \dots, n; \quad (16)$$

4) $Y'(t)$ и $Y''(t)$ существуют при $t \in I$.

Тогда $Y(t) = g(t, K, H_1, H_2)$ является нечетким решением задачи (13).

Если хотя бы одно из условий 1)-4) не выполнено (в 2) и в 3) хотя бы при одном i), то $Y(t)$ не является решением нечеткой задачи Коши (13).

Пример 3. Задача Коши

$$y'' = \frac{k}{t} y', \quad y(1) = h_1, \quad y'(1) = h_2$$

имеет единственное решение при $t > 1$ $y = g(t, k, h_1, h_2) = h_1 + \frac{h_2}{1+a} (t^{1+k} - 1)$. Здесь $f(t, y', k) = \frac{k}{t} y'$.

Пусть $1+K$, H_1 , H_2 – положительные нечеткие L-R числа. Легко проверить, что условия теоремы 2 выполнены. Тогда $[y_1(t, \alpha), y_2(t, \alpha)]$, где $y_i(t, \alpha) = h_{1i}(\alpha) + \frac{h_{2i}(\alpha)}{1+k_i(\alpha)} (t^{1+k_i(\alpha)} - 1)$, $i=1,2$, определяют α -уровни нечеткой функции $Y(t)$, причем эта функция является решением нечеткой задачи

$$Y'' = \frac{K}{t} Y', \quad Y(1) = H_1, \quad Y'(1) = H_2.$$

Пример 4. Для нечеткой задачи

$$Y'' = KY' + B, \quad Y(0) = H_1, \quad Y'(0) = H_2$$

с положительными нечеткими параметрами K , B , H_1 , H_2 существует нечеткое решение $Y(t)$, α -уровни которого $[Y]_\alpha = [y_1(t, \alpha), y_2(t, \alpha)]$, где

$$y_i(t, \alpha) = h_{1i}(\alpha) + \frac{1}{k_i(\alpha)} \left(h_{2i}(\alpha) + \frac{b_i(\alpha)}{k_i(\alpha)} \right) (e^{k_i(\alpha)t} - 1) - \frac{b_i(\alpha)}{k_i(\alpha)} t, \quad i=1,2.$$

6. Выводы.

В работе определены нечеткие решения задачи Коши для некоторых уравнений второго порядка. При этом нечеткими являются не только начальные условия, но, что более существенно, параметры уравнения. Получены условия существования таких решений. Эти условия позволяют определять в аналитическом виде нечеткие решения задачи Коши для ряда линейных однородных и неоднородных уравнений.

Дальнейшее развитие результатов возможно на уравнения более общего вида (например, $y'' = f(t, y, y', k)$) и, в частности, на уравнения $y'' + ay' + by = 0$. В случае неоднородных уравнений возникают технические сложности при проверке условий теоремы, что не исключает возможности нахождения решений для конкретных значений параметров.

РЕЗЮМЕ

Розглянута задача Коши для деяких звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з нечіткими параметрами в рівнянні та початкових умовах. Означено нечіткий розв'язок такої задачі, установлені умови його існування і, як висновок, для деяких лінійних рівнянь другого порядку отриман нечіткий розв'язок задачі Коши в аналітичному вигляді.

SUMMARY

The initial value problem for the second order differential equations having fuzzy parameters in the equation and fuzzy initial conditions is considered. Fuzzy solutions of such problem is defined, the conditions of its existence are obtained and, as the consequence, for some second order linear differential equations fuzzy solutions of initial problem in analitic form are obtained.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. L. Zadeh, Fuzzy sets. Information and Control, 8 (1965), 338-353.
2. A. Kandel, W.J. Byatt, Fuzzy Differential Equations. Proceeding of the International Conference on Cybernetics and Society, Tokyo-Kyoto, Japan, November 3-7, 1978, 1213-1216.
3. A. Kandel, W.J. Byatt, Fuzzy Processes, Fuzzy Sets and Systems, 4 (1980) 117-152.
4. O. Kaleva, The Cauchy Problem for Fuzzy Differential Equations, Fuzzy Sets and Systems, 35 (1990) 389-396.
5. S. Seikkala, On the Fuzzy Initial Value Problem, Fuzzy Sets and Systems, 24 (1987) 319-330.
6. Jong Yeoul Park, Hyo Keun Han, Existence and Uniqueness Theorem for a Solution of Fuzzy Differential Equations, Internet J. Math. & Math. Sci., 22, №2 (1999) 271-279.
7. J.J. Buckley, T. Feuring, Fuzzy Differential Equations. Fuzzy Sets and Systems, 110 (2000), 43-54.
8. J.J. Buckley, T. Feuring, Fuzzy Initial Value Problem for N-th Order Linear Differential Equations, Fuzzy Sets and Systems, to appear.
9. O. Kaleva, Fuzzy Differential Equations, Fuzzy Sets and Systems, 24 (1987) 301-317.
10. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д.А.Поспелова. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. – 1986. – 312с.

Надійшла до редакції 06.03.2002 р.

М Е Х А Н І К А

В разделе «Механика» данного выпуска печатается часть докладов, прочитанных на Международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошных сред», проведенной 10-13 июня 2002 года в пансионате «Наука» Донецкого национального университета, организованной Донецким национальным университетом, Институтом механики НАН Украины (г. Киев), Институтом гидромеханики НАН Украины (г. Киев) и Национальным комитетом Украины по теоретической и прикладной механике.

В работе конференции приняли участие 110 ученых из 20 городов Украины (Донецк, Днепропетровск, Киев, Львов и др.), России (Москва, Новосибирск, Ростов-на-Дону, Санкт-Петербург) и Чехии (Прага), в том числе 25 докторов и более 40 кандидатов наук. Среди них известные ученые в области механики деформируемого твердого тела, механики жидкости и газов, а также молодые исследователи в этих областях из вузов Украины.

Работа конференции проходила в трех секциях:

1. Статические задачи механики деформируемого твердого тела.
2. Динамические задачи механики деформируемого твердого тела.
3. Механика жидкости и газов.

Были заслушаны сообщения, содержащие новые результаты исследований по механике деформируемого твердого тела, механике жидкости и газов. Ряд докладов был посвящен пространственным и плоским задачам теории упругости, термо- и вязкоупругости, концентрации напряжений в упругих телах, пластинах и оболочках с отверстиями и трещинами под действием статических и динамических нагрузок, температурных и электрических полей, а также методам управления процессами тепло-массопереноса, гидроаэромеханике окружающей среды, методам и средствам измерения характеристик турбулентных потоков жидкости и газа.

В процессе работы конференции проходил широкий обмен мнениями по актуальным проблемам механики деформируемого твердого тела и гидромеханики в свете новых постановок и методов решений задач инженерной практики.

Часть прочитанных на конференции докладов опубликована в научном сборнике «Теоретическая и прикладная механика. Вып. 36». Здесь продолжается публикация материалов конференции, остальные доклады будут опубликованы в последующих выпусках данного вестника.

Д-р. физ.-мат. наук, проф. С.А. Калоеров,
канд. физ.-мат. наук, доц. П.В. Асланов

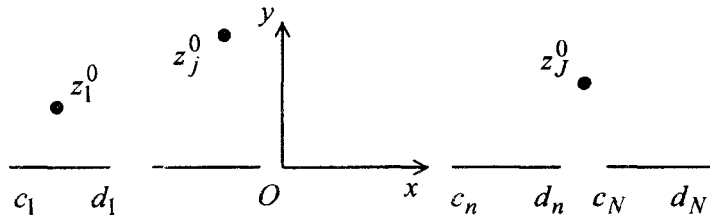
УДК 539.3

ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА С ПЛОСКИМИ ТРЕЩИНАМИ ИЛИ ЖЕСТКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

С. А. Калоеров, Е. В. Авдюшина, Ю. Б. Качан

Методом линейного сопряжения в работах [1, 2] получены общие выражения комплексных потенциалов в случае двумерной задачи для многосвязного анизотропного тела с трещинами вдоль одной плоскости. В данной статье эти результаты распространены на случай жестких пластинчатых включений.

1. Постановка задачи. Рассмотрим бесконечное анизотропное тело с плоскими трещинами или жесткими пластинчатыми включениями вдоль одной плоскости, находящееся в двумерном напряженном состоянии. Выберем прямоугольную систему координат $Oxyz$ так, чтобы трещины (включения) располагались вдоль плоскости Oxz . В поперечном сечении тела плоскостью Oxy будем иметь расширенную плоскость S с разрезами $c_n d_n$ ($n=1, N$) вдоль оси Ox , составляющими прерывистую линию L (рисунок). На бесконечности тело находится в условиях однородного напряженного состояния таким образом, что $\sigma_y^\infty = p$, $\sigma_x^\infty = q$, $\tau_{xy}^\infty = \tau$, $\tau_{xz}^\infty = \tau_x$, $\tau_{yz}^\infty = \tau_y$. Кроме того, в точках z_j^0 ($j=1, J$) действуют



не изменяющиеся вдоль оси Oz сосредоточенные силы с главными векторами $P_j^0(X_j^0, Y_j^0, Z_j^0)$. В случае трещин на их поверхностях также заданы усилия $\sigma_y^\pm$, $\tau_{xy}^\pm$, $\tau_{yz}^\pm$. Будем считать, что жесткие перемещения тела как целого отсутствуют.

Решение поставленной задачи сводится к интегрированию основной системы дифференциальных уравнений теории упругости при заданных на L условиях

$$X_n = -\tau_{xy}, \quad Y_n = -\sigma_y, \quad Z_n = -\tau_{yz} \quad (1.1)$$

в случае трещин и

$$u(t) = u_{0n}, \quad v(t) = v_{0n}, \quad w(t) = w_{0n} \quad (1.2)$$

в случае жестких включений. Здесь u_{0n} , v_{0n} , w_{0n} – жесткие поступательные перемещения линейного включения $c_n d_n$. Учтено, что для указанной нагрузки жесткие повороты включений отсутствуют.

Если для определения напряженного и предельно-равновесного состояний использовать комплексные потенциалы, то рассматриваемая задача сводится к нахождению комплексных потенциалов $\Phi_k(z_k)$ ($k=1, 3$) из соответствующих граничных условий. После определения комплексных потенциалов напряжения и перемещения в теле вычисляются по формулам [3]

$$\begin{aligned} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{4k}, \lambda_{5k}, \lambda_{6k}) \Phi'_k(z_k), \\ \sigma_z &= -(a_{13} \sigma_x + a_{23} \sigma_y + a_{34} \tau_{yz} + a_{35} \tau_{xz} + a_{36} \tau_{xy}) / a_{33}; \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$(u, v, w) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (p_k, q_k, r_k^0) \Phi_k(z_k) + (-\omega_3 y + u_0, \omega_3 x + v_0, w_0). \quad (1.4)$$

Здесь λ_{ik} , p_k , q_k , r_k^0 – известные комплексные постоянные, a_{ij} – коэффициенты деформации материала тела, $-\omega_3 y + u_0$, $\omega_3 x + v_0$, w_0 – жесткие перемещения тела как целого.

Граничные условия для определения комплексных потенциалов $\Phi_k(z_k)$ ($k=1, 3$) в общем случае имеют вид [7]

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 g_{ki} \Phi_k(t_k) = f_i(t) \text{ на } L, \quad (1.5)$$

где g_{ki} – постоянные;

$$f_1(t) = \int_0^s X_n ds + c_1, \quad f_2(t) = \int_0^s Y_n ds + c_2, \quad f_3(t) = \int_0^s Z_n ds + c_3 \quad (1.6)$$

в случае первой основной задачи для трещин;

$$f_1(t) = u^* + \omega_{12} y - u_0, \quad f_2(t) = v^* - \omega_{12} x - v_0, \quad f_3(t) = w^* - w_0 \quad (1.7)$$

для второй основной задачи; u^*, v^*, w^* – заданные перемещения на границе.

Рассматривая (1.5) как систему уравнений и решая ее относительно $\Phi_k(z_k)$, получаем [2]

$$\Phi_k(z_k) + \bar{r}_k \overline{\Phi_k(z_k)} + \bar{s}_{k+1} \overline{\Phi_{k+1}(z_{k+1})} + \bar{e}_{k+2} \overline{\Phi_{k+2}(z_{k+2})} = h_k(z). \quad (1.8)$$

При этом

$$\begin{aligned} \bar{r}_k &= [\bar{g}_{k1} \alpha_k + \bar{g}_{k2} \beta_k + \bar{g}_{k3} \gamma_k] / \bar{n}, \quad \bar{s}_{k+1} = [\bar{g}_{k+1,1} \alpha_k + \bar{g}_{k+1,2} \beta_k + \bar{g}_{k+1,3} \gamma_k] / \bar{n}, \\ \bar{e}_{k+2} &= [\bar{g}_{k+2,1} \alpha_k + \bar{g}_{k+2,2} \beta_k + \bar{g}_{k+2,3} \gamma_k] / \bar{n}; \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \alpha_k &= g_{k+1,2} g_{k+2,3} + g_{k+2,2} g_{k+1,3}, \quad \beta_k = g_{k+1,3} g_{k+2,1} + g_{k+2,1} g_{k+1,3}, \\ \gamma_k &= g_{k+1,1} g_{k+2,2} + g_{k+2,2} g_{k+1,1}, \quad \bar{n} = g_{k1} \alpha_k + g_{k2} \beta_k + g_{k3} \gamma_k; \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$h_k(t) = [\alpha_k f_1(t) + \beta_k f_2(t) + \gamma_k f_3(t)] / \bar{n}, \quad (1.11)$$

k – индекс, принимающий значения 1, 2, 3, причем значения индекса $k+1$ при k , равном 3, формально считается равным 1, а значения индекса $k+2$ при k , равном 2 и 3, формально считаются равными 1 и 2 соответственно.

2. Метод решения. Дифференцируя (1.8) по дуге контура, граничные условия для определения комплексных потенциалов запишем в дифференциальной форме

$$\delta_k \Phi'_k(z_k) + \bar{r}_k \overline{\delta_k \Phi'_k(z_k)} + \bar{s}_{k+1} \overline{\delta_{k+1} \Phi'_{k+1}(z_{k+1})} + \bar{e}_{k+2} \overline{\delta_{k+2} \Phi'_{k+2}(z_{k+2})} = \frac{dh_k(z)}{ds}, \quad (2.1)$$

где $\delta_k = \cos n\psi - \mu_k \cos n\chi$. При этом для рассматриваемой задачи, учитывая условия (1.1) и (1.2), а также то, что на линии L имеют место равенства $\cos n\psi = 1, \cos n\chi = 0, t_k = t_{k+1} = t_{k+2} = t = x$, получаем

$$\Phi'_k(t) + \bar{r}_k \overline{\Phi'_k(t)} + \bar{s}_{k+1} \overline{\Phi'_{k+1}(t)} + \bar{e}_{k+2} \overline{\Phi'_{k+2}(t)} = h'_k(t) \text{ на } L. \quad (2.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} f'_1(t) &= X_n = -\tau_{xy}(t), \quad f'_2(t) = Y_n = -\sigma_y(t), \quad f'_3(t) = Z_n = -\tau_{yz}(t); \\ h'_k(t) &= -[\alpha_k \tau_{xy}(t) + \beta_k \sigma_y(t) + \gamma_k \tau_{yz}(t)] / \bar{n} \end{aligned}$$

в случае плоских трещин; $h'_k(t) = 0$ для жестких пластинчатых включений. Учтено, что жесткие перемещения тела отсутствуют.

Исходя из (2.2), введем функции [1]

$$\Omega_{k+1}(z_k) = r_k \Phi'_k(z_k) + s_{k+1} \Phi'_{k+1}(z_k) + e_{k+2} \Phi'_{k+2}(z_k). \quad (2.3)$$

Тогда условия (2.2) примут вид

$$[\Phi'_k(t) + \overline{\Omega_{k+1}(t)}]^\pm = h_k^\pm(t). \quad (2.4)$$

При этом знаки «+» и «-» относятся к верхнему и нижнему берегам отрезков.

Учитывая, что на L имеют место равенства $[\overline{\Omega_{k+1}(t)}]^\pm = \overline{\Omega_{k+1}^\pm(t)}$, после сложения и вычитания уравнений (2.4) друг с другом, получаем следующую систему задач линейного сопряжения

$$\begin{aligned} [\Phi'_k(t) - \bar{\Omega}_{k+1}(t)]^+ - [\Phi'_k(t) - \bar{\Omega}_{k+1}(t)]^- &= 2p_k(t); \\ [\Phi'_k(t) + \bar{\Omega}_{k+1}(t)]^+ + [\Phi'_k(t) + \bar{\Omega}_{k+1}(t)]^- &= 2g_k(t). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь

$$p_k(t) = [h_k^+(t) - h_k^-(t)]/2, \quad g_k(t) = [h_k^+(t) + h_k^-(t)]/2.$$

Комплексные потенциалы для рассматриваемой области имеют вид [1]

$$\Phi'_k(z_k) = \Gamma_k + 2A'_k(z_k) + \Phi'_{k0}(z_k), \quad (2.6)$$

где

$$A'_k(z_k) = \sum_{j=1}^J \frac{A_{kj}^0}{2(z_k - z_{kj}^0)}; \quad (2.7)$$

Γ_k – постоянные, определяемые из системы

$$2\text{Re} \sum_{k=1}^3 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{4k}, \lambda_{5k}, \lambda_{6k}, q_k - \mu_k p_k) \Gamma_k = (\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{yz}^\infty, \tau_{xz}^\infty, \tau_{xy}^\infty, 0); \quad (2.8)$$

$\Phi'_{k0}(z_k)$ – функция, кусочно-голоморфная во всей расширенной плоскости S_k и имеющая линию скачков L . Последним свойством обладает и функция (2.6), кроме полюсов функции $A'_k(z_k)$. При этом

$$\int_{l_{kn}} \Phi'_k(\tau_k) d\tau_k = 0 \quad (n = \overline{1, N}), \quad (2.9)$$

где l_{kn} – контур, охватывающий в S_k только разрез $c_n d_n$ без точек z_{kj}^0 внутри контура, не задевая остальных разрезов.

Из формул (2.3), (2.6) находим

$$\begin{aligned} \Omega_{k+1}(z_k) &= r_k \Gamma_k + s_{k+1} \Gamma_{k+1} + e_{k+2} \Gamma_{k+2} + 2r_k A'_k(z_k) + \\ &+ 2s_{k+1} A'_{k+1}(z_k) + 2e_{k+2} A'_{k+2}(z_k) + \Omega_{k+1,0}(z_k). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь $\Omega_{k+1,0}(z_k)$ – функция, кусочно-голоморфная в расширенной плоскости S_k . При этом

$$\int_{l_{kn}} \Omega_{k+1}(\tau_k) d\tau_k = 0 \quad (n = \overline{1, N}). \quad (2.11)$$

На основании (2.3) и (2.6) функция $\bar{\Omega}_{k+1}(z_k)$, как и $\Omega_{k+1}(z_k)$, является кусочно-голоморфной на всей расширенной плоскости S_k , кроме полюсов первого порядка в точках $\bar{z}_{kj}^0$, $\bar{z}_{k+1,j}^0$, $\bar{z}_{k+2,j}^0$, и удовлетворяет условию (2.11). Из перечисленных свойств функций $\Phi'_k(z_k)$ и $\bar{\Omega}_{k+1}(z_k)$ следует, что кусочно-голоморфными в расширенной плоскости S_k с полюсами в точках z_{kj}^0 , $\bar{z}_{kj}^0$, $\bar{z}_{k+1,j}^0$, $\bar{z}_{k+2,j}^0$ будут также сумма и разность этих функций, т. е. уравнения (2.5) являются задачами линейного сопряжения для функций $[\Phi'_k(t) - \bar{\Omega}_{k+1}(t)]$ и $[\Phi'_k(t) + \bar{\Omega}_{k+1}(t)]$. Решая эти задачи, будем иметь [5]

$$\begin{aligned} \Phi'_k(z_k) - \bar{\Omega}_{k+1}(z_k) &= 2f_{k0}(z_k) + 2R_k(z_k) + 2c_{k0}; \\ \Phi'_k(z_k) + \bar{\Omega}_{k+1}(z_k) &= \frac{2f_{k1}(z_k) + 2D_k(z_k) + 2P_{kN}(z_k)}{X(z_k)}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

где

$$X(z_k) = \prod_{n=1}^N \sqrt{(z_k - c_n)(z_k - d_n)}; \quad (2.13)$$

$$f_{k0}(z_k) = \frac{1}{4\pi i} \int_L \frac{p_k(t) dt}{t - z_k}, \quad f_{k1}(z_k) = \frac{1}{4\pi i} \int_L \frac{X(t) g_k(t) dt}{t - z_k},$$

$$R_k(z_k) = A'_k(z_k) - \bar{r}_k \bar{A}'_k(z_k) - \bar{s}_{k+1} \bar{A}'_{k+1}(z_k) - \bar{e}_{k+2} \bar{A}'_{k+2}(z_k),$$

$$D_k(z_k) = B'_k(z_k) + \bar{r}_k \bar{B}'_k(z_k) + \bar{s}_{k+1} \bar{B}'_{k+1}(z_k) + \bar{e}_{k+2} \bar{B}'_{k+2}(z_k); \quad (2.14)$$

$$B'_k(z_k) = \sum_{j=1}^J \frac{A_{kj}^0 X(z_{kj}^0)}{2(z_k - z_{kj}^0)}; \quad (2.15)$$

$$P_{kN}(z_k) = \sum_{p=0}^N d_{kp} z_k^p; \quad (2.16)$$

$c_{k0}, d_{kp} (p = \overline{0, N})$ – неизвестные постоянные.

Из выражений (2.12) окончательно будем иметь

$$\Phi'_k(z_k) = \frac{f_{k1}(z_k) + D_k(z_k) + P_{kN}(z_k)}{X(z_k)} + f_{k0}(z_k) + R_k(z_k) + c_{k0};$$

$$\bar{\Omega}_{k+1}(z_k) = \frac{f_{k1}(z_k) + D_k(z_k) + P_{kN}(z_k)}{X(z_k)} - f_{k0}(z_k) - R_k(z_k) - c_{k0}. \quad (2.17)$$

Используя выражения (2.6), (2.10) и (2.12), из условий на бесконечности будем иметь

$$c_{k0} = \frac{\Gamma_k - \bar{r}_k \bar{\Gamma}_k - \bar{s}_{k+1} \bar{\Gamma}_{k+1} - \bar{e}_{k+2} \bar{\Gamma}_{k+2}}{2}, \quad d_{kN} = \frac{\Gamma_k + \bar{r}_k \bar{\Gamma}_k + \bar{s}_{k+1} \bar{\Gamma}_{k+1} + \bar{e}_{k+2} \bar{\Gamma}_{k+2}}{2},$$

$$d_{kN-1} = D_{k0} - \frac{d_{kN}(c_1 + d_1 + \dots + c_N + d_N)}{2}, \quad \int_L p_k(t) dt = 0. \quad (2.18)$$

Здесь

$$D_{k0} = \sum_{i=1}^I [A_{ki}^0 + \bar{r}_k \bar{A}_{ki}^0 + \bar{s}_{k+1} \bar{A}_{k+1,i}^0 + \bar{e}_{k+2} \bar{A}_{k+2,i}^0].$$

Для вычисления остальных коэффициентов полинома $P_{kN}(z_k)$ из второго равенства (2.12), учитывая (2.9) и (2.11) имеем

$$\int_{l_{kn}} \frac{f_{k1}(\tau_k) + D_k(\tau_k) + P_{kN}(\tau_k)}{X(\tau_k)} d\tau_k = 0 \quad (k = \overline{1, 3}; n = \overline{1, N}), \quad (2.19)$$

где l_{kn} – контур, охватывающий разрез $c_n d_n$, не содержащий внутри точек $z_{kj}^0, \bar{z}_{kj}^0, \bar{z}_{k+1,j}^0, \bar{z}_{k+2,j}^0$ и не задевающий других контуров.

Разлагая функции $z_k^p X^{-1}(z_k)$ и $[D_k(z_k) + f_{k1}(z_k)] X^{-1}(z_k)$ на контуре l_{kn} в комплексные ряды Фурье [6], будем иметь

$$\frac{z_k^p}{X(z_k)} = \alpha_{p0}^{nk} + \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_{pj}^{nk} \sigma^j + \beta_{pj}^{nk} \sigma^{-j}),$$

$$\frac{D_k(z_k) + f_{k1}(z_k)}{X(z_k)} = \gamma_0^{nk} + \sum_{j=1}^{\infty} (\gamma_j^{nk} \sigma^j + \delta_j^{nk} \sigma^{-j}).$$

Тогда

$$\frac{f_{k1}(z_k) + D_k(z_k) + P_{kN}(z_k)}{X(z_k)} = \sum_{p=0}^N d_{kp} \left[\alpha_{p0}^{nk} + \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_{pj}^{nk} \sigma^j + \beta_{pj}^{nk} \sigma^{-j}) \right] + \gamma_0^{nk} + \sum_{j=1}^{\infty} (\gamma_j^{nk} \sigma^j + \delta_j^{nk} \sigma^{-j}). \quad (2.20)$$

При численной реализации разложений (2.20) в случае отсутствия сосредоточенных сил в качестве контура l_{kn} выбиралась окружность с центром в середине отрезка $c_n d_n$ и радиусом $R_n = (d_n - c_n + \alpha_n)/2$, где $\alpha_n = \min(c_n - d_{n-1}, c_{n+1} - d_n)$ при $n \neq 1, n \neq N$; $\alpha_1 = c_2 - d_1$; $\alpha_N = c_N - d_{N-1}$.

Учитывая (2.20), из (2.19) найдем систему

$$\sum_{p=0}^{N-2} \beta_{p1}^{nk} d_{kp} = -\beta_{N1}^{nk} d_{kN} - \beta_{N-1,1}^{nk} d_{kN-1} - \delta_1^{nk} \quad (k = \overline{1, 3}; n = \overline{1, N-1}). \quad (2.21)$$

для определения коэффициентов d_{kp} ($p = \overline{0, N-2}$).

После решения системы (2.21) коэффициенты d_{kp} , а следовательно и функции (2.12), станут известными, что позволит вычислять напряжения (1.3).

Вблизи концов разреза $c_n d_n$ [2]

$$X(z_k) = \sqrt{(z_k - c_n)(z_k - d_n)} X^*(z_k) = \pm \sqrt{2l_n z_k^*} X^*(z_k);$$

$$\Phi'_k(z_k) = \frac{M_k}{2\sqrt{2z_k^*}} + O(1), \quad (2.22)$$

где $X^*(z_k)$ – функция $X(z_k)$ без сомножителя $\sqrt{(z_k - c_n)(z_k - d_n)}$; l_n – полудлина разреза, равная $(d_n - c_n)/2$; z_k^* – малая по модулю величина;

$$M_k = \pm \frac{2[f_{k1}(c) + D_k(c) + P_{kN}(c)]}{X^*(c)\sqrt{l_n}}, \quad (2.23)$$

c – аффикс выбранного конца (c_n или d_n); $O(1)$ – ограниченная величина. Верхний и нижний знаки «+» и «-» относятся к правому и левому концам разреза $c_n d_n$. Заменяя в выражениях (1.3) функции $\Phi'_k(z_k)$ на выражения (2.22), а напряжения $\sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}$ на КИН соответственно нормального отрыва (k_1), поперечного (k_2) и продольного (k_3) сдвигов, для определения k_1, k_2, k_3 находим

$$k_1^{\pm} = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_{2k} M_k; \quad k_2^{\pm} = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_{6k} M_k; \quad k_3^{\pm} = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_{4k} M_k. \quad (2.24)$$

Для растяжения тела приложенными на бесконечности усилиями $\sigma_y^{\infty} = p$ были проведены численные исследования распределения напряжений и изменений КИН. При этом трещины (включения) считались одинаковой единичной полудлины, расстояние между соседними вершинами равно c , в качестве материала тела принимались [3]: гранит изотропный (материал М1 с такими данными: $E_x = E_y = E_z = 4,2E$, $G_{yz} = G_{xz} = G_{xy} = 1,7E$, $\nu_{yz} = \nu_{xz} = \nu_{xy} = 0,22$, $\mu_1 = 0,985i$, $\mu_2 = 1,015i$, $E_x/E_y = 1,0$, $\mu_3 = i$), стеклопластик ортогонально-армированный (материал М2: $E_x = 5,7$ Мпа, $E_y = E_z = 1,4$ Мпа, $G_{yz} = 0,5$ Мпа, $G_{xz} = G_{xy} = 0,57$ Мпа, $\nu_{yz} = 0,4$, $\nu_{xz} = 0,068$, $\nu_{xy} = 0,31$; $\mu_1 = 0,622i$, $\mu_2 = 3,003i$, $E_x/E_y = 4,071$, $\mu_3 = 1,068i$) и сосна (материал М3: $E_x = E_z = E$, $E_y = 0,042E$, $G_{yz} = G_{xz} = 9,81E$, $G_{xy} = 0,075E$, $\nu_{yz} = \nu_{xz} = 0,102$, $\nu_{xy} = 0,01$; $\mu_1 = 1,492i$,

$\mu_2 = 3,444i$, $E_x/E_y = 23,81$, $\mu_3 = i$). При этом $E = 9,8 \cdot 10^5$ Па. Ниже с точностью до множителя p даны некоторые из полученных результатов для $k_1^\pm$. Коэффициенты $k_2^\pm$ и $k_3^\pm$ оказались равными нулю.

Как показывают исследования, значения КИН в концах трещин не зависят от анизотропии материала. Это можно показать и теоретически, если как и в работе [8] учитывать, что в выражения d_{kp} параметры анизотропии входят в виде некоторого множителя, который в выражениях КИН для трещин входит в знаменатель. Полученные результаты совпадают с известными [4].

Для тела с N плоскими трещинами в табл. 1 приведены значения $k_1^\pm$, из которых видно, что с увеличением количества трещин и с уменьшением расстояния между трещинами, значения КИН растут.

Для различных анизотропных материалов в табл. 2 приведены значения $k_1^\pm$ для тела, имеющего N жестких пластинчатых включений. Из указанных данных видно, что с увеличением количества

Таблица 1

N	c	КИН для концов трещин										
		c_1	d_1	c_2	d_2	c_3	d_3	c_4	d_4	c_5	d_5	c_m
2	1	1,052	1,112									
	0,5	1,081	1,229									
	0,1	1,151	1,794									
3	1	1,069	1,139	1,167								
	0,5	1,110	1,283	1,321								
	0,1	1,217	1,992	2,032								
10	1	1,091	1,167	1,208	1,223	1,234	1,240	1,244	1,247	1,248	1,249	
	0,5	1,150	1,343	1,399	1,438	1,456	1,470	1,477	1,483	1,486	1,488	
	0,1	1,320	2,229	2,297	2,492	2,517	2,596	2,647	2,656	2,641	2,605	
∞	1	1,094	1,171	1,212	1,227	1,240	1,245	1,250	1,254	1,257	1,258	1,263
	0,1	1,344	2,274	2,344	2,552	2,580	2,672	2,686	2,738	2,746	2,780	2,849

Таблица 2

N	Ма- тери- ал	c	КИН									
			c_1	d_1	c_2	d_2	c_3	d_3	c_4	d_4	c_5	d_5
2	M1	1	0,061	0,065								
		0,5	0,063	0,071								
		0,1	0,067	0,104								
	M2	1	0,027	0,029								
		0,5	0,028	0,032								
		0,1	0,030	0,046								
	M3	1	0,018	0,020								
		0,5	0,019	0,022								
		0,1	0,020	0,032								
3	M1	1	0,062	0,066	0,068							
		0,1	0,071	0,116	0,118							
	M2	1	0,028	0,030	0,030							
		0,1	0,032	0,052	0,053							
	M3	1	0,019	0,020	0,021							
		0,1	0,021	0,035	0,036							
10	M1	1	0,063	0,068	0,070	0,071	0,072	0,072	0,072	0,072	0,073	0,073
		0,1	0,077	0,130	0,133	0,145	0,146	0,151	0,152	0,154	0,154	0,154
	M2	1	0,028	0,030	0,031	0,032	0,032	0,032	0,032	0,032	0,032	0,032
		0,1	0,034	0,058	0,060	0,065	0,065	0,068	0,068	0,069	0,069	0,069
	M3	1	0,019	0,021	0,021	0,022	0,022	0,022	0,022	0,022	0,022	0,022
		0,1	0,023	0,039	0,040	0,044	0,044	0,046	0,046	0,046	0,047	0,047

включений или с уменьшением расстояния между ними, значения КИН растут; с увеличением «степени анизотропии» материала (увеличением отношения E_x/E_y) значения КИН для жестких пластинчатых включений уменьшается.

РЕЗЮМЕ

Методом лінійного спряження та розкладання функцій в ряди Фур'є розв'язана двовимірна задача для анізотропного тіла з плоскими тріщинами або жорсткими пластинчастими включеннями уздовж однієї площини. Проведені чисельні дослідження КІН для тіла з кінцевим числом плоских тріщин або жорстких пластинчастих включень.

SUMMARY

Using the method of linear coupling and function expansions in Fourier series, we solve the two-dimensional problem for an anisotropic body with flat cracks or rigid platelike inclusions along one plane. We carry out numerical study of stress intensity factors for the body with finite number flat cracks or rigid platelike inclusions.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Калоеров С. А. Двумерная задача теории упругости для многосвязного анизотропного тела с трещинами // Теорет. и прикладная механика. – 1986. – Вып. 17. – С. 32–41.
2. Калоеров С. А. Решение двумерных задач теории трещин методом линейного сопряжения // Концентрация напряжений / Под ред. А. Н. Гузя и др. – К., 1998. – С. 51–91. (Механика композитов: В 12 т.; Т. 7).
3. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. – Наука, 1977. – 416 с.
4. Калоеров С. А., Краснокутская Л. И., Нескороев Н. М. Двумерная задача для анизотропного тела с конечным числом «тунельных» трещин // Теорет. и прикладная механика. – 1992. – Вып. 23. – С. 27–31.
5. Калоеров С. А. Об основных соотношениях двумерной теории трещин анизотропного тела // Теорет. и прикладная механика. – 1992. – Вып. 23. – С. 18–26.
6. Космодамианский А. С., Калоеров С. А. Температурные напряжения в многосвязных пластинках. – Донецк, 1983. – 160 с.
7. Калоеров С. А., Горянская Е. С. Двумерное напряженное состояние многосвязного анизотропного тела с полосами и трещинами // Теорет. и прикладная механика. – 1995. – Вып. 25. – С. 45–56.
8. Калоеров С. А. Комплексные потенциалы плоской задачи теории упругости для многосвязного анизотропного тела с трещинами // Теорет. и прикладная механика. – 1990. – Вып. 21. – С. 24–34.

Надійшла до редакції 15.04.2002 р.

УДК 539.3

ЭЛЕКТРОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ МНОГОСВЯЗНОГО АНИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ЖЕСТКО ПОДКРЕПЛЕННОЙ ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЕЙ

Ю. А. Глущенко

На основании [1, 2] в работе [3] исследовано электроупругое состояние многосвязного анизотропного полупространства, когда на плоской границе заданы усилия. В данной статье эта же задача решается для случая, когда плоская граница жестко подкреплена.

1. Постановка задачи. Рассмотрим многосвязное анизотропное нижнее полупространство из пьезоэлектрического монокристалла с эллиптическими полостями, находящееся в условиях двумерного электроупругого состояния. Отнесем полупространство к прямоугольной системе координат $Oxyz$, направив ось z по направлению осей полостей так, что в поперечном сечении полупространства плоскостью Oxy будем иметь многосвязную нижнюю полуплоскость S^- с прямолинейной границей L_0 и эллиптическими отверстиями с контурами L_l^- и полуосями a_l, b_l ($l=\overline{1, L}$) (рис. 1). Будем считать, что плоская граница жестко подкреплена, на ней индукция равна нулю, на поверхностях полостей действуют

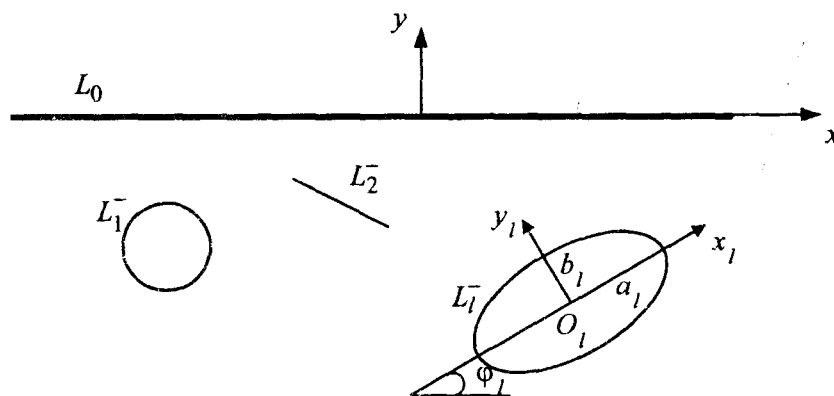


Рис. 1

распределенные внешние усилия.

Определение электроупругого состояния рассматриваемого полупространства сводится к нахождению комплексных потенциалов $\Phi_k(z_k)$ ($k=\overline{1, 4}$) из граничных условий на поверхностях полостей [1] и условий

$$u^- = v^- = w^- = D_y^- = 0 \text{ на } L_0. \quad (1.1)$$

После определения комплексных потенциалов можно вычислять характеристики электроупругого состояния полупространства [1, 2]

$$\begin{aligned} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}) &= 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{4k}, \lambda_{5k}, \lambda_{6k}) \Phi'_k(z_k), \\ \sigma_z &= - \left[(s_{13}^D \beta_{33}^\sigma + g_{31} g_{33}) \sigma_x + (s_{23}^D \beta_{33}^\sigma + g_{32} g_{33}) \sigma_y + (s_{34}^D \beta_{33}^\sigma + \right. \\ &+ g_{34} g_{33}) \tau_{yz} + (s_{35}^D \beta_{33}^\sigma + g_{35} g_{33}) \tau_{xz} + (s_{36}^D \beta_{33}^\sigma + g_{36} g_{33}) \tau_{xy} + \\ &+ (g_{13} \beta_{33}^\sigma - \beta_{13}^\sigma g_{33}) D_x + (g_{23} \beta_{33}^\sigma - \beta_{23}^\sigma g_{33}) D_y \left. \right] / (s_{33}^D \beta_{33}^\sigma + g_{33}^2); \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$(u, v, w, \varphi) = 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (p_k, q_k, s_k^0, r_k^0) \Phi_k(z_k) + (-\omega_3 y + u_0, \omega_3 x + v_0, w_0, \varphi_0); \quad (1.3)$$

$$(D_x, D_y) = 2\text{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{7k}, \lambda_{8k}) \Phi'_k(z_k),$$

$$D_z = - \left[(s_{13}^D g_{33} - s_{33}^D g_{31}) \sigma_x + (s_{23}^D g_{33} - s_{33}^D g_{32}) \sigma_y + (s_{34}^D g_{33} - s_{33}^D g_{34}) \tau_{yz} + (s_{35}^D g_{33} - s_{33}^D g_{35}) \tau_{xz} + (s_{36}^D g_{33} - s_{33}^D g_{36}) \tau_{xy} + (g_{13} g_{33} + s_{33}^D \beta_{13}^\sigma) D_x + (g_{23} g_{33} + s_{33}^D \beta_{23}^\sigma) D_y \right] / (s_{33}^D \beta_{33}^\sigma + g_{33}^2); \quad (1.4)$$

$$(E_x, E_y) = -2\text{Re} \sum_{k=1}^4 (r_k^0, \mu_k r_k^0) \Phi'_k(z_k). \quad (1.5)$$

Здесь s_{ij}^D , β_{nm}^σ , g_{ni} - коэффициенты, зависящие от материала полупространства; λ_{ik} , p_k , q_k , s_k^0 , r_k^0 - известные постоянные; $-\omega_3 y + u_0$, $\omega_3 x + v_0$, w_0 - жесткие перемещения полупространства как целого, φ_0 - нулевой уровень потенциала электростатического поля.

Учитывая (1.3) и (1.4), граничные условия (1.1) для комплексных потенциалов в дифференциальной форме можно записать в виде [2]

$$\Phi'_k(z_k) = -\bar{r}_k \overline{\Phi'_k(z_k)} - \bar{s}_{k+1} \overline{\Phi'_{k+1}(z_{k+1})} - \bar{e}_{k+2} \overline{\Phi'_{k+2}(z_{k+2})} - \bar{n}_{k+3} \overline{\Phi'_{k+3}(z_{k+3})}, \quad (1.6)$$

где

$$\bar{r}_k = \left[\bar{p}_k M_{6k} + \bar{q}_k M_{2k} + \bar{s}_k^0 M_{4k} + \bar{\lambda}_{8k} M_{8k} \right] / \Delta,$$

$$\bar{s}_{k+1} = \left[\bar{p}_{k+1} M_{6k} + \bar{q}_{k+1} M_{2k} + \bar{s}_{k+1}^0 M_{4k} + \bar{\lambda}_{8,k+1} M_{8k} \right] / \Delta,$$

$$\bar{e}_{k+2} = \left[\bar{p}_{k+2} M_{6k} + \bar{q}_{k+2} M_{2k} + \bar{s}_{k+2}^0 M_{4k} + \bar{\lambda}_{8,k+2} M_{8k} \right] / \Delta,$$

$$\bar{n}_{k+3} = \left[\bar{p}_{k+3} M_{6k} + \bar{q}_{k+3} M_{2k} + \bar{s}_{k+3}^0 M_{4k} + \bar{\lambda}_{8,k+3} M_{8k} \right] / \Delta; \quad (1.7)$$

$$\Delta = p_k M_{6k} + q_k M_{2k} + s_k^0 M_{4k} + \lambda_{8k} M_{8k}; \quad (1.8)$$

$$M_{2k} = \begin{vmatrix} p_{k+1} & \lambda_{8,k+1} & s_{k+1}^0 \\ p_{k+2} & \lambda_{8,k+2} & s_{k+2}^0 \\ p_{k+3} & \lambda_{8,k+3} & s_{k+3}^0 \end{vmatrix}, \quad M_{4k} = \begin{vmatrix} p_{k+1} & q_{k+1} & \lambda_{8,k+1} \\ p_{k+2} & q_{k+2} & \lambda_{8,k+2} \\ p_{k+3} & q_{k+3} & \lambda_{8,k+3} \end{vmatrix},$$

$$M_{6k} = \begin{vmatrix} q_{k+1} & s_{k+1}^0 & \lambda_{8,k+1} \\ q_{k+2} & s_{k+2}^0 & \lambda_{8,k+2} \\ q_{k+3} & s_{k+3}^0 & \lambda_{8,k+3} \end{vmatrix}, \quad M_{8k} = \begin{vmatrix} p_{k+1} & s_{k+1}^0 & q_{k+1} \\ p_{k+2} & s_{k+2}^0 & q_{k+2} \\ p_{k+3} & s_{k+3}^0 & q_{k+3} \end{vmatrix}; \quad (1.9)$$

k - индекс, принимающий значения 1, 2, 3, 4, причем значение индекса $k+j$, когда он больше 4, формально полагается равным $k+j-4$.

2. Определение комплексных потенциалов. Используя метод интегралов типа Коши, из граничных условий (1.6) получаем [2]

$$\Phi'_k(z_k) = A'_k(z_k) - \bar{r}_k \overline{A'_k(z_k)} - \bar{s}_{k+1} \overline{A'_{k+1}(z_{k+1})} - \bar{e}_{k+2} \overline{A'_{k+2}(z_{k+2})} - \bar{n}_{k+3} \overline{A'_{k+3}(z_{k+3})} +$$

$$+\Phi'_{k1}(z_k)-\bar{r}_k\bar{\Phi}'_{k1}(z_k)-\bar{s}_{k+1}\bar{\Phi}'_{k+1,1}(z_k)-\bar{e}_{k+2}\bar{\Phi}'_{k+2,1}(z_k)-\bar{n}_{k+3}\bar{\Phi}'_{k+3,1}(z_k). \quad (2.1)$$

Здесь

$$A'_k(z_k)=\sum_{l=1}^L\frac{A_{kl}}{z_k-z_{kl}}; \quad (2.2)$$

A_{kl} – известные постоянные; z_{kl} – точки внутри L_{kl}^- , соответствующие при аффинных преобразованиях $z_k=x+\mu_k y$ произвольным точкам z_l внутри L_l^- ; $\Phi'_{k1}(z_k)$ – функции, голоморфные вне контуров L_{kl}^- , причем их вычеты в точках z_{kl} равны нулю. Последние функции можно представить в виде следующих рядов:

$$\Phi'_{k1}(z_k)=\sum_{l=1}^L\sum_{n=1}^{\infty}a_{kln}\varphi'_{kln}(z_k), \quad (2.3)$$

где

$$\varphi'_{kln}(z_k)=-\frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1}R_{kl}(\zeta_{kl}^2-m_{kl})}; \quad (2.4)$$

$\zeta_{kl}(z_k)$ – переменные, вычисляемые из неявных зависимостей

$$z_k=z_{0kl}+R_{kl}\left(\zeta_{kl}+\frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}}\right); \quad (2.5)$$

z_{0kl} – аффиксы центров эллипсов L_{kl}^- ; R_{kl} , m_{kl} – постоянные зависящие от параметров этих эллипса; a_{kln} – неизвестные коэффициенты, определяемые из граничных условий на контурах L_l^- .

Учитывая (2.3), для функций (2.1) будем иметь [2, 3]

$$\begin{aligned} \Phi'_k(z_k)=\varphi'_k(z_k)+\sum_{l=1}^L\sum_{n=1}^{\infty}\{a_{kln}\varphi'_{kln}(z_k)-\bar{r}_k\bar{a}_{kln}\bar{\varphi}'_{kln}(z_k)-\bar{s}_{k+1}\bar{a}_{k+1,ln}\bar{\varphi}'_{k+1,ln}(z_k)- \\ -\bar{e}_{k+2}\bar{a}_{k+2,ln}\bar{\varphi}'_{k+2,ln}(z_k)-\bar{n}_{k+3}\bar{a}_{k+3,ln}\bar{\varphi}'_{k+3,ln}(z_k)\}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

При этом

$$\begin{aligned} \varphi'_k(z_k)=A'_k(z_k)-\bar{r}_k\bar{A}'_k(z_k)-\bar{s}_{k+1}\bar{A}'_{k+1}(z_k)-\bar{e}_{k+2}\bar{A}'_{k+2}(z_k)-\bar{n}_{k+3}\bar{A}'_{k+3}(z_k), \\ \bar{\varphi}'_{k+i,ln}(z_k)=-\frac{n}{\bar{\zeta}_{k+i,l}^{n-1}\bar{R}_{kl}(\bar{\zeta}_{k+i,l}^2-\bar{m}_{kl})} \quad (i=\overline{0,3}); \end{aligned} \quad (2.7)$$

$\bar{\zeta}_{k+i,l}$ – переменные, определяемые из неявных зависимостей

$$z_k=\bar{z}_{0kl}+\bar{R}_{kl}\left(\bar{\zeta}_{k+i,l}+\frac{\bar{m}_{kl}}{\bar{\zeta}_{k+i,l}}\right). \quad (2.8)$$

Коэффициенты a_{kln} найдем методом наименьших квадратов, минимизируя функционал [4]

$$J=\sum_{m=1}^M\sum_{i=1}^4\left\{\left|\sum_{k=1}^4g_{ki}^0\Phi'_k(t_k)+\overline{g_{ki}^0\Phi'_k(t_k)}-f_{im}\right|^2\right\}, \quad (2.9)$$

что приводит к системе линейных алгебраических уравнений. После решения этой системы комплексные потенциалы станут известными и можно вычислять механические и электрические характеристики элек-

троупругого состояния (1.2) – (1.5), а также коэффициенты интенсивности напряжений и индукции (КИ-НИ) [1].

3. Численные исследования электроупругого состояния. Проведены численные исследования распределения напряжений и изменения КИНИ в полупространстве с одной или двумя полостями (трещинами) (рис. 2). При этом рассматривалось полупространство, изготовленное из бифталата калия (материал М1) и сульфата лития (материал М2)[4]. Были проведены численные исследования для внутреннего давления интенсивности q на поверхности полости (берегах трещины). Приводимые ниже значения в таблицах и на рисунках даны с точностью до интенсивности нагрузки q , как множителя.

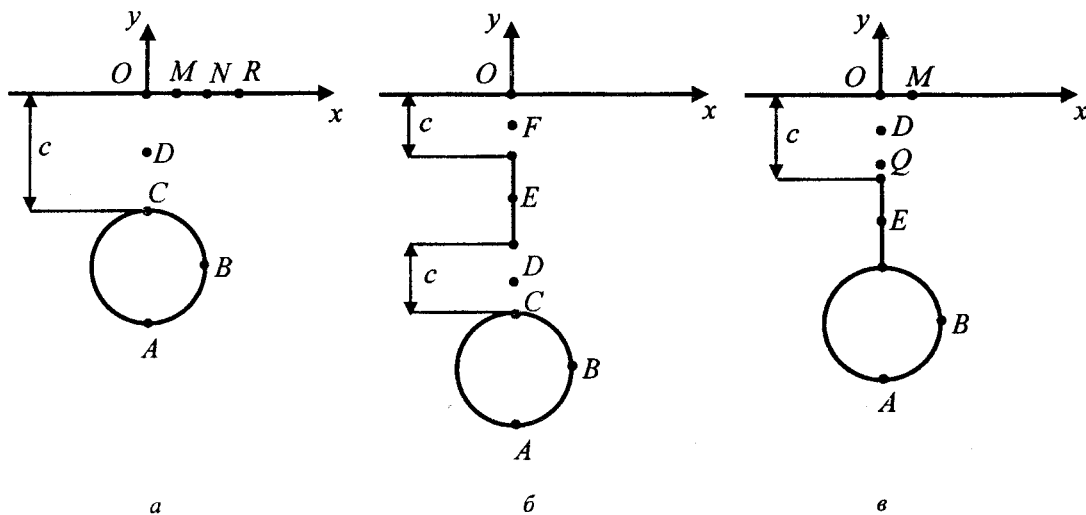


Рис. 2

В табл. 1 в зависимости от длины c перемычки для полупространства с круговой полостью единичного радиуса из указанных выше материалов приведены значения напряжений в точках поперечного сечения $A(0; -c-2)$, $B(1; -c-1)$, $C(0; -c)$, $D(0; -c/2)$, $O(0; 0)$, $M(0,5; 0)$,

Таблица 1

Материал	c	Напряжения в точках							
		A	B	C	D	O	M	N	R
		σ_x	σ_y	σ_x	σ_x	σ_x	σ_x	σ_x	σ_x
M1	100	0,52	0,54	0,52	0	0	0	0	0
	1,00	0,49	0,39	0,30	0,22	-0,05	-0,08	-0,11	-0,10
	0,50	0,48	0,33	0,06	0,07	-0,19	-0,16	-0,13	-0,09
	0,10	0,44	0,27	-0,48	-0,50	-0,54	-0,19	-0,09	-0,03
	0,01	0,43	0,26	-0,58	-0,58	-0,59	-0,21	-0,06	-0,02
M2	100	1,22	1,18	1,22	0	0	0	0	0
	1,00	1,20	0,92	1,18	0,24	-0,14	-0,11	-0,06	-0,01
	0,50	1,16	0,85	0,96	0,23	-0,20	-0,15	-0,06	0,01
	0,10	1,10	0,79	0,04	-0,13	-0,31	-0,19	-0,03	0,04
	0,01	1,08	0,79	-0,33	-0,34	-0,35	-0,20	-0,01	0,05

$N(1; 0)$, $R(1,5; 0)$ (рис.2, а). На рис. 3 изображены графики распределения напряжений σ_θ вблизи контура отверстия на площадках, перпендикулярных к нему, когда $c=0,1$. Кривые 1, 2 соответствуют полупространствам из материалов М1, М2. Как следует из указанных данных, при сближении отверстия с границей полупространства, когда длина перемычки $c > 0,25$, концентрация напряжений в зоне между отверстием и границей увеличивается. При дальнейшем приближении отверстия к границе происходит уменьшение значений напряжений.

Для полупространства с вертикальной трещиной единичной полудлины в табл. 2 даны значения

КИН k_1 и k_3 ($k_2 = k_D = 0$) в концах трещины. Знак «+» относится к верхней вершине трещины, «-» – к нижней. Из представленных в табл. 2 данных следует, что при сближении трещины с границей полупространства значения КИН $k_1^{\pm}$ уменьшаются, а $k_3^{\pm}$ увеличиваются. При этом значения k_1 для верхнего конца трещины получаются меньшими, чем для ее нижнего конца, а значения для k_3 – большими. Влияние анизотропии материала на значения КИН в данном случае незначительно.

Таблица 2

с	Материал					
	M1		M2			
	k_1^-	k_1^+	k_1^-	k_1^+	k_3^-	k_3^+
1,00	0,9467	0,9108	0,9613	0,9341	-0,0013	0,0038
0,50	0,9176	0,8324	0,9364	0,8647	-0,0024	0,0119
0,10	0,8757	0,6282	0,8947	0,6388	-0,0034	0,0567
0,01	0,8617	0,4211	0,8796	0,3790	-0,0033	0,1166

В табл. 3 представлены значения напряжений в некоторых точках полупространства и КИН $k_1^{\pm}$, $k_3^{\pm}$ ($k_2^{\pm} = k_D^{\pm} = 0$) для случая круговой полости единичного радиуса и вертикальной трещиной с центром в середине перемычки (рис.2, б.). При этом менялась длина перемычки c между верхней вершиной

Таблица 3

Материал	с	Напряжения в точках							КИН			
		A	B	C	D	E	F	O	k_1^-	k_1^+	k_3^-	k_3^+
		σ_x	σ_y	σ_x	σ_x	σ_y	σ_x	σ_x				
Внутреннее давление на поверхности полости												
M1	0,30	0,49	0,39	0,30	0,44	-0,56	0,05	-0,02	0,1268	0,0675	0	0
	0,01	0,50	0,38	0,30	0,70	-0,52	0,09	0,08	0,2137	0,0445	0	0
M2	0,30	1,20	0,92	1,18	0,75	-0,80	0,01	-0,12	0,1495	0,0690	-0,0502	-0,0391
	0,20	1,21	0,91	1,19	0,98	-0,79	0,00	-0,10	0,2224	0,0601	-0,0706	-0,0440
	0,10	1,21	0,90	1,29	1,51	-0,76	0,00	-0,05	0,3330	0,0377	-0,1029	-0,0402
	0,05	1,22	0,92	1,58	2,32	-0,73	0,02	-0,01	0,4348	0,0224	-0,1354	-0,0304
Внутреннее давление на берегах трещины												
M1	0,30	0,01	-0,01	-0,01	0,22	-0,93	0,16	0,11	0,4393	0,4266	0	0
	0,10	0,03	-0,01	-0,05	1,19	-0,82	0,77	0,72	0,6685	0,4892	0	0
M2	0,30	0,01	-0,01	-0,01	0,23	-1,13	0,15	0,08	0,4422	0,4330	0,0008	0,0019
	0,20	0,03	-0,03	-0,01	0,55	-1,08	0,32	0,22	0,5441	0,4999	0,0022	0,0076
	0,10	0,04	-0,06	0,17	1,33	-1,00	0,65	0,54	0,6632	0,5040	0,0044	0,0259
	0,05	0,07	-0,04	0,66	2,56	-0,93	1,04	0,95	0,7747	0,4579	0,0047	0,0485

трещины и границей полупространства (между нижней вершиной трещины и полостью). В качестве характерных принимались точки полупространства: $A(0; -h_2 - 1)$, $B(a; -h_2)$, $C(0; -h_2 + 1)$, $D(0; -h_2 + c/2 + 1)$, $E(0; -h_1)$, $F(0; -c/2)$, $O(0; 0)$. Считалось, что расстояние от границы полупространства до центра трещины $h_1 = 0,5$; расстояние от границы до центра отверстия $h_2 = 2,0$. Из табл. 3 следует, что закономерности влияния длин перемычек и анизотропии материала для полупространства с круговой полостью и внутренней трещиной такие же, как и для одной полости или трещины. Значения напряжений вблизи перемычки и КИН в данном случае получаются большими, чем в предыдущих.

Для полупространства с круговой полостью единичного радиуса и выходящей из его контура трещиной длины 0,5 вдоль перемычки (рис.2, в) для различных расстояний c между верхним концом трещины и границей полупространства в табл. 4 приведены значения напряжений и КИН k_1^+ , k_3^+

Таблиця 4

Материал	с	Напряжения в точках								КИН	
		A	B	Q	D		O		M		
		σ_x	σ_y	σ_x	σ_y	σ_x	σ_y	σ_x	σ_x	k_1^+	k_3^+
Внутреннее давление на поверхности полости											
M1	1,0	0,51	0,42	2,29	1,63	0,13	-0,04	0,01	-0,01	0,2282	0
	0,5	0,50	0,38	1,57	1,06	0,12	-0,06	0,01	-0,07	0,1580	0
	0,1	0,48	0,34	0,16	-0,06	-0,03	-0,16	-0,08	-0,16	0,0191	0
M2	1,0	1,23	0,96	2,75	2,33	0,14	-0,23	-0,07	-0,08	0,2758	-0,0522
	0,5	1,21	0,90	2,14	1,71	0,12	-0,21	-0,07	-0,11	0,2162	-0,0638
	0,1	1,17	0,85	0,63	0,39	0,05	-0,07	-0,04	-0,16	0,0682	-0,0590
Внутреннее давление на берегах трещины											
M1	1,0	0,02	-0,03	4,62	4,67	0,06	0,18	0,06	0,04	0,5560	0
	0,5	0,01	-0,03	4,42	4,53	0,16	0,37	0,15	0,01	0,5354	0
	0,1	0,01	0,01	3,23	3,69	0,56	1,14	0,52	-0,07	0,4175	0
M2	1,0	0,02	-0,03	4,65	5,69	0,06	0,25	0,06	0,02	0,5580	0,0075
	0,5	0,02	-0,04	4,46	5,55	0,15	0,48	0,13	-0,01	0,5395	0,0110
	0,1	0,01	-0,04	3,59	5,13	0,57	1,69	0,49	-0,03	0,4555	0,0297

($k_2^+ = k_D^+ = 0$). При этом приводимые точки были такими: $A(0; -c-2,5)$, $B(a; -c-1,5)$, $Q(0; -c+0,005)$, $D(0; -c/2)$, $O(0; 0)$, $M(0,5; 0)$. На рис. 4 представлены графики изменения напряжений σ_θ при $c = 0,1$. Кривые 1, 2 соответствуют полупространствам из материалов M1, M2. Как

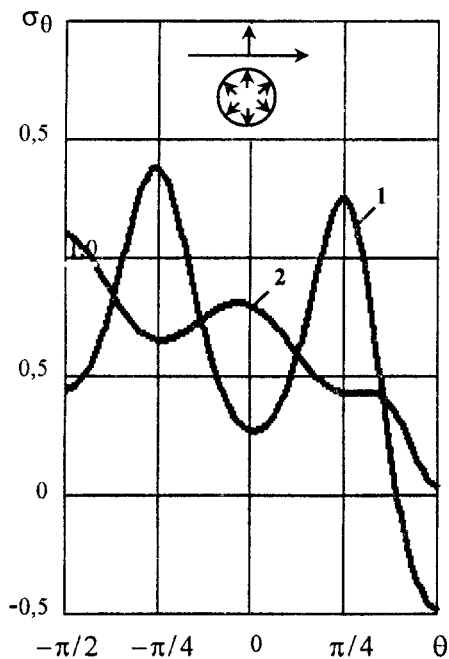


Рис. 3

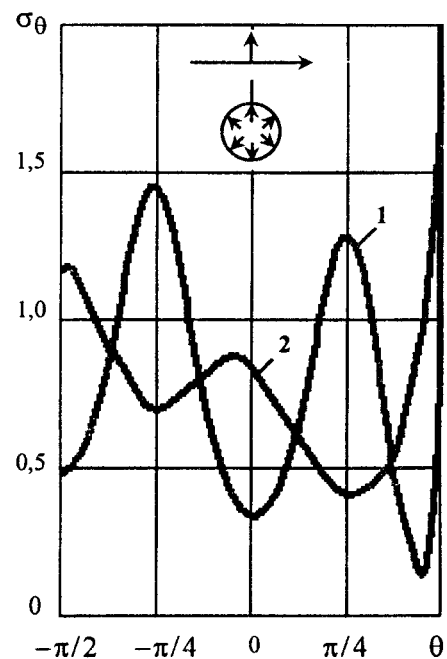


Рис. 4

следует из табл. 4 и рис. 4, с уменьшением длины перемычки, напряжения в зоне между концом трещины и границей полупространства, а также КИН k_3^+ увеличиваются. Значения напряжений вблизи контура отверстия и КИН k_1^+ уменьшаются. Влияние анизотропии материала в данном случае существенно.

РЕЗЮМЕ

Із використанням методу інтегралів типу Коші, конформних відображень і методу найменших квадратів досліджено електропружний стан багатозв'язного анізотропного напівпростору з жорстко підкріпленою плоскою гра-

нищею. Розглядалися випадки, коли напівпростір ослаблений однією або двома порожнинами (тріщинами). Приведені результати чисельних досліджень.

SUMMARY

The electroelastic state of multiconnected anisotropic half space with rigidly supported plane boundary is investigated with using the Cauchy integrals method, conformal mappings and the least squares method. Cases where half space weakened by one or two cavities (crackes) were considered. The results of numerous researches are given.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калоеров С. А., Баева А. И., Глушенко Ю. А. Двумерная задача электроупругости для многосвязного пьезоэлектрического тела с полостями и плоскими трещинами // Теорет. и прикладная механика.– 2001.– Вып. 32.– С. 64-79.
2. Калоеров С. А., Глушенко Ю. А. Двумерная задача электроупругости для многосвязного полупространства // Теорет. и прикладная механика.– 2001.– Вып. 33.– С.83-90.
3. Калоеров С. А., Глушенко Ю. А. Исследование электроупругого состояния анизотропного полупространства с отверстиями и трещинами // Теорет. и прикладная механика.– 2002.– Вып. 36.– С.73-83.
4. Калоеров С. А., Горянская Е. С. Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела // Концентрация напряжений / Под ред. А. Н. Гузя и др.– К.:– 1998.– С.10-26 (Механика композитов: В 12 т., т. 7).

Надійшла до редакції 05.04.2002 р.

УДК 539.3

ВІДОКРЕМЛЕННЯ ПРУЖНОГО ШАРУ ВІД БАГАТОШАРОВОЇ ОСНОВИ
ПІД ДІЄЮ НОРМАЛЬНОГО НАВАНТАЖЕННЯН. І. – В. Манько, А. К. Приварников
Запорізький державний університет

Нехай в пружній багатошаровій основі всі шари, крім верхнього, не відокремлюються один від одного при деформації. Верхній шар (який вважається гладким) має односторонній зв'язок з нижчим шаром основи. На верхній (перший) шар діє локальне нормальне навантаження, яке притискає його до другого. Задача полягає в тому, щоб визначити область контакту першого шару з нижче розташованою основою і знайти закон розподілу нормальних контактних напружень в цій області.

Кожен шар багатошарової основи віднесено до місцевої циліндричної системи координат r, φ, z з початком на верхній межі шару. Осі z усіх систем координат спрямовані по нормалі до меж шарів і збігаються. Шар основи з номером k займає область $0 \leq z \leq h_k, r > 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$ ($k=1, n; h_k$ – товщина), з номером $n+1$ є пружним або жорстким півпростором. Величини k -го шару, позначимо індексом k .

Розглянемо верхній шар основи у стані, коли він під дією навантаження відокремився від другого. На верхній межі шару $z=0$ відомі $\sigma_z(r, 0) = -q^1(r)$ і $\tau_{rz}(r, 0) = 0$; на нижній $z=h_1, \tau_{rz}(r, h_1) = 0, \sigma_z(r, h_1) = -q^2(r)$, де $q^2(r)$ – невідома фінітна функція. Позначимо через $\sigma_1(p), \sigma_2(p)$ трансформанти Ханкеля напружень $\sigma_z(r, 0)$ та $\sigma_z(r, h_1)$

$$\sigma_i(p) = - \int_0^\infty r q^i(r) J_0(pr) dr. \quad (1)$$

Маючи на меті побудувати рівняння відносно функції $q^2(r)$, скористаємося відомими формулами для переміщень u_z точок нижньої межі першого шару і верхньої межі багатошарової основи [1, 2]

$$\frac{du_{z1}(r, h_1)}{dr} = \frac{2(1-\nu_1^2)}{E_1} \int_0^\infty p \frac{2\sigma_1(p)(shv + vchv) - \sigma_2(p)(sh2v + 2v)}{ch2v - 2v^2 - 1} J_1(pr) dp, \quad v = ph_1, \quad (2)$$

$$u_{z2}(r, 0) = - \frac{2(1-\nu_2^2)}{E_2} \int_0^\infty \sigma_2(p) A_2(p) J_0(pr) dp. \quad (3)$$

В цих формулах E_1, E_2, ν_1, ν_2 – модулі пружності і коефіцієнти Пуасона; $J_0(x), J_1(x)$ – функції Бесселя першого роду; $A_2(p)$ – функція податності багатошарової основи, яка починається з другого шару.

В області контакту шару з багатошаровою основою нормальні переміщення точок нижньої межі шару і верхньої межі основи збігаються, тобто

$$u_{z2}(r, 0) = \int_0^r \frac{du_{z1}}{dr} dr.$$

Підставимо в цю рівність вирази (2), (3) та скористуємося тим, що [3]

$$\int_0^r J_1(pr) dr = - \frac{1}{p} [J_0(pr) - 1].$$

Замінімо функцію $A_2(p)$ виразом $1 - a_2(p) e^{-2ph_2}$, де $a_2(p)$ – модифікована функція податності [1].

Отримаємо інтегральне рівняння контактної задачі, що розглядається

$$\int_L t \sigma_{z2}(t, 0) F(r, t) dt - \delta = \frac{1}{1 + \Delta_1} \int_L t \sigma_{z2}(t, 0) \times$$

$$\times \left(\int_0^{\infty} \frac{-4\pi\sigma_1(p)Q^{-1}(shv+vc hv) + (e^{-2v} - 2v^2 - 2v - 1)J_0(pt)}{ch2v - 2v^2 - 1} [J_0(pr) - 1] dp \right) dt +$$

$$+ \frac{\Delta_1}{1+\Delta_1} \int_L^{\infty} t \sigma_{z2}(t, 0) \left(\int_0^{\infty} a_2(p) e^{-2ph_2} J_0(pt) [J_0(pr) - 1] dp \right) dt. \quad (4)$$

Тут $\sigma_{z2}(r, 0)$ – невідоме контактне напруження, L – радіус невідомої області контакту шару з основою;

$$Q = -2\pi \int_L^{\infty} \sigma_{z2}(t, 0) dt, \quad \delta = \int_L^{\infty} \sigma_{z2}(t, 0) dt, \quad F(r, t) = \int_0^{\infty} J_0(pr) J_0(pt) dp - \quad (5)$$

модуль головного вектора сил, що діють на верхню або нижню межу відокремленого від основи шару.

Подамо (4) у вигляді різниці його лівої та правої частин. Тоді для точок $(r, 0)$, які належать області контакту, напруження $\sigma_{z2}(r, 0)$ задовольняють (4), воно перетворюється на вірну тотожність. Якщо точки не належать області контакту, то різниця лівої та правої частин рівності не дорівнюватиме нулю.

Введемо у розгляд функцію

$$h(\alpha) = \begin{cases} \alpha, & \alpha \geq 0, \\ 0, & \alpha < 0. \end{cases}$$

Тоді отримане рівняння (4) можна записати у вигляді еквівалентного йому нелінійного рівняння відносно контактного тиску $q^2(r) = -\sigma_{z2}(r, 0)$

$$q^2(r) = h \left(q^2(r) - E \left[\int_L^{\infty} t q^2(t) F(r, t) dt + \delta - \frac{1}{1+\Delta_1} \times \right. \right.$$

$$\left. \int_L^{\infty} t q^2(t) \times \left(\int_L^{\infty} \frac{-4\pi\sigma_1(p)Q^{-1}(shv+vc hv) + (e^{-2v} - 2v^2 - 2v - 1)J_0(pt)}{ch2v - 2v^2 - 1} [J_0(pr) - 1] dp \right) dt + \right.$$

$$\left. + \frac{\Delta_1}{1+\Delta_1} \int_L^{\infty} t q^2(t) \left(\int_0^{\infty} a_2(p) e^{-2ph_2} J_0(pt) [J_0(pr) - 1] dp \right) dt \right] \right). \quad (6)$$

Тут E – довільна додатна константа.

Наближений розв'язок рівняння (6) можна одержати наведеним нижче методом [4], якщо присвоїти параметру δ деяке числове значення. Як видно з інтегрального рівняння (4), шукані контактні напруження $\sigma_{z2}(r, 0)$ пропорційні параметру δ . Отже, якщо позначити через $q_1^2(r)$ розв'язок рівняння (6) при $\delta=1$, то розв'язок цього рівняння для будь-якого значення δ буде таким $q^2(r) = \delta q_1^2(r)$. Для визначення потрібного значення параметра δ слід скористатися формулою, яка випливає з (4) та (5)

$$\delta = Q / 2\pi \int_L^{\infty} q_1^2(r) r dr. \quad (7)$$

Розглянемо тепер конкретну задачу про відокремлення пружного шару від багатшарової основи. Нехай на шар діє нормальна зосереджена сила $Q=1$, прикладена до точки $r=0$, $z=0$ верхньої межі шару. Сила притискає шар до основи (тобто зосереджена сила, спрямована в додатному напрямку осі z). Для такого навантаження верхнього шару основи

$$\sigma_1(p) = \int_0^{\infty} r \sigma_{z1}(r, 0) J_0(pr) dr = -\frac{1}{2\pi}.$$

Невідома область контакту шару з багатшаровою основою очевидно є круг невідомого радіуса a . Нелінійне рівняння (6) для задачі, що розглядається, набуває вигляду

$$q^2(r) = h \left(q^2(r) - E \left[\int_0^a t q^2(t) F(r, t) dt + \delta - \frac{1}{1 + \Delta_1} \times \right. \right. \\ \times \int_0^a t q^2(t) dt \int_0^\infty \frac{2(shv + vchv) + (e^{-2v} - 2v^2 - 2v - 1) J_0(pt)}{ch2v - 2v^2 - 1} [J_0(pr) - 1] dp + \\ \left. \left. + \frac{\Delta_1}{1 + \Delta_1} \int_0^a t q^2(t) \left(\int_0^\infty a_1(p) e^{-2ph_2} J_0(pt) [J_0(pr) - 1] dp \right) dt \right] \right). \quad (8)$$

Розіб'ємо область $0 \leq r \leq a$ на m однакових частин $[r_i, r_{i+1}]$ ($i = \overline{1, m}$) при $r_1 = 0$, $r_{m+1} = a$. В кожній з частин, крім першої, замінимо функцію $q^2(r)$ лінійною (значення функції $q^2(r)$ та її лінійної апроксимації у граничних точках частини однакові). На частині $[0, r_2]$ вважаємо $q^2(r) \approx q^2(r_2)$. Якщо позначити через q_i^2 ($i = \overline{2, m+1}$) значення шуканої функції $q^2(r)$ в точках r_i ($i = \overline{2, m+1}$), тоді за сказаним

$$q^2(r) \approx \begin{cases} q_2^2, & r \in [0, r_2] \\ \frac{q_{i+1}^2 - q_i^2}{\Delta r} r + \frac{q_i^2 r_{i+1} - q_{i+1}^2 r_i}{\Delta r}, & r \in [r_i, r_{i+1}], \Delta r = r_{i+1} - r_i \quad (i = \overline{2, m}). \end{cases}$$

Підставимо наближений вираз функції $q^2(r)$ в праву частину нелінійного рівняння (8). Тоді кожний з інтегралів буде лінійною комбінацією контактних тисків q_i^2 ($i = \overline{2, m+1}$)

$$\int_0^a t q^2(t) F(r, t) dt = \sum_{k=2}^{m+1} q_k^2 C_{1k}(r), \quad \int_0^a t q^2(t) F_1(r, t) dt = \sum_{k=2}^{m+1} q_k^2 C_{3k}(r), \\ \int_0^a t q^2(t) \left(\int_0^\infty \frac{2(shv + vchv) + (e^{-2v} - 2v^2 - 2v - 1) J_0(pt)}{ch2v - 2v^2 - 1} [J_0(pr) - 1] dp \right) dt = \sum_{k=2}^{m+1} q_k^2 C_{2k}(r).$$

Тут

$$C_{j,2}(r) = \frac{1}{\Delta r} [\Delta r Q_{j,1}(r) - P_{j,2}(r) + r_3 Q_{j,2}(r)], \quad C_{j,m+1}(r) = \frac{1}{\Delta r} [P_{j,m}(r) - r_m Q_{j,m}(r)], \\ C_{j,i}(r) = \frac{1}{\Delta r} [P_{j,i-1}(r) - P_{j,i}(r) + r_{i+1} Q_{j,i}(r) - r_{i-1} Q_{j,i-1}(r)] \quad (j = 1, 2, 3; i = \overline{3, m}), \\ P_{1,i}(r) = \int_{r_i}^{r_{i+1}} t^2 F(r, t) dt, \quad Q_{1,i}(r) = \int_{r_i}^{r_{i+1}} t F(r, t) dt, \quad P_{2,i}(r) = \int_{r_i}^{r_{i+1}} t^2 F_2(r, t) dt, \\ Q_{2,i}(r) = \int_{r_i}^{r_{i+1}} t F_2(r, t) dt, \quad P_{3,i}(r) = \int_{r_i}^{r_{i+1}} t^2 F_1(r, t) dt, \quad Q_{3,i}(r) = \int_{r_i}^{r_{i+1}} t F_1(r, t) dt, \\ F_1(r, t) = \int_0^\infty a_1(p) e^{-2ph_1} J_0(pt) J_0(pr) dp, \\ F_2(r, t) = \int_0^\infty \frac{2(shv + vchv) + (e^{-2v} - 2v^2 - 2v - 1) J_0(pt)}{ch2v - 2v^2 - 1} [J_0(pr) - 1] dp.$$

Наведені невласні інтеграли обчислювалися на ЕОМ за допомогою відомої адаптивної програми інтегрування QUANC8 [5] після заміни нескінченної верхньої межі досить великим числом: $15/h_1$. Для обчислення інтегралів по змінній t використовувалася квадратурна формула Гаусса.

При обчисленні значень функцій $P_{1,i}(r)$ та $Q_{1,i}(r)$ для $r=r_2, \dots, r_{m+1}$ було використано той факт, що функція $F(r, t)$ при $r=t$ має інтегровну особливість; для інших значень r вона неперервна і має похідні довільного порядку. Тому для вказаних значень $r \neq r_i$ та $r \neq r_{i+1}$ функції $P_{1,i}(r)$ і $Q_{1,i}(r)$ можна з високою точністю обчислити на ЕОМ за допомогою квадратурної формули Гаусса з достатньою кількістю вузлів. Заздалегідь шляхом очевидної заміни змінної інтегрування t вирази для функцій $P_{1,i}(r)$ та $Q_{1,i}(r)$ було зведено до вигляду

при $r \leq r_i$

$$P_{1,i}(r) = \frac{2r^2}{\pi} \int_{r/r_{i+1}}^{r/r_i} \frac{K(k)}{k^3} dk, \quad Q_{1,i}(r) = \frac{2r}{\pi} \int_{r/r_{i+1}}^{r/r_i} \frac{K(k)}{k^2} dk = -\frac{2r}{\pi} \left[\frac{E(k)}{k} \right]_{r/r_{i+1}}^{r/r_i}; \quad (9)$$

при $r \geq r_{i+1}$

$$P_{1,i}(r) = \frac{2r^2}{\pi} \int_{r_i/r}^{r_{i+1}/r} k^2 K(k) dk, \quad Q_{1,i}(r) = \frac{2r}{\pi} \int_{r_i/r}^{r_{i+1}/r} k K(k) dk = \frac{2r}{\pi} [E(k) - (1-k^2)K(k)]_{r_i/r}^{r_{i+1}/r}; \quad (10)$$

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (11)$$

повний еліптичний інтеграл другого роду, $E(k)$ – повний еліптичний інтеграл першого роду. Інтеграли $Q_{1,i}(r)$ обчислюються точно за допомогою довідника [6]. Для обчислення інтегралів $P_{1,i}(r)$ при $r=r_i$ та $r=r_{i+1}$ у виразах (9) і (10) функцію $K(k)$ замінено інтегралом (11). Після зміни порядку інтегрування у кратних інтегралах було отримано такі результати [7]:

при $r=r_i$

$$P_i(r_i) = \frac{r_i^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[\sin^2 \varphi \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - (r_i \sin \varphi / r_{i+1})^2}}{1 + \cos \varphi} \frac{r_{i+1}}{r_i} \right) + \frac{r_{i+1}}{r_i} \sqrt{1 - (r_i \sin \varphi / r_{i+1})^2} \right] d\varphi - \frac{r_i^2}{\pi},$$

при $r=r_{i+1}$

$$P_i(r_{i+1}) = \frac{r_{i+1}^2}{2\pi} \left[\int_0^{\pi/2} \frac{\arcsin(k \sin \varphi)}{\sin \varphi} d\varphi + k(E(k) - 2(1-k^2)K(k)) \right]_{r_i/r_{i+1}}^1.$$

Якщо параметру r в рівнянні (7) послідовно надавати значень $r_2, \dots, r_{m+1}$, то прийдемо до системи нелінійних рівнянь

$$q_i^2 = h \left(q_i^2 - E \left(\frac{2(1-\nu_1^2)}{E_1} \sum_{k=2}^{m+1} \left(C_{1k}(r_i) - \frac{1}{1+\Delta_1} C_{2k}(r_i) - \frac{\Delta_1}{1+\Delta_1} C_{3k}(r_i) \right) q_k^2 \right) \right) \quad (i=\overline{2, m+1}). \quad (12)$$

Константу E візьмемо такою, щоб цю систему можна було розв'язати методом Зейделя. Згідно з результатами праці [4] процес буде збіжний, якщо E дорівнюватиме числу, оберненому до максимального модуля елементів матриці, яка створена з коефіцієнтів при q_k^2 у виразі праворуч від E в (12).

Початкове наближення до шуканого розв'язку системи беремо нульовим. В решті решт отримаємо сукупність невід'ємних шуканих тисків $q_2^2, q_3^2, \dots, q_{m+1}^2$. Ті області круга $r \leq a$, на яких $q(r) > 0$, є областями контакту шару з основою.

Зауважимо, що задача про односторонній контакт пружного шару з пружним півпростором розв'язувалася багатьма авторами [2, 8–10]. В таблиці наведені результати обчислень радіуса a області контакту шару з півпростором для різних значень параметра Δ_1 . Існують розбіжності у цих значеннях з

Автори	a/h_1			
	$\Delta_1=0$	$\Delta_1=0,61$	$\Delta_1=1,69$	$\Delta_1=3,45$
Pu S.L., Hussain M.A. [8]	0,0116	0,0190	0,0220	0,0270
Keer L.M. и др. [9]	0,0112	0,0160	0,0200	0,0250
Weitsman Y. [10]	0	0,0137	0,0191	0,0243
Приварников А.К. [2]	0,0110	0,0150	0,0200	0,0250
Манько Н.І.-В., Приварников А.К.	0,0109	0,0150	0,0200	0,0250

першими двома авторами, бо у своїх роботах вони навели результати у графічному вигляді. Результати Weitsman Y. суттєво відмінні від інших при $\Delta_1=0$ тому, що він розглядав контакт пружної пластинки з півпростором, до якого вона притискається

зосередженою силою.

Те, що розв'язок задачі, згідно рівнянню (7), збігається з розв'язками тієї ж самої задачі, отриманими іншими методами, свідчить про вірогідність методу розв'язку задачі про відокремлення шару від основи, який наведено в статті. Однак запропонований метод має перевагу перед згаданими вище, бо дозволяє розв'язувати осесиметричні задачі про відокремлення для будь-яких багатошарових основ з невідомою областю контакту шару з основою (кільце, система кілець).

РЕЗЮМЕ

Упругий гладкий однородный изотропный слой имеет односторонние связи с упругим многослойным основанием. При деформации слоя под действием гладкого штампа или давления он отстает от многослойного основания. Требуется определить область контакта слоя с основанием, закон распределения контактных давлений, а также напряжения и перемещения в произвольной точке многослойного основания с любым конечным числом слоев. Предполагается, что деформация слоя и основания является осесимметричной, поэтому область их контакта может представлять собой систему концентрических колец и круга. Построено интегральное уравнение контактной задачи, предложен способ его приближенного решения, позволяющий определить не только контактные давления, но и область контакта слоя с основанием. Разработан алгоритм определения на ЭВМ напряженно-деформируемого состояния основания с требуемой точностью.

SUMMARY

The elastic smooth homogeneous isotropic layer has one-sided connections with the elastic structural foundation. The operation on a layer of a smooth stamp or pressures calls its deformation. Thus the layer lags behind the multilayered foundation. It is required to spot area of contact of a layer with the foundation, distribution law of contact pressures, and the stress and strain in an arbitrary point of the multilayer foundation with any finite number of layers. It is supposed, that the deformation of a layer and foundation is rotationally symmetric, therefore area of their contact can represent a system of concentric rings and circle. The integral equation of a contact problem is constructed, the mode of its approximate solution permitting to spot not only contact pressures, but also area of contact of a layer with the base is offered. The algorithm of definition on the computer is the intensively deformed state of the foundation with a required exactitude designed.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Приварников А.К., Ламзюк В.Д. Упругие многослойные основания/ Днепропетровский университет.— Днепропетровск, 1985.— 162 с.—Деп. в ВИНТИ 23.12.85, 8789 - В.
2. Приварников А.К. О контакте слоя с упругим полупространством // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.— 1972.— № 4.— С. 163—167.
3. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции.— М.: Наука, 1983.— 752 с.
4. Александров А.И. Решение задач контактного взаимодействия упругих тел с использованием нелинейных операторных уравнений.— Днепропетровск: Препринт ИТМ АН СССР, 1989.— 74 с.
5. Форсайт Дж., Малкольм М., Моулдер К. Машинные методы математических вычислений.— М.: Мир, 1980.— 279 с.
6. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы.— М.: Наука, 1986.— 800 с.
7. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы.— М.: Наука, 1978.— 224 с.
8. Pu S.L., Hussain M.A. Note on unbounded contact between plates and elastic half space // Trans. ASME, Ser. E. J. Appl. Mech.— 1970.— № 3.— P. 859-861.
9. Keer L.M., Dundurs J., Tsai K.C. Problems involving a receding contact between a layer and half space // Trans. ASME, S. E. J. Appl. Mech.— 1972.— № 4.— P. 1115-1120.
10. Weitsman Y. On the unbounded contact between plates and an elastic half space // Trans. ASME, Ser. E. J. Appl. Mech.— 1969.— Vol. 36, № 2.— P. 198-202.

Надійшла до редакції 05.04.2002 р.

УДК 539.3

К ВОПРОСУ О ПЕРЕДАЧЕ НАГРУЗКИ ОТ СТРИНГЕРА УПРУГОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЕ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

Т.С. Кагадий, А.В. Павленко*

Национальный горный университет, Днепропетровск

*Национальная металлургическая академия, Днепропетровск

Аналоги задачи Мелана [1] имеют обширную область применения при исследовании конструкций вообще, авиационных и космических в частности, в строительном деле и, особенно, механике волокнистых композитных материалов. Соответствующие плоские варианты для упругих изотропных и анизотропных материалов тел с бесконечными или полубесконечными размерами в настоящее время считаются достаточно хорошо изученными [2, 3], хотя возникают и новые постановки [4] или другие материалы [5]. Тела конечные и (или) составные лишь начинают рассматриваться [6]. Пространственные же задачи исследованы значительно меньше [7], тем более для конечных и составных тел.

Пусть упругая пластина $0 \leq x \leq h$, $-b \leq y \leq b$ закреплена по кромкам $y = \pm b$, две другие ($x=0$, $x=h$) остаются свободными. В середине свободных кромок вдоль оси Ox она усилена стрингером, который в граничной точке $x=0$ нагружен продольной силой P_0 . Кроме того предполагается, что стрингер подвержен действию некоторой нагрузки, пропорциональной, с коэффициентом пропорциональности k , его смещению. Материал пластины является ортотропным, главные направления анизотропии совпадают с декартовыми осями координат x , y . Необходимо определить законы изменения усилия в стрингере, напряжений в пластине, усилия взаимодействия между стрингером и пластиной. Для решения задачи воспользуемся асимптотическим методом [7, 8].

Поставленная задача сводится к интегрированию уравнений равновесия пластины

$$B_1 u_{xx} + G u_{yy} + (G + \nu_2 B_1) v_{xy} = 0, \quad G v_{xx} + B_2 v_{yy} + (G + \nu_1 B_2) u_{xy} = 0$$

при следующих граничных условиях:

$$\sigma_{11} = B_1 (u_x + \nu_2 v_y) = 0, \quad \sigma_{12} = G (u_y + v_x) = 0 \quad (x=0, x=h);$$

$$u = u_c, \quad v = 0 \quad (y=0); \quad u = v = 0 \quad (y = \pm b),$$

причем перемещения стрингера u_c удовлетворяют соотношениям

$$EF u_{cxx} = 2ku_c - 2\sigma_{12}(x, 0), \quad (1)$$

$$N = EF u_{cx} = P_0(x=0); \quad N=0(x=h) \quad (2)$$

Здесь u , v – компоненты вектора перемещений пластины; B_1 , B_2 – жесткости пластины на растяжение-сжатие вдоль главных направлений; G – жесткость на сдвиг; σ_{11} , σ_{12} – нормальное и касательное усилия в пластине; ν_1 , ν_2 – коэффициенты Пуассона материала пластины; EF – жесткость стрингера на растяжение-сжатие; $N(x)$ – усилие в стрингере; $\sigma_{12}(x, 0) = \tau(x)$ – контактное усилие взаимодействия между стрингером и пластиной; индексы x , y обозначают дифференцирование по соответствующим координатам. Так как при $y=0$ $v=0$ ($v_x=0$), то контактное усилие взаимодействия между стрингером и пластиной определяется по формуле

$$\tau(x) = \sigma_{12}(x, 0) = G u_y(x, 0). \quad (3)$$

В дальнейшем в силу симметрии относительно оси Ox будем рассматривать лишь область $0 \leq x \leq h$, $0 \leq y \leq b$.

В соответствии с расщеплением напряженно-деформированного состояния пластины на две составляющие [7, 8] сформулированная выше краевая задача в первом приближении сводится к последовательному решению двух следующих:

$$B_1 u_{xx} + G u_{yy} = 0, \quad (4)$$

$$u_x = 0(x=0, x=h), \quad u = u_c(y=0), \quad u = 0(y=b) \quad (5)$$

$$Gv_{xx} + B_2v_{yy} = 0, \quad (6)$$

$$v=0 \ (y=0, y=b), \quad v_x = -u_y \ (x=0, x=h) \quad (7)$$

При определении напряженно-деформированного состояния первого типа приходится интегрировать уравнения (1), (4) с граничными условиями (2), (5) и учетом соотношения (3). После применения косинус-преобразования Фурье с конечными пределами по координате x к уравнениям (1), (4), находим

$$u^*(n, y) = -\frac{P_0}{EF} \frac{h^2}{\pi^2} \frac{sh[\omega\alpha_n(b-y)]}{sh(\omega\alpha_nb)} \frac{1}{\varphi(n)},$$

$$\omega = (B_1/G)^{1/2}, \quad \alpha_n = n\pi/h, \quad \varphi(n) = n^2 + 2q\alpha_n(h^2/\pi^2)cth(\omega\alpha_nb) + \chi(h^2/\pi^2),$$

$$q = G\omega/EF, \quad \chi = 2k/EF. \quad (8)$$

Возвращаясь к оригиналу, получаем

$$u(x, y) = -\frac{P_0}{EF} \frac{1}{h} \frac{b-y}{b} \frac{\omega b}{2q + \kappa\omega b} \frac{2P_0}{EF} \frac{h}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sh[\omega\alpha_n(b-y)]\cos(\alpha_n x)}{sh(\omega\alpha_nb)\varphi(n)} \quad (9)$$

Из соотношения (9) имеем

$$u_x = \frac{2P_0}{\pi EF} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sh[\omega\alpha_n(b-y)]n\sin(\alpha_n x)}{sh(\omega\alpha_nb)\varphi(n)}, \quad (10)$$

$$u_y = -\frac{P_0}{EF} \frac{1}{h} \frac{\omega b}{2q + \kappa\omega b} \frac{2P_0}{EF} \frac{\omega}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ch[\omega\alpha_n(b-y)]n\cos(\alpha_n x)}{sh(\omega\alpha_nb)\varphi(n)} \quad (11)$$

Нормальное усилие σ_{11} и составляющая касательного $\sigma_{12}^{(1)}$ в этом приближении определяются по формулам

$$\sigma_{11} = B_1 u_x, \quad \sigma_{12}^{(1)} = G u_y, \quad (12)$$

а усилие в стрингере и контактное усилие взаимодействия между стрингером и пластиной находятся из соотношений

$$N(x) = EF u_x(x, 0), \quad \tau(x) = G u_y(x, 0). \quad (13)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи. При $\omega \rightarrow 0$ (в этом случае пластинка работает только на сдвиг) формулы (10), (11) принимают вид

$$u_x = \frac{2P_0}{\pi EF} \frac{b-y}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sin(\alpha_n x)}{n^2 + (g_* + \kappa)(h^2/\pi^2)}, \quad (14)$$

$$u_y = \frac{P_0}{EF} \frac{1}{hb(g_* + \kappa)} + \frac{2P_0}{\pi b EF} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\alpha_n x)}{n^2 + (g_* + \kappa)(h^2/\pi^2)}, \quad (15)$$

где $q_* = 2G/bEF$. Соотношения (14), (15) можно переписать в виде

$$u_x = \frac{P_0}{EF} \frac{b-y}{b} \frac{sh[\sqrt{g_* + \kappa}(h-x)]}{sh(\sqrt{g_* + \kappa}h)} \quad (16)$$

$$u_y = \frac{P_0}{EFb\sqrt{g_* + \kappa}} \frac{ch[\sqrt{g_* + \kappa}(h-x)]}{sh(\sqrt{g_* + \kappa}h)} \quad (17)$$

В этом случае нормальное напряжение σ_{11} в пластине равно нулю (так как $B_1 = 0$), касательное является константой вдоль координаты y , а усилие в стрингере $N(x)$ определяется по формуле

$$N(x) = P_0 \frac{sh[\sqrt{g^* + \kappa}(h-x)]}{sh[\sqrt{g^* + \kappa}h]} \quad (18)$$

Если в выражениях (16) – (18) $h \rightarrow \infty$, что соответствует задаче о передаче нагрузки стрингером ортотропной полуполосе, работающей только на сдвиг, то

$$u_x = \frac{P_0}{EF} \frac{b-y}{b} e^{-\sqrt{g^* + \kappa}x}, \quad u_y = \frac{P_0}{bEF\sqrt{g^* + \kappa}} e^{-\sqrt{g^* + \kappa}x}, \quad N(x) = P_0 e^{-\sqrt{g^* + \kappa}x}. \quad (19)$$

При $b \rightarrow \infty$ имеем $sh[\omega\alpha_n(b-y)] \approx e^{\omega\alpha_nb} e^{-\omega\alpha_ny}$, $sh[\omega\alpha_nb] \approx e^{\omega\alpha_nb}$, $ch[\omega\alpha_n(b-y)] \approx e^{\omega\alpha_nb} e^{-\omega\alpha_ny}$, $cth(\omega\alpha_nb) \approx 1$ и соотношения (10), (11) принимают вид

$$u_x = \frac{2P_0}{\pi EF} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\omega\alpha_ny} n \sin(\alpha_nx)}{n^2 + 2q\alpha_n(h^2/\pi^2) + \kappa(h^2/\pi^2)}, \quad (20)$$

$$u_y = \frac{2P_0\omega}{\pi EF} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\omega\alpha_ny} n \cos(\alpha_nx)}{n^2 + 2q\alpha_n(h^2/\pi^2) + \kappa(h^2/\pi^2)}. \quad (21)$$

Если $h \rightarrow \infty$, то формулы (10), (11) дают

$$u_x = \frac{2P_0}{\pi EF} \int_0^{\infty} \frac{sh[\omega(b-y)s]}{sh(\omega bs)} \frac{s \sin xs ds}{s^2 + 2qs cth(\omega bs) + \kappa}, \quad (22)$$

$$u_y = \frac{2P_0\omega}{\pi EF} \int_0^{\infty} \frac{ch[\omega(b-y)s]}{sh(\omega bs)} \frac{s \cos xs ds}{s^2 + 2qs cth(\omega bs) + \kappa}. \quad (23)$$

Предельный переход при $b \rightarrow \infty$ в выражениях (22), (23) (при $h \rightarrow \infty$ в соотношениях (20), (21)) дает решение задачи о передаче нагрузки стрингером ортотропной полуплоскости. В этом случае

$$u_x = \frac{2P_0}{\pi EF} \int_0^{\infty} \frac{se^{-\omega ys} \sin xs ds}{s^2 + 2qs + \kappa}, \quad (24)$$

$$u_y = \frac{2P_0\omega}{\pi EF} \int_0^{\infty} \frac{se^{-\omega ys} \cos xs ds}{s^2 + 2qs + \kappa}. \quad (25)$$

Так как $\frac{s}{s^2 + 2qs + \kappa} = \frac{1}{2\sqrt{q^2 - \kappa}} \left(\frac{a_1}{s+a_1} - \frac{a_2}{s+a_2} \right)$, где $a_1 = q + \sqrt{q^2 - \kappa}$, $a_2 = q - \sqrt{q^2 - \kappa}$, то формулы

(24), (25) принимают вид

$$u_x = \frac{P_0}{\pi EF\sqrt{q^2 - \kappa}} \left(a_1 \int_0^{\infty} \frac{e^{-\omega ys} \sin xs ds}{s+a_1} - a_2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-\omega ys} \sin xs ds}{s+a_2} \right), \quad (26)$$

$$u_y = \frac{P_0\omega}{\pi EF\sqrt{q^2 - \kappa}} \left(a_1 \int_0^{\infty} \frac{e^{-\omega ys} \cos xs ds}{s+a_1} - a_2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-\omega ys} \cos xs ds}{s+a_2} \right). \quad (27)$$

В частности, при $y=0$

$$u_x(x, 0) = \frac{P_0}{\pi EF\sqrt{q^2 - \kappa}} (a_1 f(a_1x) - a_2 f(a_2x)), \quad (28)$$

$$u_y(x, 0) = \frac{P_0 \omega}{\pi E F \sqrt{q^2 - \kappa}} (a_1 g(a_1 x) - a_2 g(a_2 x)), \quad (29)$$

где

$$f(ax) = \sin(ax) si(ax) - \cos(ax) ci(ax), \quad g(ax) = -\sin(ax) si(ax) - \cos(ax) ci(ax), \quad (30)$$

si , ci – соответственно интегральные синус и косинус. Усилие в стрингере $N(x)$ и контактное усилие взаимодействия $\tau(x)$ между стрингером и пластиной определяются по формулам (13).

Полученные выше решения не удовлетворяют нулевым граничным условиям по касательным напряжениям σ_{12} для пластины при $x=0$, $x=h$. Устранение этой невязки требует определения напряженно-деформированного состояния второго типа, которое сводится к интегрированию уравнения (6) с граничными условиями (7). Для примера рассмотрим случай, когда пластина представляет собой полуплоскость. Здесь краевыми условиями для уравнения (6) будут

$$v=0 \quad (y=0, y=\infty), \quad v_x = -u_y \quad (x=0), \quad v_x = 0 \quad (x=\infty), \quad (31)$$

причем u_y находится из формулы (28) при $x=0$.

Применяя к уравнению (6) и граничным условиям (31) синус-преобразование Фурье по координате y , приходим к краевой задаче

$$\begin{aligned} v_{xx}^* - \lambda^2 v^* &= 0, \\ v_x^*(0, v) &= -\frac{P_0 \omega}{\pi E F \sqrt{q^2 - \kappa}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(a_1 \int_0^\infty \frac{v ds}{(s+a_1)(\omega^2 s^2 + v^2)} - a_2 \int_0^\infty \frac{v ds}{(s+a_2)(\omega^2 s^2 + v^2)} \right), \\ v_x^*(\infty, v) &= 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Решая задачу (32), (33) и возвращаясь к оригиналу, получаем

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \frac{P_0}{\pi E F \sqrt{q^2 - \kappa}} \frac{\omega}{\lambda} \frac{2}{\pi} \left(a_1 \int_0^\infty \frac{ds}{s+a_1} \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda x v} \sin y v dv}{\omega^2 s^2 + v^2} - a_2 \int_0^\infty \frac{ds}{s+a_2} \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda x v} \sin y v dv}{\omega^2 s^2 + v^2} \right), \\ \lambda^2 &= \frac{B_2}{G}. \end{aligned} \quad (34)$$

Нормальное усилие σ_{22} и составляющая касательного $\sigma_{12}^{(2)}$ находятся по формулам

$$\sigma_{22} = B_2 v_y, \quad \sigma_{12}^{(2)} = G v_x.$$

Теперь касательное усилие

$$\sigma_{12} = \sigma_{12}^{(1)} + \sigma_{12}^{(2)} = G(u_y + v_x)$$

при $x=0$ удовлетворяет заданным нулевым условиям, так как из (34)

$$v_x(0, y) = -\frac{P_0 \omega}{\pi E F \sqrt{q^2 - \kappa}} \left(a_1 \int_0^\infty \frac{e^{-\omega y s} ds}{s+a_1} - a_2 \int_0^\infty \frac{e^{-\omega y s} ds}{s+a_2} \right),$$

а $u_y(0, y)$ определяется из формулы (28).

При $k=0$ ($\kappa=0$, $a_1=2q$, $a_2=0$) приходим к решению задачи, когда отсутствуют дополнительная нагрузка на стрингер, пропорциональная его смещению.

РЕЗЮМЕ

Розглянута нова контактна задача про передачу навантаження від стрингера до пружної ортотропної пластини скінченних розмірів. Пластина закріплена з двох сторін, дві інші сторони вільні. Стрингер розташований у сере-

дині вільних кромek перпендикулярно до них і скріплений з пластиною симетрично до її серединної площини. Приймається схема контакту по лінії. Крім пластини, на стрингер дієсосереджена сила, приложена до одного його кінця, а також зусилля, яке пропорціональне переміщенню стрингера. Знайдені зусилля в стрингері, а також зусилля контактної взаємодії між стрингером і пластиною. Для розв'язку задачі застосовано розроблений авторами асимптотичний метод.

SUMMARY

New contact problem on load transfer from stringer to finite plate is solved by means of asymptotic method. The elaborated method is allowed to reduce problem to solving some problems of potential theory. Some key characteristics for stringer and plate are obtained.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Melan E. Ein Beitrag zur Theori geschweisster Verbindungen // Ing/Arch.– 1932.– Vol.3.– P.123 – 129.
2. Sternberg E. Load - transfer and load - diffusion in elastostatics// Proc/ 6th U.S. Nat. Congr. of Appl. Mech. New York. ASME.1970. P. 34-61. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев. 1972. №6. С.112 – 149).
3. Развитие теории контактных задач в СССР / Под ред. Л. А. Галина.– М.: Наука, 1976.– 493 с.
4. Lenci S. Melan's Problems With Weak Interface // ASME. J. Appl. Mech.– 2000.– Vol. 67.– P.22 – 28.
5. Павленко А. В. , Чухнова Л. И. Передача нагрузки упругим стержнем вязкоупругой ортотропной пластине // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.– 1989.– №3.– С.126 – 130.
6. Кагадий Т.С., Павленко А.В., Миколенко В.А. Передача нагрузки стержнем двуслойной пластине // Theoretical Foundations of Civil Engineering.– Варшава, 1996.– Т.4.– С.285 – 289.
7. Маневич Л. И. , Павленко А. В. Асимптотический метод в микромеханике композиционных материалов.– К.: Вища шк., 1991.– 131 с.
8. Маневич Л.И., Павленко А.В., Коблик С.Г., Асимптотические методы в теории упругости ортотропного тела.– К.–Донецк: Вища шк., 1982.– 153 с.

Надійшла до редакції 10.04.2002 р.

УДК 539.3

ЗАДАЧА НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ИЗОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ТРЕЩИНОЙ

В.В. Дудка, В.А. Клименко, В.А. Ячменев
Сумский государственный университет

Пусть полуплоскость $|y| < \infty$, $x > 0$ с расположенным внутри ее прямолинейным разрезом, параллельным границе полуплоскости, подвержена нагреву на этой границе, а разрез теплоизолирован. Математическая формулировка задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial y_1} \right) &= C(T) \frac{\partial T}{\partial t}, \\ \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} &= -A(T) q_0 e^{-k y_1^2}, \quad \frac{\partial T}{\partial n_1} \Big|_L^{\pm} = 0, \\ T(+\infty, y_1, t) &= T(x_1, \pm\infty, t) = T(x_1, y_1, 0) = T_0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $T(x_1, y_1, t)$ – температура; t – время; x, y – пространственные координаты; q_0 – плотность потока излучения; k – коэффициент сосредоточенности; $A(t)$ – поглощательная способность; $\lambda(T)$ – коэффициент теплопроводности; $C(T)$ – объемная теплоемкость; T_0 – начальная температура; знаки «+» и «-» относятся к правому и левому берегам разреза.

Перейдем к безразмерным величинам с помощью соотношений

$$u = (T - T_0) \lambda_0 \sqrt{k} / q_0, \quad x = x_1 \sqrt{k}, \quad y = y_1 \sqrt{k}, \quad \tau = k a_0 t, \quad (2)$$

где

$$a_0 = a(T_0), \quad \lambda_0 = \lambda(T_0), \quad C_0 = C(T_0), \quad A_0 = A(T_0);$$

$a = \lambda / C$ – коэффициент температуропроводности.

После подстановки соотношений (2) в систему (1) получим

$$\begin{aligned} \lambda(u) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \lambda(u)}{\partial u} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] &= C(u) a_0 \frac{\partial u}{\partial \tau}, \\ \lambda_{np} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= -A_0 e^{-y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_L^{\pm} = 0, \\ u(+\infty, y, t) &= u(x, \pm\infty, t) = u(x, y, 0) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\lambda_{np}(u) = A_0 \lambda(u) / \lambda_0 A(u)$ – приведенный коэффициент теплопроводности, который учитывает температурные зависимости коэффициента теплопроводности и поглощательной способности.

При соответствующих предположениях относительно вида зависимости теплофизических параметров от температуры и после применения подстановки Кирхгофа $v = \int_0^u \lambda_{np}(x) dx$ система (3) приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{A(v)} \frac{\partial A(v)}{\partial v} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] &= \frac{a_0}{a(v)} \frac{\partial v}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = -A_0 e^{-y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_L^{\pm} = 0, \\ v(+\infty, y, t) &= v(x, \pm\infty, t) = v(x, y, 0) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Для решения полученной системы построим итерационный процесс таким образом, чтобы его первое приближение давало решение системы (1) в предположении, что теплофизические коэффициенты и поглощательная способность не зависят от температуры

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2} = \bar{W} \frac{\partial v_n}{\partial \tau} + \left[W(v_{n-1}) - \bar{W} \right] \frac{\partial v_{n-1}}{\partial \tau} - \frac{1}{A(v_{n-1})} \frac{\partial A(v_{n-1})}{\partial v_{n-1}} \left[\left(\frac{\partial v_{n-1}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_{n-1}}{\partial y} \right)^2 \right],$$

$$\left. \frac{\partial v_n}{\partial x} \right|_{x=0} = -Ae^{-y^2}, \quad \left. \frac{\partial v_n}{\partial x} \right|_L = 0, \quad v_n(x=+\infty) = v_n(y=\pm\infty) = v_n(t=0) = 0,$$

$$W(v) = a_0/a(v); \quad \bar{W} = a_0/\bar{a}; \quad \bar{a} = \int_{T_0}^{T_k} a(x) dx / (T_k - T_0).$$

При этом в качестве нулевого приближения выбрано $v_0 \equiv 0$. Тогда первое приближение определяется из решения линейной системы уравнений

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = \bar{W} \frac{\partial v_1}{\partial \tau}, \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial v_1}{\partial x} \right|_{x=0} = -A_0 e^{-y^2}, \quad (6)$$

$$v_1(x=+\infty) = v_1(y=\pm\infty) = v_1(\tau=0) = 0. \quad (8)$$

Решение последней системы будем искать в виде

$$v_1(x, y, \tau) = v_1^*(x, y, \tau) + v_1^0(x, y, \tau), \quad (9)$$

где $v_1^0(x, y, \tau)$ – решение уравнения (5) для полуплоскости без разреза с граничными условиями (6), (8), которое определяется известными методами.

Из представления (9) следует, что $v_1^*(x, y, \tau)$ должна удовлетворять уравнению (5) и следующим условиям на границе полуплоскости и берегах разреза

$$\left. \frac{\partial v_1^*(x, y, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial v_1^*(s_0, t)}{\partial x} \right|_L = g^\pm(s_0, t). \quad (10)$$

Здесь $g^\pm(s_0, t) = -\frac{\partial v_1^0(s_0, t)}{\partial x}$, а также нулевому начальному условию.

Решение задачи об отыскании $v_1^*(x, y, \tau)$ проведем по следующей схеме. Представим v_1^* в виде

$$v_1^*(x, y, \tau) = \Phi(x, y, \tau) + \Psi(x, y, \tau),$$

где $\Phi(x, y, \tau)$ и $\Psi(x, y, \tau)$ – тепловые потенциалы простого и двойного слоев для полуплоскости, которые имеют вид

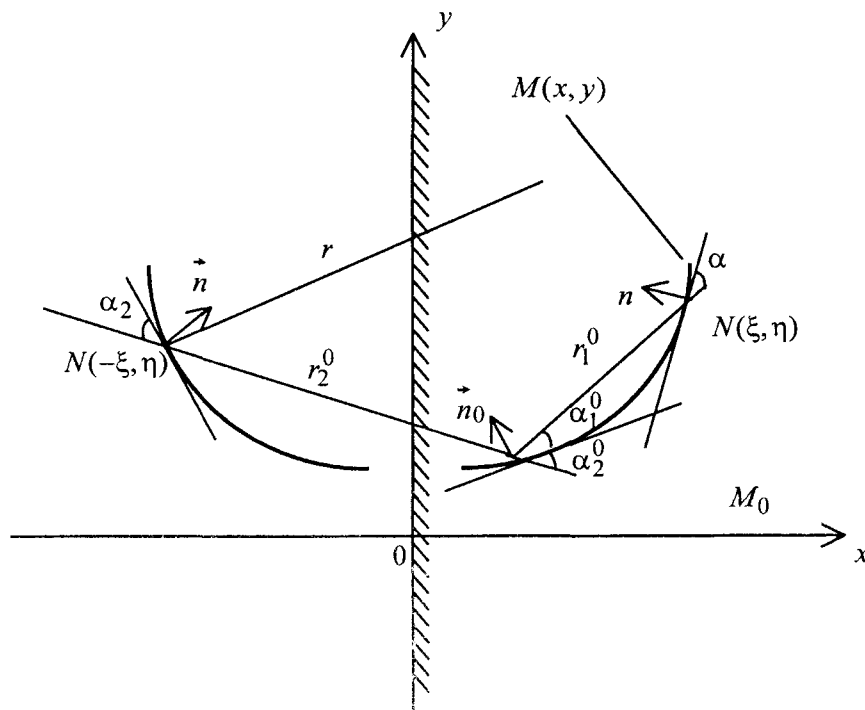
$$\Phi(x, y, t) = \iint_{L_0}^t \varphi(s, \tau) R^H(x, y, s, t-\tau) ds d\tau, \quad \Psi(x, y, t) = \iint_{L_0}^t \frac{\psi(s, \tau)}{(t-\tau)^2} R^D(x, y, s, t-\tau) ds d\tau,$$

$$R^H(M, N, t) = \frac{1}{4\pi t} \left[\exp\left(-\frac{r_1^2 \bar{W}}{4t}\right) - \exp\left(-\frac{r_2^2 \bar{W}}{4t}\right) \right],$$

$$R^D(M, N, t) = \frac{\ddot{W}}{4\pi t^2} [R(r_1, t) r_1 \cos(r_1, n) + R(r_2, t) r_2 \cos(r_2, n_2)],$$

$$r_1^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2, \quad r_2^2 = (x + \xi)^2 + (y - \eta)^2.$$

Эти потенциалы удовлетворяют дифференциальному уравнению (5) и однородному граничному условию на границе. Чтобы удовлетворить граничным условиям на разрезе L выполним соответствующие предельные переходы, удовлетворяя граничному условию (10). В результате (в обозначениях рисунка) приходим к интегральному уравнению



$$\begin{aligned}
& -\frac{\overline{W}}{4\pi\chi} \int_0^t \psi(s, \tau) I_1(s_0, s, t-\tau) \frac{d\tau}{(t-\tau)^2} \Big|_a^b + \\
& + \frac{\overline{W}}{4\pi\chi_1} \int_{L0}^t \int_0^t [\psi'(s, \tau) I_1(s_0, s, t-\tau) - \psi(s, \tau) I_2(s_0, s, t-\tau)] \frac{d\tau ds}{(t-\tau)^2} = \\
& = g_{(s_0, t)}^+ + g_{(s_0, t)}^- - \frac{\overline{W}}{4\pi\chi_2} \int_{\Delta 0}^t \frac{\varphi(s, \tau)}{t-\tau} R_1(s_0, s, t-\tau) d\tau ds \\
& \varphi(s_0, t) = g_{(s_0, t)}^- - g_{(s_0, t)}^+, \quad I_1(s_0, s, t) = R(r_1^0, t) r_1^0 \cos \alpha_1^0 + R(r_2^0, t) r_2^0 \cos \alpha_2^0, \\
& I_2(s_0, s, t) = 2 \left[\frac{(r_1^0)^2}{4\chi t} - 1 \right] R(r_1^0, t) \cos \alpha_1^0 + 2 \left[\frac{(r_2^0)^2}{4\chi t} - 1 \right] R(r_2^0, t) \cos \alpha_2^0, \\
& R_1(s_0, s, t) = R(r_1^0, t) r_1^0 \sin \alpha_1^0 + R(r_2^0, t) r_2^0 \sin \alpha_2^0.
\end{aligned}$$

Это уравнение можно решать методами, изложенными в [3].

Рассмотрим второе приближение. Если представить v в виде $v=v_1+v_2$, то v_2 будет решением следующей задачи

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} = \overline{W} \frac{\partial v_2}{\partial \tau} - \theta(x, y, \tau), \quad \left. \frac{\partial v_2}{\partial n} \right|_{\gamma=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial v_1}{\partial n} \right|_L^\pm = 0,$$

$$v_2(x=\infty)=v_2(x=\pm\infty)=v_2(\tau=0)=0, \quad (11)$$

где

$$\theta(x, y, \tau) = \frac{1}{A(v_1)} \frac{dA(v_1)}{dv_1} \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} \right)^2 \right] - [W(v_1) - \bar{W}] \frac{\partial v_1}{\partial \tau}.$$

Задача нахождения v_2 аналогична задаче нахождения v_1 только с тем различием, что при решении задачи для полуплоскости без разрезв необходимо решить неоднородное уравнение (11), а не однородное уравнение (5).

Выполняя дальнейшие итерации мы можем вычислить распределение температуры в любой точке полуплоскости с любой наперед заданной точностью.

В качестве частного случая рассмотрим следующую задачу. Пусть разрез L является прямолинейный и расположенный перпендикулярно к границе полуплоскости. Предположим также, что на берегах разреза выполняются следующие граничные условия.

$$\left. \frac{\partial v_1^*}{\partial n} \right|^\pm = \frac{1}{\lambda} q^\pm - \frac{\partial v_1^0}{\partial n} = g^\pm,$$

при этом $g^+(s_0, t) = -g^-(s_0, t) = -g(s_0, t)$.

Тогда из условия, что разрез перпендикулярный границе полуплоскости, следует, что угол между вектором $\vec{M_0N}$ и касательной к разрезу равен нулю. Поэтому $\bar{R}^D(s_0, s, t-\tau) = 0$ и $R_1(s_0, s, t-\tau) = 0$. Отсюда следует, что интегральное уравнение становится однородным и поэтому имеет нулевое решение. Вследствие единственности решения задачи теплопроводности функции имеют вид

$$\varphi(s_0, t) = 2g(s_0, t), \quad \psi(s_0, t) = 0.$$

Таким образом

$$v_1^*(x, y, t) = 2 \int_0^t \int_{L_0} g(s, t) R^H(x, y, s, t-\tau) ds d\tau.$$

Итак первое приближение, а вместе с ним решение всей задачи может быть получено в замкнутом виде.

РЕЗЮМЕ

В статті сформульована та розв'язана друга крайова задача теплопровідності для напівплощини з математичним розрізом уздовж кривої Ляпунова. За допомогою метода послідовних наближень та метода теплових потенціалів задача зведена до розв'язку послідовності інтегральних рівнянь. Отримано деякий частковий розв'язок в замкнутому вигляді.

SUMMARY

The article deals with the formulation of the second boundary-value problem of heat conduction for semiplane with a mathematical section along Lyapunov curve. With the help of successive approximations method and the thermal potential the problem was reduced to the solution of a number of special integral equations. Some particular solutions are also given.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – М.: Наука, 1984. – 368 с.
2. Фильштинский Л. А., Ячменев В. А. Нестационарные напряжения в остывающем теле с трещинами. – ДАН УССР, 1982. – С. 47–50.
3. Кит Г. С., Побережный О. В. Нестационарные процессы в телах с дефектами типа трещины. – К: Наук. думка, 1992. – 214 с.

Надійшла до редакції 06.05.2002 р.

УДК 539.3

КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Н. М. Нескородев

Условием эффективного решения задач плоской теории упругости является предварительное построение функций, конформно отображающих внутренность или внешность единичного круга на заданную область. Рассмотрим отображение внешности единичного круга на область S , являющуюся внешностью области, ограниченной криволинейным контуром L . Функция, совершающая такое преобразование, ищется в виде ряда

$$z = x + iy = \alpha_{-1}\zeta + \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \zeta^{-n}, \quad \zeta = re^{i\theta}, \quad r \geq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (1)$$

Задача определения ряда (1) эквивалентна отысканию нормального параметрического представления контура L :

$$t = x_1 + iy_1 = \alpha_{-1}e^{i\theta} + \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-in\theta}, \quad (x_1, y_1) \in L. \quad (2)$$

Нормальное представление контура предполагает отсутствие положительных степеней функции $e^{i\theta}$ выше первой. В этом случае параметр θ является полярным углом плоскости $\zeta = re^{i\theta}$.

В монографии [1] изложены методы построения нормальных уравнений контуров, когда кривая L задана неявным уравнением или дана в параметрической форме. В предлагаемой работе для построения уравнения (2) аналитического задания контура L не требуется. Контур L , замкнутая выпуклая кусочно-гладкая кривая, задается чертежом, составленным из кусков кривых произвольной формы. При определении коэффициентов α_k представления (2) необходимо установить зависимость между заданными значениями переменных x_1, y_1 на контуре L и параметром θ . Для этого используется аппроксимация границы области L с помощью N криволинейных элементов. В качестве таких элементов используется семейство полуэллипсов. Часть L_r ($r = 1, N$) криволинейной границы L между точками t_r и t_{r+1} заменяется полуэллипсом с полуосью $a_r = |t_r - t_{r+1}|/2$, проходящим через эти точки. Центр эллипса располагается в точке $z_{r0} = (t_r + t_{r+1})/2$. Вторая полуось эллипса выражается через безразмерную величину β_r в долях полуоси a_r , т. е. $b_r = a_r \beta_r$. По заданной конфигурации L_r , изменяя β_r подбирается такое значение полуоси b_r , чтобы полуэллипс достаточно точно воспроизводил дугу L_r .

Уравнение эллиптической границы между точками t_r и t_{r+1} имеет вид [2]

$$t = z_{r0} + R_r \sigma + m_r / \sigma, \quad (3)$$

где

$$R_r = \frac{(t_r - t_{r+1})}{4}(1 + \beta_r), \quad m_r = \frac{(t_r - t_{r+1})}{4}(1 - \beta_r), \quad (4)$$

t - аффикс точки контура; $\sigma = e^{i\varphi}$ - аффикс точки на единичном круге.

Будем считать, что обход дуги L_r осуществляется в направлении от точки t_r к точке t_{r+1} . Тогда угол φ меняется от 0 до π и является полярным для точек лежащих на полуэллипсе от точки t_r до точки t_{r+1} . Это дает возможность установить приближенную зависимость между точками, лежащими на элементе L_r , и углом φ . Поскольку угол θ в (2) меняется от 0 до 2π , то для установления зависимости изменения этого угла на участках L_r используются длины l_r соответствующих дуг. При этом полагается, что каждой точке t_r граничного контура ставится в соответствие полярный угол по правилу

$$\theta_r = 2 \left(\phi l_r + \pi \sum_{m=1}^{r-1} l_m \right) / l, \quad l = \sum_{r=1}^N l_r, \quad 0 \leq \phi \leq \pi. \quad (5)$$

Это соотношение позволяет получить систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов α_k разложения (2). После решения этой системы становится известной отображающая функция (1), которая дает отображение внешности единичного круга не на заданную область S с границей L , а на область S' с границей L' , близкой к заданной. Конформность преобразования в угловых точках не нарушается, так как граница L' получается скругленными углами. Составлена программа, позволяющая строить отображающие функции для выпуклых контуров любой формы.

В табл. 1 приведены коэффициенты функций (2) для контуров, изображенных на рис. 1. При этом все контуры имели ширину $2a = r$ и высоту $2b = 1,25r$, где r – масштабная единица длины.

Отметим, что если контур L' в результате аффинного преобразования перешел в контур $\bar{L}$, то для $\bar{L}$ нужно строить новую отображающую функцию. Методика ее построения приведена ниже на примере, который возникает при рассмотрении задач для анизотропных сред.

Таблица 1

Коеф- фици- енты	a)	b)	c)	d)
α_{-1}	1.3021	1.2749	1.2598	1.1865
α_0	0.2450i	0.1999i	0.1763i	1.1127i
α_1	-0.1297	-0.1228	-0.1238	-0.1368
α_2	0	-0.0319i	-0.0582i	-0.1226i
α_3	-0.1768	-0.1447	-0.1221	-0.0766
α_4	0	0.0219i	0.0397i	0.0235i
α_5	0.0086	-0.0037	-0.0093	0
α_6	0	-0.0011i	0.0034i	0
α_7	0.0044	0.0012	-0.0087	0
α_8	0	-0.0034i	-0.0137i	0
α_9	0	0	0.0079	0
α_{10}	0	0	0.0014i	0

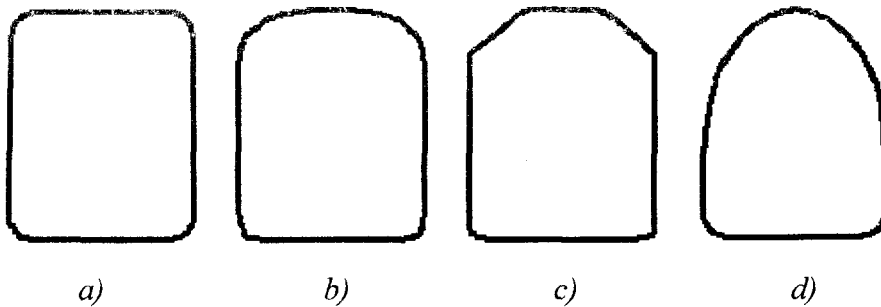


Рис. 1.

Решение задач о напряженном состоянии анизотропной пластины с отверстиями приводится к нахождению функций $\Phi_j(z_j)$ ($j = 1, 2$) из граничных условий на их контурах. Функции $\Phi_j(z_j)$ определены в областях S_j , которые получаются из области S аффинными преобразованиями [3]

$$x_j = x + \alpha_j y, \quad y_j = \beta_j y, \quad \mu_j = \alpha_j + i\beta_j. \quad (6)$$

Уравнения контуров L_j в областях S_j , соответствующие L в области S найдем из уравнения (2) и сопряженного ему

$$t_j = x_1 + \mu_j y_1 = m_{-1j} e^{i\theta} + m_{0j} + \sum_{n=1}^{\infty} m_{nj} e^{-in\theta} + \lambda \sum_{k=2}^{\infty} \beta_{kj} e^{ik\theta}, \quad (7)$$

Уравнение (7) для контуров, отличающихся от эллиптических, содержит величины $e^{i\theta}$ с положительными степенями k выше первой. Для построения отображающих функций в областях S_j необходимо

(7) привести к нормальной форме. Метод построения таких функций предложен в [4]. Это позволяет решать задачи плоской теории упругости анизотропного тела с криволинейными границами как для односвязных, так и для многосвязных областей [3]. Здесь предлагается алгоритм нахождения нормального представления контура, заданного в самом общем виде, с любой степенью точности. В уравнении (7) параметр λ выбран так, чтобы при $\lambda = 0$ величина t_j содержала нормальное представление кривой, близкой к L_j . При $\lambda = 1$ уравнение (7) дает заданную кривую. Необходимо перейти от угла θ к углу θ_j так, чтобы ряд (7) стал нормальным. Зависимость между θ и θ_j будем выбирать в форме

$$\theta = \theta_j + f_{1j}(\theta_j), \quad f_{1j} = \lambda \psi_{11j}(\theta_j) + \lambda^2 \psi_{12j}(\theta_j) + \lambda^3 \psi_{13j}(\theta_j) + \dots \quad (8)$$

Здесь ψ_{1nj} некоторые вещественные периодические функции.

Рассмотрим переменную $e^{in\theta}$ с учетом соотношений (8)

$$e^{in\theta} = e^{in(\theta_j + f_{1j})} = e^{in\theta_j} \left[1 + in f_{1j} + \frac{(in f_{1j})^2}{2!} + \frac{(in f_{1j})^3}{3!} + \dots \right]. \quad (9)$$

Величины f_{1j}^k , входящие в разложение (9), с учетом (8) представим в виде

$$f_{1j}^k = \sum_{p=1}^{\infty} \lambda^{k+p-1} \psi_{kpj}, \quad \psi_{kpj} = \sum_{m=1}^p \psi_{1mj} \psi_{k-1,p-m+1,j} \quad (k \geq 2). \quad (10)$$

Подставив разложение (9) с учетом (10) в уравнение (7) и собрав выражения при одинаковых степенях параметра λ , найдем

$$t_j = t_j^0 + \lambda t_j^1 + \lambda^2 t_j^2 + \lambda^3 t_j^3 + \dots \quad (11)$$

При $\lambda = 0$ уравнение (11) имеет нормальную форму

$$t_j^0 = m_{-1j} \sigma_j + m_{0j} + \sum_{n=1}^{\infty} m_{nj} \sigma_j^{-n}, \quad \sigma_j = e^{i\theta_j}. \quad (12)$$

Коэффициенты при степенях λ имеют вид

$$t_j^1 = w_{1j} i \psi_{11j} + v_{0j}, \quad t_j^n = \sum_{k=1}^n \frac{w_{kj} i^k}{k!} \psi_{k,n-k+1,j} + \sum_{p=1}^{n-1} \frac{v_{pj} i^p}{p!} \psi_{p,n-p,j} \quad (n \geq 2),$$

$$w_{kj} = m_{-1j} \sigma_j + (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} n^k m_{nj} \sigma_j^{-n} \quad (k \geq 1), \quad v_{pj} = \sum_{k=2}^{\infty} k^p \beta_{kj} \sigma_j^k, \quad (p \geq 0). \quad (13)$$

Вещественные функции ψ_{1nj} , входящие в разложение (8), выбираем в виде

$$\psi_{1nj} = \frac{1}{i} \sum_{p=1}^{\infty} \left(A_{npj} \sigma_j^p - \bar{A}_{npj} / \sigma_j^p \right). \quad (14)$$

Выбором постоянных A_{npj} нужно распорядиться так, чтобы при каждом значении параметра λ в выражениях (11) были равными нулю слагаемые с положительными степенями выше первой при переменной σ_j . После определения этих коэффициентов отображающие функции внешности единичного круга на внешности контуров L_j в областях S_j запишем в форме

$$z_j = \alpha_{-1j} \zeta_j + \alpha_{0j} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{nj} \zeta_j^{-n}, \quad (15)$$

Потенциалы С. Г. Лехницкого в областях S_j можно представить в виде разложений

$$\Phi_j(z_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{nj}}{\zeta_j^n}. \quad (16)$$

Коэффициенты a_{nj} находятся из граничных условий на контуре L .

Из приведенных выкладок видно, что точки контуров (кроме эллиптических) в областях S_j , находящиеся в аффинном соответствии, при конформном отображении соответствуют разным точкам на контуре единичного круга. В работах [3, 4] для преодоления этого несоответствия установлены зависимости между функциями σ_j и $\sigma = e^{i\theta}$ на контуре единичного круга, что привело к дополнительным громоздким выкладкам. Здесь такое соответствие устанавливается численно, путем вычисления функций ζ_j , соответствующих точке (x_1, y_1) контура L из соотношения (15).

Приведем функции, конформно отображающие внешность единичного круга на внешность отверстия близкого к квадрату со стороной, равной двум единицам, при минимальном числе слагаемых в разложении (1). В этом случае остается один управляющий параметр β_r , входящий в (4). Изменяя этот параметр, можно получить множество контуров с различными свойствами. Выбирая в качестве такого свойства максимальную приведенную кривизну K в угловых точках, получаем множество отображений, соответствующих этому свойству.

Приведем коэффициенты функции (1) для некоторых кривизн: $K = 4,5$: $\alpha_{-1} = 1,1250$, $\alpha_3 = -0,1250$; $K = 5,343$: $\alpha_{-1} = 1,1412$, $\alpha_3 = -0,1412$; $K = 6$: $\alpha_{-1} = 1,1521$, $\alpha_3 = -0,1521$; $K = 10$: $\alpha_{-1} = 1,2000$, $\alpha_3 = -0,2000$; $K = 15$: $\alpha_{-1} = 1,2367$, $\alpha_3 = -0,2367$. При $K \leq 4,5$ контур обладает таким свойством, как отсутствие отрицательной кривизны, а при $K = 5,343$ сторона квадрата имеет наименьшее отклонение от прямолинейной. Отображение при $K = 10$ является отрезком ряда, полученного применением интеграла Кристоффеля – Шварца [5]. Наличие функций, дающих различные варианты отображений, открывает возможности для проведения исследований напряженного состояния с целью поиска более оптимальных вариантов граничных контуров для заданных внешних усилий.

В качестве примера рассмотрим горный массив с горизонтальной горной выработкой в форме квадрата с закругленными углами под воздействием сил собственного веса. Массив в виде полупространства отнесем к декартовой системе координат $Oxyz$. Начало системы поместим на глубине H , ось Oy направим вертикально вверх, а плоскость Oxz совместим с горизонтальной плоскостью, параллельной плоскости, ограничивающей полупространство. Если выработка, пройденная в породном массиве, является протяженной в направлении оси Oz , то на некотором расстоянии от ее краев все поперечные сечения находятся в условиях плоской деформации.

Для численных исследований использовались упругие постоянные, полученные на образцах донбасского алевролита [6]: $E_1 / E = 1.074$; $E_2 / E = 0.523$; $G_2 / E = 0.120$; $\nu_1 = 0.413$; $\nu_2 = 0.198$;

$E = 9.81 \times 10^4$ МПа; $\rho = 2500$ кг/м³ – плотность породного массива. При этом считаем, что на большой глубине H в нетронутом массиве имеют место равенства [7]: $\sigma_y^0 = p = -9.81\rho H$, $\sigma_x^0 = \lambda p$, $\tau_{xy}^0 = 0$, $\lambda = 0.7$ – коэффициент бокового распора.

На рис.2 приведены три контура: пунктиром обозначена линия, соответствующая отображению, когда $K = 10$; линия с закругленными углами соответствует случаю, когда $K = 5,343$; сплошная линия – заданный квадрат со стороной равной двум единицам, – дан для сравнения. Здесь же изображены графики распределения напряжений σ_θ / p вблизи отверстия. Пунктирная линия соответствует отображению, когда $K = 10$, сплошная, – когда использовалось отображение при $K = 5,343$. Полученные напряжения являются сжимающими. Сравнение графиков показывает, что более равномерное распределение напряжений наблюдается, когда рассматривалась выработка, полученная отображением с $K = 5.343$. Наибольших значений по абсолютной величине напряжения σ_θ / p принимают в окрестности угловых точек (на рис.2 одна из таких точек обозначена бу-

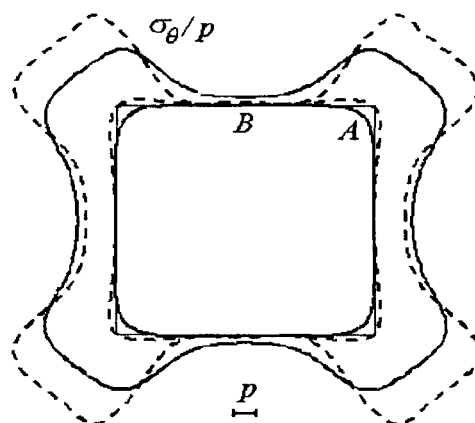


Рис. 2

квой A). Эти величины приведены в табл. 2 для контуров с различными значениями параметра K . Здесь же даны напряжения в точке B , являющейся серединой верхней стороны квадрата. Данные в точке B показывают, что рост отрицательной кривизны в середине стороны квадрата при больших значениях величины K может привести к образованию зоны растягивающих напряжений в кровле и почве выработки. В этой зоне возможно разрушение породы. В табл. 3 даны модули максимальных значений напряжений σ_r / p , и $\tau_{r\theta} / p$ на контуре отверстия, полученного отображением, когда $K = 10$, в зависимости от числа слагаемых в разложении (11). Приведенные данные иллюстрируют степень выполнения граничных условий при включении в разложение (11) слагаемых, содержащих соответствующие степени

Таблица 2

K	4,5	5,343	6	10	15
$(\sigma_\theta / p)_A$	-2,77	-2,98	-3,14	-3,98	-4,98
$(\sigma_\theta / p)_B$	-0,42	-0,32	-0,26	-0,05	+0,07

Таблица 3

	λ^3	λ^4	λ^5	λ^9	λ^{13}
$\max \sigma_r / p $	0.047	0.031	0.017	0.010	0.006
$\max \tau_{r\theta} / p $	0.120	0.088	0.054	0.015	0.009

параметра λ . Анализ результатов, приведенных в табл. 3, показывает, что удовлетворение граничным условиям улучшается медленно с ростом количества слагаемых в разложении (11). Для достижения высокой точности решения нужно использовать предложенный выше алгоритм. Он позволяет получить в разложении (11) любое количество слагаемых.

РЕЗЮМЕ

У статті описаний спосіб чисельної побудови функцій, що відображають зовнішність одиничного кола на зовнішність кусочно-гладкої кривої, заданої кресленням, складеним з частин кривих довільної форми. Дана також методика побудови функції, що відображає контур, який отриман із заданого в результаті афінного перетворення. Розглянуто приклади розв'язку задач теорії пружності анізотропного тіла.

SUMMARY

In a paper the mode of numerical construction of reflection functions of appearance of a unit disk on appearance of a piecewise smooth curve given by a delineation, composed from parts of the curve arbitrary shape is circumscribed. The technique of construction of reflection function for a head loop(circuit) is given also which is obtained from given as a result of an affinity. The examples of problem solving of the theory of elasticity of an anisotropic skew field are considered.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. – М.-Л., Физматгиз, 1962. – 708 с.
2. Нескородев Н. М. Метод граничных элементов в задачах о напряженном состоянии анизотропной пластинки с отверстиями // Теорет. и прикладная механика. – 1993. – Вып. 24. – С. 44-50.
3. Космодамианский А.С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. – К.-Донецк: Вища шк., 1976. – 200 с.
4. Космодамианский А. С. Новый приближенный метод определения напряжений в анизотропной пластике с криволинейным отверстием // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел. – 1965. – В.2. – С. 35-42.
5. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наук. думка, 1968. – 887 с.
6. Ержанов Ж.С., Айталиев Ш.М., Масанов Ж.К. Сейсмонапряженное состояние подземных сооружений в анизотропном слоистом массиве. – Алма-Ата: Наука, 1980. – 212 с.
7. Космодамианский А.С., Нескородев Н.М. Напряженное состояние анизотропного горного массива вблизи горизонтальных подземных выработок // Геотехническая механика. Днепропетровск. – 1998. – Вып.5. – С. 91-95.

Надійшла до редакції 20.02.2002 р.

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЦИЛИНДРА С ДВУМЯ ПРОДОЛЬНЫМИ ПОЛОСТЯМИ В ПОТОКЕ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ УЧЕТЕ ЦИРКУЛЯЦИИ

Е.Г.Литвак

В работах [1,2] решена задача об обтекании сплошного изотропного цилиндра произвольного поперечного сечения идеальной жидкостью. В данной статье изучается напряженное состояние такого же цилиндра при наличии двух продольных полостей.

Рассмотрим цилиндр бесконечной длины, поперечное сечение которого ограничено эллиптическими контурами L_i с полуосями

a_i и b_i ($i = 0, 1, \dots$) (рис.1). Цилиндр помещен в поток идеальной жидкости, движущейся со скоростью V_0 и имеющий величину циркуляции Γ .

Определение скоростей жидкости вокруг цилиндра и создаваемого при этом давления на его стенки сводится к интегрированию уравнения [2]

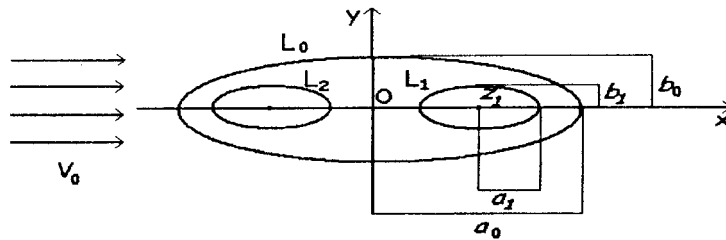


Рис. 1

$$\nabla^2 W = 0, \quad (1)$$

где $W(z)$ - комплексный потенциал для движущейся жидкости, который можно представить в виде

$$W(z) = W_0(z) + W_1(z);$$

$W_0(z) = V_0 z$ - потенциал поля скоростей плоскопараллельного потока без препятствий; $W_1(z)$ - потенциал поля скоростей, возникающего за счет внесения в поток цилиндра. Последний будем искать в виде

$$W_1(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \zeta + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \zeta^{-k}. \quad (2)$$

При этом ζ - переменная, определяемая из зависимости

$$z = R_0 \left(\zeta + m_0 \zeta^{-1} \right), \quad (3)$$

где

$$R_0 = (a_0 + b_0)/2, \quad m_0 = (a_0 + b_0)/(a_0 - b_0). \quad (4)$$

Неизвестные константы α_k в выражении (2) будем определять из условия равенства нулю на контуре L_0 нормальной составляющей скорости V_r , т.е. из равенства [2]

$$\overline{W(t)} - W(t) = \text{const}. \quad (5)$$

Из последнего условия методом рядов находим

$$\alpha_1 = V_0 R_0 (1 - m_0), \quad \alpha_k = 0 \text{ при } k \neq 1.$$

Учитывая, что $V_x = \text{Re}(W'_z)$, $V_y = \text{Im}(W'_z)$, при помощи интеграла Бернулли [1] можно вычислить давление жидкости в любой точке поверхности цилиндра

$$p(z) = p_0 + \frac{\rho}{2} [V_0^2 - V_x^2 - V_y^2]. \quad (6)$$

При этом p_0 - постоянная, одинаковая в любой точке жидкости; ρ - плотность жидкости.

Для случая эллиптического контура L_0 , когда $b_0/a_0 = 0,5$, на рис.2 приведены графики распределения давления жидкости на внешнюю поверхность цилиндра. Кривые 1-3 относятся к вихревому движению жидкости, когда Γ/V_0 равно соответственно 20; 10; 5; кривая 4 - к безвихревому ($\Gamma = 0$).

Зная давление жидкости на внешнюю поверхность цилиндра, можно определить его напряженное состояние под действием этого давления путем интегрирования основной системы уравнений плоской теории упругости [3]

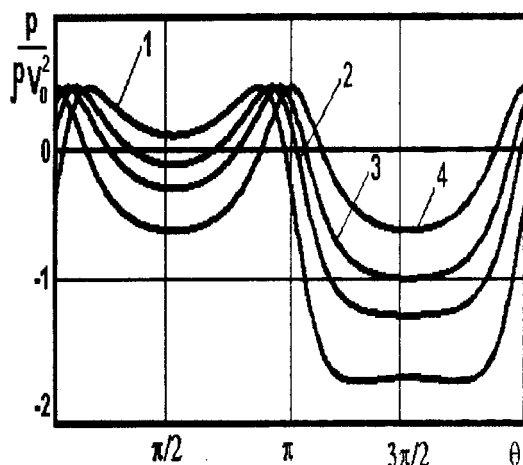


Рис. 2

$$\frac{\partial \Theta}{\partial z} = \frac{\partial \Omega}{\partial z}; \quad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z \partial z} = 0 \quad (7)$$

при заданных граничных условиях

$$\sigma_r|_{L_0} = p(t); \quad \tau_{r\theta}|_{L_0} = 0; \quad \sigma_r|_{L_l} = 0; \quad \tau_{r\theta}|_{L_l} = 0, \quad (l = 1, 2), \quad (8)$$

где

$$\Omega = e^{-2i\theta} (\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta}) = 2[z\varphi''(z) + \psi'(z)],$$

$$\Theta = \sigma_\theta + \sigma_r = 4 \operatorname{Re} \varphi'(z) \quad (9)$$

$\varphi(z)$ и $\psi(z)$ - функции, голоморфные внутри области, ограниченной контурами L_0 , L_1 и L_2 ; θ - угол между нормалью к контуру и осью Ox . С учетом формул (9)

$$\sigma_\theta = \operatorname{Re} \left\{ 2\varphi(z) - e^{2i\theta} [z\varphi''(z) + \psi'(z)] \right\}; \quad \tau_{r\theta} = \operatorname{Im} \left\{ e^{2i\theta} [z\varphi''(z) + \psi'(z)] \right\}; \quad (10)$$

Функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ будем искать в виде сумм трех функций, первые из которых голоморфны внутри L_0 , вторые - вне L_1 , третьи - вне L_2 . Функции, голоморфные внутри контура L_0 , представим рядами по полиномам Фабера [4], а функции, голоморфные вне L_1 и L_2 - в форме рядов Лорана по отрицательным степеням ζ_l , ($l = 1, 2$), т.е.

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{10k} P_k(z) + \sum_{l=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_{1lk} \zeta_l^{-k}, \quad \psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{20k} P_k(z) + \sum_{l=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_{2lk} \zeta_l^{-k}, \quad (11)$$

где ζ_l определяется из зависимости вида (3).

Исходя из (8), (10), (11) составим функционал

$$I = \sum_{m=1}^M \left\{ [F_1(t_m) - f(t_m)]^2 + [F_2(t_m)]^2 \right\}. \quad (12)$$

Здесь

$$F_1(t) = \operatorname{Re} \left[2\varphi'(t) - e^{2i\theta} (t\varphi''(t) + \psi') \right], \quad F_2(t) = \operatorname{Im} \left[e^{2i\theta} (t\varphi''(t) + \psi') \right];$$

$$f(t) = p(t) \text{ на } L_0, \quad f(t) = 0 \text{ на } L_1 \text{ и } L_2.$$

Удовлетворяя условиям минимума $\partial I / \partial a_{plk} = 0$ функционала (12), получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных постоянных:

$$\sum_{p_j=1}^2 \sum_{l_j=0}^2 \sum_{k_j=1}^{\infty} \left[\sum_{m=1}^M A_{p_i l_i k_i}(t_{l_i m}) A_{l_j p_j k_j}(t_{l_j m}) \right] a_{p_j l_j k_j} = \sum_{m=1}^M A_{p_i l_i k_i}(t_{l_i m}) f(t_{l_i m}), \quad (p_i = 1, 2; l_i = 0, 1, 2; k_i = 1, 2, \dots). \quad (13)$$

После решения системы (13) функции $\Theta(z)$ и $\Omega(z)$ будут известны. Это позволит вычислять напряжения (9), а также упругий потенциал

$$\bar{U} = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}).$$

При этом

$$\varepsilon_x = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y]; \quad \varepsilon_y = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x]; \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy};$$

ν - коэффициент Пуассона; E - модуль Юнга.

Для случая, когда $E = 1,225 \cdot 10^4$ Мпа; $\nu = 0,19$; $\rho = 10^3$ кг/м³; $V_0 = 100$ м/с. были проведены численные исследования. На рис.3 и 4 приведены графики распределения упругого потенциала вблизи одного из отверстий для случаев $\Gamma = 0$ (рис. 3), $\Gamma/V_0 = 5,0$ (рис. 4). Считалось, что; $a_l/a_0 = 0,25$;

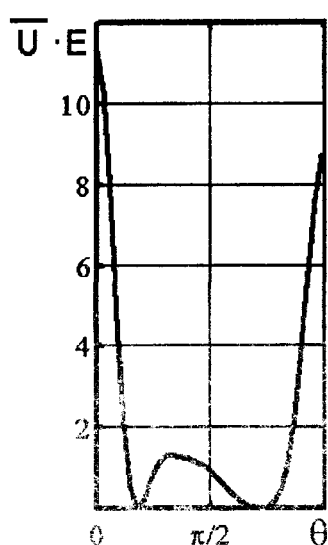


Рис. 3

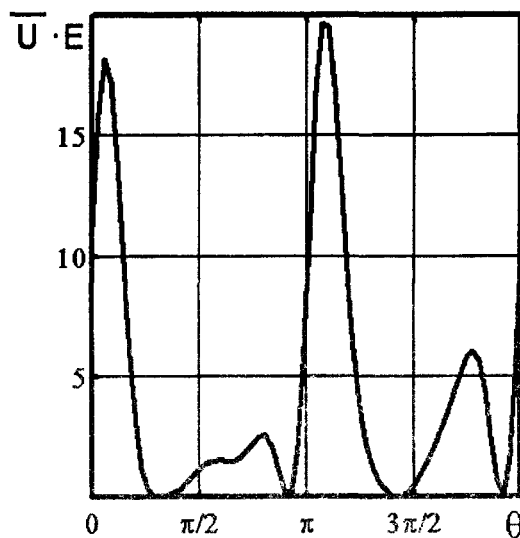


Рис. 4

$b_0/a_0 = 0,5$; $b_l/a_l = 0,5$, ($l = 1, 2$). В табл.1 с точностью до множителя E приведены значения упругого потенциала по оси Ox на различных расстояниях s от начала координат. Из данных табл.1 и рис.3 и 4 видно, что наличие циркуляции существенно увеличивает значения и меняет картину распределения упругого потенциала. При безвихревом обтекании упругий потенциал достигает своего максимума вблизи

Таблица 1

Γ/V_0	s/a_0					
	0,25	0,2	0,15	0,1	0,05	0
0	11,38	9,34	6,50	4,74	4,66	5,43
5	19,63	15,30	12,11	11,56	17,49	165,16
10	47,63	36,88	29,85	31,15	50,81	599,54
20	150,83	116,06	96,45	98,18	176,93	$2,3 \cdot 10^3$

зи отверстия в точке, для которой угол $\theta = \pi$. При наличии циркуляции максимум упругого потенциала достигается в точке начала координат. В этом случае значение максимума упругого потенциала прямо пропорционально величине циркуляции.

На рис.5 и 6 приведены графики изменения упругого потенциала в точках оси Ox при изменении расстояний между центрами отверстий d для случая безвихревого обтекания (рис. 5) и циркуляционного обтекания $\Gamma/V_0 = 5$. (рис. 6). В табл. 2 приведены значения максимума упругого потенциала при сближении отверстий для различных величин циркуляции. Из данных табл. 2 и рисунков видно, что в

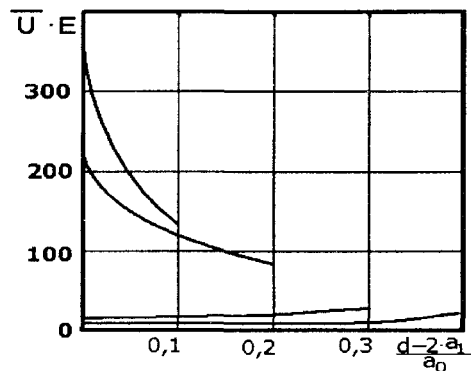


Рис. 5

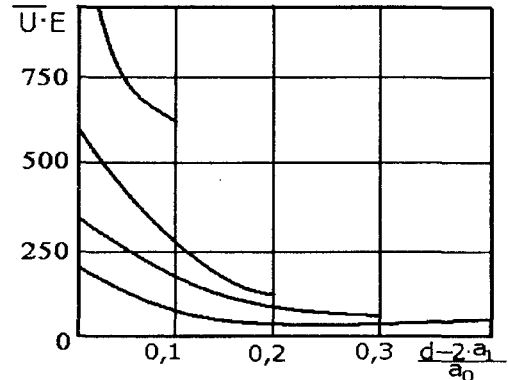


Рис. 6

Таблица 2

Γ/V_0	d/a_0					
	0,01	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
5	$1,2 \cdot 10^4$	$2,5 \cdot 10^3$	571,35	331,323	224,12	165,37
10	$4,2 \cdot 10^4$	$6,7 \cdot 10^3$	$1,9 \cdot 10^3$	$1,2 \cdot 10^3$	812,20	599,67
20	$1,5 \cdot 10^5$	$2,3 \cdot 10^4$	$7,4 \cdot 10^3$	$4,2 \cdot 10^3$	$2,8 \cdot 10^3$	$1,9 \cdot 10^3$

случае безвихревого обтекания при соотношении $d/a_0 = 1$ максимум упругого потенциала достигается вблизи отверстия, но при сближении отверстий он переходит в начало координат. При наличии циркуляции влияние отверстий сохраняется дольше с увеличением расстояния между ними, а упругий потенциал существенно возрастает.

РЕЗЮМЕ

При застосуванні теорії комплексних потенціалів і метода найменших квадратів розв'язано задачу про напружений стан циліндра з двома продольними порожнинами, поміщеного у потік ідеальної рідини, при виникненні циркуляції. Задача зведена до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих констант, які входять до іскомих функцій. Розглянут вплив циркуляції на розподіл пружного потенціалу.

SUMMARY

The problem of a stressed state of a cylinder with two lengthwise holes placed in a flow of ideal liquid in the presence of circulation is solved with use of the theory of complex potentials and the least-squares method/ The problem is reduced to a system of linear algebraic equation for unknown constants which are included in the required functions/ The influence of circulation on elastic potential distribution is considered.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа.— М.: Наука, 1970.— 904с.
2. Космодамианский А.С. Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами, выступами.— К.: Вища шк., 1975.— 275с.
3. Космодамианский А.С. Новый подход к решению плоской задачи для многосвязной ортотропной пластинки // Теорет. и прикладная механика.— 2000.— Вып. 30.— С. 27.
4. Космодамианский А.С., Калоеров С.А. Температурные напряжения в многосвязных пластинах.— К.: Вища шк., 1983.— 159 с.

Надійшла до редакції 11.01.2002 р.

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ИЗГИБА АНИЗОТРОПНЫХ СТЕРЖНЕЙ С ПОЛОСТЯМИ ПРИ ПОМОЩИ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Р.Н. Нескородев

1. Постановка задачи и построение решения. Пусть имеется цилиндрический или призматический стержень, однородный и прямолинейно-анизотропный, у которого плоскость упругой симметрии в каждой точке совпадает с плоскостью поперечного сечения. Один его торец закреплен неподвижно, на другом действуют усилия, приводящиеся к силе P , направленной вдоль главной оси инерции стержня. Боковая поверхность не нагружена и не закреплена; объемные силы отсутствуют.

Примем центр тяжести незакрепленного торца за начало координат и направим ось z параллельно образующей цилиндра, оси x и y по плоскости поперечного сечения вдоль его главных осей инерции. Будем считать, что поперечное сечение стержня является многосвязной областью S . Контур L , ограничивающий поперечное сечение стержня, состоит из нескольких замкнутых контуров $L_1, L_2, \dots, L_N$, охваченных внешним контуром L_0 .

Напряженное состояние рассматриваемого стержня характеризуется тем, что в поперечных сечениях $z = z_0$ ($0 < z_0 \leq d$, где d - длина стержня) будут действовать касательные напряжения τ_{xz} , τ_{yz} и нормальное напряжение σ_z , а остальные напряжения равны нулю. При этом [1]

$$\sigma_z = -\frac{P}{I}zy,$$

где $I = I_x$ - момент инерции поперечного сечения стержня.

Определение напряженного состояния рассматриваемого стержня сводится к интегрированию дифференциального уравнения [1, 2]

$$\begin{aligned} a_{44} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - 2a_{45} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + a_{55} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\frac{P}{I}(2a_{13}x + a_{36}y) - 2\vartheta + \\ + \frac{\partial}{\partial x}(a_{44}\tau_2 + a_{45}\tau_1) - \frac{\partial}{\partial y}(a_{45}\tau_2 + a_{55}\tau_1) \end{aligned} \quad (1.1)$$

при заданных граничных условиях

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \cos(n, y) - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cos(n, x) = \tau_1 \cos(n, x) + \tau_2 \cos(n, y). \quad (1.2)$$

Здесь a_{ij} - коэффициенты деформации материала стержня; ϑ - крутка; τ_1 , τ_2 - частные решения уравнения

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_2}{\partial y} = \frac{P}{I}y. \quad (1.3)$$

Напряжения в стержне выражаются через функцию $\Psi(x, y)$ по формулам

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \tau_1, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \tau_2. \quad (1.4)$$

Выражая общее решение однородного уравнения (1.1) через произвольную аналитическую функцию $\Phi_3(z_3)$ обобщенной комплексной переменной $z_3 = x + \mu_3 y$, для общего решения неоднородного уравнения (1.1) получаем

$$\Psi(x, y) = 2 \operatorname{Re}[\Phi_3(z_3)] + \Psi_0(x, y),$$

где $\Psi_0(x, y)$ - частное решение уравнения (1.1); $\mu_3 = \alpha_3 + i\beta_3$ - комплексный параметр, удовлетворяющий характеристическому уравнению

$$a_{55}\mu^2 - 2a_{45}\mu + a_{44} = 0.$$

Функция $\Phi_3(z_3)$ определена в области S_3 , получаемой из заданной области S при помощи аффинных преобразований $x_3 = x + \alpha_3 y$, $y_3 = \beta_3 y$.

Для изгиба стержня без закручивания $\vartheta = 0$. Частные решения уравнений (1.1) и (1.3) можно взять в виде

$$\tau_1 = 0, \quad \tau_2 = Py^2/(2I), \quad \Psi_0(x, y) = -\frac{P}{I} \left[\frac{a_{13}}{a_{55}} xy^2 + \left(\frac{a_{36} + a_{45}}{a_{55}} + \frac{4a_{45}a_{13}}{a_{55}^2} \right) \frac{y^3}{6} \right].$$

Формулы (1.4) для напряжений примут вид

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= 2 \operatorname{Re}[\mu_3 \Phi'_3(z_3)] - \frac{P}{I} \left[\frac{2a_{13}}{a_{55}} xy + \left(\frac{a_{36} + a_{45}}{a_{55}} + \frac{4a_{45}a_{13}}{a_{55}^2} \right) \frac{y^2}{2} \right], \\ \tau_{yz} &= -2 \operatorname{Re}[\Phi'_3(z_3)] + \frac{P}{I} \left(\frac{a_{13}}{a_{55}} + \frac{1}{2} \right) y^2, \end{aligned} \quad (1.5)$$

а граничное условие (1.2) будет таким:

$$2 \operatorname{Re}[(\mu_3 \cos(n, x) - \cos(n, y)) \Phi'_3(t_3)] = T, \quad (1.6)$$

где

$$T = \frac{P}{I} \left[\left(\frac{2a_{13}}{a_{55}} xy + \left(\frac{a_{36} + a_{45}}{a_{55}} + \frac{4a_{45}a_{13}}{a_{55}^2} \right) \frac{y^2}{2} \right) \cos(n, x) - \left(\frac{a_{13}}{a_{55}} y^2 + \frac{1}{2} y^2 \right) \cos(n, y) \right].$$

t_3 - аффикс точки контура в области S_3 .

При построения численного решения воспользуемся методикой, изложенной в работах [3, 4]. Для этого рассмотрим в области $R^2 \setminus S$ замкнутую линию L^1 , целиком охватывающую L и не имеющую с ней общих точек. Если граница L исходной области состоит из отдельных замкнутых линий, то и L^1 состоит из такого же числа замкнутых линий. Пусть $\{z_k = x_k + iy_k\}_{k=1}^\infty$ - всюду плотное множество точек, лежащих на L^1 . В области S_3 этим точкам соответствуют точки $z_{3k} = x_k + \mu_3 y_k$.

Функцию $\Phi_3(z_3)$ выберем в виде ряда [3]

$$\Phi_3(z_3) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \ln(z_3 - z_{3k}), \quad (1.7)$$

где α_k - неизвестные постоянные. Для обеспечения однозначности перемещений коэффициенты α_k будем считать чисто мнимыми, т.е. $\alpha_k = ia_k$. Для определения a_k составим функционал

$$J = \sum_m \left| b_m \Phi'_3(t_{3m}) + \overline{b_m \Phi'_3(t_{3m})} - T_m \right|^2, \quad (1.8)$$

где $b_m = \mu_3 \cos(n, x_m) - \cos(n, y_m)$.

Удовлетворяя условиям $\partial J / \partial a_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots$) минимума функционала (1.8), получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения a_k

$$\sum_m \sum_{p=1}^{\infty} A_{mp} A_{mk} a_p = \sum_m A_{mk} T_m, \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (1.9)$$

Здесь $A_{mn} = 2 \operatorname{Re}[ib_m / (t_{3m} - z_{3n})]$.

После нахождения коэффициентов a_k из системы (1.9) функция $\Phi_3(z_3)$ становится известной. Это позволяет по формулам (1.5) находить напряжения, возникающие в стержне.

2. Результаты численных исследований. Приведем результаты исследований для некоторых ортотропных стержней с сечениями в форме тавра и эллипса с двумя круговыми полостями.

Для всех исследуемых профилей поперечного сечения стержня проведены вычисления касательных напряжений при следующих значениях параметров $g = a_{44} / a_{55}$ и $e = -a_{13} / a_{55}$:

- a) $g = 0,2$, $e = 0,01$ – модельный материал;
- b) $g = 0,853$, $e = 0,0502$ – ортотропный материал С-1-59;
- c) $g = 1$, $e = 0,1154$ – изотропный материал ($\nu = 0,3$);
- d) $g = 1,149$, $e = 0,09$ – ортотропный материал СТЭТ;
- e) $g = 5$, $e = 0,1$ – модельный материал.

Рассмотрим изгиб стержня с сечением в виде тавра с одинаковой толщиной стенок, равной h (рис. 1). Будем считать, что отношение $l/h = 2$, где l – половина большей стороны тавра. Начало координат плоскости Oxy поместим в центр инерции сечения. Вершины будут иметь координаты $A(2h, -0.7h)$, $B(2h, 0.3h)$, $C(0.5h, 0.3h)$ и $D(0.5h, 1.3h)$. Изгибающая нагрузка направлена по оси симметрии таврового сечения.

Как показывают исследования в окрестности вершины C наблюдается значительная концентрация напряжений. Поэтому в этой вершине делалось закругление с кривизной $K = 10/h$. В табл. 1 даны значения напряжений $\tau_{xz}F/P$ и $\tau_{yz}F/P$ (F – площадь поперечного сечения) в точках оси Ox .

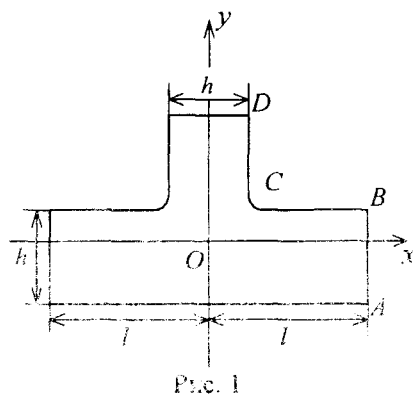


Рис. 1

Таблица 1

x/l	a		b		c		d		e	
	τ_{xz}	τ_{yz}	τ_{xz}	τ_{yz}	τ_{xz}	τ_{yz}	τ_{xz}	τ_{yz}	τ_{xz}	τ_{yz}
0.0	10^{-6}	-2.12	10^{-7}	-2.10	10^{-7}	-2.00	10^{-7}	-1.99	10^{-6}	-1.41
0.2	0.75	-2.15	0.97	-1.85	1.00	-1.75	1.00	-1.74	0.78	-1.28
0.4	0.92	-0.59	1.21	-0.83	1.30	-0.81	1.28	-0.86	1.08	-0.98
0.6	0.59	-0.45	0.79	-0.50	0.91	-0.50	0.88	-0.53	0.84	-0.76
0.8	0.29	-0.44	0.42	-0.49	0.52	-0.54	0.48	-0.54	0.42	-0.70
1.0	-10^{-2}	-0.53	10^{-3}	-0.69	10^{-3}	-0.97	10^{-3}	-0.83	10^{-2}	-0.79

Наибольшее напряжение на контуре τ_{sz} (за исключением C) возникает на серединах сторон тавра, параллельных оси y и пересекающих ось x . Напряжения в этих точках и в точке C приведены в табл. 2.

Рассмотрим теперь ортотропную эллиптическую балку с двумя круговыми полостями, расстояние между центрами которых равно $2l$ (рис. 2). Считаем, что отверстия расположены симметрично относительно центра эллипса и их радиусы равны r . Полуоси эллипса примем равными $a_1 = 3.5r$ и $b_1 = 2r$. Оси x и y направим по главным осям эллипса. Изгибающая нагрузка действует вдоль оси Oy . Для изотропного стержня в работе [5] эта задача решена методом рядов.

Таблиця 2

Точки	$ \tau_{yz} F/P$				
	a	b	c	d	e
середина AB	0.622	0.808	1.120	0.961	0.886
C	4.307	5.600	5.000	5.078	6.417

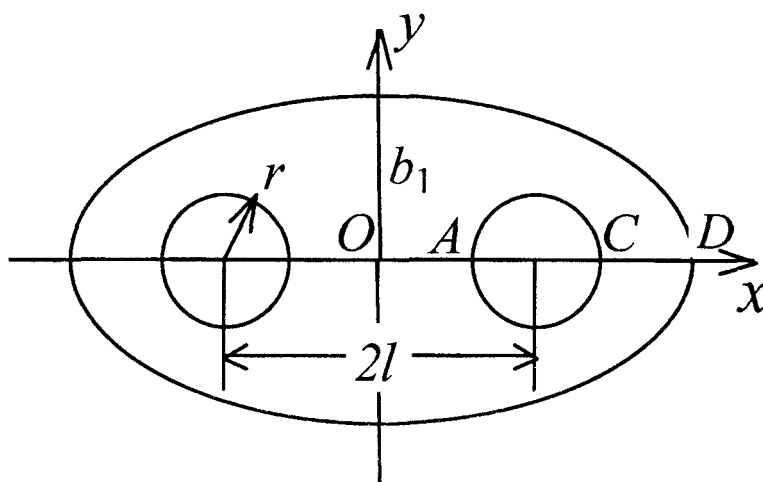


Рис. 2

В табл. 3 даны значения напряжений $\tau_{yz}F/P$, вычисленные в некоторых точках, лежащих на оси Ox , в зависимости от расстояния между центрами круговых отверстий. Для изотропного стержня при $l=1.5r$ в работе [5] были получены следующие значения напряжений $\tau_{yz}(O)=2.63P/F$, $\tau_{yz}(A)=3.28P/F$, $\tau_{yz}(C)=2.22P/F$, $\tau_{yz}(D)=1.25P/F$.

Таблиця 3

l/r	Точки	τ_{yz}				
		a	b	c	d	e
1.1	O	-9.701	-6.809	-6.094	-6.077	-4.634
	A	-11.85	-7.208	-6.399	-6.342	-4.678
	C	-4.779	-2.826	-2.587	-2.556	-2.075
	D	-0.278	-1.021	-1.267	-1.255	-1.705
1.5	O	-2.958	-2.804	-2.623	-2.675	-2.517
	A	-5.669	-3.597	-3.280	-3.259	-2.647
	C	-3.632	-2.303	-2.217	-2.178	-1.937
	D	-0.325	-1.067	-1.314	-1.293	-1.692
2.4	O	-1.639	-1.749	-1.706	-1.749	-1.914
	A	-4.324	-2.868	-2.813	-2.716	-2.217
	C	-2.801	-2.856	-3.235	-3.030	-2.720
	D	-1.812	-2.590	-3.005	-2.834	-2.681

Анализ данных показывает, что анизотропия материала и взаимное расположение круговых отверстий значительно влияют на распределение напряжений в поперечном сечении. Так, например, для исследованных материалов при близком расположении круговых отверстий друг к другу ($l = 1.1r$) максимальное напряжение возникает в точке A . Для изотропного материала это напряжение примерно в четыре с половиной раза больше максимального напряжения τ_{yz}^* для аналогичной сплошной балки ($\max \tau_{yz}^* = 1.44P/F$). При удалении круговых контуров друг от друга происходит перераспределение напряжений и уже при $l = 2.4r$ максимальное напряжение для приведенных материалов возникает в точке C .

Для более наглядного представления о концентрации напряжений на рис. 3 и 4 приведены графики

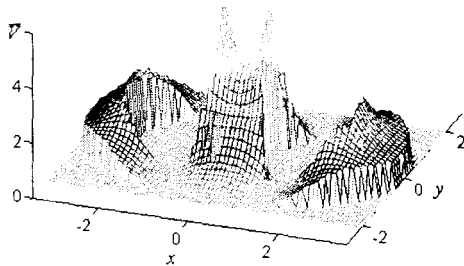


Рис. 3

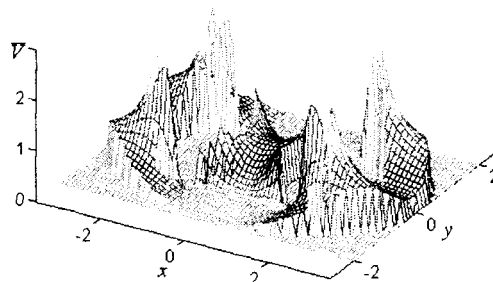


Рис. 4

изменений упругого потенциала в поперечном сечении для различных материалов (рис. 3 – изотропный материал e ; рис. 4 – материал e).

РЕЗЮМЕ

Досліджується напружений стан порожніх анізотропних стержнів при згинанні їх поперечною силою на кінці. Комплексний потенціал представляється рядом по спеціальним чином побудованій системі фундаментальних рішень відповідного диференціального рівняння. Як приклад розглянуто згин стержнів таврового перерізу та еліптичного з двома круговими порожнинами.

SUMMARY

The tension of holes anisotropic rods is investigated at curving by their transversal force on the extremity. The complex potential is represented by a series on special by an image to the constructed system of fundamental solutions of the appropriate differential equation. As an example curving a rod tavr of cut and elliptic with two circular holes is considered.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Лехницький С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
2. Космодамианский А.С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями и полостями. – К.-Донецк: Вища шк., 1976. – 200 с.
3. Космодамианский А.С., Нескороев Р.Н. Изгиб анизотропного стержня с продольными полостями // Теорет. и прикладная механика. – 1996. – Вып. 26. – С. 44–48.
4. Нескороев Р.Н. Кручение полых анизотропных стержней произвольного поперечного сечения // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А: Природничі науки. – 1998. – № 1. – С. 67–74.
5. Космодамианский А.С. Изгиб эллиптической балки с двумя круговыми полостями // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1960. – № 3. – С. 184 – 185.

Надійшла до редакції 20.04.2002 р.

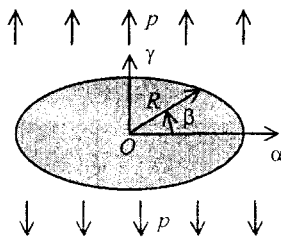
УДК 539.3

НЕКЛАСИЧНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДЕФОРМУВАННЯ ПРУЖНОГО ПРОСТОРУ З ТОНКИМ ДИСКОВИМ АБСОЛЮТНО ЖОРСТКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

В. А. Галазюк, Г. Т. Сулим

Львівський національний університет

Відома [1, 2] класична модель деформування тіл з тонкими жорсткими включеннями обумовлює на краю включення локальний розрив пружних кутів повороту, що порушує базову гіпотезу моделі твердого деформівного тіла – гіпотезу суцільності [3]. Нижче на прикладі контактної взаємодії абсолютно жорсткого тонкого дискового включення з необмеженим пружним тілом запропонована нова (див. теж [4]) математична модель симетричного деформування локально структурно-неоднорідних тіл, в рамках якої класичні крайові умови доповнені додатковими умовами на краю, котрі відображають фізичну вимогу неперервності пружних кутів повороту. Виконання цих умов забезпечує існування вектора пружного переміщення $\mathbf{u}$ в класі функцій $C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$, де $G \in R^3$ – область, зайнята тілом, з межею $\overline{G}$.



1. Однорідний ізотропний пружний простір (рисунок) віднесемо до циліндричної системи координат $(R\alpha, \beta, R\gamma)$, де R – радіус дискового включення, і вважатимемо, що під дією зосереджених у площині $\gamma = 0$ об'ємних диполів і сил зі складовими $X_\alpha(\alpha)$, $X_\gamma(\alpha)$ у просторі реалізується осесиметричний напружено-деформований стан. Тоді для ненульових компонент вектора пружного переміщення $Ru_\alpha(\alpha, \gamma)$, $Ru_\gamma(\alpha, \gamma)$, які задовольняють умовам симетрії і антисиметрії

$$u_\alpha(\alpha, +\gamma) = u_\alpha(\alpha, -\gamma), \quad u_\gamma(\alpha, +\gamma) = -u_\gamma(\alpha, -\gamma) \quad (1.1)$$

можна записати систему диференціальних рівнянь рівноваги стосовно функцій $\theta = \operatorname{div} \mathbf{u}$ і $\omega_\beta(\alpha, \gamma)$

$$k^2 \partial_\alpha \theta + 2 \partial_\gamma \omega_\beta = X_\alpha(\alpha) \delta(\gamma); \quad k^2 \partial_\gamma \theta - 2 \alpha^{-1} \partial_\alpha (\alpha \omega_\beta) = X_\gamma(\alpha) \delta'(\gamma), \quad (1.2)$$

де

$$\theta(\alpha, \gamma) = \frac{1}{\alpha} \partial_\alpha (\alpha u_\alpha) + \partial_\gamma u_\gamma, \quad 2\omega_\beta = \partial_\gamma u_\alpha - \partial_\alpha u_\gamma = (\operatorname{rot} \mathbf{u})_\beta; \quad (1.3)$$

$$X_\alpha(\alpha) = 2k^2 \int_0^\infty \xi [2A(\xi) - \xi B(\xi)] J_1(\xi \alpha) d\xi; \quad (1.4)$$

$$X_\gamma(\alpha) = 2k^2 \int_0^\infty \xi B(\xi) J_0(\xi \alpha) d\xi; \quad (1.5)$$

$k^2 = (\lambda + 2\mu)/\mu$; λ, μ – сталі Ламе; $\partial_\alpha, \partial_\gamma$ – оператори диференціювання за α і γ відповідно; $\delta(\gamma)$, $\delta'(\gamma)$ – дельта-функція Дірака і її похідна; функції $A(\xi)$ і $B(\xi)$ визначають густини розподілу об'ємних чинників у площині $\gamma = 0$ пружного простору; $J_\nu(\cdot)$ – функція Бесселя першого роду порядку ν .

Використовуючи правила диференціювання розривних функцій [5], безпосередньою підстановкою можна переконатися у тому, що функції

$$u_\alpha(\alpha, \gamma) = - \int_0^\infty [(k^2 + 1)A(\xi) - \xi B(\xi)] e^{-\xi|\gamma|} J_1(\xi \alpha) d\xi + (k^2 - 1) \gamma \int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_1(\xi \alpha) d\xi; \quad (1.6)$$

$$u_\gamma(\alpha, \gamma) = \operatorname{sign}(\gamma) \int_0^\infty [\xi B(\xi)] e^{-\xi|\gamma|} J_0(\xi \alpha) d\xi + (k^2 - 1) \gamma \int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_0(\xi \alpha) d\xi; \quad (1.7)$$

$$\omega_B(\alpha, \gamma) = k^2 \operatorname{sign}(\gamma) \int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_1(\xi\alpha) d\xi \quad (1.8)$$

$$\theta(\alpha, \gamma) = 2\delta(\gamma) \int_0^\infty \xi B(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_0(\xi\alpha) d\xi - 2 \int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_0(\xi\alpha) d\xi \quad (1.9)$$

є розв'язками рівнянь (1.2)–(1.3) з правою частиною (1.4)–(1.5), задовольняють умовам (1.1) і при відповідних обмеженнях на функції $A(\xi)$ і $B(\xi)$ зникають при $\alpha \rightarrow \infty$, $|\gamma| \rightarrow \infty$.

За законом Гука та поданнями (1.6) і (1.7) можна обчислити компоненти тензора напружень

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \gamma) = & 2\mu \int_0^\infty \xi [A(\xi) - \xi B(\xi)] e^{-\xi|\gamma|} J_0(\xi\alpha) d\xi + \\ & + 2(\lambda + 2\mu)\delta(\gamma) \int_0^\infty \xi B(\xi) J_0(\xi\alpha) d\xi - 2(\lambda + \mu)|\gamma| \int_0^\infty \xi^2 A(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_0(\xi\alpha) d\xi; \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, \gamma) = & 2\mu \operatorname{sign}(\gamma) \int_0^\infty \xi [k^2 A(\xi) - \xi B(\xi)] e^{-\xi|\gamma|} J_1(\xi\alpha) d\xi - \\ & - 2(\lambda + \mu)\gamma \int_0^\infty \xi^2 A(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_1(\xi\alpha) d\xi. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Розв'язки (1.6)–(1.9) рівнянь (1.2) з правими частинами (1.4)–(1.5) є фундаментальною системою розв'язків при умовах (1.1), одержаних з використанням виразів [5] $\operatorname{sign}(\gamma)' = 2\delta(\gamma)$, $f(\gamma)\delta(\gamma) = f(0)\delta(\gamma)$, $f(\gamma)\delta'(\gamma) = f(0)\delta'(\gamma) - f'(0)\delta(\gamma)$, де $\operatorname{sign}(\gamma) = 1$ при $\gamma > 0$, $\operatorname{sign}(0) = 0$ і $\operatorname{sign}(\gamma) = -1$ при $\gamma < 0$.

Фундаментальна система розв'язків (1.6) – (1.7) осесиметричної статичної теорії пружності дає можливість побудувати нову математичну модель напружено-деформованого стану в пружному просторі з абсолютно жорстким дисковим включенням під дією нормальних напружень $\sigma_{\gamma\gamma}^\infty = p$ на безмежності.

2. Внаслідок принципу суперпозиції напружено-деформований стан в просторі подамо у вигляді сум

$$u_\alpha(\alpha, \gamma) = u_\alpha^0(\alpha) + u_\alpha^1(\alpha, \gamma), \quad u_\gamma(\alpha, \gamma) = u_\gamma^0(\gamma) + u_\gamma^1(\alpha, \gamma); \quad (2.1)$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, \gamma) = \sigma_{\alpha\gamma}^1(\alpha, \gamma), \quad \sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \gamma) = p + \sigma_{\gamma\gamma}^1(\alpha, \gamma); \quad (2.2)$$

$$\omega_B(\alpha, \gamma) = \omega_B^1(\alpha, \gamma), \quad \theta(\alpha, \gamma) = \theta^0 + \theta^1(\alpha, \gamma), \quad (2.3)$$

де характеристики основного напруженого стану задаються виразами:

$$u_\gamma^0(\gamma) = \frac{p(k^2 - 1)}{\mu(3k^2 - 4)}\gamma, \quad u_\alpha^0(\alpha) = -\frac{p(k^2 - 1)}{2\mu(3k^2 - 4)}\alpha; \quad (2.4)$$

$$\theta^0 = \frac{p}{\mu(3k^2 - 4)}, \quad (2.5)$$

а характеристики спричиненого включенням додаткового напруженого стану, від якого вимагатимемо зникання при $\alpha \rightarrow \infty$, $|\gamma| \rightarrow \infty$ - виразами (1.6)–(1.11).

Математична модель поставленої механічної задачі визначається крайовими умовами

$$u_\gamma(\alpha, \pm 0), u_\alpha(\alpha, \pm 0) = 0 \quad (\alpha \in [0; 1)), \quad (2.6)$$

які внаслідок виразів (2.1) і (2.4) задовольняються, якщо в інтегралах (1.6) і (1.8) $B(\xi) \equiv 0$, а функція $A(\xi)$ - розв'язок інтегрального рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_0^\infty A(\xi) J_1(\xi \alpha) d\xi = (k^2 + 1)^{-1} u_\alpha^0(\alpha) \quad (0 \leq \alpha \leq 1). \quad (2.7)$$

Відповідно до методу [6] розривних інтегралів Вебера-Шафхейтліна функція $A(\xi)$ матиме вигляд

$$A(\xi) = a_0 \xi^{-q} J_{2-q}(\xi), \quad q > -1, \quad \frac{2^q (k^2 - 2) p}{2\mu (k^2 + 1) (3k^2 - 4) \Gamma(2 - q)}, \quad (2.8)$$

де $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функція.

За відомими функціями $A(\xi)$ і $B(\xi)$ за формулами (2.1) – (2.3) обчислимо напружено-деформований стан у просторі:

$$u_\gamma(\alpha, \gamma) = \frac{p(k^2 - 1)}{\mu(3k^2 - 4)} \gamma + (k^2 - 1) \gamma a_0 \int_0^\infty e^{-\xi|\gamma|} J_0(\xi \alpha) \frac{J_{2-q}(\xi)}{\xi^{q-1}} d\xi; \quad (2.9)$$

$$u_\alpha(\alpha, \gamma) = \frac{p(k^2 - 1)}{\mu(3k^2 - 4)} \alpha - (k^2 + 1) a_0 \int_0^\infty e^{-\xi|\gamma|} J_1(\xi \alpha) \frac{J_{2-q}(\xi)}{\xi^q} d\xi + \\ + (k^2 - 1) a_0 |\gamma| \int_0^\infty e^{-\xi|\gamma|} J_1(\xi \alpha) \frac{J_{2-q}(\xi)}{\xi^{q-1}} d\xi; \quad (2.10)$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \gamma) = p + 2\mu a_0 \int_0^\infty e^{-\xi|\gamma|} J_0(\xi \alpha) \frac{J_{2-q}}{\xi^{q-1}} d\xi - 2(\lambda + \mu) a_0 |\gamma| \int_0^\infty e^{-\xi|\gamma|} J_0(\xi \alpha) \frac{J_{2-q}(\xi)}{\xi^{q-2}} d\xi \quad (2.11)$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, 0) = 2\mu k^2 a_0 \text{sign}(\gamma) \int_0^\infty e^{-\xi|\gamma|} J_1(\xi \alpha) \frac{J_{2-q}(\xi)}{\xi^{q-1}} d\xi - \\ - 2(\lambda + \mu) a_0 \gamma \int_0^\infty e^{-\xi|\gamma|} J_1(\xi \alpha) \frac{J_{2-q}(\xi)}{\xi^{q-2}} d\xi; \quad (2.12)$$

$$\omega_\beta(\alpha, \gamma) = k^2 a_0 \text{sign}(\gamma) \int_0^\infty e^{-\xi|\gamma|} J_1(\xi \alpha) \frac{J_{2-q}(\xi)}{\xi^{q-1}} d\xi; \quad (2.13)$$

$$\theta(\alpha, \gamma) = \frac{p}{\mu(3k^2 - 4)} - 2a_0 \int_0^\infty e^{-\xi|\gamma|} J_0(\xi \alpha) \frac{J_{2-q}(\xi)}{\xi^{q-1}} d\xi; \quad (2.14)$$

Зазначимо, що внаслідок виразів (2.9)–(2.14) крайові умови (2.6) визначають залежний від параметра $q > -1$ напружено-деформований стан у просторі.

3. Для визначення параметра q проаналізуємо механічні аспекти деформування пружного простору з абсолютно жорстким дисковим включенням. Оскільки за означенням $\sigma_{\alpha\gamma} = \mu(\partial_\gamma u_\alpha + \partial_\alpha u_\gamma)$ і $2\omega_\beta = \partial_\gamma u_\alpha - \partial_\alpha u_\gamma = (\text{rot } \mathbf{u})_\beta$, то згідно з першою крайовою умовою (2.6) $\partial_\alpha u_\gamma \equiv 0$ одержимо, що

$$\mu^{-1} \sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, \pm 0) = 2\omega_\beta(\alpha, \pm 0) = \partial_\gamma u_\alpha(\alpha, \pm 0), \quad (3.1)$$

а внаслідок означення (1.4)

$$|X_{\alpha}(\alpha)| = 4|\omega_{\beta}(\alpha, \pm 0)| = 2\mu^{-1}|\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, \pm 0)| = 2|\partial_{\gamma}u_{\alpha}(\alpha, \pm 0)|. \quad (3.2)$$

Зазначимо, що механічний зміст похідної $\partial_{\gamma}u_{\alpha}(\alpha, \pm 0)$ – пружний кут повороту, тому внаслідок гіпотези суцільності має виконуватися умова

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1-0} \partial_{\gamma}u_{\alpha}(\alpha, \pm 0) = \lim_{\alpha \rightarrow 1+0} \partial_{\gamma}u_{\alpha}(\alpha, \pm 0), \quad (3.3)$$

а значить відповідно до рівностей (3.1) і (3.2) повинні виконуватися також граничні співвідношення

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1-0} \omega_{\beta}(\alpha, \pm 0) = \lim_{\alpha \rightarrow 1+0} \omega_{\beta}(\alpha, \pm 0); \quad (3.4)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1-0} X_{\alpha}(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 1+0} X_{\alpha}(\alpha). \quad (3.5)$$

Згідно з (3.2) у розглядуваному випадку густина розподілу компоненти $X_{\alpha}(\alpha)$ силового чинника відповідає подвоєному пружному кутові повороту нормальних до площини жорсткого включення елементів матеріалу.

Обчислимо тепер за формулами (2.11)–(2.14) характеристики напружено-деформованого стану в площині $\gamma = 0$. Оскільки при $\gamma = 0$ інтеграли, які стоять у виразах (2.11)–(2.14) належать до класу розривних інтегралів Вебера-Шафхейтліна [7], то в інтервалі $0 \leq \alpha \leq 1$ одержимо

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \pm 0) = \frac{3k^2(k^2 - 1)p}{(k^2 + 1)(3k^2 - 4)}. \quad (3.6)$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, \pm 0) = \mp \frac{2k^2(k^2 - 2)p\alpha\Gamma(2,5 - q)F(2,5 - q, 0,5; 2; \alpha^2)}{(k^2 + 1)(3k^2 - 4)\Gamma(2 - q)\sqrt{\pi}} \quad (3.7)$$

$$\omega_{\beta}(\alpha, \pm 0) = \mp \frac{2k^2(k^2 - 2)p\alpha\Gamma(2,5 - q)\alpha F(2,5 - q, 0,5; 2; \alpha^2)}{\mu(k^2 + 1)(3k^2 - 4)\Gamma(2 - q)\sqrt{\pi}} \quad (3.8)$$

$$\theta(\alpha, \pm 0) = \frac{3p(k^2 - 1)}{\mu(k^2 + 1)(3k^2 - 4)} \quad (3.9)$$

в області $1 \leq \alpha < \infty$ -

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \pm 0) = p \left\{ 1 - \frac{2(k^2 - 2)F(2 - q; 2 - q; 3 - q; \alpha^{-2})}{(k^2 + 1)(3k^2 - 4)\Gamma(3 - q)(q - 1)\alpha^{4-2q}} \right\} \quad (3.10)$$

$$u_{\alpha}(\alpha, \pm 0) = -\frac{p(k^2 - 2)}{2\mu(3k^2 - 4)} \left\{ \alpha - \frac{F(2 - q; 1 - q; 3 - q; \alpha^{-2})}{\Gamma(3 - q)\Gamma(q)\alpha^{3-2q}} \right\} \quad (3.11)$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, \pm 0) = \mp \frac{2k^2(k^2 - 2)p}{(k^2 + 1)(3k^2 - 4)} \cdot \frac{\Gamma(2,5 - q; 1,5 - 1; 3 - 1; \alpha^{-2})}{\Gamma(2 - q)\Gamma(3 - q)\Gamma(q - 0,5)\alpha^{4-2q}} \quad (3.12)$$

$$\omega_{\beta}(\alpha, \pm 0) = \mp \frac{k^2(k^2 - 2)p}{\mu(k^2 + 1)(3k^2 - 4)} \cdot \frac{\Gamma(2,5 - q)F(2,5 - q; 1,5 - q; 3 - q; \alpha^{-2})}{\Gamma(2 - q)\Gamma(3 - q)\Gamma(q - 0,5)\alpha^{4-2q}} \quad (3.13)$$

$$\theta(\alpha, \pm 0) = \frac{p}{\mu(3k^2 - 4)} \left\{ 1 - \frac{2(k^2 - 2)F(2 - q; 2 - q; 3 - q; \alpha^{-2})}{(k^2 + 1)\Gamma(3 - q)\Gamma(q - 1)\alpha^{4-2q}} \right\} \quad (3.14)$$

где $F(a; b; c; x^2)$ – гіпергеометрична функція Гаусса [7].

Аналіз формул (3.6)–(3.14) вказує на те, що характер розподілу переміщень, напружень і деформацій в площині включення істотно залежить від інтервалу зміни α і параметра q . Оскільки гіпергеометричний ряд, який задає гіпергеометричну функцію Гаусса $F(a; b; c; x^2)$, збігається у точці $x = 1$ при умові $c - a - b > 0$, то гранична рівність (3.4) виконуватиметься тоді і тільки тоді, коли

$$1 < q < 1,5 \quad (3.15)$$

Обмеження $q < 1,5$ у цій нерівності забезпечує зникання додаткового напружено-деформованого стану при $\alpha \rightarrow \infty$.

За умови (3.15), використовуючи формулу підсумовування

$$F(a; b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \quad (3.16)$$

безпосередньою перевіркою можна переконатися, що всі компоненти напружено-деформованого стану на фронті $\alpha = 1$ включення неперервні, а тому й регулярні.

4. Якщо замість умови (3.4) поставити умову

$$\partial_\gamma u_a(\alpha, \pm 0) = 2\omega_\beta(\alpha, \pm 0) \equiv 0 \quad (\alpha \in (1; \infty)), \quad (4.1)$$

яку щодо лінії $\alpha = 1$ з фізичного погляду можна інтерпретувати як наявність ідеально-пластичного шарніру на фронті включення, то ця умова буде виконуватися при $q = 0,5$. Тоді при $q = 0,5$ в області $0 \leq \alpha < 1$ вирази (3.6)–(3.9) набудуть вигляду

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \pm 0) = \frac{3k^2(k^2 - 1)p}{(k^2 + 1)(3k^2 - 4)}; \quad (4.2)$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, \pm 0) = \mp \frac{4k^2(k^2 - 2)p\alpha}{(k^2 + 1)(3k^2 - 4)\pi\sqrt{1 - \alpha^2}}; \quad (4.3)$$

$$\omega_\beta(\alpha, \pm 0) = \mp \frac{4k^2(k^2 - 2)p\alpha}{\mu(k^2 + 1)(3k^2 - 4)\pi\sqrt{1 - \alpha^2}}; \quad (4.4)$$

$$\theta(\alpha, \pm 0) = \frac{3p(k^2 - 1)p}{\mu(k^2 + 1)(3k^2 - 4)}, \quad (4.5)$$

а формули (3.11) – (3.14) з урахуванням того, що $|\Gamma(-0,5)| = \infty$ і залежності

$$F(1,5; 1,5; 2,5; \alpha^{-2}) = 3\alpha^3 \left[(\alpha^2 - 1)^{-1/2} - \arcsin(1/\alpha) \right] \quad (4.6)$$

запишуться так:

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \pm 0) = p \left\{ 1 + \frac{4(k^2 - 2)}{\pi(k^2 + 1)(3k^2 - 4)} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} - \arcsin \frac{1}{\alpha} \right) \right\}; \quad (4.7)$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, \pm 0) = \omega_\beta(\alpha, \pm 0) \equiv 0; \quad (4.8)$$

$$\theta(\alpha, \pm 0) = p \left\{ 1 + \frac{4(k^2 - 2)}{\pi(k^2 + 1)(3k^2 - 4)} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} - \arcsin \frac{1}{\alpha} \right) \right\}; \quad (4.9)$$

Аналіз виразів (4.1)–(4.8) вказує на те, що напружено-деформований стан на вістрі включення є коренево-сингулярним, оскільки умова (4.1) виключає можливість передачі у вістрі пружних поворотів і відповідного накопичення пружної енергії деформації. Відзначимо, що відповідно до формул (3.6) і (4.2) закон розподілу нормальних напружень $\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \pm 0)$ на поверхні включення є сталим, однаковим і мен-

шим від p як в регулярному так і сингулярному випадках. Проте на його продовженні згідно формули (3.10) регулярне напруження неперервно зростає до значення p на нескінченності, а згідно з (4.7) коренево особливе напруження монотонно зменшується до p на нескінченності. Збурений регулярний напружений стан у площині $\gamma = 0$ на нескінченності зникає як $\alpha^{-(4-2q)}$ ($1 < q < 1,5$), а сингулярний швидше (як α^{-3}).

РЕЗЮМЕ

Предложена новая математическая модель деформирования упругих тел с остроконечными включениями, которая учитывает условие непрерывности упругих углов поворота на их заострении. Доказано, что выполнение этого условия обеспечивает регулярное напряженно-деформированное состояние на заострении включения.

SUMMARY

The new mathematical model of deformation of elastic bodies with sharp point inclusions is proposed. This model takes into account condition of continuity of rotational elastic angles on the inclusion sharp point. It is proved that this condition provides regular stress-strain state on the sharp point of inclusion.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Keer L.M. A note on the solution for two asymmetric boundary problems.— Int. J. Solids and Struct., 1965.— № 1.— P. 257-263.
2. Kassir M. K., Sih G.C. Some three-dimensional inclusion problems in elasticity.— Int. J. Solids and Struct., 1968.— 4.— P. 225-241.
3. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред.— М., 1975.— 592 с.
4. Галазюк В.А. Обмежений розв'язок крайової задачі про напружено-деформований стан пружного тіла з абсолютно жорстким дископодібним включенням нульової товщини.— Доп. АН УРСР.— Сер. А.— 1987.— № 12.— С. 23-27.
5. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике.— М., 1976.— 280 с.
6. Галазюк В.А., Сулим Г.Т. Неклассическая модель деформирования тел с трещинами.— Теор. и прикл. механика.— Харьков, 2001.— Вып. 33.— С. 63-75.
7. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям.— М., 1979.— 832 с.

Надійшла до редакції 22.04.2002 р.

УДК 539.3

МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ СИНГУЛЯРНЫХ ИТЕРАЦИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ ИЗГИБА ПЛАСТИН С ОТВЕРСТИЕМ

Я.Ф.Каюк, Л.Н. Кривоблоцкая
Институт механики НАН Украины, г.Киев

Данная публикация является продолжением статьи [1]. Поэтому здесь будут встречаться ссылки на формулы этой работы. Их будем приводить в виде (А)₁, где (А) – номер формулы в [1], например, (1.8)₁.

1. Метод суммирования разложений в виде ряда с сингулярными слагаемыми. Ряды, получаемые в результате решения нелинейных задач о концентрации усилий, обычно медленно сходятся или вообще расходятся. Если удастся вычислить их коэффициенты в сколь угодно высоких приближениях, то сходимость можно заметно улучшить, разделив их на быстро сходящуюся и медленно сходящуюся (или расходящуюся) части. Если имеется некоторая рекуррентность в коэффициентах, вторую из указанных частей можно заменить известной функцией. На практике такие благоприятные ситуации встречаются редко. Обычно удается получить максимум 3-4 приближения. Но на их основе можно строить пригодные, в определенном смысле, решения прикладных задач. При таком подходе выработана своя методология оценки пригодности решения, полученного на основе 3-4 приближений. Подтверждением этому служит, например, ряд исследований, выполненных А. Н. Гузем, Ю. Н. Немишем.

На основе анализа ряда решенных задач сформировалась идея, концептуальные положения которой заключаются в следующем: 1) ряды типа (1.8)₁ разбить на регулярную и иррегулярную (при $M \rightarrow \infty$) части; 2) для улучшения сходимости и «гашения» (при $M \rightarrow \infty$) особенностей применить к обеим частям или только ко второй специальные методы суммирования; 3) для оценки практической пригодности преобразованных рядов использовать указанную выше апробированную методологию.

К настоящему времени разработано большое количество линейных методов суммирования. Специфика их в том, что суммирующие функции или матрицы содержат конкретные числа, параметры. В рассматриваемой задаче на основе работы [2] предложены новые методы суммирования. Принципиальное отличие их от традиционных в том, что при суммировании в функции и матрицы вводятся произвольные положительные параметры и функции. Варьируя указанным произволом, можно существенно влиять на практическую сходимость рядов типа (1.8)₁, нивелировать («гасить») иррегулярные части. Однако при этом возникает ряд важных вопросов математического плана, разрешение которых позволит обосновать предлагаемый метод и эффективность его использования.

Пусть функция $w_1(M)$ как первое приближение (линейная задача а) [1]) содержит особенность, описываемую функцией $\varphi(M) > 0, \forall M \in \Omega; M \equiv \alpha_1$, где α_2 – произвольная точка области Ω , занимаемой пластиной с отверстием. Тогда ряды типа (1.8)₁ представим в виде

$$w(M) = \varphi(M) \left[\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k-1} u_{2k-1}^{(r)}(M) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k-1} u_{2k-1}^{(ir)}(M) \right]; \quad (1.1)$$

$$\Phi(M) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k} \Phi_{2k}^{(r)}(M) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k} \Phi_{2k}^{(ir)}(M). \quad (1.2)$$

Здесь: r - регулярный, ir - иррегулярный члены решения; $w(M)$, $\Phi(M)$ – прогиб и функция напряжений;

$$u_{2k-1}^{(r)}(M) = \frac{1}{\varphi(M)} w_{2k-1}^{(r)}(M); \quad u_{2k-1}^{(ir)}(M) = \frac{1}{\varphi(M)} w_{2k-1}^{(ir)}(M). \quad (1.3)$$

Следуя (2.5)₁, построим конкретные методы линейного суммирования следующим подходом. Рассмотрим выражения, построенные на основе представлений (1.1), (1.2),

$$w_1 = w_1[M, \sigma(M), \lambda, z] = \varphi(M) \left[\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k-1} [f(z, \sigma, \lambda)]^k u_{2k-1}^{(r)}(M) + \right.$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k-1} [f(z, \sigma, \lambda)]^k u_{2k-1}^{(ir)}(M) \Big]; \quad (1.4)$$

$$\Phi_1 = \Phi_1[M, \sigma(M), \lambda, z] = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k} [f(z, \sigma, \lambda)]^k \Phi_{2k}^{(r)}(M) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k} [f(z, \sigma, \lambda)]^k \Phi_{2k}^{(ir)}(M), \quad (1.5)$$

где

$$f[z, \sigma(M), \lambda] = \frac{2\lambda z}{2\lambda + \sigma(M) - z\sigma(M)} = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(\lambda, \sigma) z^k; \quad (1.6)$$

$$d_1 = \beta/p, \quad d_2 = \beta\sigma/p^2, \quad d_3 = \beta\sigma^2/p^3, \dots; \quad p = 2\lambda + \sigma(M); \quad \beta = 2\lambda; \quad (1.7)$$

$\lambda > 0, \sigma(M) > 0, \forall M \in \Omega$ - произвольный положительный параметр и функция, определенная в области G ; z - комплексная переменная.

Легко увидеть, что

$$w_1[M, \sigma(M), \lambda, 1] = w(M); \quad \Phi_1[M, \sigma(M), \lambda, 1] = \Phi(M);$$

$$d_k(\lambda, \sigma) > 0 \text{ для } \forall k \in N, \lambda, \sigma; \quad f[1, \sigma(M), \lambda] = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(\lambda, \sigma) = 1.$$

Подставим в (1.4), (1.5) разложения (1.6), проведем упорядочение по степеням переменной z , а затем положим $z=1$. Получаем взамен (1.8), новые (пертурбационные) ряды

$$^* w[M, \sigma(M), \lambda] = \Phi(M) \left[\sum_{q=1}^{\infty} ^* w_q^{(r)}(\varepsilon, M, \sigma, u_{2q-1}^{(r)}) + \sum_{q=1}^{\infty} ^* w_q^{(ir)}(\varepsilon, M, \sigma, u_{2q-1}^{(ir)}) \right]; \quad (1.8)$$

$$^* \Phi[M, \sigma(M), \lambda] = \sum_{q=1}^{\infty} ^* \Phi_q^{(r)}(\varepsilon, M, \sigma, \Phi_{2q}^{(r)}) + \sum_{q=1}^{\infty} ^* \Phi_q^{(ir)}(\varepsilon, M, \sigma, \Phi_{2q}^{(ir)}). \quad (1.9)$$

Здесь

$$^* w_q^{(r)}(\dots) = \sum_{m=1}^q \varepsilon^{2m-1} u_{2m-1}^{(r)} d_q^{(m)}(\lambda, \sigma); \quad (1.10)$$

$$^* \Phi_q^{(r)}(\dots) = \sum_{m=1}^q \varepsilon^{2m} \Phi_{2m}^{(r)}(M) d_q^{(m)}(\lambda, \sigma). \quad (1.11)$$

Выражения аналогичной структуры для $^* w_q^{(ir)}, ^* \Phi_q^{(ir)}$ получим, если в (1.11), (1.12) проведем очевидные формальные замены.

Можно установить, что

$$d_q^{(m)} = \frac{\beta}{pq} C_{q-1}^{m-1} \sigma^{q-m} \beta^{m-1}, \quad d_q^{(m)} = 0 \text{ при } q < m, (\forall m \in N, \sigma, \lambda) \quad (1.12)$$

$$\sum_{q=1}^{\infty} d_q^{(m)} = \sum_{q=1}^{\infty} d_q^{(m)}(\lambda, \sigma) = 1, \quad C_n^j \equiv \binom{n}{j} \equiv \frac{n!}{j!(n-j)!}; \quad (1.13)$$

Пусть $S_N^{(w)}, S_N^{(\Phi)}$ - частичные суммы соответствующих рядов из (1.8), $^* S_N^{(w)}, ^* S_N^{(\Phi)}$ - частичные суммы рядов (1.8), (1.9). Непосредственными преобразованиями можно установить, что

$$S_N^{(w)*} = \phi(M) \left[\sum_{q=1}^N \varepsilon^{2q-1} u_{2q-1}^{(r)}(M) \delta_q(N, \sigma, \lambda) + \sum_{q=1}^N \varepsilon^{2q-1} u_{2q-1}^{(ir)}(M) \delta_q(N, \sigma, \lambda) \right]; \quad (1.14)$$

$$S_N^{(\Phi)*} = \sum_{q=1}^N \varepsilon^{2q} \Phi_{2q}^{(r)}(M) \delta_q(N, \sigma, \lambda) + \sum_{q=1}^N \varepsilon^{2q} \Phi_{2q}^{(ir)}(M) \delta_q(N, \sigma, \lambda). \quad (1.15)$$

Приведем несколько формул для вычисления весовых коэффициентов $\delta_q(\dots)$. Пусть, например, $N=5$. Тогда

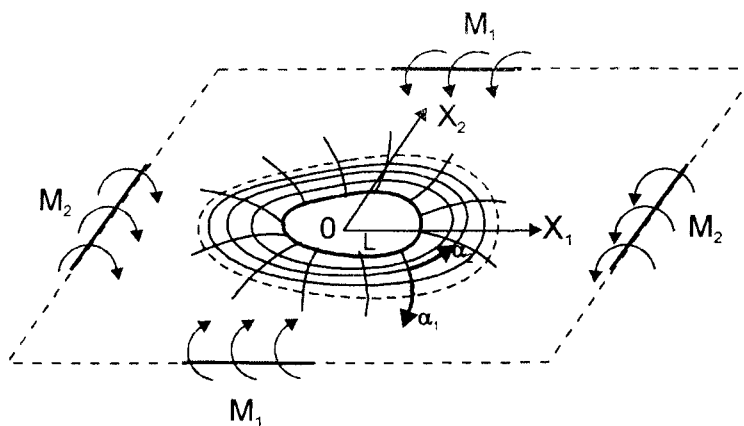
$$\begin{aligned} \delta_1(5, \sigma, \lambda) &= \frac{\beta}{p} \left(1 + \frac{\sigma}{p} + \frac{\sigma^2}{p^2} + \frac{\sigma^3}{p^3} + \frac{\sigma^4}{p^4} \right), \quad \delta_2(5, \sigma, \lambda) = \frac{\beta^2}{p^2} \left(1 + 2 \frac{\sigma}{p} + 3 \frac{\sigma^2}{p^2} + 4 \frac{\sigma^3}{p^3} \right), \\ \delta_3(5, \sigma, \lambda) &= \frac{\beta^3}{p^3} \left(1 + 3 \frac{\sigma}{p} + 6 \frac{\sigma^2}{p^2} \right), \quad \delta_4(5, \sigma, \lambda) = \frac{\beta^4}{p^4} \left(1 + 4 \frac{\sigma}{p} \right), \quad \delta_5(5, \sigma, \lambda) = \frac{\beta^5}{p^5}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Вообще для произвольного N можно установить формулы

$$\delta_1(N, \sigma, \lambda) = \sum_{i=1}^N u^{i-1}; \quad \delta_k(N, \sigma, \lambda) = \left(\frac{\beta}{p} \right)^k \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{du^{k-1}} \sum_{i=1}^N u^{i-1}, \quad (1.17)$$

где $u = \sigma/p$; $k = \overline{2, N}$.

2. Обоснование аппроксимаций решений на основе обобщенно-суммирующих функций. Обозначим через H_w, H_Φ - множества функций, определенных в области $\Omega[1]$, внешней по отношению к контуру L (рисунок). Пусть функции $f \in H_w, h \in H_\Phi$ с определенной степенью непрерывной



дифференцируемости ограничены на «бесконечности» и удовлетворяют граничным условиям $(1.6)_1, (1.7)_1$. Обозначим через $\|\cdot\|_w, \|\cdot\|_\Phi$ - нормы в указанных пространствах H_w, H_Φ , которые могут быть интегрального или дифференциального типа. Пополняя указанные множества предельными элементами в указанных нормах, получаем полные нормированные пространства H_w^*, H_Φ^* .

К определению сходимости рядов типа $(1.8)_1$ можно подойти по-разному, например, так как в [1]. Для целей теоретических исследований больше всего подходит критерий Коши. Будем считать, что ряды типа $(1.8)_1$ сходятся к некоторым предельным элементам $S_0^{(w)}(\varepsilon, M) \in H_w^*, S_0^{(\Phi)}(\varepsilon, M) \in H_\Phi^*$, если по заданным сколь угодно малым числам $\xi_1 > 0, \xi_2 > 0$ можно указать такие пары чисел m, n и r, s ($m \neq n, r \neq s$), что будут выполняться неравенства

$$\|S_m^{(w)} - S_n^{(w)}\|_w < \xi_1, \quad \|S_r^{(\Phi)} - S_s^{(\Phi)}\|_\Phi < \xi_2 \quad (2.1)$$

для $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, при произвольных наборах указанных чисел m, n и r, s .

Возникает важный вопрос о сходимости пертурбационных рядов типа $(1.8), (1.9)$ с частичными суммами $(1.14), (1.15)$. Можно доказать фундаментальную теорему* следующего содержания: если ряды

*Из-за громоздкости и ограниченности места доказательство здесь не приводится.

типа (1.8), сходятся в смысле (2.1) к указанным предельным элементам, то в указанном смысле сходятся последовательности $\left\{S_n^{(w)}\right\}$, $\left\{S_n^{(\Phi)}\right\}$, причем к тем же предельным элементам. Утверждение справедливо для произвольных значений параметра $\lambda > 0$, функций $\sigma(M)$ и $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0^*]$, $\varepsilon_0^* \geq \varepsilon_0$, для общего случая определения нормы.

Теперь становится понятным, почему в этом параграфе рассуждения изначально проведены в общем виде. Именно, заранее нам никогда неизвестно —сходятся или расходятся ряды типа (1.8)₁. Применяя обобщенное суммирование, мы ничего не «теряем»: сумму сходящихся рядов типа (1.8)₁ не меняем; слабо сходящиеся ряды или расходящиеся суммируем к некоторой функции. Эта функция, в общем, может и не быть искомым решением, варьируя произволом λ , $\sigma(M)$, их можно подобрать такими, чтобы получить искомое решение (во всяком случае в избранной точке $Q \in \Omega$). Указанные утверждения не зависят существенно от выбора нормы функциональных пространств, к которым принадлежит искомое решение.

К указанным положительным сторонам предложенного метода следует добавить такие важные свойства: последовательности типа

$$\{\delta_q(N, \sigma, \lambda)\} \quad (2.2)$$

по индексу q — убывающие, а по индексу N — возрастающие, ограничены сверху единицей; при этом $\delta_q(\dots) > 0$ для произвольных λ , $\delta(M) > 0$. Принимая во внимание это свойство, видим, что весовые коэффициенты (2.2) с увеличением номера q уменьшаются и тем самым уменьшаются значения коэффициентов в (1.14), (1.15) при $q \rightarrow \infty$, что способствует улучшению сходимости.

3. Об удовлетворении аппроксимациями (2.16)₁, (2.17)₁ уравнений равновесия и граничным условиям. Частичные суммы

$$S_N^{(w)} = w^{(N)} = \sum_{k=1}^N \varepsilon^{2k-1} w_{2k-1}(M), \quad (3.1)$$

$$S_N^{(\Phi)} = \Phi^{(N)} = \sum_{k=1}^N \varepsilon^{2k} \Phi_{2k}(M), \quad (3.2)$$

согласно предлагаемого метода, будем рассматривать при малых ε как аппроксимации искомого решения задач а) и б) [1]. Они удовлетворяют граничным условиям (1.6)₁. Уравнениям же равновесия (1.1)₁ они удовлетворяют с асимптотической (в смысле Пуанкаре) погрешностью. Общий вид этой погрешности установим, если учтем некоторые формулы из [1]. Используя уравнения (1.1)₁ имеем

$$\begin{aligned} Lw^{(N)} &= \sum_{k=1}^N \varepsilon^{2k-1} Lw_{2k-1}; \quad L\Phi^{(N)} = \sum_{k=1}^N \varepsilon^{2k} L\Phi_{2k}; \\ \frac{1}{D} B(w^{(N)}, \Phi^{(N)}) &= \frac{1}{D} \sum_{k=2}^{2N} \varepsilon^{2k-1} \sum_{s=1}^{k-1} B(w_{2s-1}, \Phi_{2k-2s}); \\ \frac{1}{2} E h B(w^{(N)}, w^{(N)}) &= \frac{1}{2} E h \sum_{k=1}^{2N-1} \varepsilon^{2k} \sum_{s=1}^k B(w_{2s-1}, w_{2k-2s+1}). \end{aligned}$$

$$\left\| Lw^{(N)} - \frac{1}{D} B(w^{(N)}, \Phi^{(N)}) \right\|_w = \frac{1}{D} O \left(\varepsilon^{2+1} \left\| \sum_{s=1}^N B(w_{2s-1}, w_{2N-2s+2}) \right\|_w \right); \quad (3.3)$$

$$\left\| L\Phi^{(N)} - \frac{1}{2} E h B(w^{(N)}, w^{(N)}) \right\|_\Phi = \frac{1}{2} E h O \left(\varepsilon^{2N+2} \left\| \sum_{s=1}^{N+1} B(w_{2s-1}, w_{2N-2s+3}) \right\|_\Phi \right). \quad (3.4)$$

Аппроксимациям (3.1), (3.2), естественно, следует ставить в соответствие аппроксимации другого сорта, которые следуют из (1.14), (1.15),

$$w^{(N)*} = \sum_{q=1}^N \varepsilon^{2q-1} \delta_q(N, \sigma, \lambda) w_{2q-1}(M) = S_N^{(w)*}, \quad (3.5)$$

$$\Phi^{(N)*} = \sum_{q=1}^N \varepsilon^{2q} \delta_q(N, \sigma, \lambda) \Phi_{2q}(M) = S_N^{(\Phi)*}, \quad (3.6)$$

$$w_{2q-1} = \varphi(M) \left[u_{2q-1}^{(r)}(M) + u_{2q-1}^{(ir)}(M) \right], \quad \Phi_{2q} = \Phi_{2q}^{(r)}(M) + \Phi_{2q}^{(ir)}(M). \quad (3.7)$$

Для регуляризации сингулярных слагаемых в представлениях (3.5), (3.6) предлагается следующий метод, который реализуется в такой последовательности: а) подбираем по отдельности для (3.5) и (3.6) такие функции $\sigma = \sigma_w > 0$, $\sigma = \sigma_\Phi > 0$, чтобы они сглаживали особенности одновременно во всех функциях $u_{2q-1}^{(ir)}(M)$, $\Phi_{2q}^{(ir)}(M)$ ($q = \overline{1, N}$) и «делали бы» малыми по норме вторые слагаемые (1.14), (1.15), т.е., чтобы выполнялись неравенства

$$\sum_{q=1}^N \varepsilon^{2q-1} \left\| \delta_q(N, \sigma_w, \lambda) u_{2q-1}^{(ir)}(M) \right\|_w \leq \xi_w. \quad (3.8)$$

$$\sum_{q=1}^N \varepsilon^{2q} \left\| \delta_q(N, \sigma_\Phi, \lambda) \Phi_{2q}^{(ir)}(M) \right\|_\Phi \leq \xi_\Phi. \quad (3.9)$$

Здесь $\xi_w > 0$, $\xi_\Phi > 0$ – малые величины (числа), которые наперед задаются, другими словами, рассматривается регуляризация с асимптотической точностью. Чтобы удовлетворить всем указанным условиям, функции δ_w, δ_Φ можно выбирать, например, следующей аналитической структуры:

$$\delta_w = \delta_w(M, a_1, a_2, a_3, \dots) > 0; \quad \delta_\Phi = \delta_\Phi(M, b_1, b_2, b_3, \dots) > 0, \quad (3.10)$$

где a_k, b_k ($k = 1, 2, \dots$) – произвольные положительные коэффициенты. В результате выражения (3.5), (3.6) преобразуются к виду:

$$S_{N,1}^{(w)*} = \sum_{q=1}^N \varepsilon^{2q-1} \delta_q(N, \sigma_w, \lambda) w_{2q-1}(M); \quad (3.11)$$

$$S_{N,1}^{(\Phi)*} = \sum_{q=1}^N \varepsilon^{2q} \delta_q(N, \sigma_\Phi, \lambda) \Phi_{2q}(M). \quad (3.12)$$

В общем случае эти выражения не будут представлять формальных решений задач а) и б), т.е., они не будут явно удовлетворять в асимптотическом смысле не только уравнениям равновесия (1.1)₁, но и граничным условиям (1.6)₁. Для устранения указанного недостатка выполним вторую операцию: б) полагаем в построенных функциях (3.10) $M = M_0$, где M_0 – некоторая характерная точка области Ω , в которой полевые характеристики изменяются экстремальным образом; это может быть, например, точка концентрации усилий и моментов. Тогда имеем $\sigma_w^0 = \sigma_w|_{M=M_0}$, $\sigma_\Phi^0 = \sigma_\Phi|_{M=M_0}$ и, тем самым, коэф-

фициенты $\left\{ \delta_q(N, \sigma_w^0, \lambda) \right\}_{q=1}^N$ будут независимыми от точки M величинами. Взамен аппроксимаций (3.11), (3.12) окончательно рассматриваем следующие:

$$w_2^{(N)*} = S_{N,2}^{(w)*} = \sum_{q=1}^N \varepsilon^{2q-1} \delta_q(N, \sigma_w^0, \lambda) w_{2q-1}(M); \quad (3.13)$$

$$\Phi_2^{*(N)} = S_{N,2}^{*(\Phi)} = \sum_{q=1}^N \varepsilon^{2q} \delta_q(N, \sigma_\Phi^0, \lambda) \Phi_{2q}(M). \quad (3.14)$$

Теперь легко видеть, что выражения (3.13), (3.14) удовлетворяют всем граничным условиям (1.6)₁. Действительно, поскольку операторы H_1, H_2, H_{12} – линейные [1], то

$$H_1 S_{N,2}^{*(\Phi)} = \sum_{q=1}^N H_1 [\varepsilon^{2q} \delta_q(N, \sigma_\Phi^0, \lambda) \Phi_{2q}(M)] = \sum_{q=1}^N \varepsilon^{2q} \delta_q(N, \sigma_\Phi^0, \lambda) H_1 \Phi_{2q}(M) = 0$$

и т.д.

Исследуем вопрос о степени удовлетворения аппроксимаций (3.15), (3.16) уравнениям равновесия (1.1)₁. При этом снова принимаем во внимание, что операторы L, H_1, H_2, H_{12} – линейные. Тогда

$$L w_2^{*(N)} = \sum_{q=1}^N \varepsilon^{2q-1} \delta_q(N, \sigma_w^0, \lambda) L w_{2q-1}; \quad (3.15)$$

$$L \Phi_2^{*(N)} = \sum_{q=1}^N \varepsilon^{2q} \delta_q(N, \sigma_\Phi^0, \lambda) L \Phi_{2q}. \quad (3.16)$$

Можно установить, что

$$\frac{1}{D} B \left(w_2^{*(N)}, \Phi_2^{*(N)} \right) = \frac{1}{D} \sum_{q=2}^{2N} \varepsilon^{2q-1} \sum_{s=1}^{q-1} \delta_s(N, \sigma_{w,\lambda}^0) \delta_{q-s}(N, \sigma_\Phi^0, \lambda) B(w_{2s-1}, \Phi_{2q-2s}); \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} E h B \left(w_2^{*(N)}, w_2^{*(N)} \right) &= \frac{1}{2} E h \sum_{q=1}^{2N-1} \varepsilon^{2q} \sum_{p=1}^q \delta_p(N, \sigma_w^0, \lambda) \delta_{q-p+1}(N, \sigma_w^0, \lambda) \times \\ &\times B(w_{2p-1}, w_{2q-2p+1}). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Тем самым

$$\begin{aligned} L w_2^{*(N)} - \frac{1}{D} B \left(w_2^{*(N)}, \Phi_2^{*(N)} \right) &= \varepsilon \delta_1(N, \sigma_w^0, \lambda) L w_1 + \sum_{q=2}^N \varepsilon^{2q-1} \delta_q(N, \sigma_w^0, \lambda) + \\ &+ \sum_{q=2}^N \varepsilon^{2q-1} \delta_q(N, \sigma_w^0, \lambda) L w_{2q-1} - \frac{1}{D} \sum_{q=2}^{2N} \varepsilon^{2q-1} \sum_{s=1}^{q-1} \delta_s(N, \sigma_w^0, \lambda) \times \\ &\times \delta_{q-s}(N, \sigma_\Phi^0, \lambda) B(w_{2s-1}, \Phi_{2q-2s}). \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} L \Phi_2^{*(N)} - \frac{1}{2} E h B \left(w_2^{*(N)}, w_2^{*(N)} \right) &= \sum_{q=1}^N \varepsilon^{2q} \delta_q(N, \sigma_\Phi^0, \lambda) L \Phi_{2q} - \frac{1}{2} E h \times \\ &\times \sum_{q=1}^{2N-1} \varepsilon^{2q} \sum_{p=1}^q \delta_p(N, \sigma_w^0, \lambda) \delta_{q-p+1}(N, \sigma_w^0, \lambda) B(w_{2p-1}, w_{2q-2p+1}). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Соотношения (3.19), (3.20) представим в следующем виде:

$$L w_2^{*(N)} - \frac{1}{D} B \left(w_2^{*(N)}, \Phi_2^{*(N)} \right) = \sum_{q=2}^N \varepsilon^{2q-1} \left[\delta_q(N, \sigma_w^0, \lambda) L w_{2q-1} - \right.$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{D} \sum_{s=1}^{q-1} \delta_s(N, \sigma_w^0, \lambda) \delta_{q-s}(N, \sigma_\Phi^0, \lambda) B(w_{2s-1}, \Phi_{2q-2s}) \Big] - \\ & -\frac{1}{D} \sum_{q=N+1}^{2N} \varepsilon^{2q-1} \sum_{s=1}^{q-1} \delta_s(N, \sigma_w^0, \lambda) \delta_{q-s}(N, \sigma_\Phi^0, \lambda) B(w_{2s-1}, \Phi_{2q-2s}); \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} & L\Phi_2^{(N)} - \frac{1}{2} EhB\left(w_2^{(N)}, w_2^{(N)}\right) = \sum_{q=1}^N \varepsilon^{2q} \left[\delta_q(N, \sigma_\Phi^0, \lambda) L\Phi_{2q} - \frac{1}{2} Eh \times \right. \\ & \times \sum_{p=1}^q \delta_p(N, \sigma_w^0, \lambda) \delta_{q-p+1}(N, \sigma_w^0, \lambda) B(w_{2p-1}, \Phi_{2q-2p+1}) \Big] - \frac{1}{2} Eh \times \\ & \times \sum_{q=N+1}^{2N-1} \varepsilon^{2q} \sum_{p=1}^q \delta_p(N, \sigma_w^0, \lambda) \delta_{q-p+1}(N, \sigma_w^0, \lambda) B(w_{2p-1}, w_{2q-2p+1}) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Введем в (3.13), (3.14) следующие обозначения:

$$\delta_q(N, \sigma_w^0, \lambda) w_{2q-1}(M) = u_{2q-1}(M, N, \sigma_w^0, \lambda) = u_{2q-1}, \quad (3.23)$$

$$\delta_q(N, \sigma_\Phi^0, \lambda) \Phi_{2q}(M) = v_{2q}(M, N, \sigma_\Phi^0, \lambda) = v_{2q} \quad (3.24)$$

и рассмотрим ряды

$$I_1 = \sum_{q=1}^{\infty} \varepsilon^{2q-1} u_{2q-1}; \quad I_2 = \sum_{q=1}^{\infty} \varepsilon^{2q} v_{2q}. \quad (3.25)$$

Подставим в уравнения равновесия (1.1)₁, (1.2)₁ вместо w и Φ соответствующие ряды I_1, I_2 . Для определения функций u_{2q-1}, v_{2q} получаем по аналогии с (1.9)₁, (1.11)₁ следующие последовательности систем дифференциальных уравнений в частных производных:

$$Lu_1 = 0; \quad Lu_{2q-1} = \frac{1}{D} \sum_{s=1}^{q-1} B(u_{2s-1}, v_{2q-2s}) \quad (k=2, 3, \dots) \quad (3.26)$$

$$Lv_{2q} = \frac{1}{2} Eh \sum_{s=1}^q B(v_{2s-1}, v_{2q-2s+1}) \quad (k=1, 2, \dots). \quad (3.27)$$

Поставим в эти уравнения функции (3.23), (3.24). В связи с тем, что оператор L – линейный, B – полилинейный, получаем

$$\delta_1(N, \sigma_w^0, \lambda) Lw_1 = 0; \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \delta_{2q-1}(N, \sigma_w^0, \lambda) Lw_{2q-1} &= \frac{1}{D} \sum_{s=1}^{q-1} \delta_s(N, \sigma_w^0, \lambda) \delta_{q-s}(N, \sigma_\Phi^0, \lambda) B(w_{2s-1}, \Phi_{2q-2s}); \\ & (q=2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \delta_q(N, \sigma_\Phi^0, \lambda) L\Phi_{2q} &= \frac{1}{2} Eh \sum_{p=1}^q \delta_p(N, \sigma_w^0, \lambda) \delta_{q-p+1}(N, \sigma_w^0, \lambda) B(w_{2p-1}, w_{2q-2p+1}). \\ & (q=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Принимая во внимание уравнения (3.28) – (3.30), убеждаемся, что в соотношениях (3.21), (3.22) подчеркнутые слагаемые будут равны нулю. В результате получим асимптотические оценки степеней

удовлетворения аппроксимаций (3.13), (3.14) уравнениям равновесия (1.1)₁. Имеем

$$\left\| Lw_2^{(N)} - \frac{1}{D} B \left(w_2^{(N)}, \Phi_2^{(N)} \right) \right\|_w = \frac{1}{D} O \left(\varepsilon^{2N+1} \sum_{s=1}^N \delta_s \left(N, \sigma_w^0, \lambda \right) \times \right. \\ \left. \times \delta_{N-s+1} \left(N, \sigma_\Phi^0, \lambda \right) \right\| B(w_{2s-1}, \Phi_{2N-2s+2}) \Big\|_\Phi \Big\} \quad (3.31)$$

$$\left\| L\Phi_2^{(N)} - \frac{1}{2} EhB \left(w_2^{(N)}, w_2^{(N)} \right) \right\|_w = \frac{1}{2} EhO \left(\varepsilon^{2N+2} \sum_{p=1}^N \delta_p \left(N, \sigma_w^0, \lambda \right) \times \right. \\ \left. \times \delta_{N-p+2} \left(N, \sigma_w^0, \lambda \right) \right\| B(w_{2p-1}, w_{2N-2p+3}) \Big\|_\Phi \Big\} \quad (3.32)$$

Сравнивая асимптотические оценки (3.3), (3.4) и (3.31), (3.32) видим, что они почти одинаковой аналитической структуры. Однако между ними имеется значительное отличие: соотношения (3.3), (3.4) будут наиболее точными при малых ε ; в оценках (3.31), (3.32) это ограничение может быть снято подходящим выбором параметров суммирующей функции. Следовательно, в конечном итоге можно уменьшать при немалых ε погрешность удовлетворения аппроксимаций (3.13), (3.14) уравнениям равновесия.

РЕЗЮМЕ

При рішенні геометрично нелінійних задач згиба пластин з отвором методом розкладання по параметрі істотно зростає порядок особливостей (сингулярностей) в ітераціях на «нескінченності». Запропоновано новий метод підсумовування рядів з такими сингулярностями. В основу методу покладена побудова таких підсумовуючих функцій, що містять довольні обмежені параметри і функції. Варіюючи зазначеною сваволею, можна поліпшувати збіжність рядів по параметрі, «гасити» порядки особливостей на «нескінченності». Показано, що видозмінені на основі підсумовуючих функцій ланки розкладання по параметрі можуть за певних умов точно задовольняти граничним умовам, а також рівнянням рівноваги (в асимптотическом змісті).

SUMMARY

When solving geometrically nonlinear problems of curving a plate with an aperture through perimeter expansion, the order of peculiarities (singularities) in "infinity" iteration considerably increases. A new method is proposed to sum up the series with such singularities. The method is based on such summing functions, which contain rather limited parameters and functions. If we vary the above-mentioned abused discretion, we can improve convergence of series in perimeter, "suppress" orders of peculiarities in "infinity". It is shown that the exit perimeter expansions varied on the base of summing functions can, under definite circumstances, satisfy boundary condition and equilibrium equations (in asymptotic sense).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Каюк Я.Ф. Кривоблоцкая Л.Н. Сингулярные итерации в нелинейных задачах концентрации напряжений // Теорет. и прикладная механика. – 2002. – Вып. 36. – С. 98-108.
2. Каюк Я. Ф. Некоторые вопросы методов разложения по параметру. – К.: Наук. думка, 1980. – 165 с.
3. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. – М.: Мир, 1967. – 310 с.

Надійшла до редакції 15.05.2002 р.

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТОЛСТОЙ ОБОЛОЧКИ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ В СЛУЧАЕ ИЗГИБА

Л.А. Фильштинский, Ю.Д. Ковалев
Сумский государственный университет

Исследование напряженного состояния толстой изотропной пластины переменной толщины было проведено в работе [1]. В работах [2, 3] с использованием метода возмущения формы границы изучено напряженное состояние различных толстостенных цилиндров конечной длины и составных плит переменной толщины с неканоническими поверхностями раздела. Изгиб слоя (полуслоя) со сквозным некруговым отверстием рассматривался в [4]. Аналогичная задача для слоя с круговым отверстием иными методами решена в [5-7]. В последних работах изучено напряженное состояние полых круговых цилиндров конечной длины или кольцевых плит при действии симметричной или кососимметричной нагрузки. Ниже предлагается новая процедура решения пространственной задачи для толстой оболочки конечной длины в случае изгиба, сводящая соответствующую граничную задачу к бесконечной системе одномерных сингулярных интегральных уравнений. Она позволяет исследовать напряженное состояние оболочек переменной толщины.

Рассмотрим отнесенную к декартовой системе координат $Ox_1x_2\bar{x}_3$ кососимметрично нагруженную толстую цилиндрическую оболочку конечной длины $2h$, ограниченную двумя цилиндрическими поверхностями, направляющие которых представляют собой гладкие замкнутые контуры L_1 и L_2 ($L_1 \cap L_2 = \emptyset$). Пусть основания оболочки $\bar{x}_3 = \pm h$ свободны от сил, а на цилиндрических поверхностях приложена нормальная и касательные нагрузки N , T и Z . Кривизны направляющих цилиндрических поверхностей и компоненты вектора приложенной нагрузки удовлетворяют условию Гельдера [8] на L_j ($j=1,2$) и, кроме того, функции $N=N(x_1, x_2, \bar{x}_3)$, $T=T(x_1, x_2, \bar{x}_3)$, $Z=Z(x_1, x_2, \bar{x}_3)$ разлагаются в ряды Фурье по координате $\bar{x}_3$ на $[-h, h]$.

Граничные условия на цилиндрических поверхностях запишем в виде

$$(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - e^{-2i\psi} (\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12}) = 2(N - iT), \quad \operatorname{Re} \left[e^{i\psi} (\sigma_{13} - i\sigma_{23}) \right] = Z, \quad (1)$$

где ψ – угол внешней нормали к L_j и осью Ox_1 .

Для описания напряженного состояния толстой оболочки будем исходить из однородных решений А. И. Лурье [9]. Они соответствуют однородным условиям на торцах оболочки. Интегральные представления входящих в однородные решения бигармонической и метабигармонических функций запишем в виде

$$F(x_1, x_2) = \int_L p(\zeta) \Delta G ds + \int_L f(\zeta) G ds, \\ \varphi_m(x_1, x_2) = \int_L R_m(\zeta) K_0(\tilde{\sigma}_m r) ds, \quad \psi_k(x_1, x_2) = \int_L q_k(\zeta) K_0(\tilde{\gamma}_k r) ds. \quad (2)$$

Здесь

$$G = r^2 \ln r, \quad r = |\zeta - z|, \quad \zeta - z = re^{i\alpha}, \quad \zeta = \xi_1 + i\xi_2 \in L, \quad L = \bigcup_{j=1}^2 L_j, \quad \operatorname{Im} R_m = 0,$$

$$\operatorname{Re} q_k = A_k, \quad \operatorname{Im} q_k = B_k, \quad z = x_1 + ix_2, \quad \tilde{\sigma}_m = \sigma_m/h, \quad \tilde{\gamma}_k = \gamma_k/h, \quad \sigma_m = (2m+1)\pi/2;$$

$K_n(x)$ – функции Макдональда; $p(\zeta)$, ..., $q_k(\zeta)$ – плотности, подлежащие определению; γ_k – корни соответствующего трансцендентного уравнения [9].

Разложим все четные компоненты тензора напряжения и внешней нагрузки в ряды Фурье вида $U = \sum u_m \cos \sigma_m x_3$, а все нечетные компоненты – в ряды вида $V = \sum v_m \sin \sigma_m x_3$, $x_3 = \bar{x}_3/h$. С учетом этого для коэффициентов Фурье тензора напряжения получим систему граничных условий

$$\left(\sigma_{11}^{(m)} + \sigma_{22}^{(m)} \right) - e^{-2i\psi} \left(\sigma_{22}^{(m)} - \sigma_{11}^{(m)} + 2i\sigma_{12}^{(m)} \right) = 2(N_m - iT_m),$$

$$\operatorname{Re}\left[e^{i\psi}\left(\sigma_{13}^{(m)}-i\sigma_{23}^{(m)}\right)\right]=Z_m \quad (m=0,1,\dots) \quad (3)$$

Используя выражения для напряжений из [9] и представления (2), вычисляя по ним коэффициенты Фурье $\sigma_{ij}^{(m)}$ и подставляя их предельные значения в точке $z=\zeta_0 \in L$ в граничные условия (3), получаем бесконечную систему одномерных сингулярных интегродифференциальных уравнений. Для ее компактной записи в (3) введем дополнительный индекс "n" ($n=1, 2$), соответствующий двум направляющим замкнутым контурам L_1 и L_2 . С учетом этого система сингулярных интегродифференциальных уравнений запишется в виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu}\left(N_m^{(n)}-iT_m^{(n)}\right) &= a_1^{(m)} \frac{dp_n}{ds_{n0}} + a_{n0}^{(m)} p_n + b_1^{(m)} \frac{df_n}{ds_{n0}} + c_1^{(m)} \frac{dR_m^{(n)}}{ds_{n0}} + c_{n0}^{(m)} R_m^{(n)} + \\ &+ \sum_{j=1}^2 \left\{ \int_{L_j} \frac{dp_j}{ds_j} G_{1jn}^{(m)} ds_j + \int_{L_j} p_j G_{2jn}^{(m)} ds_j + \int_{L_j} \frac{df_j}{ds_j} G_{3jn}^{(m)} ds_j + \int_{L_j} f_j G_{4jn}^{(m)} ds_j + \int_{L_j} \frac{dR_m^{(j)}}{ds_j} G_{5jn}^{(m)} ds_j + \right. \\ &+ \left. \int_{L_j} R_m^{(j)} G_{6jn}^{(m)} ds_j \right\} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_{1k}^{(m)} \frac{dA_k^{(n)}}{ds_{n0}} + A_k^{(n)} a_{n0k}^{(m)} + b_{1k}^{(m)} \frac{dB_k^{(n)}}{ds_{n0}} + B_k^{(n)} b_{n0k}^{(m)} \right\} + \\ &+ \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_{L_j} \frac{dA_k^{(j)}}{ds_j} G_{1kjn}^{(m)} ds_j + \int_{L_j} A_k^{(j)} G_{2kjn}^{(m)} ds_j + \int_{L_j} \frac{dB_k^{(j)}}{ds_j} G_{3kjn}^{(m)} ds_j + \int_{L_j} B_k^{(j)} G_{4kjn}^{(m)} ds_j \right\}, \\ \frac{1}{\mu} Z_m^{(n)} &= f_n \alpha_m^* + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ A_k^{(n)} a_{1k}^{*(m)} + B_k^{(n)} b_{1k}^{*(m)} \right\} + \sum_{j=1}^2 \left\{ \int_{L_j} f_j g_{1jn}^{(m)} ds_j + \int_{L_j} R_m^{(j)} g_{2jn}^{(m)} ds_j + \right. \\ &+ \left. \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_{L_j} A_k^{(j)} g_{1kjn}^{(m)} ds_j + \int_{L_j} B_k^{(j)} g_{2kjn}^{(m)} ds_j \right] \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a_1^{(m)} &= 4\pi i \delta_m^*, \quad b_1^{(m)} = -4\pi i \varepsilon_m^*, \quad c_1^{(m)} = \pi \sigma_m^*, \quad a_{n0}^{(m)} = 4\pi k_{n0} \delta_m^*, \quad b_{n0}^{(m)} = -4\pi k_{n0} \varepsilon_m^* \\ c_{n0}^{(m)} &= -\pi i k_{n0} \sigma_m^*, \quad V_{jn} = \frac{e^{i(2\psi_{n0}-\psi_j)}}{\zeta_j - \zeta_{n0}}, \quad G_{1jn}^{(m)} = 4i \delta_m^* V_{jn}, \quad G_{2jn}^{(m)} = 4\delta_m^* k_1 V_{jn}, \\ G_{3jn}^{(m)} &= -4i \varepsilon_m^* V_{jn}, \quad G_{4jn}^{(m)} = -4k_j \varepsilon_m^* V_{jn} + \delta_m^* e^{2i(\psi_{n0}-\alpha_{jn0})} + 4\delta_m^{**} (\ln r_{jn0} + 1), \\ G_{5jn}^{(m)} &= \sigma_m^* V_{jn}, \quad G_{6jn}^{(m)} = -i \sigma_m^* k_j V_{jn} + \frac{1}{2} i \sigma_m^* \sigma_m^2 K_2^* (\tilde{\sigma}_m r_{jn0}) e^{2i(\psi_{n0}-\alpha_{jn0})}, \\ a_{1k}^{(m)} &= -2\pi i h^* \operatorname{Re} \alpha_k^{(m)}, \quad b_{1k}^{(m)} = 2\pi i h^* \operatorname{Im} \alpha_k^{(m)}, \\ a_{n0k}^{(m)} &= -2\pi k_{n0} h^* \operatorname{Re} \alpha_k^{(m)}, \quad b_{n0k}^{(m)} = 2\pi k_{n0} h^* \operatorname{Im} \alpha_k^{(m)}, \\ R_{1kjn}^{(m)} &= \operatorname{Re} \left\{ \tilde{\gamma}_k^2 \alpha_k^{(m)} K_2^* (\tilde{\gamma}_k r_{jn0}) \right\}, \quad R_{2kjn}^{(m)} = \operatorname{Re} \left\{ \beta_n^{(m)} K_0 (\tilde{\gamma}_k r_{jn0}) \right\}, \\ R_{3kjn}^{(m)} &= \operatorname{Im} \left\{ \tilde{\gamma}_k^2 \alpha_k^{(m)} K_2^* (\tilde{\gamma}_k r_{jn0}) \right\}, \quad R_{4kjn}^{(m)} = \operatorname{Im} \left\{ \beta_n^{(m)} K_0 (\tilde{\gamma}_k r_{jn0}) \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_{1kjn}^{(m)} &= -2ih^* \operatorname{Re}(\alpha_k^{(m)}) V_{jn}, \quad G_{2kjn}^{(m)} = -2h^* k_1 \operatorname{Re}(\alpha_k^{(m)}) V_{jn} + h^* R_{1kjn}^{(m)} e^{2i(\psi_{n0} - \alpha_{jn0})} + \\
 &+ 2h^{**} R_{2kjn}^{(m)}, \quad G_{3kjn}^{(m)} = 2ih^* \operatorname{Im}(\alpha_k^{(m)}) V_{jn}, \quad G_{4kjn}^{(m)} = 2h^* k_1 \operatorname{Im}(\alpha_k^{(m)}) V_{jn} - \\
 &- h^* R_{3kjn}^{(m)} e^{2i(\psi_{n0} - \alpha_{jn0})} - 2h^{**} R_{4kjn}^{(m)}; \quad a_m^* = -4\pi\lambda_m^{**}, \quad a_{1k}^{*(m)} = 2\pi\sigma^{**} \operatorname{Re}\kappa_k^{(m)}, \\
 b_{1k}^{*(m)} &= -2\pi\sigma^{**} \operatorname{Im}\kappa_k^{(m)}, \quad W_{jn} = \frac{e^{i\psi_{n0}}}{\zeta_j - \zeta_{n0}}, \quad g_{1jn}^{(m)} = -4\lambda_m^{**} \operatorname{Re}W_{jn}, \\
 g_{2jn}^{(m)} &= \sigma^* \operatorname{Re}\left\{ iW_{jn} + i\tilde{\sigma}_m K_1^* (\tilde{\sigma}_m r_{jn0}) e^{i(\psi_{n0} - \alpha_{jn0})} \right\}, \quad a_{1k}^{*(m)} = 2\pi\sigma^{**} \operatorname{Re}\kappa_k^{(m)}, \\
 b_{1k}^{*(m)} &= -2\pi\sigma^{**} \operatorname{Im}\kappa_k^{(m)}, \quad \tilde{R}_{1kjn}^{(m)} = \operatorname{Re}\left\{ \tilde{\gamma}_k \kappa_k^{(m)} K_1^* (\tilde{\gamma}_k r_{jn0}) \right\}, \quad \tilde{R}_{2kjn}^{(m)} = \operatorname{Im}\left\{ \tilde{\gamma}_k \kappa_k^{(m)} K_1^* (\tilde{\gamma}_k r_{jn0}) \right\}, \\
 g_{1kjn}^{(m)} &= 2\sigma^{**} \left\{ \operatorname{Re}\kappa_k^{(m)} \operatorname{Re}W_{jn} + \tilde{R}_{1kjn}^{(m)} \cos(\psi_{n0} - \alpha_{jn0}) \right\}, \\
 g_{2kjn}^{(m)} &= -2\sigma^{**} \left\{ \operatorname{Im}\kappa_k^{(m)} \operatorname{Re}W_{jn} + \tilde{R}_{2kjn}^{(m)} \cos(\psi_{n0} - \alpha_{jn0}) \right\}, \\
 \delta_m &= \frac{2(-1)^m}{\sigma_m^2}, \quad \varepsilon_m = \frac{\sigma(-1)^m}{\sigma_m^2} \left(1 - \frac{2}{\sigma_m^2} \right), \quad \lambda_m = \frac{2(-1)^m}{\sigma_m}, \quad \Lambda_m = 2(-1)^m \left(\frac{1}{\sigma_m} - \frac{2}{\sigma_m^3} \right), \\
 \varepsilon_m^* &= h^3 (\sigma + 1/3) \varepsilon_m, \quad \lambda_m^{**} = 2\sigma h^2 (\lambda_m - \Lambda_m), \quad \delta_m^* = 2(\sigma + 1) h \delta_m, \quad \delta_m^{**} = (3\sigma - 1) h \delta_m, \\
 h^{**} &= \frac{1}{h}, \quad \sigma_m^* = \frac{4\sigma h^2}{\sigma_m}, \quad h^* = 2h, \quad \sigma^* = 2\sigma h, \quad \sigma^{**} = 2\sigma, \quad \sigma = \frac{1}{1 - 2\nu}, \\
 \mu &= \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad k_j = \frac{d\psi_j}{ds_j}, \quad k_{n0} = \frac{d\psi_{n0}}{ds_{n0}}, \quad K_1^*(x) = K_1(x) - \frac{1}{x}, \quad K_2^*(x) = K_2(x) - \frac{2}{x^2},
 \end{aligned}$$

$\alpha_k^{(m)}, \kappa_k^{(m)}, \beta_k^{(m)}$ представляють собою коефіцієнти Фур'є розкладання в ряд величин $\alpha_k, \kappa_k, \beta_k$, вираження для яких приведені в [9].

Численні рішення нескінченної системи (4) здійснювалися методом механічних квадратів [10] з наступним застосуванням методу редукції. Достаточна точність результатів (відносна похибка нарахуваних величин не перевищує одного відсотка) досягається при $m=10$. Поточна збіжність побудованого алгоритму для забезпечення вище згаданої точності досягається при наступній дискретизації направляючих циліндричних поверхностей L_j ($j=1, 2$): а) направляючі циліндричні поверхності L_j ($j=1, 2$) представляють собою концентричні кола. В цьому випадку кількість точок розбиття достатньо взяти рівним 31 на кожному контурі. Це відповідає СЛАУ з 1860 рівнянь; б) якщо контури L_j ($j=1, 2$) відрізняються від згаданих вище і зміщені один відносно одного, то кількість точок розбиття для досягнення згаданої точності в розглянутому прикладі не перевищує 61 на кожному контурі. Це відповідає СЛАУ з 3660 рівнянь.

Для характеристики напруженого стану на циліндричних поверхностях розглянемо три компоненти вектора напруження:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{11} \sin^2 \theta + \sigma_{22} \cos^2 \theta - 2\sigma_{12} \cos \theta \sin \theta, \\
 \sigma_{\theta z} &= -\sigma_{13} \sin \theta + \sigma_{23} \cos \theta, \quad \theta = \psi - \pi, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{33}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Послідовність їх обчислення така: спочатку численно розв'язується система інтегродиференціальних рівнянь граничної задачі, після чого визначаються коефіцієнти Фур'є $\sigma_{ij}^{(m)}$, потім по (5) з урахуванням представлень (2) розраховуються шукані напруження на циліндричній поверхності.

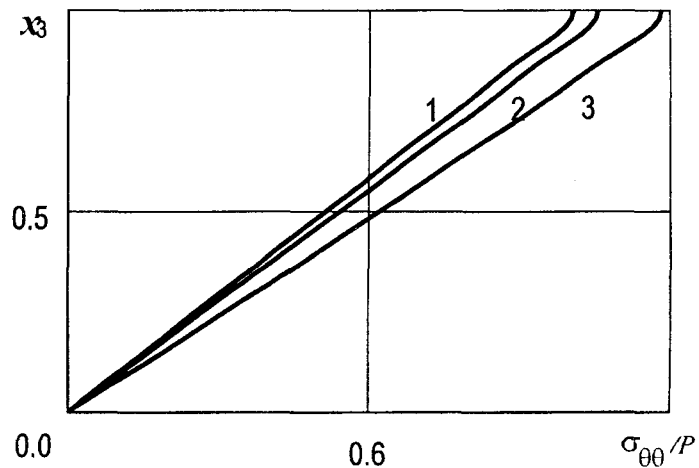
В качестве примера рассмотрим толстую оболочку, направляющие цилиндрических поверхностей которой L_1 и L_2 (L_1 – внешний контур) таковы:

$$L_1: \xi_1^{(1)} = R_1^{(1)} \cos \varphi_1, \quad \xi_2^{(1)} = R_2^{(1)} \sin \varphi_1, \quad 0 \leq \varphi_1 < 2\pi;$$

$$L_2: \xi_1^{(2)} = R_1^{(2)} \cos \varphi_2 + d_1, \quad \xi_2^{(2)} = R_2^{(2)} \sin \varphi_2 + d_2, \quad 0 \leq \varphi_2 < 2\pi;$$

Пусть внутренняя цилиндрическая поверхность оболочки свободна от сил, а на внешней поверхности действует нагрузка $2(N - iT) = Px_3(1 + e^{-2i\psi})$. Ниже приведены результаты расчетов значений $\sigma_{\theta\theta}/P$ для заданной конфигурации.

На рисунке показаны эпюры распределения относительного окружного напряжения $\sigma_{\theta\theta}/P$ вдоль «толщинной» координаты в точке $\varphi_2 = \pi/2$ при $h/R_1^{(2)} = 1$, $R_1^{(2)} = R_2^{(2)} = 1$, $R_1^{(1)} = 10$, $R_2^{(1)} = 5$, $d_2 = 0$. Кривые 1-3, построены для вариантов $d_1 = 0$; 6 и 8 соответственно. Расчеты проведены для значения коэффициента Пуассона $\nu = 0,3$.



РЕЗЮМЕ

Запропонована нова процедура розв'язку просторої кососиметричної задачі теорії пружності для товстої оболонки кінцевої довжини. Крайова задача зведена до системи одновимірних сингулярних інтегральних рівнянь. Придано результати обчислень характеристичних напружень.

SUMMARY

A new procedure of spatial mixed skew-symmetric problem of theory of elasticity for a finite length thick shell is proposed. The boundary problem are reduced to system of one – dimensional singular integral equations. The results of calculations of characteristic stresses are presented.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Григоренко Я.М., Мукоел А.П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ.– К.: Вища шк., 1983.– 286 с.
2. Гузь А.Н., Немиш Ю.Н. Методы возмущений в пространственных задачах теории упругости.– К.: Вища шк., 1982.– 352 с.
3. Немиш Ю.Н. Элементы механики кусочно-однородных тел с неканоническими поверхностями раздела.– К.: Наук. думка, 1989.– 312 с.
4. Григолюк Э.И., Ковалев Ю.Д., Фильштинский Л.А. Изгиб полуслоя, ослабленного сквозным отверстием // Докл. РАН.– 1995.– 345, № 1.– С. 54-56.
5. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров.– К.: Наук. думка, 1978.– 264 с.
6. Космодамианский А.С., Шалдырван В.А. Толстые многосвязные пластины.– К.: Наук. думка, 1978.– 237с.
7. Улитко А.Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости.– К.: Наук. думка, 1979.– 261 с.
8. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения.– М.: Физматгиз, 1962, 511 с.
9. Лурье А.И. К теории толстых плит // Прикл. математика и механика.– 1942.– Т. 6, вып.2/3.– С. 151-168.
10. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях.– М.: Наука, 1986.– 253 с.

Надійшла до редакції 15.03.2002 р.

УДК 539.376

НЕЛИНЕЙНАЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ ОДНОРОДНЫХ И ИЗОТРОПНЫХ СРЕД ПРИ ДЛИТЕЛЬНОМ СТАТИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

В.П. Голуб

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Решение многих современных задач теории ползучести связано с необходимостью использования определяющих уравнений, позволяющих описать процесс накопления деформаций во времени вплоть до момента разрушения. Этот процесс характеризуется, как правило, наличием всех стадий ползучести, включая неустановившуюся, установившуюся и ускоренную, и как следствие – существенной нелинейностью свойств деформаций.

В качестве определяющих уравнений нелинейной ползучести обычно используются нелинейные соотношения, включающие интегральные уравнения Вольтерра 2-го рода [1, 2], и нелинейные соотношения, учитывающие кинетику поврежденности [1, 3-5]. Детальный анализ возможностей этих соотношений представлен в [2, 4, 6]. В частности показано, что все эти соотношения идентифицируются по результатам аппроксимации первичных диаграмм ползучести и длительной прочности, что практически исключает их использование при решении одномерных задач прогнозирования. В настоящей работе расчет деформаций ползучести осуществляется на основе изохронной теории ползучести [7, 8], лишенной этих недостатков.

1. Постановка задачи и исходные соотношения. Рассматривается одноосная ползучесть однородных и изотропных материалов при стационарном температурно-силовом нагружении. Режим нагружения зададим условием

$$\sigma(t) = \sigma_q H(t) \quad (q = \overline{1, \ell}), \quad (1.1)$$

где $\sigma_q = \text{const}$ – приложенное напряжение, причем $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_\ell$, $(\sigma_q)_{\max} < \sigma_Y$; σ_Y – предел текучести материала; $H(t)$ – функция Хевисайда ($H = 0$ при $t < 0$ и $H = 1$ при $t \geq 0$).

Исходное определяющее уравнение изохронной теории ползучести для скорости ползучести задается в форме [7, 9]

$$\frac{d\varepsilon^r}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\sigma(t) + \int_0^t K(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \right] \left[\frac{d\varphi_0(\varepsilon^r)}{d\varepsilon^r} \right]^{-1} \quad (1.2)$$

и при нагружении согласно (1.1) приводится к виду

$$\frac{d\varepsilon^r}{dt} = \sigma_q \frac{dK^*(t)}{dt} \left[\frac{d\varphi_0(\varepsilon^r)}{d\varepsilon^r} \right]^{-1}. \quad (1.3)$$

Здесь $\varepsilon^r = \varepsilon^e + \varepsilon^c$ – реологическая компонента; ε^e – начальная упругая деформация; ε^c – деформация ползучести; $K(t-\tau)$ – функция влияния; $K^*(t)$ – интегральный временной оператор; $\varphi_0(\cdot)$ – уравнение диаграммы мгновенного деформирования.

Задавая функцию $K^*(t)$ в виде [1]

$$K^*(t) = \frac{x}{1-\alpha} t^{1-\alpha} \quad (1.4)$$

и подставляя (1.4) в (1.3), для скорости ползучести после несложных преобразований получаем

$$\frac{d\varepsilon^r}{dt} = ab \frac{\sigma_q}{t^{1-b}} \left[\frac{d\varphi_0(\varepsilon^r)}{d\varepsilon^r} \right]^{-1}, \quad (1.5)$$

где принято $a = x/(1-\alpha)$, $b = 1-\alpha$ ($a > 0$; $b < 1$).

Для решения задач нахождения и прогнозирования деформаций ползучести на основе уравнения (1.5) необходимо располагать функцией $\varphi_0(\cdot)$ и значением реологических констант a и b . Эти характеристики определяются по результатам стандартных испытаний на растяжение и ползучесть при одном

фиксированном значении напряжения σ_q . Подробно методика определения материальных функций и констант изложена в [7].

2. Нелинейная ползучесть упрочняющихся сред. Особенность определяющего уравнения (1.5) изохронной теории ползучести заключается в том, что это уравнение задает скорость ползучести зависящей от вида функции $\varphi_0(\cdot)$, отражающей характер мгновенного деформирования материала. В зависимости от вида функции $\varphi_0(\cdot)$ можно рассматривать линейно и нелинейно упругие или упрочняющиеся, а также идеально-пластичные материалы. В настоящей работе расчет деформации нелинейной ползучести на основе уравнения (1.5) дается на примере упрочняющихся материалов.

2.1. Линейно-упрочняющиеся материалы. Мгновенное деформирование линейно-упрочняющихся материалов зададим соотношением

$$\varphi_0(\varepsilon) = \begin{cases} E\varepsilon, & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_Y; \\ E\varepsilon_Y + E_*(\varepsilon - \varepsilon_Y), & \varepsilon_Y \leq \varepsilon \leq \varepsilon_B, \end{cases} \quad (2.1)$$

где E - модуль упругости; E_* - модуль линейного упрочнения; ε_Y - деформация, соответствующая пределу текучести σ_Y ; ε_B - деформация, соответствующая пределу прочности σ_B . Графическая интерпретация функции (2.1) показана на рис. 1а.

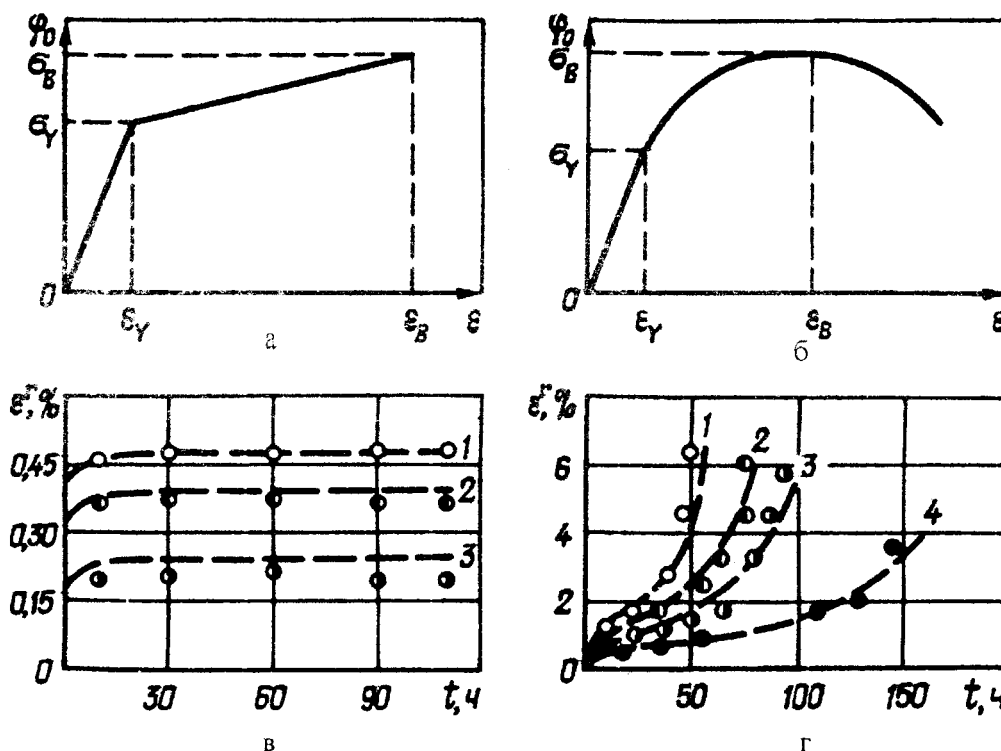


Рис.1. Диаграммы мгновенного деформирования (а, б) и расчетные (линии) и экспериментальные (точки) диаграммы ползучести (в, г) материалов с линейным (а, б) и нелинейным (б, г) упрочнением: в) сплав ЭИ481, $\theta = 600$ °C, $\sigma = 350$ (1), 300 (2), 200 (3) МПа; г) сплав ЭИ867, $\theta = 900$ °C, $\sigma = 350$ (1), 325 (2), 300 (3), 135 (4) МПа.

Заменяя в (2.1) ε на ε^r и подставляя это в (1.5), для скорости ползучести линейно-упрочняющихся материалов получаем уравнение

$$\frac{d\varepsilon^r}{dt} = \begin{cases} ab \frac{\sigma_q}{E} \frac{1}{t^{1-b}}, & \varepsilon^e \leq \varepsilon^r \leq \varepsilon_Y; \\ ab \frac{\sigma_q}{E_*} \frac{1}{t^{1-b}}, & \varepsilon_Y \leq \varepsilon^r \leq \varepsilon_B, \end{cases} \quad (2.2)$$

интегрируя которое с учетом начальных условий $\varepsilon^r = \varepsilon^e$ при $t = 0$ и $\varepsilon^r = \varepsilon_Y$ при $t = t_Y$ для деформаций ε^r нелинейной ползучести соответственно находим

$$\varepsilon^r = \begin{cases} \frac{\sigma_q}{E} + a \frac{\sigma_q}{E} t^b, \\ \frac{\sigma_q}{E} \left(1 - \frac{E}{E_*}\right) + \frac{\sigma_q}{E} (1 + at^b). \end{cases} \quad (2.3)$$

После интегрирования второго соотношения (2.2) величина t_Y определяется из первого соотношения (2.3), исходя из условия $\varepsilon^r = \varepsilon_Y$.

Из структуры уравнения (2.2) видно, что с увеличением времени t скорость ползучести $\dot{\varepsilon}^r$ при постоянном напряжении σ_q будет уменьшаться во всем диапазоне изменения деформаций. Отсюда следует, что ползучесть линейно упрочняющихся материалов будет только неустановившейся.

Результаты расчетов, выполненные по уравнению (2.3), сопоставлены на рис. 1в. В качестве примера с экспериментальными данными для жаропрочного сплава ЭИ481 при температуре $\theta = 600^\circ\text{C}$. При проведении расчетов использовались следующие значения материальных констант: $E = 9,0 \cdot 10^4$ МПа, $E_* = 2,8 \cdot 10^3$, $\sigma_Y = 285$ МПа, $a = 0,059 \text{ ч}^{-1}$, $b = 0,33$. Оценка степени согласования результатов расчета с экспериментальными данными осуществляется на основе гипотез о параллельности и совпадении линий регрессии. Гипотезы проверялись с помощью критерия Фишера [10]. В качестве экспериментальной линии регрессии использовалась сплайн-аппроксимация экспериментальных кривых ползучести [11]. В результате было установлено, что различие остаточных дисперсий по критерию Фишера не является значимым и расчет удовлетворительно согласуется с экспериментом.

2.2. *Нелинейно-упрочняющиеся материалы.* Мгновенное деформирование нелинейно-упрочняющихся материалов задается соотношением

$$\varphi_0(\varepsilon) = \begin{cases} E\varepsilon, & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_Y; \\ E\varepsilon_Y + C(\varepsilon - \varepsilon_Y)^n, & \varepsilon_Y \leq \varepsilon \leq \varepsilon_B, \end{cases} \quad (2.4)$$

где C , n – параметры нелинейного упрочнения ($C > 0$; $n < 1$). Геометрическая интерпретация функции (2.4) показана на рис. 1б.

Заменяя в (2.3) ε на ε^r и подставляя в (1.5), для скорости ползучести нелинейно-упрочняющихся материалов получаем уравнение

$$\frac{d\varepsilon^r}{dt} = \begin{cases} ab \frac{\sigma}{E} \frac{1}{t^{1-b}}, & \varepsilon^e \leq \varepsilon^r \leq \varepsilon_Y; \\ ab \frac{\sigma}{Cn} \frac{1}{t^{1-b}} (\varepsilon^r - \varepsilon_Y)^{1-n}, & \varepsilon_Y < \varepsilon^r \leq \varepsilon_B, \end{cases} \quad (2.5)$$

интегрируя которое с учетом начальных условий $\varepsilon^r = \varepsilon^e$ при $t = 0$ и $\varepsilon^r = \varepsilon_Y$ при $t = t_Y$ для деформаций ε^r нелинейной ползучести соответственно получаем

$$\varepsilon^r = \begin{cases} \frac{\sigma_q}{E} + a \frac{\sigma_q}{E} t^b, \\ \frac{\sigma_Y}{E} + \left\{ \frac{1}{C} [(1 + at^b) \sigma_q - \sigma_Y] \right\}^{\frac{1}{n}}. \end{cases} \quad (2.6)$$

Как видно из структуры уравнения (2.5), в области малых деформаций ($\varepsilon^r < \varepsilon_Y$) ползучесть нелинейно-упрочняющихся материалов также будет неустановившейся. В области больших деформаций ($\varepsilon^r > \varepsilon_Y$) в соответствии с уравнением (2.5) на кривой ползучести должна существовать точка перегиба [7], после которой скорость ползучести будет возрастать. Отсюда следует, что ползучесть нелинейно-упрочняющихся материалов будет включать все характерные стадии.

Результаты расчетов, выполненные по уравнению (2.6), сопоставлены на рис.1г при температуре $\theta = 900^\circ\text{C}$ с экспериментальными данными для жаропрочного сплава ЭИ867. В расчетах использовались следующие значения материальных констант: $E = 7,45 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_Y = 430$ МПа, $C = 8,2 \cdot 10^3$ МПа, $m = 0,41$, $a = 0,078 \text{ ч}^{-1}$, $b = 0,55$. Сопоставление, также проведенное с использованием сравнительного регрессионного анализа, показало весьма удовлетворительное согласование результатов расчета с экспериментом.

Таким образом, одномерные задачи ползучести связаны в основном с прогнозированием деформаций ползучести, с расчетом деформаций ползучести при ступенчатом и циклическом нагружении, а также с прогнозированием времени до разрушения. Решение некоторых из этих задач может быть осуществлено на основе теорий ползучести наследственного типа и теорий ползучести, включающих эволюционные уравнения для параметра поврежденности. Основные трудности при этом возникают в связи с процедурой идентификации материальных констант, так что в результате определяющие уравнения таких теорий сводятся к тривиальным эмпирическим соотношениям. Существенно большими возможностями располагают в этом плане определяющие уравнения изохронной теории ползучести. Отличительная их особенность заключается в том, что они учитывают характер деформационного упрочнения материала и содержат легко воспроизводимую методику определения материальных констант. Уравнения апробированы на решении задачи прогнозирования деформаций нелинейной ползучести некоторых металлических материалов в области высоких температур. В частности, экспериментально подтверждено, что ползучесть линейно-упрочняющихся материалов является только неустановившейся, а все три стадии ползучести реализуются в нелинейно упрочняющихся материалах.

РЕЗЮМЕ

Розглянуто задачу прогнозування деформацій нелінійного повзіння однорідних та ізотропних матеріалів за умов одновісного однократного навантаження. Розв'язок будується на підставі визначальних рівнянь ізохронної теорії повзіння, що встановлює кореляцію проміж характером повзіння та характером миттєвого деформування. Розраховано та співставлено із експериментом діаграми повзіння двох жароміцних сплавів для декількох рівнів напружень. Експериментально підтверджено, що повзіння матеріалів із лінійним зміцненням є тільки неусталене, в той час як усі стадії повзіння реалізуються у матеріалах із нелінійним зміцненням.

SUMMARY

The problem of the non-linear creep strain prediction of homogeneous and isotropic materials under uniaxial single static loading is considered. The solution is constructed on the basis of creep constitutive equations of the isochronous creep theory which establishes the correlation between creep behaviour and momentary deformation characteristics. Creep diagrams for two heat-resistant alloys with several levels of stresses have been calculated and compared with experiment. It is justified experimentally that, creep of linear strain-hardening materials is only nonsteady, and all creep stages occur in non-linear strain-hardening materials.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций.— М.: Наука, 1966.— 752 с.
2. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация.— М.: Высшая школа, 1976.— 278 с.
3. Hayhurst D.R. Stress redistribution and rupture due to creep in a uniformly stretched thin plate containing a circular hole // J. Mech. Phys. Solids.— 1973.— Vol.20.— P.381-390.
4. Москвитин В.В. Циклические нагружения элементов конструкций.— М.: Наука, 1981.— 344 с.
5. Dunne F.P.E., Othman A.M., Hall F.R., and Hayhurst D.R. Representation of uniaxial creep curves using continuum damage mechanics // Int. J. Mech. Sci.— 1990.— Vol.32, N11.— P.945-957.
6. Golub V.P. The non-linear mechanics of continual damage and its application to problems of creep and fatigue // Int. Appl. Mech.— 2000.— Vol.36, N3.— P.303-342.
7. Голуб В.П., Погребняк А.Д. Высокотемпературное разрушение материалов при циклическом нагружении.— Киев: Наук. думка, 1994.— 228 с.
8. Golub V.P. Experimental analysis of high-temperature creep, fatigue and damage. 2. Basic laws // Int. Appl. Mech.— 2001.— Vol.37, N5.— P.565-601.
9. Golub V.P. Modelling of deformation and fracture processes of structural materials under creep conditions // ZAMM.— 1996.— Vol.76, N5.— P.169-170.
10. Хальд А. Математическая статистика с техническими приложениями.— М.: Изд-во иностр. лит., 1946.— 664 с.
11. Голуб В.П., Погребняк А.Д., Романенко И.Б. О применении сплайн-аппроксимаций в задачах идентификации параметров ползучести // Прикладная механика.— 1997.— Т.33, № 6.— С. 52-61.

Надійшла до редакції 10.04.2002 р.

УДК 539.3

ДВУКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ТОНКОСТЕННЫХ ПРОФИЛЕЙ ПРИ СЖАТИИ И ИЗГИБЕ

А. И. Маневич, С. В. Ракша*

Днепропетровский Национальный университет,

*Днепропетровский государственный технический университет железнодорожного транспорта

Задачи весовой оптимизации элементов конструкций, в частности, тонкостенных стержней, рассматривались для определённых видов нагрузок - сжатия, изгиба [1–3]. Оптимальные профили поперечных сечений, полученные для отдельных нагружений, как правило, существенно различаются. Тонкостенные стержни подвергаются действию различных нагрузок. Поэтому возникает необходимость учета многовариантного характера нагружения при выборе оптимальных параметров. Эта проблема может быть сформулирована и решена в рамках теории многокритериальной (векторной) оптимизации.

В данной работе на примере двутаврового профиля рассматривается задача двукритериальной оптимизации тонкостенных стержней открытого поперечного сечения в случае сжатия и изгиба, при ограничениях по общей (изгибной и изгибно-крутильной) и местной потере устойчивости. Вектор целевой функции включает осевую силу и изгибающие моменты. Задача решается при помощи эффективного метода нелинейного программирования. Данная работа является продолжением и развитием работы по двукритериальной оптимизации стержней с поперечным сечением типа швеллера [4].

Постановка задачи и метод решения. Рассмотрим стержень двутаврового профиля (рис. 1). Будем считать заданными длину стержня L , свойства материала (модуль упругости E , коэффициент Пуассона ν), варьируемыми – размеры сечения (толщина и ширина стенки t_w , b_w и полка t_f , b_f).

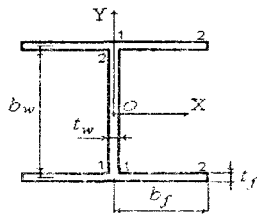


Рис. 1

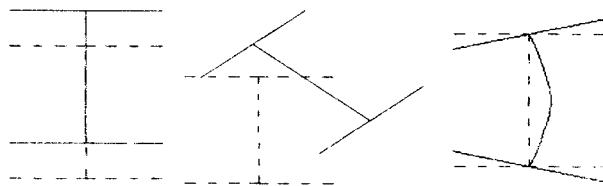


Рис. 2

Для рассматриваемого стержня были решены последовательно следующие задачи оптимизации поперечного сечения: по единственному критерию (когда имеет место максимум критической силы при сжатии P или максимум изгибающего момента M_x для данной общей площади поперечного сечения); построения Парето-оптимальных поперечных сечений в рамках двукритериальной задачи оптимизации, когда компонентами вектора целевой функции являются сжимающая сила и изгибающий момент. При вычислении критических значений силы и изгибающего момента будем учитывать общую изгибную, изгибно-крутильную (боковое выпучивание) и местные формы потери устойчивости (рис. 2). Критические напряжения общей потери устойчивости для изгибной и изгибно-крутильной форм при сжатии и изгибе определялись по теории тонкостенных стержней [5]. При расчёте местного выпучивания стержень рассматривался как соединение пластин и решение задачи устойчивости строилось путём сопряжения решений для отдельных пластин с точными условиями сопряжения на линиях контакта. В случае изгиба каждая из пластин разбивалась дополнительно на отдельные полосы, для которых продольное напряжение могло рассматриваться как постоянное по ширине [6]. При этом критические напряжения местного выпучивания вычислялись для широкого диапазона чисел продольных полуволн, т.е. вместо одного ограничения рассматривался ряд ограничений (как правило, для значений $m=2-25$). Для общности анализа все расчёты выполнялись в следующих безразмерных параметрах веса, силы, момента и напряжений:

$$G^* = AL^{-2} 10^3, P^* = PL^{-2} E^{-1} 10^6, M^* = ML^{-3} E^{-1} 10^8, \sigma^* = \sigma E^{-1} 10^3,$$

где A - площадь поперечного сечения, которое также характеризуется параметрами b_f/b_w , t_w/b_w , t_f/t_w .

Так как в расчётах устойчивости использовалась линейная теория для упругого материала, полученное решение применимо в ограниченном диапазоне относительно низких значений параметра веса G^* , для обычно используемых материалов. Для более высоких значений G^* оно определяет некоторую идеализированную оптимальную конфигурацию (в предположении абсолютной упругости материала).

Задача оптимизации ставилась как задача нелинейного программирования и решалась линейризованным методом приведенного градиента [7], который во всех случаях успешно справлялся с задачей. Решение задачи оптимизации позволяет выразить все оптимальные безразмерные параметры через един-

ственный ведущий параметр G^* (при задании длины L определяются все размерные параметры). Рассматривался диапазон G^* (0; 0.6), в котором допущение об упругой работе материала можно считать оправданным, для обычных материалов (согласно результатам данного решения).

Оптимизация по единственному критерию Рассмотрим вначале результаты решения задачи оптимизации для чистого сжатия ($\max P$) и чистого изгиба в плоскости стенки ($\max M_x$). На рис. 3, а, б в, представлены зависимости безразмерных параметров поперечного сечения от параметра веса G^* .

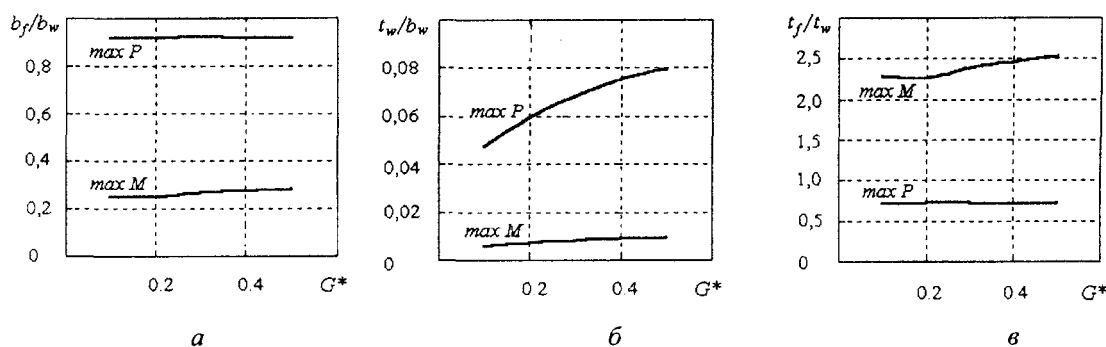


Рис. 3

Как следует из рис. 3, при оптимизации по сжимающей силе во всем диапазоне изменения G^* почти постоянны b_f/b_w и t_f/t_w и составляют: $b_f/b_w = 0.918 - 0.920$, $t_f/t_w = 0.716 - 0.732$. Параметр t_w/b_w возрастает с ростом G^* . Для оптимальных балок при изгибе все эти параметры зависят от G^* и далеки от значений, полученных для случая сжатия.

Оптимальные поперечные сечения при сжатии и изгибе оказываются существенно различными. На рис. 4 сопоставлены поперечные сечения оптимальных двутавров при сжатии и изгибе для $G^*=0.4$ при $L=1$ м. Оптимальный двутавр при сжатии равноустойчив по четырём формам потери устойчивости: по двум изгибным формам (изгибы в двух плоскостях), по крутильной форме и по местному выпучиванию. Оптимальный двутавр при изгибе равноустойчив по двум формам: по боковому выпучиванию (изгибно-крутильная форма) и по местному выпучиванию.

На рис. 5 представлены зависимости P^*-G^* и $M_x^*-G^*$ для оптимальных двутавров в однокритериальной оптимизации по силе и по моменту. Отметим, что эти кривые с высокой точностью аппроксимируются степенными зависимостями (с показателями степени соответственно 5/3 и 2).

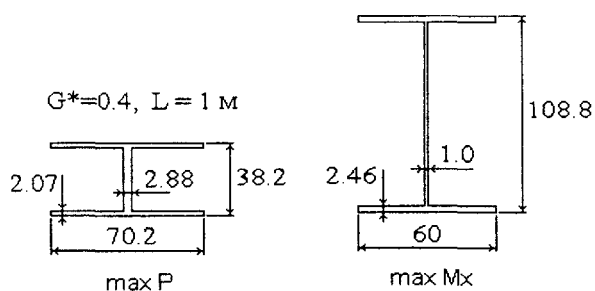


Рис. 4

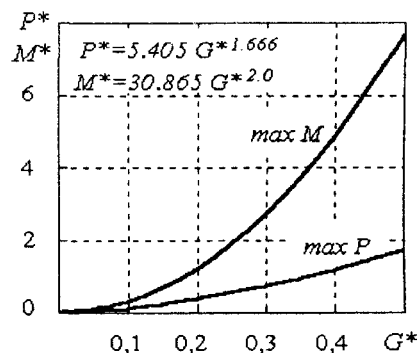


Рис. 5

Двукритериальная оптимизация. Парето-оптимальные проекты. При двукритериальной оптимизации были получены Парето-оптимальные решения, включающие оптимальные двутавры при любых комбинациях продольной силы P^* и изгибающего момента M_x^* , для ряда значений параметра G^* . Парето-кривые определялись максимизацией P^* с ограничением на M_x^* , постепенно увеличивающем M_x^* от значения для оптимального стержня при сжатии до значения для оптимального момента при изгибе.

На рис. 6 представлены Парето-кривые в плоскости $P^*-M_x^*$ для нескольких значений параметра G^* (сплошные линии). Пунктирные линии соответствуют однокритериальным оптимизациям (каждая точка пунктирной линии - значения критической силы и критического момента для оптимального двутавра при некотором G^* , для случая $\max P$ или $\max M_x$).

На рис. 7 показано изменение двух безразмерных параметров поперечного сечения вдоль этих Парето-кривых. Крайние левые (нижние) точки соответствуют оптимуму по изгибающему моменту, крайние правые (верхние) - оптимуму по силе. С изменением отношения момент/сила эти параметры меняются по закону, близкому к линейному, кроме крайних правых участков (где происходит смена активных

ограничений). На рис. 7 показаны также значения этих параметров для стандартных балок типа двутавра (из сортамента). Мы видим, что для некоторых типов балок (балки широкополочные колонные лёгкие) эти параметры достаточно близки к полученным оптимальным значениям для случая, когда превалирующей внешней нагрузкой является изгибающий момент, но для большинства стандартных профилей точек лежат достаточно далеко от области оптимальных параметров (в частности, толщина стенок и полок оказывается завышенной). Эти профили не являются оптимальными ни при какой комбинации продольной силы и изгибающего момента.

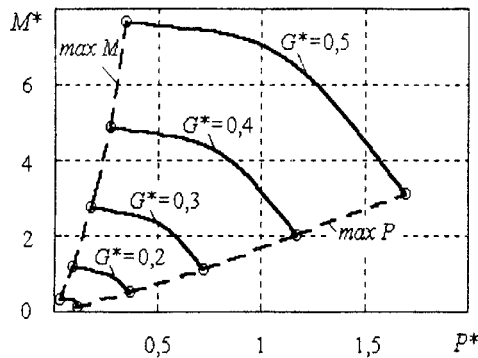


Рис. 6

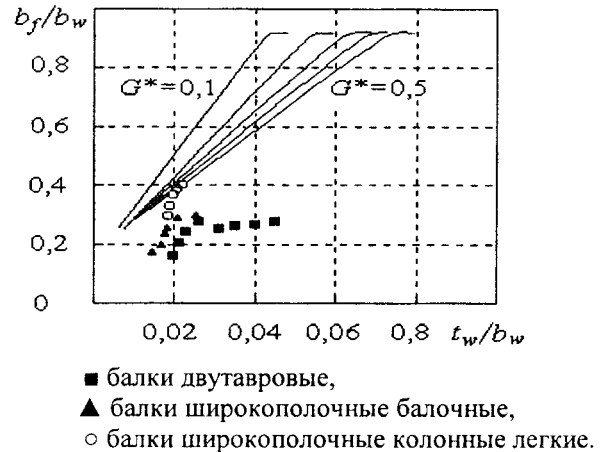


Рис. 7

Таким образом, решение задачи многокритериальной оптимизации позволяет выделить нерациональные профили, не относящиеся к оптимальным ни при какой комбинации нагрузок.

РЕЗЮМЕ

Розв'язана задача двокритеріальної оптимізації тонкостінних стержнів відкритого перетину (наприклад, двутаврового профілю) при стисканні і згинанні з обмеженнями за стійкістю - загальною (згинальною та згинально-крутильною) і локальною. Вектор цільової функції включає - осьову силу і згинальний момент. Задача розв'язується за допомогою ефективного методу нелінійного програмування. Отримане рішення дозволяє врахувати багатоваріантний характер навантаження елементів конструкцій. Аналіз наведених Парето-оптимальних проектів дає можливість виявити "нерациональні" стандартні профілі, які не можуть бути оптимальними при будь-яких комбінаціях подовжньої сили і згинального моменту.

SUMMARY

The two- criteria optimization problem for thin-walled members of open cross-section (I - type) subjected to compression and/or bending under stability constraints (for overall flexural and torsional-flexural modes and local modes) is solved. The solution obtained enables one to account for multifarious character of loading of thin-walled members. Analysis of the Pareto-optimal projects gives possibility to reveal "unreasonable" standard profiles which can not be optimal for any combination of the compressive force and bending moment

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Оптимальное проектирование конструкций. // Библиографический указатель. Часть 1.- Новосибирск, СО АН СССР,- 1975.- С.140-157.
2. Жичковски М., Гаевски А. Оптимальное проектирование конструкций с учётом требований устойчивости // Потеря устойчивости и выпучивание конструкций: теория и практика.- М.: Наука,- 1991.- С. 237-262.
3. Маневич А.И., Ракша С.В. Оптимальные центрально сжатые стержни открытого профиля // Theoretical Foundations of Civil Engineering. Proc. of the Polish-Ukrainian seminar.- Warsaw, 2000 - С. 484-489.
4. Manevich A.I., Raksha S.V. Two-criteria Optimization of Thin-walled Beams-Columns under Compression and Bending // Thin-Walled Structures. Advances and developments. Proc. of the Third Intern. Confer. on Thin-Walled Structures. Ed. J. Zaras, K. Rowak-Michalska, J. Rhodes. Elsevier - 2001.-P. 575- 583.
5. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. Изд-е 2-е.- М.: Наука, 1959.- 568 с.
6. Маневич А.И., Ракша С.В. Местное и связанное выпучивание тонкостенных стержней при сжатии и изгибе в двух плоскостях // Theoretical Foundations of Civil Engineering. 4, V.1, part 2 (Proc. of the Polish-Ukrainian seminar, Warsaw, July 1996). - Днепропетровск, 1996.- С. 270-275.
7. Маневич А.И. Устойчивость и оптимальное проектирование подкрепленных оболочек.- К.-Донецк, Выща шк., 1979.- 152 с.

Надійшла до редакції 15.04.2002 р.

УДК 539.35

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА СОУДАРЕНИЯ ЗАТУПЛЕННЫХ УПРУГИХ ТЕЛ ИЗ ОДИНАКОВОГО МАТЕРИАЛА

В.Д. Кубенко, Т.А. Марченко

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Негерцев подход к изучению соударения затупленных твердых тел и упругих оболочек о поверхность упругой среды развивается в публикациях [1, 2, 3]. Обзор исследований, посвященных удару тел по жидкостному или упругому полупространству, дан в [4]. В работе [5] предложено развитие этого подхода применительно к соударению двух упругих тел конечных размеров и массы. При этом последовательный вывод разрешающих систем уравнений выполнен для случая, когда материал соударяющихся тел не сопротивляется сдвигу. В данной публикации это ограничение снято. Решается задача о соударении двух тел, изготовленных из одного и того же упругого материала. Тела имеют вид бесконечно длинных цилиндров, соударяющихся таким образом, что в момент первоначального касания контакт происходит по всей образующей обоих тел. Вследствие этого динамические процессы будут одинаковы для любого поперечного сечения и задача может рассматриваться как плоская. Предполагается, что направляющие обоих цилиндров, по крайней мере в фронтальной области, т.е. области, охватывающей развивающуюся область контакта тел, являются достаточно гладкими кривыми и кривизна их невелика. В предположении о малых глубинах взаимного проникания соответствующие граничные условия задаются на плоской поверхности пятна контакта. Для интервала времени, отвечающего продолжительности удара, формулируется нестационарная смешанная граничная задача с движущейся с переменной скоростью наперед неизвестной границей. Решение этой задачи сведено к решению бесконечной системы интегральных уравнений Волterra 2-го рода, которая решается численно. Приведенные числовые результаты характеризуют развитие напряжений на поверхности тел и сил реакции в зависимости от начальной скорости, массы тел и упругих характеристик материала.

1. Постановка задачи. В постановке плоской задачи теории упругости рассматривается соударение двух упругих изготовленных из

одного и того же материала тел, каждое из которых ограничено гладкой симметричной кривой. Вектор относительной скорости сближения тел направлен по общей оси симметрии поперечного сечения тел, и в момент первоначального контакта, который примем за $t = 0$, его величина равна $V_0 = V_0^{(2)} - V_0^{(1)}$.

Отнесем тела к декартовой системе координат x, z , так, что ось z направлена вдоль оси симметрии. Область контакта тел в каждый момент времени определяется граничным значением абсциссы $x^*(t)$, являющейся в общем случае наперед неизвестной (Рис.1). Упругие свойства тел задаются модулем всестороннего сжатия K и модулем сдвига μ . Скорости распространения волн сжатия и сдвига есть соответственно

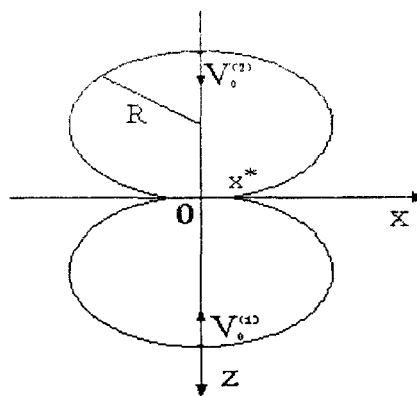


Рис. 1

$$c_p = \left[\left(K + \frac{4}{3}\mu \right) / \rho \right]^{\frac{1}{2}}, \quad c_s = (\mu / \rho)^{\frac{1}{2}},$$

где ρ - плотность материала тел.

Введем безразмерные величины

$$\bar{x} = x/R; \quad \bar{z} = z/R; \quad \bar{u}_j^{(i)} = u_j^{(i)} / R; \quad \bar{t} = c_0 t / R; \quad \bar{M}^{(i)} = M^{(i)} / \rho^{(1)} R^2; \\ \bar{\sigma}_{jk} = \sigma_{jk} / K^{(1)}; \quad c_0 = (K/\rho)^{\frac{1}{2}}; \quad \alpha = c_p / c_0; \quad \beta = c_s / c_0; \quad b = \beta / \alpha \quad (j, k = x, z; i = 1, 2).$$

Здесь R - некоторый характерный линейный размер, u_j - компоненты вектора перемещений, σ_{jk} - компоненты тензора напряжений, $M^{(i)}$ - масса каждого тела, ρ - плотность, c_0 - скорость звуковых

волн в материале в предположении, что его модуль сдвига равен нулю. Ниже черта над обозначениями опущена.

Упругие тела находятся в состоянии плоской деформации. Волновое деформирование материала тел описывается скалярными волновыми потенциалами $\varphi^{(i)}$ и $\psi^{(i)}$, удовлетворяющими уравнениям [6]

$$\frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 \psi^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^{(i)}}{\partial z^2} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \psi^{(i)}}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

Для состояния плоской деформации перемещения и напряжения выражаются через потенциалы $\varphi^{(i)}$ и $\psi^{(i)}$ следующим образом:

$$u_x^{(i)} = \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial z}; \quad u_z^{(i)} = \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial z} - \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial x}; \quad \sigma_{zz}^{(i)} = (1 - 2b^2) \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial t^2} + 2\beta^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi^{(i)}}{\partial x \partial z} \right); \quad \sigma_{zx}^{(i)} = \beta^2 \left(2 \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi^{(i)}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi^{(i)}}{\partial x^2} \right) \quad (i=1, 2). \quad (1.2)$$

Кривизна части поверхности тела, непосредственно примыкающей к области контакта, достаточно мала. Учитывая это обстоятельство, будем полагать, что формулировку граничных условий на фронтальной поверхности тела можно произвести на оси $z = 0$. Если предположить отсутствие трения контактирующих поверхностей, граничные условия будут состоять в равенстве нормальных скоростей и нормальных напряжений в области контакта, отсутствии нормальных напряжений на свободной поверхности и отсутствии касательных напряжений всюду, а именно:

$$V_0^{(1)} + \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial t} \Big|_{z=0} = V_0^{(2)} + \frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial t} \Big|_{z=0}, \quad |x| \in (0 \dots |x^*|), \quad \sigma_{zx}^{(i)} \Big|_{z=0} = 0, \quad |x| \geq 0; \\ \sigma_{zz}^{(1)} \Big|_{z=0} = \sigma_{zz}^{(2)} \Big|_{z=0}, \quad |x| \in (0 \dots |x^*|), \quad \sigma_{zz}^{(i)} \Big|_{z=0} = 0, \quad |x| \notin (0 \dots |x^*|). \quad (1.3)$$

Условия затухания возмущений на бесконечности (по предположению ограничимся рассмотрением интервала времени, в течение которого отраженные от тыльной поверхности тела волны не успевают возвратиться)

$$\varphi^{(1)} \rightarrow 0, \psi^{(1)} \rightarrow 0, z \rightarrow \infty; \quad \varphi^{(2)} \rightarrow 0, \psi^{(2)} \rightarrow 0, z \rightarrow -\infty. \quad (1.4)$$

Начальные условия – нулевые

$$\varphi^{(i)} = \psi^{(i)} = \dot{\varphi}^{(i)} = \dot{\psi}^{(i)} = 0 \quad \text{при } t = 0. \quad (1.5)$$

Сформулированная краевая задача должна быть дополнена уравнением движения тела как целого. Для этого воспользуемся уравнением движения центра масс каждого тела

$$\mu_1 \frac{dV_c^1}{dt} = F(t); \quad \mu_2 \frac{dV_c^2}{dt} = -F(t); \quad F(t) = 2 \int_0^{x^*} \sigma_{zz}(t, x, 0) dx; \quad V_c^{(1)}(0) = V_0^{(1)}; \quad V_c^{(2)}(0) = V_0^{(2)}. \quad (1.6)$$

В данной работе учет изменения абсциссы области контакта за счет деформирования поверхности тела не производится, а точка смены граничных условий x^* определяется как абсцисса пересечения недеформированных контуров тел при глубине взаимного проникания z^* .

Соотношения (1.1) - (1.6) составляют смешанную начально-краевую задачу с неизвестной подвижной границей. Ограничиваясь временным интервалом, не превышающим продолжительность соударения, можно в качестве объекта, моделирующего тело, рассматривать упругую полуполосу некоторой ширины l , на торцевой поверхности которой реализуются условия (1.3). Значение величины l определяется интервалом времени, в течение которого рассматривается процесс соударения. Поскольку отраженные от боковых граней тела волны в силу выбора временного интервала также не достигают области контакта, граничные условия на боковых гранях полуполосы (при $|x| = l$) могут быть

выбраны из соображений удобства решения. В частности, для удобства разделения переменных в общем решении положим, что на боковых гранях имеют место условия

$$u_z^{(i)} \Big|_{|x|=l} = 0; \quad \sigma_{zx}^{(i)} \Big|_{|x|=l} = 0. \quad (1.7)$$

2. Метод решения краевой задачи. Применим к системе уравнений (1.1) интегральное преобразование Лапласа по t с параметром s [7]

$$\frac{\partial^2 \varphi^{(i)L}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{(i)L}}{\partial z^2} = \frac{s^2}{\alpha^2} \varphi^{(i)L}; \quad \frac{\partial^2 \psi^{(i)L}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^{(i)L}}{\partial z^2} = \frac{s^2}{\beta^2} \psi^{(i)L}. \quad (2.1)$$

Индекс L обозначает функцию в пространстве изображений по Лапласу.

Ограниченность области возмущений позволяет строить решение волновых уравнений в виде рядов Фурье на интервале l , содержащем возмущенную зону.

Далее предположим, что тела 1 и 2 одинаковы, т.е. изготовлены из одного материала и имеют одинаковое поперечное сечение. Применяя к (2.1) метод разделения переменных, используя граничное условие на боковых поверхностях полуполосы (1.7), а также условие отсутствия возмущений в бесконечно удаленной точке, получаем общее решение уравнений (2.1)

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)L} &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)}(s) \cdot e^{-zP} \cos \bar{n}x; \quad \psi^{(1)L} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(1)}(s) \cdot e^{-zS} \sin \bar{n}x; \\ \varphi^{(2)L} &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(2)}(s) \cdot e^{zP} \cos \bar{n}x; \quad \psi^{(2)L} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(2)}(s) \cdot e^{zS} \sin \bar{n}x; \\ P &= \sqrt{s^2/\alpha^2 + \bar{n}^2}; \quad S = \sqrt{s^2/\beta^2 + \bar{n}^2}; \quad \bar{n} = n\pi/l. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь $A_n^{(i)}, B_n^{(i)}$ - коэффициенты, подлежащие определению из граничных условий (1.3).

Для того чтобы решить сформулированную граничную задачу, рассмотрим вначале решение вспомогательной несмещенной задачи. Пусть на фронтальной поверхности каждого тела известна скорость деформирования поверхности, которую можно представить рядом Фурье:

$$V^{(i)}(t, x, 0) = \frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial t} \Big|_{z=0}; \quad V^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(i)}(t) \cos \bar{n}x, \quad (i=1...2). \quad (2.3)$$

Из преобразованных по Лапласу граничных условий (задана нормальная скорость (2.3), касательные напряжения отсутствуют) определяем постоянные $A_n^{(i)}, B_n^{(i)}$, а затем с их помощью находим зависимость между коэффициентами разложения в ряд Фурье нормального напряжения на фронтальной поверхности и скорости деформирования поверхности (в изображениях):

$$\sigma_{zz}^{(i)L}(s, x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{zzn}^{(i)L}(s) \cos \bar{n}x; \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zzn}^{(i)L} &= (-1)^i \alpha V_n^{(i)L} \left(1 - \frac{\sqrt{s^2 + \alpha^2 \bar{n}^2} - s}{\sqrt{s^2 + \alpha^2 \bar{n}^2}} + \right. \\ &\quad \left. + 4\beta^2 \bar{n}^2 \left(\frac{1}{\sqrt{s^2 + \alpha^2 \bar{n}^2}} - \frac{\beta}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{s^2 + \beta^2 \bar{n}^2}} \right) \left(\frac{1}{s} + \frac{\beta^2 \bar{n}^2}{s^3} \right) \right); \quad i=1...2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Перейдя в пространство оригиналов и используя теорему о свертке [7],

получим для $\sigma_{zzn}^{(i)}$

$$\sigma_{zzn}^{(i)} = (-1)^i \alpha \left(V_n^{(i)}(t) + \int_0^t V_n^{(i)}(\tau) F_n(t-\tau) d\tau \right) \quad (i=1...2.) \quad (2.6)$$

$$F_n(t) = -\bar{n}\alpha J_1(\bar{n}\alpha t) + 4\beta^2 \bar{n}^2 \int_0^t \left(J_0(\bar{n}\alpha \tau) - \frac{\beta}{\alpha} J_0(\bar{n}\beta \tau) \right) \left(1 + \beta^2 \bar{n}^2 \frac{(t-\tau)^2}{2} \right) d\tau \quad (2.7)$$

Здесь $J_0(t), J_1(t)$ - функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядков соответственно [8].

Таким образом, соотношения (2.3), (2.4), (2.6) устанавливают связь между нормальным напряжением на поверхности тела и скоростью ее деформирования. Эта связь будет использована ниже при решении смешанной задачи. Первые два условия (1.3) можно, используя разложение в ряды Фурье и полученные представления (2.6), записать в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-2V_n^{(1)} - \int_0^t V_n^{(1)}(\tau) F_n(t-\tau) d\tau - \int_0^t V_n^{(2)}(\tau) F_n(t-\tau) d\tau \right) \cos \bar{n}x + V_0(t) = 0, |x| \leq x^*,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-V_n^{(1)} - \int_0^t V_n^{(1)}(\tau) F_n(t-\tau) d\tau \right) \cos \bar{n}x = 0, x^* \leq |x| \leq l; \quad (2.8)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(2V_n^{(2)} + \int_0^t V_n^{(2)}(\tau) F_n(t-\tau) d\tau + \int_0^t V_n^{(1)}(\tau) F_n(t-\tau) d\tau \right) \cos \bar{n}x + V_0(t) = 0, |x| \leq x^*,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(V_n^{(2)} + \int_0^t V_n^{(2)}(\tau) F_n(t-\tau) d\tau \right) \cos \bar{n}x = 0, x^* \leq |x| \leq l. \quad (2.9)$$

Системы (2.8), (2.9) после соответствующих разложений в ряды Фурье и использования ортогональности тригонометрических функций дают возможность получить две бесконечные системы интегральных уравнений Вольтерра относительно неизвестных коэффициентов $V_n^{(1)}, V_n^{(2)}$

$$V_n^{(1)}(t) + \frac{1}{2} \int_0^t V_n^{(1)}(\tau) F_n(t-\tau) d\tau + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{mn} \int_0^t V_m^{(2)}(\tau) F_m(t-\tau) d\tau -$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha'_{mn} \int_0^t V_m^{(1)}(\tau) F_m(t-\tau) d\tau = \frac{1}{2} V_{0n}(t); \quad (2.10)$$

$$V_n^{(2)}(t) + \frac{1}{2} \int_0^t V_n^{(2)}(\tau) F_n(t-\tau) d\tau + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{mn} \int_0^t V_m^{(1)}(\tau) F_m(t-\tau) d\tau -$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha'_{mn} \int_0^t V_m^{(2)}(\tau) F_m(t-\tau) d\tau = -\frac{1}{2} V_{0n}(t); \quad (2.11)$$

$$V_{00} = x^* \frac{V_0(t)}{l}, \quad V_{0n} = \frac{2V_0(t) \sin \bar{n}x^*}{l \bar{n}}; \quad (2.12)$$

$$\alpha_{00} = \frac{x^*}{l}, \quad \alpha'_{00} = \frac{1}{l}(-l + x^*), \quad \alpha_{m0} = \frac{1 \sin \bar{m}x^*}{l \bar{m}}, \quad \alpha'_{m0} = \frac{1}{l} \left(\frac{\sin \bar{m}l}{\bar{m}} - \frac{\sin \bar{m}x^*}{\bar{m}} \right),$$

$$\alpha_{mn} = \frac{1}{l} \left(\frac{\sin(\bar{m} - \bar{n})x^*}{\bar{m} - \bar{n}} + \frac{\sin(\bar{m} + \bar{n})x^*}{\bar{m} + \bar{n}} \right) \quad (m \neq 0);$$

$$\alpha'_{mn} = \frac{1}{l} \left(\frac{\sin(\bar{m} - \bar{n})l}{\bar{m} - \bar{n}} + \frac{\sin(\bar{m} + \bar{n})l}{\bar{m} + \bar{n}} - \frac{\sin(\bar{m} - \bar{n})x^*}{\bar{m} - \bar{n}} - \frac{\sin(\bar{m} + \bar{n})x^*}{\bar{m} + \bar{n}} \right) \quad (m \neq n);$$

$$\alpha_{mm} = \frac{1}{l} \left(x^* + \frac{\sin 2\bar{m}x^*}{2\bar{m}} \right), \quad \alpha'_{mm} = \frac{1}{l} \left(l - x^* + \frac{\sin 2\bar{m}l}{2\bar{m}} - \frac{\sin 2\bar{m}x^*}{2\bar{m}} \right) \quad (m \neq 0).$$

Из структуры бесконечных систем (2.10), (2.11) (они отличаются лишь знаком при правой части) следует, что достаточно найти решение одной из них, т.к. очевидно $V_n^{(2)}(t) = -V_n^{(1)}(t)$. Таким образом, в случае соударения двух одинаковых тел смешанная краевая задача сведена к решению бесконечной системы интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода (2.10) (или (2.11)).

Система (2.10) должна быть дополнена уравнением движения центра масс тела (1.6), в котором сила $F(t)$ определяется выражением

$$F(t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{zzn}(t) \sin \bar{n}x^* (t).$$

Определив из (2.10) коэффициенты скорости $V_n(t)$, напряжение $\sigma_{zz}(t)$ на поверхности тела найдем при помощи соотношений (2.6), (2.7), (2.4).

3. «Сверхзвуковой» этап. Сначала рассмотрим решение для самого раннего, так называемого «сверхзвукового» этапа соударения тупых тел, в течение которого точка границы области контакта x^* движется со скоростью, превышающей скорость распространения волн. В течение этого этапа возмущения в телах не выходят на свободную фронтальную поверхность тела и, следовательно, условиями на этой поверхности можно распорядиться по своему усмотрению; в частности, можно положить, что нормальная к фронтальной поверхности тела скорость задана на ней (равна нулю вне области контакта). Итак, для «сверхзвукового» этапа граничные условия при $z=0, 0 \leq |x| \leq l$ будут иметь вид

$$\left. \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} \right|_{z=0} = V_0 + \left. \frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} \right|_{z=0}, \quad \sigma_{zz}^{(1)} = \sigma_{zz}^{(2)}, \quad \sigma_{zx}^{(i)} = 0, \quad i = 1 \dots 2. \quad (3.1)$$

где

$$V_0 = H(x^* - |x|)V_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_{0n}(t) \cos \bar{n}x, \quad V_0(t) = V_0^{(2)}(t) - V_0^{(1)}(t).$$

Коэффициенты $V_{0n}(t)$ определены выше – формулы (2.12).

Удовлетворяя граничным условиям (3.1) в пространстве изображений по Лапласу при помощи общего решения (2.2), получаем следующее выражение для изображения нормального напряжения на поверхности тел:

$$\sigma_{zz}^L = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{zzn}^L \cos \bar{n}x, \quad \sigma_{zzn}^L = -\frac{\alpha}{2} V_{0n}^L \left(1 - \frac{\sqrt{s^2 + \alpha^2 \bar{n}^2} - s}{\sqrt{s^2 + \alpha^2 \bar{n}^2}} + \right. \\ \left. 4\beta^2 \bar{n}^2 \left(\frac{1}{\sqrt{s^2 + \alpha^2 \bar{n}^2}} - \frac{\beta}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{s^2 + \beta^2 \bar{n}^2}} \right) \left(\frac{1}{s} + \frac{\beta^2 \bar{n}^2}{s^3} \right) \right). \quad (3.2)$$

Перейдя в пространство оригиналов и используя теорему о свертке, получим для σ_{zzn}

$$\sigma_{zzn} = -\frac{\alpha}{2} \left(V_{0n}(t) + \int_0^t V_{0n}(\tau) F_n(t-\tau) d\tau \right), \quad (3.3)$$

где функция $F_n(t)$ определяется формулой (2.7).

Таким образом, в случае «сверхзвукового этапа» нет необходимости искать решение бесконечной системы интегральных уравнений. Искомое напряжение $\sigma_{zz}(t)$ вычисляется при помощи (3.3), где функция $F_n(t)$ задана формулой (2.7), а коэффициенты скорости $V_{0n}(t)$ – (2.12). Следует помнить, что соотношение (3.3) должно вычисляться вместе с выражением (2.13) и уравнением (1.7).

4. Алгоритм решения и результаты. Ниже приведены результаты вычислений как для «сверхзвукового» решения (3.3), (1.6), так и для смешанной задачи (2.10), (1.6).

Интегралы в системе (2.10) и выражениях (2.6), (2.12), (3.3) вычислялись по формуле Грегори [9] с удержанием разностей до четвертого порядка включительно. Уравнение (1.6) с усеченной правой частью решалось методом Адамса [7]. И в формуле Грегори и в формуле Адамса удерживались разности до четвертого порядка включительно. Бесконечные системы интегральных уравнений также подвергались редукции. Для сглаживания явлений Гиббса применялись σ -множители Гиббса [9]. Порядок редукции выбирался из соображений практической сходимости. В частности, достоверные числовые результаты удалось получить при удержании 150 уравнений в бесконечной системе (2.10), при этом шаг интегрирования был выбран $\Delta t = 0,0125$.

Целью вычислений было определение развития нормальных напряжений и скоростей деформирования поверхности тела, определение изменения области контакта, силы взаимодействия тел в зависимости от первоначальной скорости соударения, массы тел и их упругих характеристик.

На рис.2 показано развитие во времени нормального напряжения $\sigma_{zz}(t)$ в точке первоначального контакта ($x=0, z=0$) для двух одинаковых тел кругового поперечного сечения (сплошная линия на графиках соответствует результатам, полученным при решении смешанной задачи, пунктирной – «сверхзвуковому этапу»).

Кривые на рисунке соответствуют различным значениям коэффициента сдвига μ (коэффициент $K = 10 \text{ ГПа}$). Безразмерная начальная скорость взята равной 0.001. Из рисунка видно, что напряжение растет с увеличением значения коэффициента сдвига. На рассматриваемом интервале времени достигается максимальное значение напряжения в лобовой точке. Рис.3 представляет фрагмент рис.2 в увеличенном в сто раз масштабе.

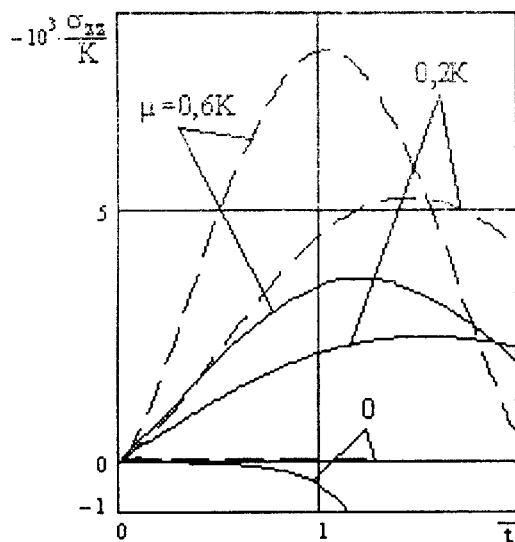


Рис.2

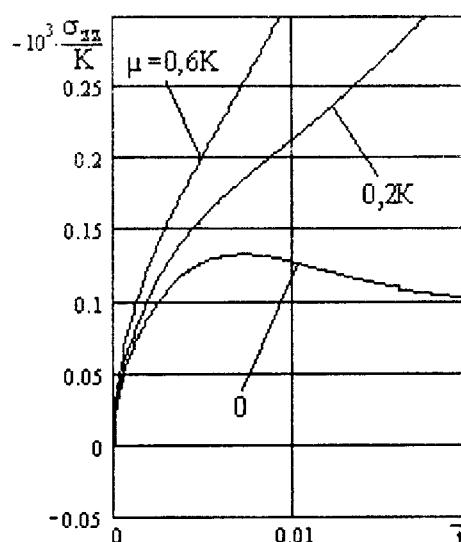


Рис.3

На рис.4 показано изменение силы взаимодействия в зависимости от времени, вычисленное для различных значений коэффициента сдвига по формуле (2.12). На рассматриваемом промежутке времени достигается максимальное значение силы реакции в лобовой точке.

На рис.5 представлена зависимость напряжения в лобовой точке от массы взаимодействующих тел. Обезразмеренная начальная скорость сближения тел – 0,001. ($\mu = 0,6K$). Из рисунка следует, что максимум нормального напряжения в лобовой точке достигается тем позднее, чем больше масса соударяющихся тел.

Рис.6 демонстрирует зависимость величины напряжения в лобовой точке от начальной скорости тел ($\mu = 0,6K$). Рисунок показывает, что максимальное значение нормального напряжения в лобовой точке пропорционально относительной скорости соударения.

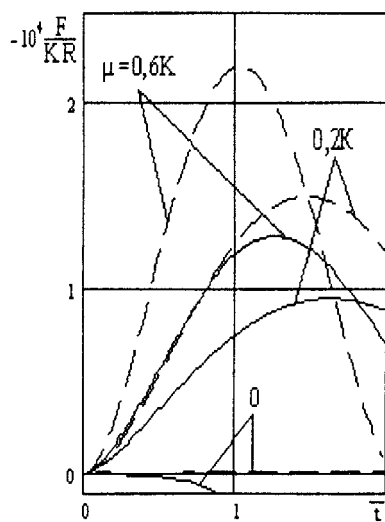


Рис.4

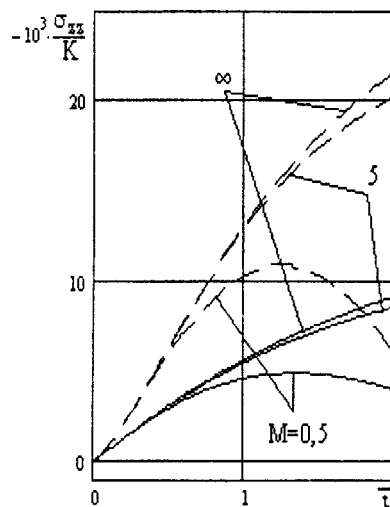


Рис.5

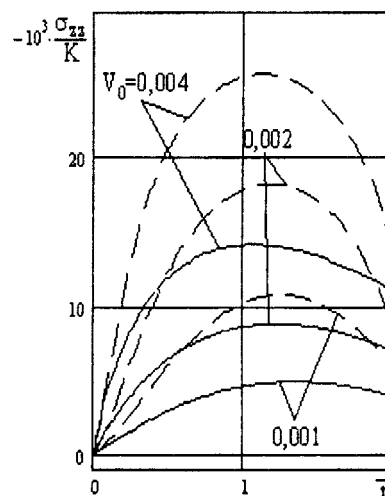


Рис.6

Сравнение результатов, полученных на основе смешанной задачи и «сверхзвукового этапа», показывает, что, в отличие от случая удара тела о жидкость, при соударении упругих тел расхождение результатов довольно значительные.

РЕЗЮМЕ

В роботі досліджується співударення двох пружних затуплених тіл. Розглядається плоска задача для тіл, які володіють площиною симетрії. Формулюється нестационарна змішана крайова задача з невідомою рухомою границею. Розв'язок задачі зведено до нескінченної системи інтегральних рівнянь Вольтера 2-го роду. Чисельний розв'язок системи виконано для випадку двох однакових тіл колового розрізу.

SUMMARY

The impact of two elastic blunted bodies is investigated. The plain problem for bodies with the plane symmetry is considered. The non-stationary mixed boundary problem with moving undefined bound is formulated. The solution of the problem was reduced to the infinite system of the second kind Volterra integral equations. Numerical results illustrate the case of two identical bodies with a circular section

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кубенко В.Д. Об одном подходе к исследованию распределения напряжений на поверхности тупого тела, проникающего в упругую среду // Теорет. и прикладная механика. – 1986. – Вып.17. – С. 14 – 23.
2. Кубенко В.Д. Об одном способе решения задач проникания тел в акустическую или упругую среду // «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред»: (Матер. II Всесоюз. конф Ереван, 1984.) – Ереван: Изд-во АН Арм.ССР, 1984. – С. 183 – 187.
3. Кубенко В.Д. Попов С.Н. Плоская задача удара жесткого затупленного тела о поверхность упругого полупространства // Прикладная механика. – 1988. – Т.24, №7. – С. 69 – 77.
4. Кубенко В.Д. Ударное взаимодействие тел со средой // Прикладная механика. – 1997. – Т.33, №12. – С. 3 – 29.
5. Кубенко В.Д. О локальной волновой теории соударения упругих тел. Плоская задача в приближении идеальной жидкости // Прикладная механика. – 1998. – Т.34, №10. – С. 84 – 92.
6. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики: В 2-х т. – М.: Изд-во иностр.лит., 1960. – Т.2. – 886 с.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984. – 831 с.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1966. – 296 с.
9. Хемминг Р.В. Численные методы. – М.: Наука, 1968. – 400 с.

Надійшла до редакції 15.04.2002 р.

УДК 539.3

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ИМПУЛЬСОВ SH-ВОЛН С ТОНКИМИ УПРУГИМИ
МЯГКИМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Г.С. Кит, Я.И. Кунец, В.А. Мищенко

Институт прикладных проблем математики и механики НАН Украины, г. Львов

Задачи рассеяния упругих волн тонкими упругими включениями, а также аналогичные задачи электромагнетизма и теплопроводности, изучались ранее преимущественно в стационарной постановке. При этом большое внимание уделялось построению упрощенных условий контакта упругой среды и тонкой неоднородности [1,2], а также методам построения и обоснования аналитических решений таких задач [3-5]. Ниже на основе метода преобразования Фурье по времени, метода согласования асимптотических разложений и метода сингулярных интегро-дифференциальных уравнений предложена методика исследования процесса взаимодействия импульсов SH-волн с тонким упругим прямолинейным включением малой жесткости и переменной толщины в предположении, что упругая система находится в условиях антиплоского сдвига. Изучены зависимости обобщенных коэффициентов интенсивности напряжений от механических и геометрических параметров включения, а также от формы падающего импульса.

Пусть в безграничной упругой среде с модулем сдвига μ и плотностью ρ в условиях идеального контакта находится тонкое прямолинейное включение с параметрами μ_0 и ρ_0 , занимающее область $W_\epsilon = \{(x_1, x_2): |x_1| \leq a, 2|x_2| \leq \epsilon, g(x_1) = h(x_1)\}$, ограниченную контуром ∂W_ϵ . Здесь $\vec{x} = (x_1, x_2)$ - прямоугольная система координат, $g(x)$ - достаточно гладкая положительно определенная функция, $h(x)$ - толщина включения, ϵ - малый безразмерный параметр, характеризующий относительную толщину включения, $2a$ - длина включения. В дальнейшем предполагается, что включение мягкое, т.е. справедливы соотношения $\gamma = \mu_0 / \mu = \gamma_1 \epsilon$ и $\gamma_1 = \text{const}$ при $\epsilon \rightarrow 0$.

На включение набегают импульсы SH-волн

$$u^{inc}(\vec{x}, \tau) = af[\tau + r \cos(\theta - \theta_{inc})], \quad f(\tau) \equiv 0 \text{ при } \tau \leq 0, \\ x_1 = -ra \sin \theta, \quad x_2 = ra \cos \theta, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi, \quad (1)$$

где $f(\tau)$ - модуляция импульса во времени, (r, θ) - безразмерные полярные координаты, отнесенные к a , $\tau = ct/a$, t - время, θ_{inc} - угол падения импульса на включение, c - скорость SH-волн в матрице ($c^2 = \mu / \rho$). Смещения в упругой среде удовлетворяют волновым уравнениям и условиям сопряжения на границе ∂W_ϵ

$$\left(\Delta + \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} \right) u(\vec{x}, t) = 0, \quad \vec{x} \in R^2 \setminus W_\epsilon, \quad \left(\Delta + \frac{\partial^2}{c_0^2 \partial t^2} \right) u^0(\vec{x}, t) = 0, \quad \vec{x} \in W_\epsilon; \quad (2)$$

$$u(\vec{x}, t) = u^0(\vec{x}, t), \quad \frac{\partial u(\vec{x}, t)}{\partial n^0} = \gamma \frac{\partial u^0(\vec{x}, t)}{\partial n^0}, \quad \vec{x} \in \partial W_\epsilon, \quad \gamma = \mu_0 / \mu;$$

$$u(\vec{x}, t) = u^{inc}(\vec{x}, t) + u^s(\vec{x}, t), \quad c_0^2 = \mu_0 / \rho_0, \quad (3)$$

где n^0 - внешняя нормаль к ∂W_ϵ , $u^s(\vec{x}, t)$ и $u^0(\vec{x}, t)$ - смещения в рассеянном неоднородностью поле и во включении соответственно.

Для решения задачи (2), (3) воспользуемся методом интегрального преобразования Фурье по безразмерному времени τ

$$U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U(\tau) \exp(i\omega\tau) d\tau, \quad U(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) \exp(-i\omega\tau) d\omega. \quad (4)$$

В работе [3] с помощью метода согласования асимптотических разложений показано, что фурье-

плотности $u^s(x_1, x_2, \omega)$ смещений в рассеянной включением волне удовлетворяют на срединной линии неоднородности условиям сопряжения

$$\Phi(x_1, \omega) = \frac{h(x_1)}{\gamma} \frac{\partial u(x_1, +0, \omega)}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial u(x_1, +0, \omega)}{\partial x_2} = \frac{\partial u(x_1, -0, \omega)}{\partial x_2},$$

$$\Phi(x_1, \omega) = u(x_1, +0, \omega) - u(x_1, -0, \omega), \quad |x_1| < a, \quad x_2 = 0. \quad (5)$$

Кроме того функция $u^s(\vec{x}, \omega)$ при $\vec{x} \in R^2$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца ($k = \omega / a$ – волновое число SH-волн в матрице)

$$\Delta u^s(\vec{x}, \omega) + k^2 u^s(\vec{x}, \omega) = 0, \quad \vec{x} \in R^2$$

и соответствующему условию излучения Зоммерфельда на бесконечности.

Используя интегральное представление смещения $u^s(\vec{x}, \omega)$ по плоским волнам и удовлетворяя условиям (5), получим сингулярное интегральное уравнение для определения скачка $\Phi(x_1, \omega)$:

$$\Phi(x_1, \omega) + q_1 \int_{-a}^a \Phi(p, \omega) K(k|x_1 - p|) dp = q_2, \quad |x_1| < a; \quad (6)$$

$$K(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\alpha) \exp(i\alpha z) d\alpha, \quad \gamma(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - 1}; \quad \text{Im } \gamma(\alpha) \geq 0, \quad |\alpha| < 1;$$

$$\text{Re } \gamma(\alpha) \leq 0, \quad |\alpha| > 1; \quad q_1 = -k^2 g(x_1) (2\gamma_1)^{-1};$$

$$q_2 = -ik\gamma_1^{-1} f(\omega) g(x_1) \cos \theta_{inc} \exp(ikx_1 \sin \theta_{inc});$$

$f(\omega)$ – Фурье-трансформанта импульса $f(\tau)$.

Пусть толщина включения задается соотношением $h(x_1) = \varepsilon a (1 - x_1/a)^{\delta_+} (1 + x_1/a)^{\delta_-}$. Следовательно, $\Phi(x_1, \omega)$ можно представить в виде разложения по полиномам Якоби $P_m^{(\lambda_+, \lambda_-)}(x)$ [3]

$$\Phi(x_1, \omega) = a(1 - x_1/a)^{\lambda_+} (1 + x_1/a)^{\lambda_-} \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m^{(\lambda_+, \lambda_-)}(x_1/a); \quad (7)$$

$$\lambda_{\pm} = 0,5 \text{ при } 0 \leq \delta_{\pm} < 1, \quad \lambda_{\pm} = \delta_{\pm} \text{ при } \delta_{\pm} > 1;$$

$$\lambda_{\pm} \text{ctg } \pi \lambda_{\pm} + \gamma_0 \gamma_1 = 0, \quad \gamma_0 = 2^{1-\delta_{\pm}}.$$

Используя разложение по функциям Бесселя первого рода $J_n(x)$ и полиномам Чебышева второго рода $U_n(x)$

$$\exp(-i\alpha x_1) = \frac{2}{\alpha a} \sum_{m=0}^{\infty} (-i)^m (m+1) J_{m+1}(\alpha a) U(x_1/a), \quad |x_1| < a,$$

способом, изложенным в [3] с учетом представления (7), из соотношения (6) получаем систему линейных алгебраических уравнений бесконечного порядка

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m A_{n,m} = b_n \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad A_{n,m} = B_{n,m} + C_{n,m},$$

$$B_{n,m} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1-p)^{\mu_+ + 1/2 - \delta_+} (1+p)^{\mu_- + 1/2 - \delta_-} P_m^{(\mu_+, \mu_-)}(p) U_n(p) dp$$

$$C_{n,m} = \omega \gamma_1^{-1} (n+1) \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) i^{n-l} B_{l,m}^1 I_{n,l}, \quad B_{l,m}^1 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1-p)^{\mu_+} (1+p)^{\mu_-} P_m^{(\mu_+, \mu_-)} U_l(p) dp,$$

$$I_{n,k} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\alpha) J_{n+1}(\omega \alpha) J_{k+1}(\omega \alpha) \alpha^{-2} d\alpha, \quad b_n = (n+1) i^n f(\omega) J_n(\omega \sin \theta_{inc}) (\omega \sin \theta_{inc})^{-1}. \quad (8)$$

Систему уравнений (8) решаем с помощью метода редукции. Путем численного эксперимента показано, что порядок редукции N можно определить следующим образом ($E(x)$ - целая часть x): $N = 10$ при $\omega \leq 5$, $N = E(2\omega)$ при $5 < \omega \leq 10$, $N = E(1,5\omega)$ при $10 < \omega \leq 25$, когда $\delta_{\pm} < 1$, и $N = 18$ при $\omega \leq 5$, $N = E(2\omega) + 8$ при $5 < \omega \leq 10$, когда $\delta_{\pm} \geq 1$.

Механическими величинами, характеризующими напряженно-деформированное состояние возле вершины неоднородности, являются обобщенные коэффициенты интенсивности напряжений (ОКИН), которые при установившихся колебаниях определим соотношением

$$K^{\pm}(\omega) = a^{-1} \lim_{x_1 \rightarrow \pm a} \Phi(x_1, \omega) = 2^{\lambda_{\pm}} \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m^{(\lambda_+, \lambda_-)}(\pm 1).$$

Вычисление динамических ОКИН осуществляем методом Ромберга согласно методике, изложенной в [6], по формуле

$$K^{\pm}(\tau) = a^{-1} \lim_{x_1 \rightarrow \pm a} \Phi(x_1, \tau) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\omega_0} K^{\pm}(\omega) \exp(-i\omega\tau) d\omega.$$

Значение ω_0 определяется путем численного эксперимента. В дальнейшем модуляцию импульса во времени принимаем в виде ($n_* \geq 0$):

квазимонохроматический импульс

$$f(\tau) = p_* \tau^{n_*} (\tau_* - \tau)^{n_*} \sin(\omega_* \tau), \quad \tau < \tau_*, \quad f(\tau) = 0, \quad \tau > \tau_*, \quad (9)$$

импульс в форме слабой ударной волны

$$f(\tau) = p_* \tau^{n_*} \exp(-\alpha_* \tau), \quad \tau > 0. \quad (10)$$

Отметим, что $f(\omega) = O(\omega^{-n_*-2})$ ($\omega \rightarrow \infty$) для формы импульса (9) и $f(\omega) = O(\omega^{-n_*-1})$ для формы (10), так что увеличение параметра n_* уменьшает значение ω_0 , однако не существенно изменяет форму спектра $f(\omega)$.

На рис. 1, 2 изображены частотные зависимости величины $K_0(\omega) = |K^{\pm}(\omega)/(\omega f(\omega))|$ для включения постоянной толщины ($\delta_{\pm} = 0$, $\lambda_{\pm} = 0,5$) и включения с острыми вершинами ($\delta_{\pm} = \lambda_{\pm} = 2$) соот-

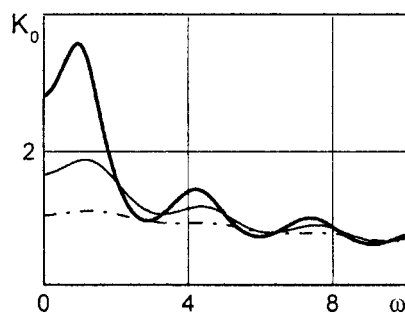


Рис. 1

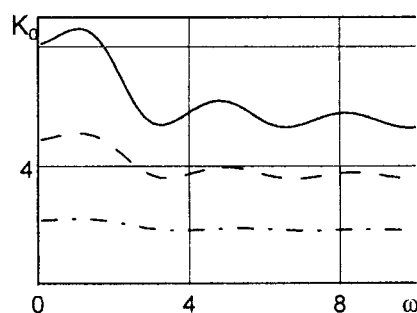


Рис. 2

ветственно при нормальном падении волны на включение ($\theta_{inc} = 0^\circ$). На этих рисунках тонкая сплошная кривая отвечает значению $\mu_0 = 0,22 \cdot 10^{10} Pa$ (плексиглас), штрих-пунктирная – значению $\mu_0 = 0,67 \cdot 10^{10} Pa$ (свинец), а жирная и штриховая – значениям $\gamma_1 = 0$ и $\gamma_1 = 1$ соответственно. Расчеты здесь и далее выполнены в предположении, что внешняя среда – сталь ($\mu = 8,1 \cdot 10^{10} Pa$) и $\varepsilon = 0,04$. Из этих графиков следует, что уменьшение жесткости материала включения приводит к увеличению уровня напряжений возле края неоднородности. Из рис. 1 следует также, что при $\delta_{\pm} = 0$ (а также при $0 < \delta_{\pm} < 1$) в коротковолновой области влияние жесткости материала включения на величину коэффициента $K^{\pm}(\omega)$ незначительно: основной вклад в рассеянное возле края дефекта поле вносит краевая волна, независимая от упругих свойств рассеивателя.

На рис. 3, 4 представлены временные зависимости коэффициента $K_1^{\pm} = K^{\pm}(\tau)/2$ в случаях, когда на включение набегают квазимонохроматический импульс (9) ($\omega_* = 6$; $\tau_* = 1,04$; $p_* = 19,8$; $n_* = 2$; $\theta_{inc} = 0^\circ$) или импульс (10) ($\alpha_* = 10$; $p_* = 19,8$; $n_* = 2$; $\theta_{inc} = 0^\circ$) соответственно (формы импульсов $f(\tau)$ обозначены на графиках жирными линиями). Видно, что с уменьшением жесткости материала неоднородности абсолютные максимумы коэффициентов $K_1^{\pm}$ увеличиваются при разных видах $f(\tau)$. Из представленных результатов следует также, что существенные значения амплитуд $K_1^{\pm}$ наблюдаются на определенных промежутках времени, начала которых совпадают с временами прихода на край включения падающего или соответствующего дифрагированного импульсов. Так, первое увеличение амплитуды $K_1^{\pm}$ соответствует приходу на край включения падающего импульса ($\tau = 0$), второе – приходу сигнала, дифрагированного противоположным краем включения ($\tau = 2$).

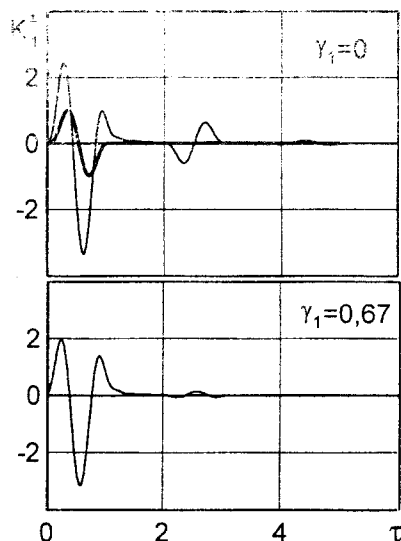


Рис. 3

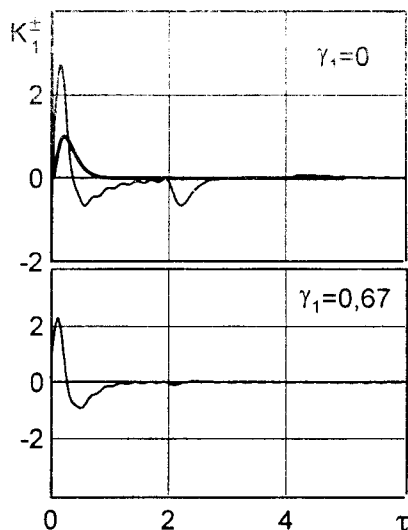


Рис. 4

На рис. 5, 6 изображены временные зависимости коэффициентов K_1^+ и K_1^- соответственно, когда $\delta_{\pm} = \lambda_{\pm} = 0,5$. На включение под углом $\theta_{inc} = -45^\circ$ падает квазимонохроматический импульс (9) с указанными выше параметрами. Приведенные результаты также можно проанализировать по временам задержки сигналов, приходящих на края неоднородности: Начало увеличения амплитуды $K_1^{\pm}$ совпадает со временами прихода на край дефекта падающего импульса ($\tau = -\sqrt{2}/2$ для K_1^+ и $\tau = \sqrt{2}/2$ для

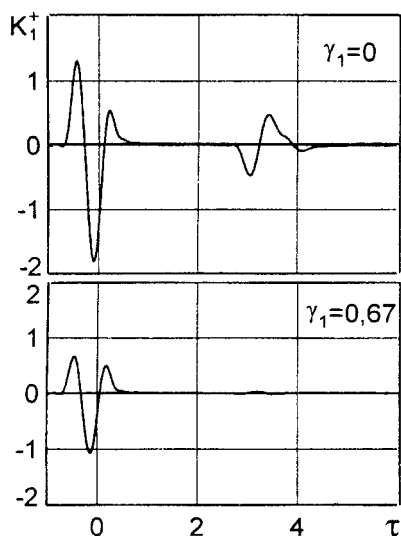


Рис. 5

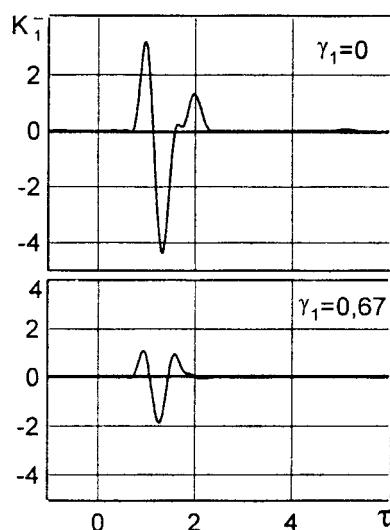


Рис. 6

K_1^-) или сигналов, переизлученных противоположными краями рассеивателя ($\tau = 2 - \sqrt{2}/2$ для K_1^+ и $\tau = 2 + \sqrt{2}/2$ для K_1^-).

В заключение отметим, что, зная ОКИН, можно уточнить напряженно-деформированное состояние композита возле концов включения, где возникает явление пограничного слоя. Методика построения соответствующих поправок подробно описана в работах [2-4].

Работа выполнена при поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Министерства образования и науки Украины (регистрационный номер проекта 01.07/00133).

РЕЗЮМЕ

Запропоновано метод дослідження напруженого стану пружного нескінченного середовища, яке містить тонке м'яке прямолинійне включення змінної товщини. Пружна система знаходиться в умовах антиплоского сдвигу під дією імпульсних навантажень. Представлені і проаналізовані частотні та часові залежності узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень від механічних та геометричних параметрів включення, а також від форми падаючого імпульсу.

SUMMARY

The investigation method of stressed state of elastic infinity media containing a thin, soft straightforward inclusion with variable thickness is suggested. The elastic system is in the antiplane shear conditions under action of impulse loads. Frequency and temporal dependences of generalized stresses intensity coefficients of mechanical and geometrical inclusion parameters as well as of incident impulse form are given.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М.— 1984.— 472 с.
2. Кит Г.С., Ємець В.Ф., Кунец Я.І. Модель пружно-динамічної взаємодії тонкостінного включення з матрицею в умовах антиплоского зсуву // Мат. методи та фіз.-мех. поля.— 1998.— Т. 41, № 1.— С. 54-61.
3. Kit H.S., Kunets Ya. I., Ymets V.F. Elastodynamic scattering from a thin-walled inclusion of low rigidity // Intern. J. of Eng. Sc.— 1999.— Vol. 37.— P. 331-345.
4. Emets V.F., Kit H.S., Kunets Ya. I. Int. of time-harmonic SH wave with a crack-like inclusion: edge region analysis // Int. J. of Fract.— 1998.— Vol. 94.— P. 51-62.
5. Emets V.F., Kunets Ya. I. Scattering of SH-waves by a crack-like inclusion // Direct and inverse problems of electromagnetic and acoustic wave theory: Proc. of III Intern. Seminar, Tbilisi, November 2-5, 1998.— Lviv-Tbilisi, 1998.— P. 126-130.
6. Нугул У.К., Метсавээр Я.А., Векслер Н.Д., Кутсер М.Э. Эхо-сигналы от упругих объектов.— Таллин. 1974.—Т. 2.— 345 с.

Надійшла до редакції 20.03.2002 р.

О ВЛИЯНИИ ЗАТРУБНОГО ПРОСТРАНСТВА НА ХАРАКТЕР ОТРАЖЕНИЯ
ВЗРЫВНЫХ ВОЛН В ОБСАДНЫХ ТРУБАХ С ЖИДКОСТЬЮ

П.З. Луговой, Н.А. Лысюк*

Институт механики НАН Украины, *Национальный НИИ охраны труда, г. Киев

Взрыво-прострелочные работы с целью ликвидации аварий или интенсификации добычи полезных ископаемых могут проводиться в обсаженных цилиндрическими трубами скважинах, заполненных жидкостью (вода, промывочные растворы, нефть и т.д.).

Пусть в жидкости на оси обсадной трубы произошел взрыв. Так как волновая картина, в этом случае является осесимметричной, достаточно рассмотреть волновые явления в произвольном осевом сечении обсадной трубы радиуса R , волны падают на стенку трубы под углом β , L – расстояние вдоль образующей трубы. В некоторый момент времени прямая волна достигает внутренней стенки трубы. Угол ее падения $\beta = \arccos\left(L/\sqrt{L^2 + R^2}\right)$. Скорость перемещения волны вдоль поверхности обсадной

трубы определяется выражением $V_m = a_0/\cos\beta$, где a_0 – скорость звука в жидкости.

Вначале, при больших β , скорость V_t превосходит скорость распространения гармонических волн в трубе. Возмущения в жидкости будут характеризоваться прямой и отраженной волнами, отражение будет регулярным. При некотором угле $\beta = \beta_1$ скорости V_t и максимальная скорость гармонических волн V_1 окажутся одинаковыми, т.е. будут справедливы соотношения $a_0/\cos\beta_1 = V_1$. Угол β_1 называется углом полного внутреннего отражения. При $\beta < \beta_1$ происходит так называемое первое нерегулярное отражение. Эффекты типа полного внутреннего отражения в нашем случае объясняют тот факт, что основная часть энергии взрывной волны переносится жидкостью, заполняющей обсадную трубу.

Следует отметить, что взрыв происходит на оси скважины в объеме ограниченном стенками скважины и осесимметричная картина взаимодействия отраженных волн обуславливает кумулятивный эффект в жидкости по оси скважины. Подобное явление отмечено в работе [1]. Возможно, этот эффект обуславливает отсутствие ударного фронта во взрывных волнах, которые распространяются по жидкости в скважине [2].

Проведем анализ характера отражения взрывных волн от стенки обсаженной геотехнологической скважины, заполненной жидкостью. Для этого необходимо знать характер распространения в обсадной трубе – цилиндрической оболочке гармонических бегущих волн.

В большинстве работ, посвященных исследованию действия подвижных нагрузок на цилиндрические оболочки [3–6] использовалась техническая теория оболочек, которая имеет достаточно ограниченную область ее использования. В работе [7] применялась теория оболочек типа Тимошенко. Но проведенные упрощения в системе уравнений позволили определить только две критические скорости подвижных нагрузок.

Для решения задачи о распространении бегущих волн упругих деформаций в стенке цилиндрической оболочки используем теорию оболочек типа Тимошенко, обладающей по сравнению с обычной классической теорией оболочек преимуществами, вызванными учетом деформаций сдвига и инерции поворота сечения. Благодаря этому она более адекватно описывает бегущие волны.

В силу осесимметричности задачи уравнение движения оболочки с учетом реакции затрубного пространства, которое моделируется упругой средой, можно представить в виде

$$\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial N_1}{\partial x} = 0; \quad \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{N_2}{R} = P_n - Cw; \quad \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - Q + \frac{\partial M}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

где ρ – плотность материала оболочки; h – ее толщина; N_1, N_2 – внутренние усилия в оболочке в продольном и окружном направлении соответственно; Q – перерезывающая сила; M – изгибающий момент; ψ – угол поворота сечения; x – координата направлена вдоль образующей оболочки; u, w – компоненты вектора перемещений, направленные вдоль оси Ox и нормали к оболочке соответственно; t – время; C – коэффициент постели затрубного пространства.

Для исследования распространения свободных бегущих волн в цилиндрической оболочке введем фазовую координату, которая движется со скоростью V :

$$X = x - Vt \quad (2)$$

Исключая из (1) функцию угла ψ с учетом (2), получим систему двух дифференциальных уравнений относительно двух искомых функций u и w :

$$\begin{aligned} h \left(\frac{E}{1-v^2} - v^2 \rho \right) \frac{d^2 u}{dX^2} + \frac{Eh}{1-v^2} \frac{v}{R} \frac{dw}{dX} = 0; \quad \frac{Eh^3 v}{12(1-v^2)} \left(\frac{E}{1-v^2} - v^2 \rho \right) \frac{d^3 u}{dX^3} - \frac{Ehv}{R(1-v^2)} \frac{du}{dX} + \\ + \left\{ \frac{Eh^3}{12(1-v^2)} - \frac{\rho h^3}{12} \left[1 + \frac{E}{G(1-v^2)} \right] v^2 + \frac{\rho^2 h^3}{12G} v^4 \right\} \frac{d^4 w}{dX^4} + \left\{ \rho h \left[1 + \frac{Eh^2}{12(1-v^2)GR^2} + \frac{Ch}{12G} \right] v^2 - \right. \\ \left. - \frac{E^2 h^3}{12(1-v^2)GR^2} - \frac{Ch^2}{6(1-v)} \right\} \frac{dw}{dX^2} + \frac{Eh}{(1-v^2)R^2} w = P_n + \left[\frac{\rho h^3}{12G} v^2 - \frac{Eh^2}{12G(1-v^2)} \right] \frac{d^2 P_n}{dX^2} - Cw \quad (3) \end{aligned}$$

Движение собственных волн в цилиндрической оболочке описывается системой однородных дифференциальных уравнений, получаемых из неоднородной системы (3) отбрасыванием правых частей.

Исследуем движение гармонических собственных волн в оболочке. Будем строить их в форме:

$$u = U \sin(kx - \omega t); \quad w = W \cos(kx - \omega t). \quad (4)$$

После подстановки выражений (4) в однородное уравнение, соответствующее (3), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений для U и W :

$$\begin{aligned} \left(\frac{Ek^2}{1-v^2} - \rho \omega^2 \right) U - \frac{EVk}{(1-v^2)R} W = 0, \quad \frac{Evk}{R(1-v^2)} \left[\frac{\rho h^2}{12G} \omega^2 - \frac{Eh^2 k^2}{12G(1-v^2)} - 1 \right] U - \\ - \left\{ \frac{Eh^2}{12(1-v^2)} k^4 - \frac{\rho h^2}{12} \left[1 + \frac{E}{G(1-v^2)} \right] k^2 \omega^2 - \rho \left[1 + \frac{Eh^2}{12(1-v^2)GR^2} - \frac{Ch}{12G} \right] \omega^2 + \right. \\ \left. + \frac{\rho^2 h^2}{12G} \omega^4 + \left[\frac{E^2 h^2}{12(1-v^2)^2 GR^2} - \frac{Ch}{6(1-v)} \right] k^2 + \frac{E}{(1-v^2)R^2} + \frac{C}{h} \right\} W = 0. \end{aligned}$$

Эта система уравнений имеет отличное от нуля решение U и W только в том случае, когда определитель матрицы ее коэффициентов равен нулю. Из этого условия следует характеристическое (дисперсионное) уравнение:

$$\begin{aligned} \left(\frac{Ek^2}{1-v^2} - \rho \omega^2 \right) \left\{ \frac{Eh^2}{12(1-v^2)} k^4 - \frac{\rho h^2}{12} \left[1 + \frac{E}{G(1-v^2)} \right] k^2 \omega^2 - \rho \left[1 + \frac{Eh^2}{12(1-v^2)^2 GR^2} - \right. \right. \\ \left. - \frac{Ch}{12G} \right] \omega^2 + \frac{\rho^2 h^2}{12G} \omega^4 + \left[\frac{E^2 h^2}{12(1-v^2)^2 GR^2} - \frac{Ch}{6(1-v)} \right] k^2 + \frac{E}{(1-v^2)R^2} - \\ \left. - \frac{C}{h} \right\} + \frac{E^2 v^2 k^2}{R^2 (1-v^2)^2} \left[\frac{\rho h^2}{12G} \omega^2 - \frac{Eh^2}{12G(1-v^2)} k^2 - 1 \right] = 0. \quad (5) \end{aligned}$$

Построенное дисперсионное уравнение (5) является уравнением шестой степени относительно циклической частоты ω . Однако, учитывая, что ω входит в него только в квадрате, это уравнение можно привести к кубическому уравнению относительно ω^2 , затем найти три фазовые скорости движения гармонических волн вида (4).

Учет тонкостенности оболочки приводит к условию, что длина волны должна быть малой, а волновое число k – большим. С учетом $k \gg 1$ уравнение (5) приводится к виду

$$\left(\frac{E}{1-\nu^2} - \rho V^2 \right) \left\{ \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)} - \frac{\rho h^2}{12} \left[1 + \frac{E}{G(1-\nu^2)} \right] V^2 + \frac{\rho^2 h^2}{12G} V^4 \right\} = 0,$$

где $V = \omega/k$.

Из первых скобок следует известное в теории пластин соотношение: $V_1 = \sqrt{E/\rho(1-\nu^2)}$. Условие равенства нулю выражения во вторых скобках даст

$$V_2 = \frac{G}{2\rho} \left\{ \left[1 + \frac{E}{G(1-\nu^2)} \right] \pm \left[1 - \frac{E}{G(1-\nu^2)} \right] \right\}$$

и мы опять получаем известное из теории пластин выражения: $V_1 = \sqrt{E/\rho(1-\nu^2)}$; $V_3 = \sqrt{G/\rho}$ для продольной и поперечной волн.

Из выражений для V_1 и V_2 следует, что эти скорости не зависят от наличия затрубного пространства и его механических свойств.

Предположим, что оболочку можно рассматривать как упругий стержень в случае, когда геометрические размеры сечения оболочки малы по сравнению с длиной волны, и поэтому параметры сечения можно усреднить. Такое предположение выполняется при $k \rightarrow 0$. Тогда, полагая $k=0$, из (5) получим следующее соотношение

$$\left(\frac{E}{1-\nu^2} - \rho V^2 \right) \left[\frac{E}{(1-\nu^2)R^2} + \frac{C}{h} \right] - \frac{E^2 \nu^2}{(1-\nu^2)R^2} = 0.$$

Откуда находим значение скорости таких волн:

$$V_2 = \pm \sqrt{\frac{E}{\rho} \left[1 + \frac{\nu^2 R^2 C}{Eh + CR^2(1-\nu^2)} \right]}.$$

Из анализа этого выражения следует, что при отсутствии влияния затрубного пространства ($C = 0$) или при $R = 0$ (стержень) значение скорости V_2 совпадает со значением продольной волны в стержне. При $R = \infty$ (пластина) значение скорости V_2 совпадает с пластинчатой скоростью.

В результате использования теории тонких цилиндрических оболочек типа Тимошенко установлено, что в обсадных трубах с учетом влияния затрубного пространства могут распространяться гармонические волны трех типов: в длинноволновом приближении это продольные волны, скорость которых V_2 зависит от упругих свойств затрубного пространства, но не зависит от волнового числа и в предельных случаях может совпадать со скоростью распространения продольных волн в упругих стержнях; в коротковолновом приближении могут распространяться не зависящие от затрубного пространства продольные гармонические волны со скоростью $V_1 = \sqrt{E/\rho(1-\nu^2)}$ и поперечные гармонические волны со скоростью $V_3 = \sqrt{G/\rho}$, первая из которых совпадает со скоростью распространения упругих волн в пластинах, а вторая – поперечных волн в упругих средах.

Таким образом, при взрывах в обсаженных скважинах с жидкостью существует три зоны регулярного отражения, которые определяются следующими углами полного внутреннего отражения

$$\alpha_1 = \arccos \frac{a_0}{V_1}; \quad \alpha_2 = \arccos \frac{a_0}{V_2}; \quad \alpha_3 = \arccos \frac{a_0}{V_3}. \quad (6)$$

Это говорит о том, что наибольшая вероятность разрушения обсадной трубы определяется участком $L = |R \cotg \alpha_3|$, в котором за счет регулярного отражения взрывных волн значительная часть энергии

взрывного нагружения передается обсадной трубе. Помимо этого разрушению обсадной трубы могут способствовать скачки напряжений в сечениях, которые определяются углами полного внутреннего отражения (6).

Следует отметить, что наличие затрубного пространства не влияет на размеры зоны регулярных отражений взрывных волн от стенки обсадной трубы, так как $V_1 \geq V_2 > V_3$, но может значительно изменить характер распределения взрывного нагружения в зоне регулярных отражений.

РЕЗЮМЕ

З допомогою теорії циліндричних оболонок типу Тимошенка досліджено вплив затрубного простору, яке моделюється пружним середовищем з визначеним коефіцієнтом постілі, на швидкості розповсюдження гармонійних хвиль в обсадній трубі. Знайдені швидкості характеризують явища повного внутрішнього відбиття вибухових хвиль від стінок обсадної труби з рідиною. Це дає можливість визначити характер вибухового навантаження і ділянку найбільш ймовірного руйнування обсадної труби.

SUMMARY

Using the theory of cylindrical shells of Timoshenko's type, the impact of the hole clearance, modeled by the elastic medium with a defined modulus of subgrade reaction, on the speed of harmonic wave propagation in the casing pipe, has been studied. The obtained speeds characterize the phenomena of the total reflection of the blast waves from the wall of pipe casing with a liquid. This makes possible determination of the nature of explosive tension and area of the most probable failure of casing pipe.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Мукоид В.П., Луговой П.З. Численное исследование задачи о распространении интенсивной гидроударной волны внутри упругой цилиндрической оболочки // Прикл. механика. - 1986. - Т. 22, №5. - С.42-47.
2. Чуриков В.А., Коледий В.И., Черевко М.А. Динамика скважин при взрывопрострелочных работах - К.: Наук. думка. - 1994. - 173 с.
3. Бозьмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. - М.: Наука. 1972. - 432с.
4. Луговой П.З., Мейн В.Ф. Поведение подкрепленной цилиндрической оболочки при действии подвальной нагрузки // Сопротив. матер. и теория сооружений. - 1990. - вып. 56. - С. 79-83.
5. Перцев А.К., Платонов Э.Г. Динамика оболочек и пластин. - Л.: Судостроение, 1987. - 316 с.
6. Jones I.P., Bhatta P.G. Response of cylindrical shells to moving loads // Trans. ASME - 1964. - Vol. E 31, No 1 - p. 105-111.
7. Луговой П.З., Мукоид В.П., Мейн В.Ф. Динамика оболочечных конструкций при взрывных нагрузках - К.: Наук. думка, 1991. - 278 с.

Надійшла до редакції 22.03.2002 р.

УДК 539.376

ЗАКРИТИЧЕСКИЙ ВИБРОРАЗОГРЕВ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПРИЗМЫ С НАДРЕЗОМ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ РАСТЯЖЕНИИ

О.П. Червинко

Институт механики. НАН Украины, г. Киев

Исследование устойчивости процесса вибронагрева вязкоупругих тел при гармоническом нагружении [1] имеет большой практический интерес. Оценка критических параметров нагружения, по существу, решает вопрос об усталостном тепловом разрушении элементов конструкций [2] и конкретизации технологических параметров ультразвуковой сварки пластмасс [3]. Вместе с тем, для понимания механизмов разрушения тел и кинетики технологических процессов необходим анализ нестационарного закритического поведения. В данной работе анализ такого поведения проводится на примере прямоугольной вязкоупругой призмы с надрезом при гармоническом растяжении-сжатии.

В прямоугольной декартовой системе координат xOy термомеханическое состояние линейно-вязкоупругой призмы $|y| \leq L$, $0 < x < H$ при сжатии описывается уравнениями колебаний и теплопроводности

$$\operatorname{div} \tilde{\sigma} + \rho \omega^2 \tilde{u} = 0, \quad (1)$$

$$c \dot{\theta} = \nabla(k \nabla \theta) + D', \quad (2)$$

определяемыми уравнениями

$$\tilde{s} = 2\tilde{G}\tilde{\varepsilon}, \quad \tilde{\sigma}_{kk} = 3\tilde{K}\tilde{\varepsilon}_{kk}, \quad D' = \frac{\omega}{2} \operatorname{Im}(\tilde{\sigma} : \tilde{\varepsilon}^*), \quad \varepsilon_{zz} = 0,$$

а также граничными и начальными (для температуры) условиями

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{yy} = -i\sigma_0, \quad \tilde{\sigma}_{xy} = 0, \quad y = \pm L; \quad \tilde{\sigma}_{xx} = \tilde{\sigma}_{xy} = 0, \quad x = 0, H; \\ -k \nabla \theta = \alpha(\theta - \theta_c) \text{ на } l; \quad \theta(x, 0) = \theta_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{s}$, $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{u}$ - комплексные амплитуды тензоров напряжений, деформаций, их девиаторов и вектора перемещений; θ и D' - осредненные за период колебаний температура и функция скорости диссипации; $\tilde{G}$ и $\tilde{K}$ - комплексные модули сдвига и объемного сжатия; α - коэффициент теплоотдачи; ω - круговая частота колебаний; ρ - плотность; c и k - коэффициенты объемной теплоемкости и теплопроводности; θ_c - температура окружающей среды, равная начальной температуре тела θ_0 ; l - контур призмы.

После некоторых преобразований задача теплопроводности (2), (3) принимает вид

$$\bar{c}(\theta) \dot{\theta} = \nabla(\bar{k}(\theta) \nabla \theta) + \eta \Psi(\bar{x}, \theta), \quad (4)$$

$$\nabla \theta \cdot \bar{n} + \bar{\chi}(\theta)(\theta - \theta_c) = 0, \quad (5)$$

где $\eta = C\omega\sigma_0^2$, - параметр интенсивности теплообразования, C - коэффициент, не зависящий явно от ω и σ_0 ; $\bar{k}(\theta) = k(\theta)/k(\theta_c)$, $\bar{c}(\theta) = c(\theta)/c(\theta_c)$.

Значение η^* называется критическим, если при $\eta < \eta^*$ положительное решение стационарного варианта задачи (4-5) существует, а при $\eta > \eta^*$ - не существует [1].

Численный анализ проводился методом конечных элементов [4]. Основная цель заключалась в оценке влияния различных факторов на эволюцию температуры вибронагрева в закритической области. Расчеты проводились для следующего базового набора параметров: $2L = 0.06$ м, $H = 0.012$ м, $h = 10^{-2}$ м, $\omega = 314$ с⁻¹, $\theta_c = \theta_0 = 20^\circ$ C, $\alpha = 30$ Вт м⁻²⁰ C⁻¹, $r = 0.0003$ м, $\varphi = 60^\circ$, $\delta = 0.002$ м. При этом r - радиус закругления кончика надреза; δ - его глубина, φ - угол раствора; односторонний надрез располагается на половине высоты призмы $y = 0$. В качестве материала использовался полиме-

тилметакрилат. Температурные зависимости его физико-механических характеристик приведены в работе [5]. Анализ закритического поведения проводился для амплитуды нагрузки $\sigma_0 = 25$ МПа и $f = 50$ Гц.

На рис.1 представлены результаты расчетов для базового варианта. Кривая 1 показывает изменение максимальной по объему температуры $\theta_m(t)$. Для сравнения штриховой линией 1' показана кривая $\theta_m(t)$ в случае независимых от температуры свойств материала. На оси абсцисс приведены моменты времени t_L и t_N достижения средней критической температуры $\theta^* \approx 90^\circ\text{C}$, рассчитанные по линейной и нелинейной моделям. Видно, что линейная модель дает нижнюю оценку величины t_N , начиная с которой происходит быстрый рост температуры. Кривые 2 и 3 иллюстрируют кинетику изменения амплитуды перемещений $|\tilde{u}_x|$ и $|\tilde{u}_y|$ точки с координатами $x=H$, $y=-L$. Видно, что интенсивный рост продольных перемещений u_y начинается лишь в момент наиболее резкого изменения θ_m . Поперечные перемещения изменяются существенно слабее. Коэффициент концентрации $k_\sigma = \sigma_{\max}/\sigma_0$ (кривая 4) сначала уменьшается (блокирование дефекта), а затем увеличивается вследствие уменьшения живого сечения. Кривые закритического разогрева похожи на кривые ползучести, и для них можно аналогичным образом выделить три стадии – начальную, установившуюся и критическую.

Изучение влияния геометрии призмы на кинетику температуры проводится на основе данных, представленных на рис.2. Кривые 1 и 2, отвечающие призмам с надрезом и без надреза, существенно расширяют понимание влияния надреза на критические значения и закритическое поведение. Хотя значения критических нагрузок в обоих случаях различаются незначительно, время достижения критической температуры для призмы с надрезом в 2,5 раза меньше, чем для призмы без надреза. Кривая 3 отве-

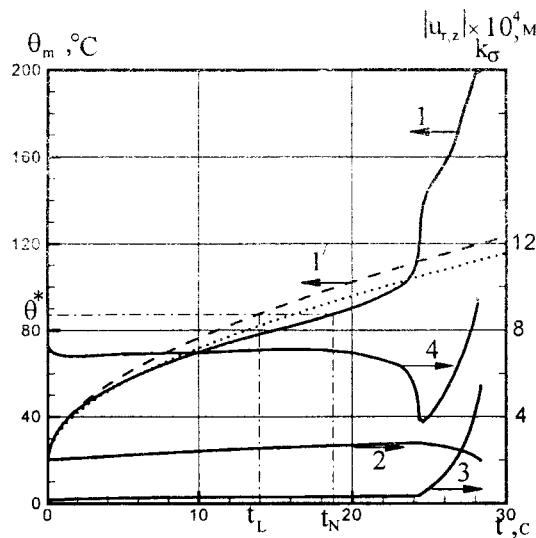


Рис. 1

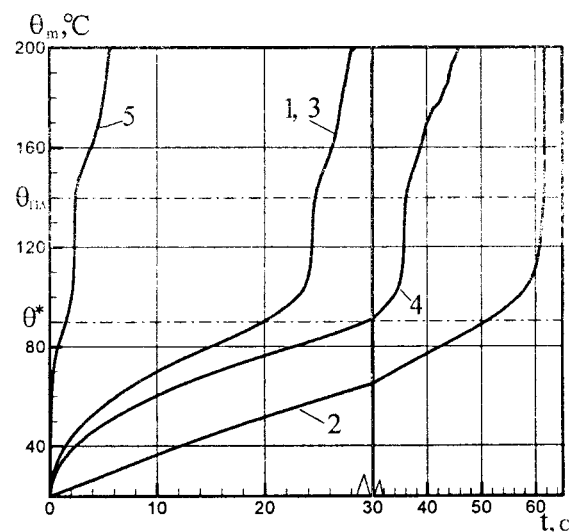


Рис. 2

чает условиям $f' = 200$ Гц, $\sigma'_0 = 12,5$ МПа, удовлетворяющих равенству $f\sigma_0^2 = f'\sigma_0'^2 = \kappa$. Равенство параметров κ влечет совпадение кривых 1 и 3. Таким образом, все кривые, отвечающие различным κ , совместятся, если ввести новую временную переменную $\tau = \kappa t$. Кривая 4 отражает кинетику широкой призмы ($H = 0,212$ м) с надрезом. Хотя критическое значение для нее существенно ниже, чем для узкой, ее разогрев происходит медленнее. Высокочастотный разогрев узкой призмы при $f' = 20$ кГц, $\sigma'_0 = \sigma_0/10 = 2,5$ МПа представлен кривой 5. Такой режим близок к реализуемым при ультразвуковой сварке пластмасс и по времени разогрева хорошо согласуется с практическими результатами.

Общей особенностью всех представленных кинетических кривых является наличие области относительно медленного (инкубационного) изменения температуры при $\theta < \theta^*$, и её резкое нарастание при $\theta > \theta^*$ с незначительным изломом при $\theta = \theta_{\text{пл}}$. Этот излом, слабо выраженный для аморфных полимеров, будет существенным для частично кристаллических полимеров (полиэтилена, полипропилена, полиамида и др.), обладающих значительной скрытой теплотой плавления.

Кинетика пространственного распределения температуры в призме для базового варианта представлена на рис. 3. Представленные изолинии отвечают условной температуре плавления $\theta_{пл} = 140^\circ \text{C}$.

Указанные на рис. 3 моменты времени выбраны с целью иллюстрации развития локализованной области разогрева в окрестности вершины надреза. Анализ этих данных, а также кривой 1 на рис. 2, показывают, что

стадии

полю

В
поле

части
имеет

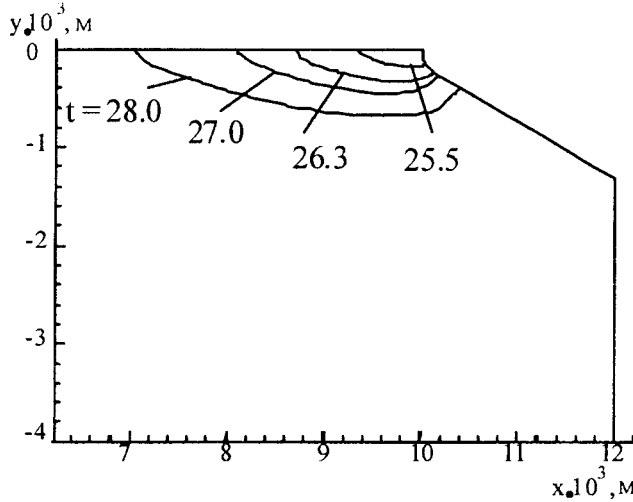


Рис. 3

плавление возникает на третьей стадии разогрева в момент $t_{пл} = 25,4 \text{ с}$ и развивается очень быстро.

Закритическому температурному присуще наличие экспоненциально растущих мод.

случае, когда температурное характеризуется пространственной

однородностью, потенциально нарастающими оказываются

низшие моды, при этом температура быстро изменяется

одновременно в преобладающей объема тела. Иная ситуация

место при локализации термомеханического процесса.

Критическая температура, а, следовательно, третья стадия

процесса реализуется сначала в окрестности вершины надреза, после чего эта область расширяется.

Исследуем структуру температурного поля по признаку максимальной скорости его изменения.

Легко видеть (рис.2), что момент t^* перехода температуры из второй стадии в третью определяется равенством

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0. \quad (6)$$

Эта точка является границей областей выпуклости и вогнутости кривой $\theta(t)$. Следовательно, геометрическое место точек, в которых выполняется равенство (6) и будет кривой, ограничивающей область, в которой реализуется третья стадия процесса.

Однако, с практической точки зрения соотношение (6) трудно конкретизировать в рамках численного метода решения задачи. Поэтому рационально определить искомую область через более низкую

производную $\frac{\partial \theta}{\partial t}$. При этом возникает некоторая неопределенность, связанная с выбором допуска. Для

лучшего понимания вопроса рассмотрим кривые на рис.4, отвечающие кривым 1 и 5 на рис.2. Тонкими линиями показаны касательные для характерных участков кривых. Числами указаны значения производных $\dot{\theta}$ на этих участках.

Переход от второй стадии процесса к третьей характеризуется резким более, чем на порядок, изменением скорости $\dot{\theta}$.

Если обозначить через $\dot{\theta}_2$ скорость температуры на второй стадии, то область третьей стадии можно условно определить как $\dot{\theta}_3 \geq \dot{\theta}_3^* = (10-20)\dot{\theta}_2$.

На рис.5 показаны одновременно изотермы (светлые штриховые линии) и линии постоянной скорости $\dot{\theta}$ (сплошные линии). Данные соответствуют базовому варианту.

Изотерма $\theta = 140^\circ \text{C}$ выделяет зону расплава. Наиболее интересным результатом является наличие зоны аномально больших скоростей $\dot{\theta} \sim 100 \text{ град/с}$ у вершины этой зоны.

Здесь действует наиболее интенсивный источник тепла, который, как бы «прожигает» материал, определяя направление распространения «жидкой» трещины.

Относительно менее мощные источники тепла, порождающие скорости $\dot{\theta} \sim 20 \text{ град/с}$ прилегают к боковым участкам зоны, обеспечивая её расширение.

Следует отметить, что условная граница области локализации неустойчивого поведения близка к изотерме $\theta = 100^\circ \text{C}$, примыкающей снизу к температуре стеклования. При ультразвуковых частотах нагружения уровень локализация существенно выше. Соответственно выше оказывается и скорость разо-

грева в ядре области неустойчивости. При этом разогрев остальной области, где реализуются первая и вторая стадии, примерно на 20°C ниже.

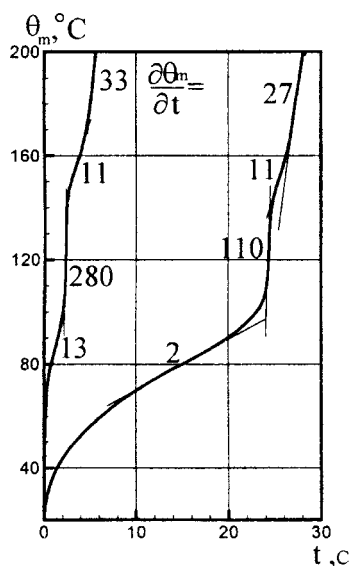


Рис. 4

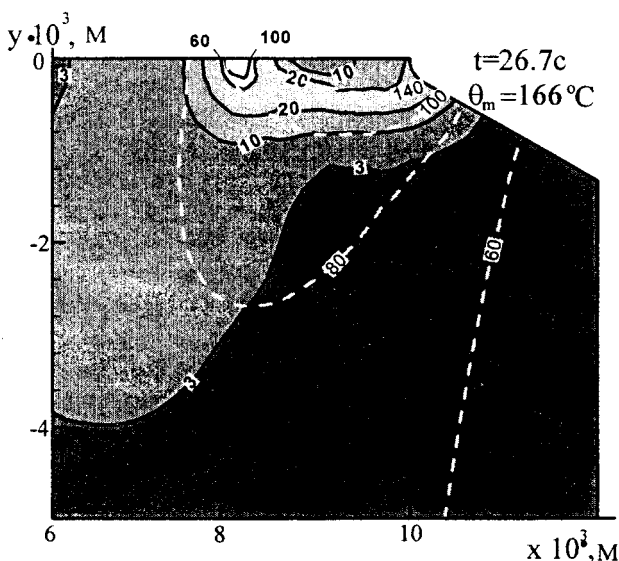


Рис. 5

Таким образом, в ультразвуковом диапазоне частот нагружения возможны реализации высокоскоростных локализованных процессов. Эти теоретические результаты вполне согласуются с экспериментальными и практическими данными, накопленными в области передаточной ультразвуковой сварки пластмасс жестких аморфных полимеров при использовании концентраторов энергии.

РЕЗЮМЕ

Досліджено вплив геометричних і фізичних параметрів на закритичний вібророзігрів прямокутної в'язкопружної призми з надрізом при гармонічному розтягу.

SUMMARY

An influence of geometrical and physical parameters on postcritical vibration heating of the notched rectangular viscoelastic prism under harmonic tension is numerically investigated.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Карнаухов В.Г., Сенченков И.К. Приближенный метод расчета критических тепловых состояний // Прикладная механика. – 1976. – №4, 12. – С.18-25.
2. Нарисава И. Прочность полимерных материалов. – М.: Химия, 1987. – 400 с.
3. Волков С.С. Орлов Ю.Н., Черняк Б.Я. Сварка пластмасс ультразвуком. – М.: Химия, 1974. – 264 с.
4. Мотовиловец И.А., Козлов В.И. Термоупругость. – К.: Наук.думка, 1987-264 с. (в 5 т., Т.1 Механика связанных полей в элементах конструкций.)
5. Теплофизические и реологические характеристики и коэффициенты трения наполненных термопластов. Справочник / Пахаренко В.А. и др. К.: Наук.думка, 1983. – 280 с.

Надійшла до редакції 11.01.2002 р.

УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СЧЕТА НА УСТАНОВЛЕНИЕ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ТЕЛА ПРИ ОДНОСТОРОННЕМ КОНТАКТЕ С ЖЕСТКИМ ШТАМПОМ

А.А. Бобылев, Е. Л. Сутурин

Днепропетровский национальный университет

Задачи исследования вынужденных колебаний упругих систем с односторонними связями являются нелинейными задачами, содержащими неравенства в граничных условиях. Возможности аналитических методов решения таких задач, как правило, ограничены дискретными системами с небольшим числом степеней свободы. Поэтому основная роль в исследовании вынужденных колебаний распределённых упругих систем с односторонними связями отводится численным методам. Большинство вычислительных алгоритмов, предназначенных для решения задач с односторонними связями в той или иной форме основаны на вариационных методах. Следует отметить, что первые попытки установления общих закономерностей поведения систем с односторонними связями были предприняты ещё Гауссом, Курно, Лагранжем, Фурье, Остроградским и завершились формированием для таких систем принципа возможных перемещений и применением этого метода для решения некоторых простейших задач. Математической основой вариационного подхода решения задач с односторонними связями является аппарат вариационных неравенств. Так, вариационная формулировка задачи о вынужденных колебаниях упругой системы при Т-периодическом внешнем воздействии состоит в отыскании Т-периодического решения гиперболического вариационного неравенства. Наибольший вклад в разработку теории вариационных неравенств внесли математики итальянской и французской школ – Лионс, Брезис, Гловински, Дюво, Стампаккья и др. Часть результатов, полученных этими авторами, изложена в работах [1, 2]. Наиболее распространённый подход к исследованию вынужденных колебаний упругих систем с двусторонними связями при периодическом внешнем воздействии основан на разложении функций, описывающих эти воздействия, в ряды Фурье и расщеплении исходной задачи на совокупность несвязанных задач для отдельных гармоник [3]. При наличии в системе односторонних связей полученная аналогичным образом совокупность задач будет связанной, что значительно затрудняет её решение и ограничивает возможность практического использования такого подхода.

В настоящей работе для нахождения Т-периодических решений гиперболических вариационных неравенств применяется метод счёта на установление. Этот метод широко используется для решения различных классов стационарных задач математической физики. Суть метода состоит в том, что вместо стационарной задачи рассматривается соответствующая ей эволюционная задача с теми же граничными условиями и произвольно выбранными начальными условиями. В работе [4] метод счёта на установление предложено использовать для нахождения Т-периодических решений уравнений вынужденных колебаний упругих систем. Применение этого метода позволяет свести задачу расчёта вынужденных колебаний к решению задачи Коши для системы с естественным или искусственно введённым демпфированием, начальные условия для которой могут быть выбраны произвольно. Действительно, при наличии демпфирования влияние начальных условий на вынужденные колебания упругой системы постепенно уменьшается и с течением времени система переходит к установившемуся движению. Общее решение задачи о вынужденных колебаниях линейной системы при наличии демпфирования может быть представлено в виде суммы двух слагаемых, первое из которых учитывает начальные условия, а второе – внешнее периодическое воздействие. Например, для колебательной системы с демпфированием, движение которой под действием внешней гармонической нагрузки $P \sin \omega t$ описывается уравнением

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \alpha^2 x = P \sin \omega t, \quad (1)$$

общее решение имеет вид

$$x = e^{-nt} \left((U_0 - N) \cos \alpha_1 t + \left(\frac{V_0 - \omega M + U_0 n - Nn}{\alpha_1} \right) \sin \alpha_1 t \right) + M \sin \omega t + N \cos \omega t, \quad (2)$$

где U_0 – начальное смещение; V_0 – начальная скорость;

$$M = P \frac{\alpha^2 - \omega^2}{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}; \quad N = -P \frac{2n\omega}{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}; \quad \alpha_1^2 = \alpha^2 - \omega^2.$$

Очевидно, что с течением времени вклад первого слагаемого в общее решение уменьшается и стремится к нулю. Следовательно, Т-периодическое решение гиперболического уравнения (1) может быть получено как решение при $t \rightarrow \infty$ задачи Коши с произвольно выбранными начальными условиями при наличии в системе естественного или искусственно введённого демпфирования. Для численного решения задачи Коши могут быть использованы явные схемы интегрирования по времени дифференциальных уравнений второго порядка.

Рассмотрим задачу о вынужденных колебаниях упругого тела конечных размеров, односторонне контактирующего с жёстким движущимся штампом. Пусть однородное изотропное упругое тело занимает конечную область $\Omega \in R^s$ ($s=2, 3$), ограниченную замкнутой поверхностью Γ с внешней нормалью $\bar{n}$. Под $u_i(x, t)$, $\varepsilon_{ij}(x, t)$, $\sigma_{ij}(x, t)$, будем понимать соответствующие компоненты вектора перемещений, тензоров деформации и напряжения в точке $x \in \Omega$ в момент времени t . Перемещения и деформации считаются малыми. Напряжения в недеформированном состоянии отсутствуют. На тело Ω действуют массовые силы интенсивностью $\rho(x)\bar{F}(x, t)$, где $\rho(x)$ – плотность тела. Поверхность Γ состоит из трёх непересекающихся частей $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_q \cup \Gamma_p$. На части Γ_u заданы перемещения

$$\bar{u}(x, t) = \bar{g}(x, t), \quad (3)$$

а на части поверхности Γ_q – усилия

$$\sigma_{ij}(x, t)n_j(x) = q_i(x, t). \quad (4)$$

Совокупность предельно возможных зон контакта тела Ω со штампом обозначим Γ_p . Форма и положение штампа описывается функцией $\phi(x, t)$, значение которой в точке $x \in \Gamma_p$ равно расстоянию от этой точки до поверхности штампа, измеренному вдоль направления внешней нормали $\bar{n}$ тела Ω в момент времени t . Расстояние $\phi(x, t)$ отсчитывается по отношению к недеформированному состоянию тела Ω . Контактное взаимодействие тела Ω с жестким штампом описывается линеаризованными условиями идеального одностороннего контакта

$$u_n(x, t) \leq \phi(x, t), \quad \sigma_n(x, t) \leq 0, \quad \sigma_t(x, t) = 0, \quad \sigma_n(x, t)[u_n(x, t) - \phi(x, t)] = 0, \quad x \in \Gamma_p. \quad (5)$$

Функции $\bar{F}(x, t)$, $\bar{g}(x, t)$, $\bar{q}(x, t)$ и $\phi(x, t)$, описывающие внешние воздействия на тело Ω , являются Т-периодическими функциями

$$\bar{F}(x, t) = \bar{F}(x, t + T); \quad \bar{g}(x, t) = \bar{g}(x, t + T); \quad \bar{q}(x, t) = \bar{q}(x, t + T); \quad \phi(x, t) = \phi(x, t + T). \quad (6)$$

Будем полагать, что в колеблющемся теле Ω действуют силы вязкого демпфирования, пропорциональные скорости с коэффициентом пропорциональности c . При отсутствии естественных сил демпфирования введём их искусственно. Однако, в этом случае мы получим приближённое решение, которое будет стремиться к точному при $c \rightarrow 0$. Задача состоит в определении функций $u_i(x, t)$, $\varepsilon_{ij}(x, t)$, $\sigma_{ij}(x, t)$, удовлетворяющих в области Ω уравнениям движения, соотношениям Коши, закону Гука, условиям периодичности

$$u(x, t) = u(x, t + T), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x, t + T)}{\partial t}, \quad (7)$$

а также граничным условиям (3) – (5) на границе Γ .

Применяя вариационный подход, получим формулировку задачи в виде гиперболического вариационного неравенства вида

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} (v_i - u_i) d\Omega + \int_{\Omega} c \frac{\partial u_i}{\partial t} (v_i - u_i) d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v - u) d\Omega - \\ & - \int_{\Omega} \rho F_i (v_i - u_i) d\Omega - \int_{\Gamma_q} q_i (v_i - u_i) d\Gamma_q \geq 0, \quad u, v \in K, \end{aligned} \quad (8)$$

где u – искомое решение задачи; v – кинематически возможные перемещения; K – множество кинематически возможных перемещений.

матически возможных перемещений, удовлетворяющих условиям периодичности (7)

$$K = \{v: v(x, t) = g(x, t), \quad x \in \Gamma_u; \quad v_v(x, t) \leq \Phi(x, t), \quad x \in \Gamma_p; \\ v(x, t) = v(x, t + T); \quad \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial v(x, t + T)}{\partial t} \}.$$
 (9)

Для дискретизации задачи по пространственным координатам используем метод конечных элементов [2]. В результате получим конечномерное гиперболическое вариационное неравенство

$$(M\ddot{U} + C\dot{U} + KU - Q, V - U) \geq 0 \quad U, V \in Z.$$
 (10)

Здесь U – искомый вектор узловых перемещений; Z – множество кинематически возможных узловых перемещений; M – матрица масс; C – матрица вязкого демпфирования; K – матрица жёсткости; Q – вектор нагрузок. Формулы для вычисления матриц и векторов, входящих в выражение (10) приведены, например, в [4].

Разобьём временную ось на равные отрезки $[t^i, t^{i+1}] \quad i = 1, 2, \dots$ таким образом, чтобы на период колебаний приходилось целое число отрезков. Длину этих отрезков обозначим через h . Далее под u^i и Q^i будем понимать соответственно векторы узловых перемещений и усилий в момент времени t^i . Отметим, что вектор Q^i можно вычислять либо как среднюю величину узловых усилий на интервале $[t^{i-1}, t^{i+1}]$, либо как величину узловых усилий в момент времени t^i . Для дискретизации задачи по временной координате можно использовать два типа схем [2]. К первому типу относят следующие вычислительные схемы:

$$\left(M \frac{u^{i+1} - 2u^i + u^{i-1}}{h^2} + C \left(\frac{u^{i+1} - u^i}{h} \theta^7 + \frac{u^i - u^{i-1}}{h} (1 - \theta^7) \right) + K\bar{u}^i - \bar{Q}^i, v - u^{i+1} \right) \geq 0, \\ \bar{u}^i = \theta^1 u^{i-1} + \theta^2 u^i + \theta^3 u^{i+1}, \quad \bar{Q}^i = \theta^4 Q^{i-1} + \theta^5 Q^i + \theta^6 Q^{i+1},$$
 (11)

где

$$\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4, \theta^5, \theta^6, \theta^7 \in [0, 1], \quad \theta^1 + \theta^2 + \theta^3 = 1, \quad \theta^4 + \theta^5 + \theta^6 = 1.$$

Выбирая для первого соотношения схемы (11) параметры равными $\theta^{14} = \gamma$, $\theta^8 = \theta^{11} = 1/2 + \beta - \gamma$, $\theta^9 = \theta^{12} = 1/2 - 2\beta + \gamma$, $\theta^{10} = \theta^{13} = \beta$ получим схему аналогичную схеме шагового алгоритма Ньюмарка [5]. В данной работе используется схема интегрирования по времени другого типа, именуемая схемой расщепления:

$$M \frac{u^{i+1/2} - 2u^i + u^{i-1}}{h^2} + C \left(\frac{u^{i+1/2} - u^i}{h} \theta^{14} + \frac{u^i - u^{i-1}}{h} (1 - \theta^{14}) \right) + K\bar{u}^{i+1/2} - \bar{Q}^i = 0, \\ \bar{u}^{i+1/2} = \theta^8 u^{i-1} + \theta^9 u^i + \theta^{10} u^{i+1/2}, \quad \bar{Q}^i = \theta^{11} Q^{i-1} + \theta^{12} Q^i + \theta^{13} Q^{i+1}, \quad u^{i+1} = P u^{i+1/2},$$
 (12)

где

$$\theta^8, \theta^9, \theta^{10}, \theta^{11}, \theta^{12}, \theta^{13}, \theta^{14} \in [0, 1], \quad \theta^8 + \theta^9 + \theta^{10} = 1, \quad \theta^{11} + \theta^{12} + \theta^{13} = 1.$$

Оператор проектирования P обеспечивает выполнение кинематических граничных условий из (5) и определяется таким образом: если $v = Pu$, то

$$v_j = \begin{cases} u_j, & u_j < \phi_j, \quad j \in J; \\ \phi_j, & u_j \geq \phi_j, \quad j \in J; \\ u_j, & j \notin J; \end{cases}$$
 (13)

где $j = \overline{1, N}$; J, N – множество номеров и количество компонент вектора узловых перемещений, соответствующих нормальным перемещениям узлов, принадлежащих Γ_p .

На каждом шаге по времени вычислительного процесса, определяемого формулой (11), необходимо решить вариационное неравенство, а на каждом шаге вычислительного процесса (12) – систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестного вектора узловых перемещений $u^{i+1/2}$ и выполнить учёт ограничений в виде неравенств, используя оператор проектирования P .

В общем случае на каждом шаге вычислительного процесса (12) производится обращение матрицы, которая является линейной комбинацией матриц K, M и C . Для явных схем интегрирования по времени ($\theta^{10} = 0$) обращаемая матрица является линейной комбинацией только матриц M и C . В этом случае, как показано в [5], задачу можно свести к задаче обращения диагональной матрицы, если при построении матриц масс M и демпфирования C значения соответствующих интегралов от произведений базисных функций конечных элементов вычислять приближённо по формуле трапеций. При использовании диагональных матриц M и C вычислительная стоимость реализации предложенного шагового алгоритма значительно снижается. Как показывают вычислительные эксперименты, приближённое вычисление матриц M и C не вносит существенной погрешности в решение задачи.

В качестве условия сходимости вычислительного процесса использовались условия:

$$\|u^i - u^{i+m}\| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \|u^i\|; \left\| \frac{u^{i+m+1} - u^{i+m-1}}{2h} + \frac{u^{i+1} - u^{i-1}}{2h} \right\| \leq \varepsilon_3 + \varepsilon_4 \left\| \frac{u^{i+1} - u^{i-1}}{2h} \right\|, \quad (14)$$

где $i = \overline{1, N}$; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ – параметры, характеризующие точность выполнения условий периодичности (7), $m = T/h$ – количество временных отрезков, на которые разбит период колебаний. Для остановки вычислительного процесса требовалось выполнения условия (14) в четырёх точках временной области, выбираемых с интервалом в четверть периода T .

Из механических соображений следует, что, если вязкое демпфирование вводится искусственно, то с уменьшением коэффициента вязкости c получаемое приближённое решение будет стремиться к точному, но при этом будет увеличиваться время установления процесса колебаний. Для исследования скорости сходимости вычислительного процесса вводилась безразмерная величина вида

$$\tilde{c} = \frac{\sqrt{\rho c \omega^2}}{E \sqrt{E}}.$$

На рис. 1 приведен характерный график зависимости количества периодов колебаний, необходимых для сходимости вычислительного процесса в соответствии с условиями (14) при $\varepsilon_1 = 10^{-10}$, $\varepsilon_2 = 0.5 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_3 = 10^{-10}$, $\varepsilon_4 = 0.5 \cdot 10^{-4}$ от безразмерной величины $\exp(10^7 \tilde{c})$.

С использованием разработанного вычислительного алгоритма решен ряд задач о взаимодействии жёсткого штампа и упругого тела. Анализ полученных результатов позволил сделать вывод о вычислительной эффективности использования приведенного метода расчета вынужденных колебаний упругих систем с односторонними связями.

РЕЗЮМЕ

Розглянуті питання застосування методу підрахунку на встановлення для чисельного розв'язку плоскої контактної задачі про коливання пружного тіла кінцевих розмірів при дії періодичного навантаження з боку жорсткого штампу. Контактна взаємодія пружного тіла зі штампом описувалась граничними умовами одностороннього контакту. Для пригнічення вільних коливань пружного тіла у вихідну варіаційну нерівність вводилось в'язке демпфіюван-

ня. Дискретизація задачі по просторовим координатам проводилась методом скінчених елементів. Для чисельного інтегрування в часі застосовувалась явна тришарова різницева схема.

SUMMARY

Application of stabilization method for calculating of forced vibration an elastic body under unilateral contact with a rigid punch is discussed. The contact interaction of the body and the punch is described by conditions of unilateral contact. Free vibrations of the elastic body are suppressed by inputting of viscous damping. Discretization of problem with space coordinates is done by finite-element method. For numerical integration with time coordinate explicit three-level scheme is used.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
2. Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. – М.: Мир, 1979. – 574 с.
3. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
4. Бобылев А.А. Применение метода счета на установление к исследованию вынужденных колебаний упругих систем // Актуальні проблеми механіки, математики та інформатики: Том 2. Тези доповідей конференції за підсумками НДР Дніпропетровського державного університету за 1999. – Т. 2. – С. 13
5. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986. – 318 с.

Надійшла до редакції 10.04.2002 р.

УДК 539.3

РАЗРАБОТКА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ СТЕРЖНЕВЫХ И БАЛОЧНЫХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

А.С. Даниленко, А.В. Наседкин
Ростовский государственный университет, Россия

Как известно, многие пьезоэлектрические преобразователи на практике работают на ярко выраженных одномерных модах колебаний. При моделировании таких устройств зачастую эффективны стержневые и балочные теории. При этом для пьезоэлектрических сред имеется большое разнообразие одномерных мод колебаний, например, чисто упругие формы колебаний, пьезомягкие и пьезожесткие моды, изгибные колебания биморфных структур, эффекты, вызванные разрезными электродами и т.п. Для расчетов составных пьезоустройств, включающих стержневые, балочные и плоские или пространственные элементы, эффективны конечно-элементные (КЭ) подходы. В настоящей работе описан ряд одномерных пьезоэлектрических конечных элементов, дополняющих базовые возможности стандартных КЭ пакетов. Предложены квазиупругие конечные элементы, моделирующие работу одномерных пьезоэлектрических структур.

Рассмотрим подробно модель толщинных пьезожестких колебаний одномерной структуры, в которой электрическое поле параллельно направлению движения.

При толщинных движениях вдоль координаты $x = x_3$ электроупругого слоя $x \in [x_k, x_m]$; $x_m - x_k = h_j$, поляризованного вдоль того же направления, определяющие соотношения в стандартных обозначениях [1] имеют вид

$$\sigma_{33} = c_{33}^E \varepsilon_{33} - e_{33} E_3; \quad D_3 = e_{33} \varepsilon_{33} + \varepsilon_{33}^S E_3. \quad (1)$$

Опуская для краткости верхние и нижние индексы ($x = x_3$; $u = u_3$; $\varepsilon = \varepsilon_{33}$; $e = e_{33}$; $\sigma = \sigma_{33}$; $D = D_3$; $c = c_{33}^E$; $\varepsilon = \varepsilon_{33}$; $\varepsilon = \varepsilon_{33}^S$) с учетом формул

$$\varepsilon = u'; \quad E = -\varphi' \quad (2)$$

соотношения (1) можно переписать в виде

$$\sigma = cu' + e\varphi'; \quad D = eu' - \varepsilon\varphi', \quad (3)$$

где $(...)' = \partial/\partial x$.

Полевые уравнения электроупругости для данной одномерной задачи выглядят таким образом:

$$\sigma' + f = \rho \ddot{u}; \quad D' = 0. \quad (4)$$

Здесь f – плотность массовых сил.

Пусть $V = \varphi(x_k, t) - \varphi(x_m, t)$ – разность потенциалов между гранями элемента x_k и x_m . Тогда из вторых уравнений (3) и (4) получаем

$$D = \frac{\varepsilon}{h_j} - \frac{e}{h_j} (u(x_k, t) - u(x_m, t)), \quad \varphi = \frac{e}{\varepsilon} u - \frac{1}{\varepsilon} D x + \text{const}(t); \quad (5)$$

$$E = -\frac{e}{\varepsilon} u' - \frac{e}{\varepsilon h_j} (u(x_k, t) - u(x_m, t)) + \frac{1}{h_j} V, \quad Q = -A_j D, \quad (6)$$

где Q – электрический заряд на грани $x = x_m$; A_j – площадь поперечного сечения элемента.

С учетом формул (5), уравнение (4) можно привести к виду

$$\bar{c} u'' = \rho \ddot{u}. \quad (7)$$

При этом $\bar{c} = c + e^2/\varepsilon$ ($\bar{c} = c_{33}^D$); а для механических напряжений имеем формулу

$$\sigma = \bar{c}u' + \frac{e^2}{\partial h_j}(u(x_k, t) - u(x_m, t)) - \frac{e}{h_j}V. \quad (8)$$

В (7), (8) в качестве неизвестной полевой функции фигурирует только механическое перемещение $u(x, t)$, а электрический потенциал φ отсутствует. Однако, в (8) имеется функция V , которая в зависимости от типа электрических граничных условий может быть как известной, так и неизвестной.

Назовем V -задачей такую задачу, в которой разность потенциалов V на гранях известна. Для такой задачи формула (8) для механических напряжений не требует дальнейших преобразований.

При другом типе задач, который назовем Q -задачами, известен заряд Q на гранях ($-Q$ – при $x = x_k$; $+Q$ – при $x = x_m$), а разность потенциалов V не известна. Для Q -задачи для механических напряжений более удобной оказывается следующая из (8), (5), (6) формула

$$\sigma = \bar{c}u' + \frac{e}{\partial A_j}Q. \quad (9)$$

Для построения классических схем метода конечных элементов (МКЭ) необходимы соответствующие интегральные тождества, определяющие слабые или обобщенные постановки задач. Как следует из предыдущего, для рассматриваемого случая толщинных движений возможны по меньшей мере три различные КЭ формулировки. Первая формулировка базируется на связанных уравнениях электроупругой структуры (2) – (4), а две другие – на уравнениях (7), (8) и (7), (9) для функции u .

В первом случае, умножая (4) соответственно на $A_j v$, $A_j \chi$, интегрируя по толщине элемента и проводя стандартные преобразования, с учетом (2), (3) получим интегральные тождества

$$\rho(v, \ddot{u}) + c(v, u) + e(v, \varphi) = L_u(v); \quad e(u, \chi) - \varepsilon(\chi, \varphi) = L_\varphi(\chi), \quad (10)$$

где v, χ – произвольные достаточно гладкие функции:

$$\begin{aligned} \rho(v, u) &= A_j \int_{x_k}^{x_m} \rho v u \, dx; \quad c(v, u) = A_j \int_{x_k}^{x_m} c v' u' \, dx; \quad e(v, \varphi) = A_j \int_{x_k}^{x_m} e v' \varphi' \, dx; \\ \varepsilon(\chi, \varphi) &= A_j \int_{x_k}^{x_m} \varepsilon \chi' \varphi' \, dx; \quad L_u(v) = v_k F_k + v_m F_m + A_j \int_{x_k}^{x_m} v f \, dx; \\ L_\varphi(\chi) &= -\chi_k Q_k - \chi_m Q_m; \quad F_k = -A_j \sigma|_{x=x_k}; \quad F_m = A_j \sigma|_{x=x_m}; \quad Q_k = A_j D|_{x=x_k}; \\ Q_m &= -A_j D|_{x=x_m}; \quad v_k = v(x_k, t); \quad v_m = v(x_m, t). \end{aligned} \quad (11)$$

Из интегральных тождеств (10) для линейных лагранжевых КЭ со степенями свободы механических перемещений U_k и электрического потенциала Φ_k в узлах x_k при постоянных на КЭ материальных свойствах и массовых силах имеем следующие элементные уравнения:

$$\mathbf{M}^{ej} \cdot \ddot{\mathbf{a}}^{ej} + \mathbf{K}^{ej} \cdot \mathbf{a}^{ej} = \mathbf{F}^{ej}, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{ej} &= \frac{A_j}{h_j} \begin{bmatrix} c & e & -c & -e \\ e & -\varepsilon & -e & \varepsilon \\ -c & -e & c & e \\ -e & \varepsilon & e & -\varepsilon \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M}^{ej} = \frac{A_j \rho}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{a}^{ej} &= \begin{Bmatrix} U_k \\ \Phi_k \\ U_m \\ \Phi_m \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{F}^{ej} = \begin{Bmatrix} F_k + \tilde{F}_k \\ -Q_k \\ F_m + \tilde{F}_m \\ -Q_m \end{Bmatrix}; \quad \tilde{F}_k = \tilde{F}_m = \frac{h_j}{2} A_j f. \end{aligned} \quad (13)$$

Вторая КЭ-формулировка для случая V -задачи базируется на слабой постановке задачи (7), (8):

$$\rho(v, \ddot{u}) + \bar{c}(v, u) - \frac{e^2 A_j}{\partial h_j} (v_m - v_k)(u_m - u_k) = v_k F_k + v_m F_m + \frac{e A_j}{h_j} V (v_m - v_k). \quad (14)$$

Аналогично, для Q -задачи из (7), (9) имеем третью форму слабой постановки:

$$\rho(v, \ddot{u}) + \bar{c}(v, u) = v_k F_k + v_m F_m - \frac{e}{3} Q(v_m - v_k). \quad (15)$$

Сравнивая (14), (15) с интегральным тождеством для чисто механической одномерной задачи ($V=0$ или $Q=0$), можно отметить следующее.

V -задачу можно промоделировать упругой средой с плотностью ρ и модулем упругости $\bar{c}$, в граничных точках которой помимо возможных внешних активных механических сил действуют силы $F_{V_k} = -(eA_j/h_j)V$ при $x = x_k$ и $F_{V_m} = (eA_j/h_j)V$ при $x = x_m$, а также связывающей точки x_k и x_m пружиной с отрицательным (!) коэффициентом жесткости $k = -(e^2 A_j)/(\varepsilon h_j)$, т.е. «антипружиной».

КЭ уравнения для линейного лагранжевого элемента с постоянными материальными свойствами с одной степенью свободы U_k в узле x_k будут иметь вид

$$\mathbf{M}_{uu}^{ej} \cdot \ddot{\mathbf{U}}^{ej} + \bar{\mathbf{K}}^{ej} \cdot \mathbf{U}^{ej} + \mathbf{K}_s^{ej} \cdot \mathbf{U}^{ej} = \mathbf{F}_u^{ej} + \mathbf{F}_V^{ej}, \quad (16)$$

где

$$\mathbf{M}_{uu}^{ej} = \frac{A_j \rho}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{K}}_{uu}^{ej} = \frac{A_j \bar{c}}{h_j} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K}_s^{ej} = -k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{U}^{ej} = \begin{Bmatrix} U_k \\ U_m \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{F}_u^{ej} = \begin{Bmatrix} F_k + \tilde{F}_k \\ F_m + \tilde{F}_m \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{F}_V^{ej} = \begin{Bmatrix} F_{V_k} \\ F_{V_m} \end{Bmatrix}. \quad (17)$$

Аналогичным образом, Q -задачу можно смоделировать упругой средой с плотностью ρ и модулем упругости $\bar{c}$, в граничных точках которой кроме возможных внешних активных механических сил действуют силы $F_{Q_k} = (e/\varepsilon)Q$ при $x = x_k$ и $F_{Q_m} = -(e/\varepsilon)Q$ при $x = x_m$. «Антипружина» в Q -задаче отсутствует. Здесь КЭ уравнения линейного лагранжевого элемента с постоянными материальными свойствами принимают вид

$$\mathbf{M}_{uu}^{ej} \cdot \ddot{\mathbf{U}}^{ej} + \bar{\mathbf{K}}^{ej} \cdot \mathbf{U}^{ej} = \mathbf{F}_u^{ej} + \mathbf{F}_Q^{ej}, \quad (18)$$

где $\mathbf{F}_Q^{ej} = \{F_{Q_k}, F_{Q_m}\}$.

Важно отметить, что ансамблирование КЭ уравнений (18) проводится обычным для МКЭ способом, но для КЭ модели (16), (17) V -задачи «антипружину» жесткости k и компоненты сил F_{V_k} , F_{V_m} нужно добавлять только для тех узлов x_k , x_m , которые содержат электродированные грани.

Подобные модели были построены авторами и для других одномерных форм колебаний пьезоэлектрических элементов: продольных колебаний продольно-поляризованного стержня, продольных колебаний поперечно-поляризованной пластины, аналогичных изгибных колебаний балочных элементов, включая биморфы, и др. Отметим при этом, что для пьезомягких мод, когда электрическое поле перпендикулярно направлению распространения движений, для «квазиупругих» постановок, наоборот, «антипружина» присутствует в Q -задаче, а отсутствует в V -задаче. Кроме этого, для пьезомягких мод связанные КЭ формулировки вообще оказываются довольно неудобными, так требуют задания в одних и тех же узлах двух значений электрического потенциала на различных электродах, и редуцированные формулировки здесь имеют очевидные преимущества.

Заметим, что при расчетах пьезоэлектриков по одномерным моделям часто применяется «электромеханическая аналогия» с заменой связанных континуальных задач «эквивалентными» электрическими схемами. Здесь же показана возможность как бы обратной аналогии с использованием эквивалентных «квазиупругих» задач.

Особая значимость «квазиупругих» КЭ, моделирующих пьезоэлектрические эффекты, состоит в том, что их можно использовать в КЭ пакетах с чисто упругими элементами. Так в [2] была показана возможность расчета одномерной слоистой структуры с упругими, пьезоэлектрическими и акустическими слоями с использованием «квазиупругих» КЭ для пакета ANSYS, а в [3] приведен расчет поперечно-продольного пьезотрансформатора Розена. Таким образом, предлагаемые элементы расширяют стандартный набор конечных элементов ANSYS [4] и других КЭ пакетов.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант 02-01-00840).

РЕЗЮМЕ

Розробка кінцевих елементів для стержневих та балочних п'єзоелектричних перетворювачів. Обмальовані різноманітні моделі одновимірних п'єзоелектричних кінцевих елементів, які додають базові можливості стандартних кінцево-елементних пакетів. Запропоновані «квазіпружні» кінцеві елементи, які модулюють роботу одновимірних п'єзоелектричних структур.

SUMMARY

The finite elements development for bar and beam piezoelectric transducers. The different models for one-dimensional piezoelectric finite elements are described. One-dimensional quasi-elastic models for ANSYS and other finite element programs are proposed.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость К.: Наук. думка, 1990. – 223 с. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т.5. /
2. Даниленко А.С., Наседкин А.В. Исследование импульсных характеристик многослойных пьезоизлучателей по МКЭ // Совр. пробл. мех. сплошной среды. Тр. V Междунар. конф., г.Ростов-на-Дону, 12-14 окт. 1999г. Т. 2. – Ростов-на-Дону: Изд-во СКНЦ ВШ, 2000. – С. 93-98.
3. Блочные схемы метода конечных элементов для динамических задач акустоэлектроупругости // Белоконов А.В., Еремеев В.А., Наседкин А.В., Соловьев А.Н Прикладная математика и механика. – 2000. – Т. 64, № 3. – С. 381-393.
4. Наседкин А.В. О практической реализации некоторых этапов пьезоэлектрического анализа на ANSYS // Сб. тр. I конф. пользователей программного обеспечения CAD-FEM GmbH (25-26 апр. 2001 г Москва). / Под ред. А.С. Шадского.– М.: Барс, 2002. – С. 427-433.

Надійшла до редакції 16.04.2002 р.

УДК 539.3:537.86

К ТЕОРИИ ПОЛЯРИЗАЦИИ СЕГНЕТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КЕРАМИК

А.С. Скалиух

Ростовский государственный университет, Россия

Широкое использование сегнетоэлектрических керамик в современной технике обусловлено, прежде всего, их замечательными пьезо- и пирозлектрическими свойствами, приобретаемыми в процессе поляризации. Между тем существует не так уж много математических моделей, описывающих этот процесс [1, 2]. В данной работе представлена математическая модель необратимого процесса поляризации пьезокерамических образцов, при воздействии на них внешних электрических полей и механических нагрузок на примере пьезокерамического материала типа BaTiO₃. Материал сегнетокерамики рассматривается как некая сплошная среда. В результате необратимых процессов поляризации в среде появляются остаточная поляризация $\mathbf{P}_0$ и остаточная деформация $\mathbf{\epsilon}_0$. Именно они меняют структуру материала, наделяя его локальной анизотропией, порождающей пьезо- и пиро- свойства керамики. Наряду с необратимыми параметрами возникают и обратимые деформации $\mathbf{\epsilon}$ и поляризация $\mathbf{P}$, исчезающие с исчезновением внешних нагрузок, причем полная деформация и полная поляризация равны сумме обратимой и необратимой частей. Сопряженными параметрами выступают тензор механических напряжений $\mathbf{\sigma}$ и вектор внешнего электрического поля $\mathbf{E}$.

Рассмотрим процесс (как обратимую, так и необратимую его часть) в виде последовательности бесконечно близких равновесных состояний $C^{(0)}, C^{(1)}, \dots, C^{(i)}, \dots, C^{(n)}$, причем в начальном состоянии $C^{(0)}$ известно распределение $\mathbf{\epsilon}_0$ и $\mathbf{P}_0$. Задача заключается в том, чтобы определить все искомые параметры в состоянии $C^{(i+1)}$, если они известны для $C^{(i)}$ состояния.

Воспользуемся теорией приращений [3, 4]. Для пьезокерамических образцов деформации являются малыми (даже для нагрузок, приводящих к механическому разрушению или электрическому пробое), поэтому будем применять геометрически линейную теорию, использовать тензор напряжения Эйлера, а интегрирование проводить по объему и поверхности начальной конфигурации. Итак, пусть в состоянии $C^{(i)}$ известны соответствующие полевые характеристики

$$\sigma, \epsilon, \mathbf{u}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \varphi, \mathbf{f}, \mathbf{u}_0, \mathbf{p}, \varphi_0, D_n,$$

которые в состоянии $C^{(i+1)}$ получают соответствующие приращения и могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \sigma + \Delta\sigma^*, \epsilon + \Delta\epsilon^*, \mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}^*, \mathbf{D} + \Delta\mathbf{D}^*, \mathbf{E} + \Delta\mathbf{E}^*, \varphi + \Delta\varphi^*, \\ \mathbf{f} + \Delta\mathbf{f}^*, \mathbf{u}_0 + \Delta\mathbf{u}_0^*, \mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}^*, \varphi_0 + \Delta\varphi_0^*, D_n + \Delta D_n^*. \end{aligned}$$

Запишем принцип виртуальной работы в состоянии $C^{(i+1)}$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\sigma + \Delta\sigma^*) \cdot \delta(\epsilon + \Delta\epsilon^*) d\Omega - \int_{\Omega} (\mathbf{f} + \Delta\mathbf{f}^*) \cdot \delta(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}^*) d\Omega - \int_{\Omega} (\mathbf{D} + \Delta\mathbf{D}^*) \cdot \delta(\mathbf{E} + \Delta\mathbf{E}^*) d\Omega - \\ - \int_{S_{\sigma}} (\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}^*) \cdot \delta(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}^*) dS - \int_{S_D} (D_n + \Delta D_n^*) \cdot \delta(\varphi + \Delta\varphi^*) dS = 0. \end{aligned}$$

В этом выражении варьируются только поправочные величины, которые и представляют независимые вариации. Учитывая, что каждое состояние является равновесным, получаем интегральное равенство

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\Delta\sigma^* \cdot \delta(\Delta\epsilon^*) d\Omega - \Delta\mathbf{f}^* \cdot \delta(\Delta\mathbf{u}^*) - \Delta\mathbf{D}^* \cdot \delta(\Delta\mathbf{E}^*)] d\Omega - \\ - \int_{S_{\sigma}} \Delta\mathbf{p}^* \cdot \delta(\Delta\mathbf{u}^*) dS - \int_{S_D} \Delta D_n^* \cdot \delta(\Delta\varphi^*) dS = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

которое после установления связи между приращениями напряжений, электрической индукции и приращениями деформаций и электрического поля используется для решения задачи методом конечных элементов. Покажем, как устанавливается эта связь, и выведем соответствующие соотношения.

Сформулируем определяющие соотношения для обратимых переменных, которые в самом общем случае для состояния $C^{(i+1)}$ можно записать в виде операторных соотношений:

$$\epsilon^{(i+1)} = f_{\epsilon}(\sigma^{(i+1)}, E^{(i+1)}, \epsilon_0^{(i+1)}, P_0^{(i+1)}), \quad P^{(i+1)} = f_P(\sigma^{(i+1)}, E^{(i+1)}, \epsilon_0^{(i+1)}, P_0^{(i+1)}).$$

Функции справа являются однозначными термодинамическими функциями переменных σ и E , а необратимые переменные входят в них как параметры. Обратимые переменные являются мгновенным откликом системы на внешние воздействия. Поэтому можно предположить, что для $C^{(i+1)}$ состояния обратимые переменные определяются через термодинамические функции состояния, в которых необратимые переменные берутся для $C^{(i)}$ состояния. Разложив в таком случае эти функции в ряд в окрестности $C^{(i)}$ состояния, ограничиваясь только линейными слагаемыми, и принимая, что коэффициенты разложения не зависят от σ и E , что обычно принимается в теории упругости, получим

$$\Delta \epsilon^{(i)} = S(\epsilon_0^{(i)}, P_0^{(i)}) \cdot \Delta \sigma^{(i)} + d(\epsilon_0^{(i)}, P_0^{(i)}) \cdot \Delta E^{(i)}; \quad \Delta P^{(i)} = d(\epsilon_0^{(i)}, P_0^{(i)}) \cdot \Delta \sigma^{(i)} + \eta(\epsilon_0^{(i)}, P_0^{(i)}) \cdot \Delta E^{(i)}.$$

Здесь S, d, η – соответственно тензоры упругих податливостей, пьезомодулей и восприимчивостей. Последние соотношения для дальнейшего удобно представить в матричном виде Фойхта и разрешить относительно $\Delta \sigma$. Матрицы констант обычно представляют в виде разложения по одному параметру, в качестве которого выбирается модуль вектора остаточной поляризации. Влиянием остаточной деформации на константы пренебрегают. Но при этом вводится дополнительное условие о трансверсальной изотропии материала с осью изотропии, направленной вдоль оси вектора поляризации. На основании выше-сказанного матричное представление имеет вид

$$\Delta \sigma^{(i)} = (C_0 + p^{(i)} C_1) \cdot \Delta \epsilon^{(i)} - p^{(i)} e \cdot \Delta E^{(i)}; \quad \Delta P^{(i)} = p^{(i)} e^T \cdot \Delta \epsilon^{(i)} + (\epsilon_0 + p^{(i)} \epsilon_1) \cdot \Delta E^{(i)}, \quad (2)$$

где C_0, ϵ_0 – матрицы упругих модулей и диэлектрических проницаемостей неполяризованной керамики; C_1, ϵ_1 – матрицы, дополняющие предыдущие матрицы до класса трансверсальной изотропии полностью поляризованной керамики; $p^{(i)}$ – параметр, представляющий собой отношение модуля вектора остаточной поляризации в $C^{(i)}$ состоянии к величине вектора поляризации полностью поляризованной керамики.

Необратимые переменные, которые являются внутренними параметрами термодинамической системы, могут быть представлены в виде функционалов, учитывающих всю предысторию нагружения, а также от значения коэрцитивных электрических и механических полей.

$$\epsilon_0 = \mathbf{F}_{\epsilon}^{\sigma(t), E(t)}(E_c, \sigma_c, \dots), \quad P_0 = \mathbf{F}_P^{\sigma(t), E(t)}(E_c, \sigma_c, \dots).$$

$\sigma=0, E=0 \qquad \qquad \qquad \sigma=0, E=0$

Предположим, что эти функционалы являются аддитивными по внешним нагрузкам. Кроме этого, рассмотрим частный случай, когда функционалом для определения остаточной деформации пренебрегают. Тогда вместо (5) можно записать

$$\Delta P_0^{(i)} \equiv P_0^{(i+1)} - P_0^{(i)} = \mathbf{F}_{1P}^{\sigma^{(i+1)}}(\sigma_c, \dots) + \mathbf{F}_{2P}^{E^{(i+1)}}(E_c, \dots).$$

$\sigma^{(i)} \qquad \qquad \qquad E^{(i)}$

Кроме того, рассмотрим случай, когда функционал для определения остаточной поляризации зависит лишь от электрического поля, тогда

$$\Delta P_0^{(i)} = \mathbf{F}_{2P}^{E^{(i+1)}}(E_c, \dots).$$

$E^{(i)}$

Для построения этого функционала введем в фазовом пространстве электрического поля некоторую поверхность поляризации, т.е. такую поверхность, которая разграничивает области значений напряженности электрического поля на поляризующие и не поляризующие. Для неполяризованной керамики такой поверхностью является сфера [4] с радиусом, равным коэрцитивному значению электрического поля. В процессе поляризации домены переключаются до полного насыщения, после чего дальнейшее переключение уже невозможно. Вследствие этого поверхность поляризации изменяется, принимая форму эллипсоида и полусферы, а при полном насыщении – форму полусферы и полуцилиндра. Несколько схожая ситуация имеет место в теории пластического течения при анизотропном упрочнении. Однако имеются и отличия, связанные с тем, что при течении материала этот процесс теоретически неограничен, в то время как при поляризации наступает насыщение. Поэтому в теории пластического течения поверхность нагружения лишь смещается (при анизотропном упрочнении), оставаясь все время выпуклой и ограниченной, а в теории поляризации поверхность поляризации неограниченно возрастает, принимая вначале эллипсоидальную, а затем и цилиндрическую форму вдоль направления вектора остаточной поляризации. С противоположной стороны она не меняет свою форму, так же как и поверхность нагружения (см. рис.1 справа).

Для наглядности удобно рассматривать трехмерное фазовое пространство напряженности электрического поля, в котором вектор остаточной поляризации совмещается с осью Oz. Аналитическое представление поверхности поляризации имеет вид:

$$\frac{E_1^2}{E_0^2} + \frac{E_2^2}{E_0^2} + \frac{E_3^2(1 - \frac{P^{(i)}}{P_\infty})^2}{E_0^2} - 1 = 0, \quad E_3 \geq 0; \quad E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 - E_0^2 = 0, \quad E_3 \leq 0.$$

На рис.1 слева показана одна ветвь петли гистерезиса. Отмечено значение коэрцитивного поля, т.е. такого значения, при котором вектор напряженности электрического поля достигает поверхности поляризации. Начиная с этого момента, одна полусфера превращается в полуэллипсоид. С помощью поверхности поляризации определяется приращение остаточной поляризации, которое выбирается в направлении нормали к этой поверхности (в теории пластичности это свойство носит название ассоциированного закона течения). Если вектор напряженности электрического поля в состоянии $C^{(i)}$ не достигает поверхности поляризации предыдущего состояния, то никаких переполаризующих эффектов не будет, и функционал равен нулю. Если же достигает этой поверхности, то возможны три случая: $df > 0$ (соответствует активному нагружению), $df = 0$ (соответствует нейтральному нагружению) и $df < 0$ (соответствует разгрузке). При нейтральном нагружении и разгрузке функционал равен нулю.

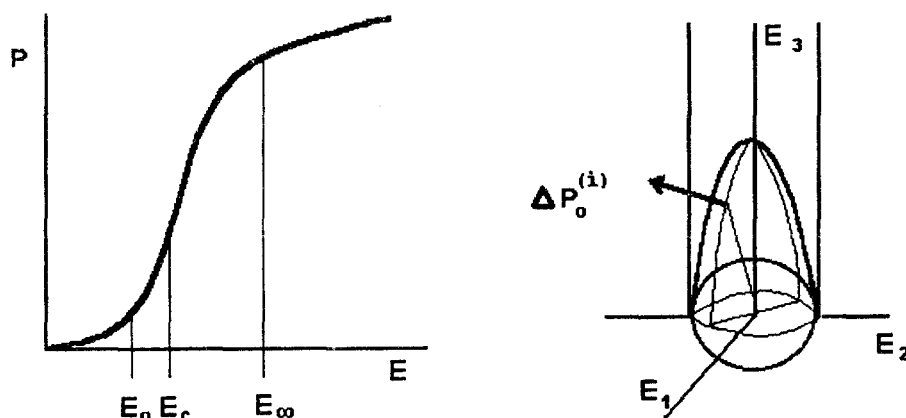


Рис. 1

Все предыдущие рассуждения позволяют определить функционал, а именно: функционал отличен от нуля только при достижении поверхности поляризации и активной нагрузке. В этом случае его можно записать в виде

$$\Delta P_0^{(i)} = \lambda f_{,E} df. \quad (3)$$

Неизвестный коэффициент пропорциональности λ находится из условия, что модуль вектора поляриза-

ции в $C^{(i+1)}$ состоянии равен величине остаточной поляризации, получаемой по истинной петле гистерезиса для значения вектора напряженности электрического поля в $C^{(i+1)}$ состоянии (см. рис.2), т. е.

$$|P_0^{(i)} + \lambda f_{,E} df| = \delta(|E^{(i+1)}|)$$

Из двух корней этого уравнения выбирается тот, который соответствует острому углу между вектором напряженности электрического поля и вектором нормали к поверхности, т.е. когда скалярное произведение этих векторов положительно. Истинная петля гистерезиса строится аналогично зависимости между интенсивностями напряжений и деформаций, если есть диаграмма одноосного испытания образцов.

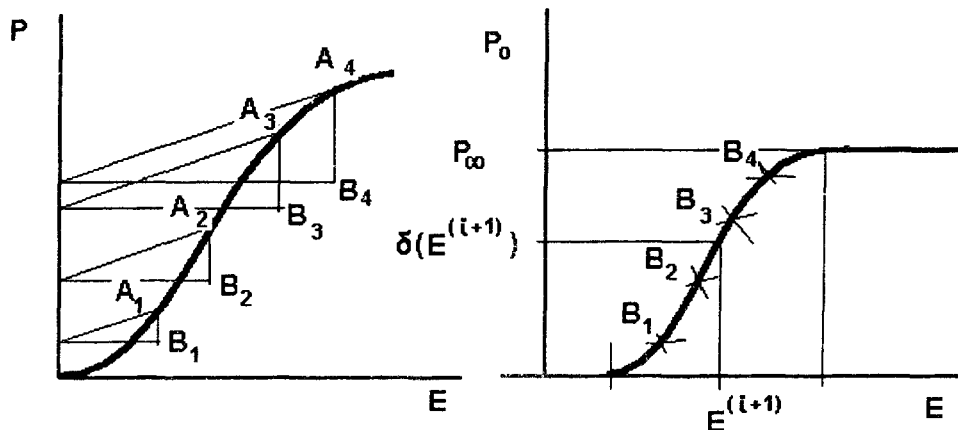


Рис. 2.

испытания образцов.

Поскольку в процессе поляризации имеет место переход материала в анизотропное состояние, то возникает трудность выбора коэффициента пропорциональности (диэлектрической проницаемости), которая меняется в процессе поляризации. В качестве первого приближения можно взять диэлектрическую проницаемость неполяризованной керамики (на рис. 2 показаны параллельные прямые, наклоненные под одним углом к вертикальной оси).

Далее рассмотрим разность значений вектора электрической индукции для $C^{(i+1)}$ и $C^{(i)}$ состояний, которую представим в матричном виде

$$\Delta \hat{D}^{(i)} = \epsilon_0 \Delta \hat{E}^{(i)} + \Delta \hat{P}^{(i)} + \Delta \hat{P}_0^{(i)}.$$

Подставляя сюда значения приращений поляризации обратимой (2) и необратимой (3) частей и приводя подобные члены, получаем

$$\Delta \hat{D}^{(i)} = (\epsilon_0 \mathbf{I} + (\epsilon_0 + p^{(i)} \epsilon_1) + \lambda f^{(i)2}_{,E}) \Delta \hat{E}^{(i)} + p^{(i)} \mathbf{e}^T \cdot \Delta \hat{\epsilon}^{(i)}. \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{I}$ – единичная матрица. Формулы (3), (4) полностью определяют приращения независимых и зависимых переменных, участвующих в (1). Дальнейшее решение задачи [4] осуществляется методом конечных элементов. Таким образом, находятся приращения всех искоемых переменных для $C^{(i)}$ состояния. Сами же искомые переменные для $C^{(i+1)}$ состояния находятся сложением переменных для $C^{(i)}$ состояния и найденными приращениями.

Для проведения численных расчетов необходимо определить, как выбирается то или иное состояние. При одновременном действии электрических и механических нагрузок отрезок времени, в течение которого рассматривается процесс, делят на конечное число интервалов, и для каждого значения времени определяют граничные значения, т.е. потенциал, внешние механические напряжения и перемещения (само время далее в задачу не входит). Этим разбиением и определяются равновесные состояния, а переход от одного к другому получается, если граничным условиям давать приращения. Далее решаются последовательно статические задачи с приращениями граничных условий

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований.

РЕЗЮМЕ

У роботі представлена одна модель процесу поляризації сегнетоелектричних керамік. Необоротний процес описується теорією збільшень. Сформульовано визначальні співвідношення, що зв'язують оборотну і необоротну частину подібно теорії пластичного плину.

SUMMARY

In the work one model of process of polarization ferroelectric ceramics is submitted. The irreversible process is described by the incremental theory. The constitutive equations connecting a convertible and irreversible part similarly to the theory of plastic current are formulated.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Можен М. Механика электромагнитных сплошных сред. — М.: Мир, 1991. — С. 433-532.
2. Peter J Chen Three dimensional dynamic electromechanical constitutive relations for ferroelectric materials // Int. J. Solid and Struct. — 1980. — Vol. 16. — P. 1059-1067.
3. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. — М.: Мир, 1987. — С. 379-394.
4. Скалиух А.С. Применение теории приращений к расчету остаточной поляризации пьезокерамических образцов. // Изв. вузов. Сев.-Кавк. Регион. Естеств. науки. — 2000. — Спецвыпуск. Нелинейные проблемы механики сплошных сред. — С. 137-140.

Надійшла до редакції 15.04.2002 р.

ЗАСТОСУВАННЯ ГАМІЛЬТОНОВОГО ФОРМАЛІЗМУ В ТЕОРІЇ МАГНІТОСТАТИЧНИХ ХВИЛЬ В ПЕРІОДИЧНИХ ФЕРИМАГНІТНИХ СТРУКТУРАХ

М. О. Шульга, В. В. Левченко, Т. В. Ратушняк

Інститут механіки НАН України, м. Київ

Дослідження поширення пружних хвиль в п'єзоелектричних і феримагнітних періодичних структурах має значне фундаментальне і прикладне значення. Велика різниця між швидкостями пружних і електромагнітних хвиль і можливості збудження високочастотних (мегагерцевого діапазону) коливань відкриває широкі перспективи для створення пристроїв різного функціонального призначення твердотільної електроніки. Магнітопружні хвилі в феритах формуються на основі взаємодії пружних і магнітостатичних хвиль. Розвиток загальних математичних методів досліджень поширення хвиль в цих "парціальних" структурах спрощує аналіз формування дисперсійних спектрів магнітопружних хвиль.

Лінеаризовану в стані магнітного насичення $\mathbf{M} = M_0 \mathbf{e}_z$, $\mathbf{H} = H_0 \mathbf{e}_z$ систему рівнянь магнітопружних коливань (антиплоска деформація) в феритах кубічної системи можна записати [1] у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} = 0, \quad \mathbf{b} = \mathbf{h} + 4\pi \mathbf{m}, \quad h_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ h_y &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \sigma_{xz} = c_{55} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{b_2}{M_0} m_x, \quad \sigma_{yz} = c_{55} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{b_2}{M_0} m_y, \\ \frac{\partial m_x}{\partial t} &= -\gamma(H_0 m_y - M_0 h_y + b_2 \frac{\partial w}{\partial y}), \quad \frac{\partial m_y}{\partial t} = -\gamma(H_0 m_x - M_0 h_x + b_2 \frac{\partial w}{\partial x}). \end{aligned} \quad (1)$$

В рівняннях системи (1) використовуються загальноприйняті позначення [2] для механічних і магнітних величин і фізико-механічних параметрів. При $b_2 = 0$ система (1) розпадається на дві незв'язні системи відносно пружних коливань зсуву

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \sigma_{xz} = c_{55} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \sigma_{yz} = c_{55} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2)$$

і магнітостатичних хвиль

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} &= 0, \quad \mathbf{b} = \mathbf{h} + 4\pi \mathbf{m}, \quad h_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad h_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ \frac{\partial m_x}{\partial t} &= -\gamma(H_0 m_y - M_0 h_y), \quad \frac{\partial m_y}{\partial t} = -\gamma(H_0 m_x - M_0 h_x). \end{aligned} \quad (3)$$

Тоді в випадку плоских хвиль $\sigma_{xz} = c_{00} \operatorname{Re} q(\xi) \exp(iky - i\omega t)$, $w = h_{00} \operatorname{Re} p(\xi) \exp(iky - i\omega t)$ для амплітудних функцій $q(\xi)$, $p(\xi)$, де $x = h_{00} \xi$, з (2) одержимо систему рівнянь

$$q' = (c_{55} k^2 - \rho \omega^2) \frac{h_{00}^2}{c_{00}} p, \quad p' = \frac{c_{00}}{c_{55}} q. \quad (4)$$

Система (4) є системою гамільтонового типу $\frac{\partial q}{\partial \xi} = \frac{\partial H}{\partial p}$, $\frac{\partial p}{\partial \xi} = -\frac{\partial H}{\partial q}$ з функцією Гамільтона

$$H(q, p) = \frac{1}{2} p^2 (c_{55} k^2 - \rho \omega^2) \frac{h_{00}^2}{c_{00}} - \frac{1}{2} q^2 \frac{c_{00}}{c_{55}}. \quad (5)$$

Факт гамільтоновості системи дозволяє побудувати ефективний метод аналізу хвиль в періодичних по координаті ξ середовищах. В такому разі аналіз об'ємних пружних хвиль зводиться до визначення мультиплікаторів і власних векторів матриці монодромії $\Omega(\xi_{00}, 0)$.

Для побудови матрицанта та матриці монодромії для системи (4) можна скористатися чисельними

методами. Для цього достатньо розв'язати дві задачі Коші з лінійно-незалежними початковими умовами $y^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, де через y позначено вектор $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$. В результаті для матриці монодромії знайдено вираз

$$\begin{bmatrix} y_1^{(1)}(\xi_{00}) & y_1^{(2)}(\xi_{00}) \\ y_2^{(1)}(\xi_{00}) & y_2^{(2)}(\xi_{00}) \end{bmatrix},$$

де ξ_{00} - основний період інтегрування. Для структури, утвореної чергуванням пакету Q шарів з різними фізико-механічними властивостями, матрицант системи (4) можна одержати в аналітичному вигляді. На основному періоді $0 = \xi_0 < \xi < \xi_{00} = \xi_Q$ для матрицанту одержуємо вираз $\Omega(\xi, 0) = \Omega(\xi, \xi_{q-1}) \cdot \Omega(\xi_{q-1}, \xi_{q-2}) \cdot \dots \cdot \Omega(\xi_1, 0)$, де матриця

$$\Omega(\xi, \xi_{q-1}) = \begin{bmatrix} \cos \bar{\alpha}_q(\xi - \xi_{q-1}) & a_q \sin \bar{\alpha}_q(\xi - \xi_{q-1}) \\ -\frac{\sin \bar{\alpha}_q(\xi - \xi_{q-1})}{a_q} & \cos \bar{\alpha}_q(\xi - \xi_{q-1}) \end{bmatrix},$$

$\xi_{q-1} < \xi < \xi_q$, $q = 1, \dots, Q$, $\xi_q = \bar{h}_1 + \dots + \bar{h}_q$, а безрозмірні коефіцієнти мають вигляд $a_q = \bar{c}_{55,q} \cdot \bar{\alpha}_q$, $\bar{\alpha}_q^2 = \bar{\rho}_q \bar{\omega}^2 / \bar{c}_{55,q} - \bar{k}^2$, $\bar{\rho}_q = \rho_q / \rho_{00}$, $\bar{c}_{55,q} = c_{55,q} / c_{00}$, $\bar{h}_q = h_q / h_{00}$, $\bar{k} = kh_{00}$, $\bar{\omega} = \omega h_{00} / \sqrt{c_{55} / \rho_{00}}$. Тоді матриця монодромії визначається добутком $\Omega(\xi_{00}, 0) = \Omega(\xi_Q, \xi_{Q-1}) \cdot \Omega(\xi_{Q-1}, \xi_{Q-2}) \cdot \dots \cdot \Omega(\xi_1, 0)$, і з умови $|Spur(\Omega(\xi_{00}, 0))| < 2$ визначаються зони пропускання об'ємних пружних хвиль зсуву. Для середовища, що утворене періодичним чергуванням двох різних матеріалів, $Spur(\Omega(\xi_{00}, 0)) = \cos \bar{\alpha}_1 \bar{h}_1 \cos \bar{\alpha}_2 \bar{h}_2 - \sin \bar{\alpha}_1 \bar{h}_1 \sin \bar{\alpha}_2 \bar{h}_2 \left(\frac{a_1^2 + a_2^2}{2a_1 a_2} \right)$,

де $\xi_{00} = \bar{h} = \bar{h}_1 + \bar{h}_2$, ($\bar{h}_1, \bar{h}_2$ - відповідно безрозмірні товщини першого і другого матеріалів).

На рис. 1 наведені результати чисельного аналізу в безрозмірних координатах $\bar{k}, \bar{\omega}$ при наступних значеннях фізико-механічних параметрів і товщин шарів $h_{00} = h_1 + h_2 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ м}$, $h_1 = 0,3 h_{00}$, $h_2 = 0,7 h_{00}$, $\rho_{00} = \rho_1 = 4,82 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\rho_2 = 5,17 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $c_{00} = c_{55,1} = 1,504 \text{ Н/м}^2$, $c_{55,2} = 7,64 \text{ Н/м}^2$; вибрані значення $\rho_1, c_{55,1}, \rho_2, c_{55,2}$ відповідають властивостям діелектрика CdS і ферита GaYIG. Темна область на рис.1 позначає зони пропускання об'ємних пружних хвиль зсуву.

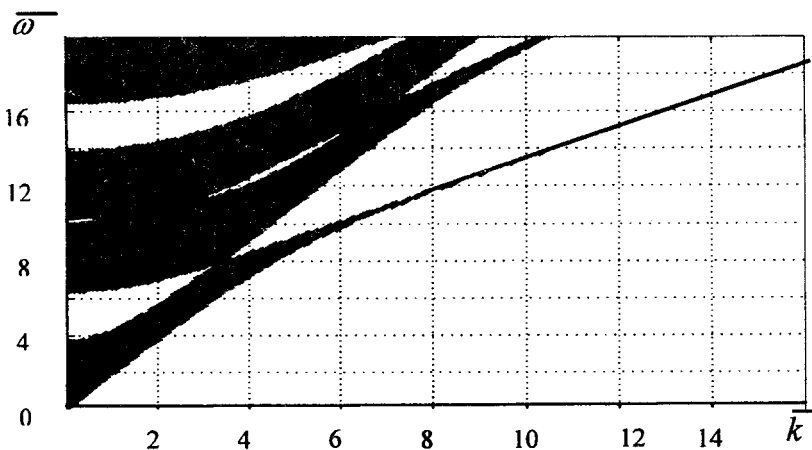


Рис.1

Покажемо тепер, що теорію гамільтонового формалізму можна застосовувати при дослідженні магнітостатичних хвиль. Система (3) може бути перетворена до вигляду

$$\frac{\partial b_x}{\partial x} = \frac{i\alpha}{\mu} \frac{\partial b_x}{\partial y} + \left(\mu - \frac{\alpha^2}{\mu}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{b_x}{\mu} - \frac{i\alpha}{\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (7)$$

Система (7) справедлива для моногармонічних процесів $f(x, y, t) = \text{Re } f(x, y) \exp(-i\omega t)$ при значеннях компонентів тензора Польдера $\mu = 1 - 4\pi\omega_H \gamma M_0 / (\omega^2 - \omega_H^2)$, $\alpha = 4\pi\omega \gamma M_0 / (\omega^2 - \omega_H^2)$, де $\omega_H = \gamma H_0$ - частота феримагнітного резонансу [2]. Для плоских хвиль $\varphi = h_{00} H_0 \text{Re } P(\xi) \exp(iky - i\omega t)$, $b_x = H_0 \text{Re } Q(\xi) \exp(iky - i\omega t)$ з амплітудними функціями $P(\xi)$, $Q(\xi)$, $x = h_{00}\xi$ з (7) одержимо систему рівнянь

$$Q' = -\frac{h_{00}k\alpha}{\mu} Q - h_{00}^2 k^2 \left(\mu - \frac{\alpha^2}{\mu}\right) P, \quad P' = -\frac{1}{\mu} Q - \frac{h_{00}k\alpha}{\mu} P. \quad (8)$$

Система (8) є системою гамільтонового типу з функцією Гамільтона

$$H(Q, P) = \frac{1}{2} h_{00}^2 k^2 \left(\frac{\alpha^2}{\mu} - \mu\right) P^2 - \frac{h_{00}k\alpha}{\mu} QP + \frac{Q^2}{2\mu}. \quad (9)$$

При $\alpha = 0$, $\mu = 1$ система (8) переходить в задачу магнітостатики для неферимагнітних матеріалів.

Якщо фізико-механічні параметри будуть періодичними функціями координати ξ з періодом ξ_{00} , то система (8) буде гамільтоною періодичною системою. Для побудови загального розв'язку системи (8) необхідно визначити мультиплікатори ρ_j і власні вектори $\mathbf{d}_j$ матриці монодромії $\mathbf{\Omega}(\xi_{00}, 0)$ з характеристичного рівняння

$$\det(\mathbf{\Omega}(\xi_{00}, 0) - \rho \mathbf{E}) = 0 \quad (10)$$

і однорідної алгебраїчної системи

$$(\mathbf{\Omega}(\xi_{00}, 0) - \rho \mathbf{E}) \mathbf{d}_j = 0. \quad (11)$$

Тут $\mathbf{E}$ -одинична матриця. Характеристичне рівняння (10) для гамільтонової періодичної системи буде зворотним

$$\rho^2 - 2b_m \rho + 1 = 0, \quad 2b_m = \text{Spur } \mathbf{\Omega}(\xi_{00}, 0). \quad (12)$$

У випадку простих мультиплікаторів загальний розв'язок системи (8) на довільному інтервалі періодичності $\xi_{00}(n-1) = \xi_{n-1} < \xi < \xi_n = n\xi_{00}$, n -ціле число, можна подати у вигляді

$$[Q(\xi), P(\xi)]^T = \sum_{j=1}^2 K_j \rho_j^{n-1} \mathbf{\Omega}(\xi - (n-1)\xi_{00}, 0) \mathbf{d}_j, \quad (13)$$

де, як і в пружному випадку, $\mathbf{\Omega}(\xi, 0)$ -матрицант системи (8) на першому (основному) періоді $(0, \xi_{00})$, K_j -невідомі сталі інтегрування. Якщо покласти $\rho = \exp(\pm is)$, то рівняння (12) можна представити у тригонометричній формі $\cos s = b_m$. При дійсних $b_m \in (-1, 1)$ розв'язки цього рівняння неоднозначні. В теорії поширення хвиль для визначення однозначного розв'язку рівняння $\cos s = b_m$ користуються [3] наступним правилом відбору мод $s = (-1)^n \arccos b_m + 2\pi[N/2]$, в якій $\arccos b_m$ -головне значення оберненої тригонометричної функції, N -порядковий номер появи нерівності $|b_m| < 1$ зі збільшенням частоти від нуля, $[N/2]$ -ціла частина числа $N/2$. Якщо мультиплікатор ρ_j записати в експоненціальній формі $\rho_1 = \exp(is)$, $\rho_2 = \exp(-is)$, то при дійсних s в розв'язку (13) першому доданку будуть відповідати хвилі, що поширюються у додатньому напрямку вісі ξ ($n > 1$), а другому -хвилі, що поширюються у від'ємному напрямку вісі ξ ($n < 1$), без затухання. Тобто умова $|b_m| < 1$ є умовою пропускання об'ємних магнітостатичних хвиль.

Отже, для системи (8) диференціальних рівнянь можна розв'язати задачу Коші з лінійно-

незалежними початковими умовами $Y^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, де через Y позначено вектор $\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}$.

Так само, як і для пружного випадку, чисельним методом Рунге-Куты можна побудувати матрицю монодромії

$$\Omega(\xi_{00}, 0) = \begin{bmatrix} Y_1^{(1)}(\xi_{00}) & Y_1^{(2)}(\xi_{00}) \\ Y_2^{(1)}(\xi_{00}) & Y_2^{(2)}(\xi_{00}) \end{bmatrix}$$

і з умови $|Y_1^{(1)}(\xi_{00}) + Y_2^{(2)}(\xi_{00})| < 2$ знайти зони пропускання об'ємних магнітостатичних хвиль.

Зазначимо, що матрицант системи (8) і умову пропускання магнітостатичних об'ємних хвиль можна також визначити аналітично. З цією метою зведемо систему (7) до диференціального рівняння

$$\frac{d^2 \bar{\varphi}}{d\xi^2} - \bar{k}^2 \bar{\varphi} = 0. \quad (14)$$

Використовуючи метод, запропонований в [3], задача про поширення магнітостатичних об'ємних хвиль (14) зводиться до аналізу властивостей рівняння (12), де матриця монодромії

$$\Omega(\xi_{00}, 0) = \prod_{q=1}^Q \Omega(\xi_q, \xi_{q-1}), \text{ а матриця } \Omega(\xi, \xi_{q-1}), \xi_{q-1} < \xi < \xi_q \text{ має вигляд}$$

$$\begin{bmatrix} ch\bar{k}(\xi - \xi_{q-1}) - \frac{\alpha_q}{\mu_q} sh\bar{k}(\xi - \xi_{q-1}) & \mu_q \bar{k}(-1 + \frac{\alpha_q^2}{\mu_q^2}) sh\bar{k}(\xi - \xi_{q-1}) \\ -\frac{sh\bar{k}(\xi - \xi_{q-1})}{\mu_q \bar{k}} & -\frac{\alpha_q}{\mu_q} sh\bar{k}(\xi - \xi_{q-1})_q + ch\bar{k}(\xi - \xi_{q-1}) \end{bmatrix}.$$

Для середовища, що утворене періодичним чергуванням двох різних феримагнітних матеріалів,

$$b_m = ch\bar{k}h_1 \cdot ch\bar{k}h_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_1^2 + \mu_2^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2}{\mu_1\mu_2} \right) \cdot sh\bar{k}h_1 \cdot sh\bar{k}h_2. \quad (15)$$

Якщо один з матеріалів має властивості діелектрика (наприклад, другий), тоді $\mu_2 = 1$, $\alpha_2 = 0$. І вираз (15) набуває вигляду

$$b_m = ch(\bar{k}h_1 + \bar{k}h_2) - \frac{1}{2} \frac{(4\pi\gamma M_0)^2}{\omega^2 - \omega_H^2 - 4\pi\gamma M_0\omega_H} sh\bar{k}h_1 sh\bar{k}h_2. \quad (16)$$

Оскільки границі зон пропускання об'ємних магнітостатичних хвиль визначаються рівнянням $b_m = \pm 1$,

тоді з (16) частота ω знаходиться в явному вигляді $\omega^2 = \omega_H^2 + 4\pi\gamma M_0(\omega_H + \frac{4\pi\gamma M_0}{2(ch\bar{k}h_1 \mp 1)})$, що свід-

чить про одну можливу зону пропускання. Якщо ж матеріали, з яких складається пластина, мають властивості двох різних феритів, то дисперсійне рівняння границь зон пропускання $b_m = \pm 1$ можна перетворити до біквадратного рівняння відносно ω , що доводить можливість існування лише двох зон пропускання об'ємних магнітостатичних хвиль.

На рис. 2 і рис. 3 наведено результати чисельного аналізу умов поширення магнітостатичних об'ємних хвиль в середовищі, утвореному чергуванням двох шарів, товщини яких $h_1 = 0,7h_{00}$, $h_2 = 0,3h_{00}$. Результати, представлені на рис.2, відповідають випадку чергування ферита GaYIG і діелектрика CdS, а на рис.3 - випадку чергування феритів. Фізичні властивості шарів-феритів взяті із [4] і відповідають матеріалам GaYIG і YIG. Зони пропускання об'ємних магнітостатичних хвиль заштриховано. Границі $b_m = -1$ позначено пунктиром, границі $b_m = +1$ -суцільною лінією.

З рис. 4 також видно, що спектр частот об'ємних магнітостатичних хвиль лежить в діапазоні $\omega_H < \omega < \omega_H + \omega_M/2$, де через ω_M позначений $\max(\omega_{M,1}; \omega_{M,2})$, а $\omega_{M,i} = 4\pi\gamma M_i$,

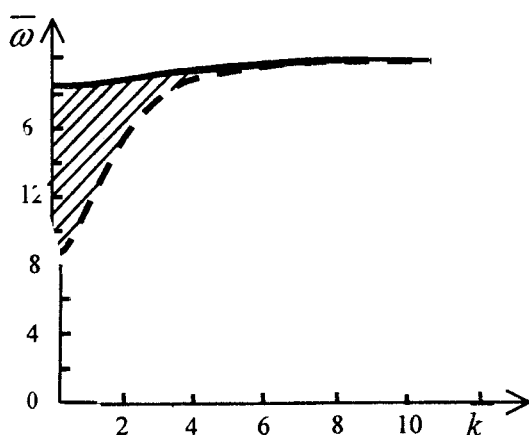


Рис.2

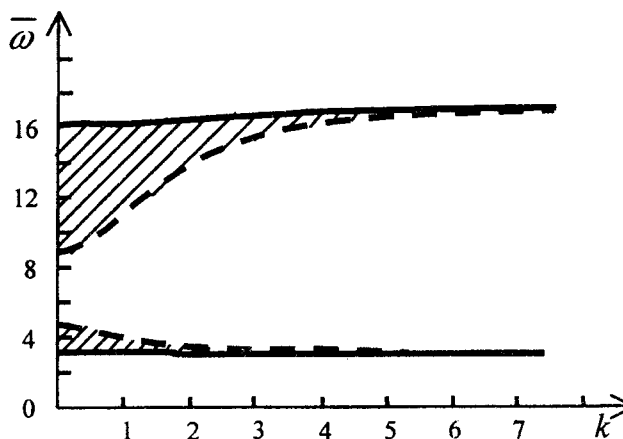


Рис.3

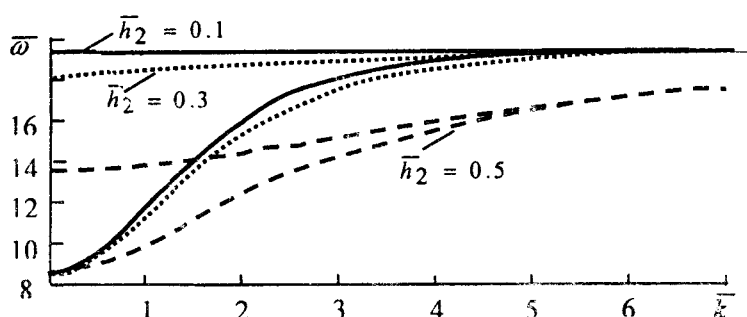


Рис. 4

$\omega_{0,i}^2 = \omega_H(\omega_H + \omega_{M,i})$. При зростанні відношення h_2/h_{00} ширина зон пропускання зменшується і виродження зон в лінію відбувається при менших значеннях k . Таким чином, зменшується і діапазон взаємодії пружних і магнітостатичних хвиль.

РЕЗЮМЕ

На основе гамильтонового формализма развит способ анализа объемных магнитостатических волн в периодических ферромагнитных структурах. Получено численное и аналитическое решения задачи и проведен количественный и качественный анализ распространения объемных магнитостатических волн в среде, образованной чередованием двух слоев разной толщины и физико-механических характеристик.

SUMMARY

The method of analysis of volume magnetostatic waves in periodic ferromagnetic structures is developed on a basis of Hamilton formalism. The numerical and analytical problem solutions is obtained. And it is carried out quantitative and qualitative analysis of distribution of magnetostatic volume waves in periodic media formed by intercalation of two layers with different thickness and physic properties.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Шульга М. О. Про поширення поперечних хвиль в магнітопружних періодичних середовищах // Доп. НАНУ. – 2002. – 6. – С. 68-72
2. Такер Дж., Рэмpton В. Гиперзвук в физике твердого тела. – М.: Мир, 1975. – 453 с.
3. Шульга Н. А. Основы механики слоистых сред периодической структуры. – К.: Наук. Думка, 1981. – 200 с.
4. Camley M. E., Maradudin A. A. Pure shear elastic surface wave guided by the interface between two semiinfinite magnetoelastic media // Appl. Phys. Lett. – 1981. – 38-8. – P. 610-612.

Надійшла до редакції 15.04.2002 р.

УДК 539.3

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ С КРУГОВЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ

А.С. Космодамианский, А.Б. Мироненко.

В работах [1,2] методом малого параметра были решены осесимметричные задачи о вынужденных колебаниях изотропной круглой пластинки с упругими кольцами. Здесь этот метод обобщён на случай круглой пластинки с произвольно расположенными круговыми отверстиями.

Рассмотрим круглую пластинку с контуром L_0 , ослабленную произвольно расположенными круговыми отверстиями с контурами L_l ($l = \overline{1, N}$) (рис. 1). Обозначим радиусы контуров L_l ($l = \overline{0, N}$) через R_l . Будем считать, что на внешнем контуре L_0 действует пульсирующая нагрузка $q = q_0 \cdot \cos(\omega t)$, где q_0 , ω – амплитуда и круговая частота колебаний; контуры отверстий не загружены или подкреплены абсолютно жёсткими кольцами; жесткие повороты подкреплённых колец отсутствуют.

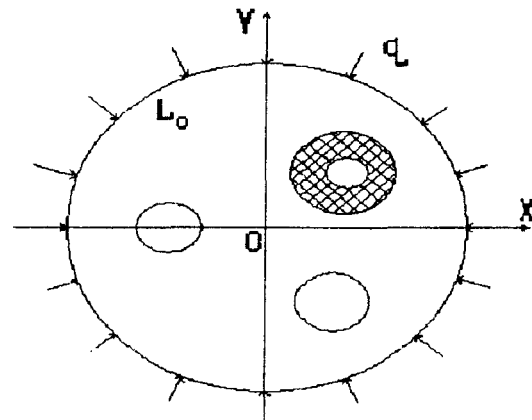


Рис. 1

Задача об определении динамического напряженно-деформированного состояния рассматриваемой пластинки приводится к интегрированию дифференциального уравнения [2]:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{z}^2} = \rho \frac{\kappa - 1}{4\mu\kappa} \omega^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (1)$$

при соответствующих граничных условиях, где $U = 2\mu(u + iv)$, u , v – перемещения; $\mu = E/2(1 + \nu)$ – модуль сдвига; E , ν , ρ – модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала пластинки; $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$.

Для установившихся колебаний функция перемещений U содержит множитель $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$. Учитывая это, уравнение (1) запишем в виде:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{z}^2} = -\varepsilon U \quad (2)$$

Здесь $\varepsilon = \rho(\kappa - 1)\omega^2/4\mu\kappa$, причем будем считать, что ε мал.

Решение задачи будем проводить методом малого параметра, в качестве которого выберем приведенное выше ε . Функцию U будем искать в виде ряда

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n U_n \quad (3)$$

Подставляя разложение (3) в уравнение (2) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем:

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2 \bar{U}_0}{\partial \bar{z}^2} = 0; \quad (4)$$

Нулевое приближение (4) является уравнением для соответствующей статической задачи. Его решением будет функция [3]:

$$U_0 = \kappa \varphi_0(z) - (z - \bar{z}) \cdot \overline{\varphi'_0(z)} - \overline{\psi_0(z)}, \quad (6)$$

где $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ - аналитические функции комплексной переменной z , удовлетворяющие граничным условиям

$$\varphi_0(t) + (t - \bar{t}) \cdot \overline{\varphi'_0(t)} + \overline{\psi_0(t)} = i \cdot \int_0^s (X_n + i \cdot Y_n) ds, \quad (7)$$

если контур загружен усилиями X_n , Y_n :

$$\kappa \varphi_0(t) - (t - \bar{t}) \cdot \overline{\varphi'_0(t)} - \overline{\psi_0(t)} = 0, \quad (8)$$

если контур жестко подкреплён.

Решение уравнений (5) представим в виде суммы общих решений однородных уравнений и частных решений неоднородных уравнений. Общие решения однородных уравнений (5) так же, как и решение уравнения (4), на основании (6) представим в виде

$$U_{n0} = \kappa \varphi_n(z) - (z - \bar{z}) \cdot \overline{\varphi'_n(z)} - \overline{\psi_n(z)}. \quad (9)$$

Здесь $\varphi_n(z)$, $\psi_n(z)$ - аналитические функции комплексной переменной z , определяемые из граничных условий [2]

$$\varphi_n(t) + (t - \bar{t}) \overline{\varphi'_n(t)} + \overline{\psi_n(t)} = f_n(s), \quad \kappa \varphi_n(t) - (t - \bar{t}) \overline{\varphi'_n(t)} - \overline{\psi_n(t)} = U_n^*. \quad (10)$$

Здесь:

$$2(\kappa + 1) f_n(s) = 2 \operatorname{Re} \int_0^s \int U_{n-1} d\bar{z} dz - \kappa \int_0^s \int U_{n-1} dz d\bar{z} + \int_0^s \int \int \frac{\partial \overline{U_{n-1}}}{\partial z} dz dz d\bar{z},$$

$$2(\kappa + 1) U_n^* = \int \int \overline{U_{n-1}} dz dz - \kappa \int \int U_{n-1} dz d\bar{z}. \quad (11)$$

Частные решения неоднородных уравнений (5) будем выбрать на основе решения уравнения для предшествующего приближения.

$$U_{nч} = \frac{\kappa}{2(\kappa + 1)} \left[\int \int \overline{U_{n-1}} dz dz - \kappa \int \int U_{n-1} dz d\bar{z} \right]. \quad (12)$$

Тогда общее решение уравнения (5) в каждом приближении представится в виде

$$U_n = U_{n0} + U_{nч} \quad (13)$$

Зная решение (13), можно вычислять напряжения и потенциальную энергию в любом приближении

$$\theta = \sigma_x + \sigma_y = 4(\kappa - 1)^{-1} \operatorname{Re} \partial U_n / \partial z, \quad \Omega = \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = -2\partial \overline{U_n} / \partial z \quad (14)$$

$$W = \left[(1 + \nu) \left((\operatorname{Re} \Omega)^2 + (\operatorname{Im} \Omega)^2 \right) + (1 - \nu) \theta^2 \right] / 4E. \quad (15)$$

В качестве частного случая рассмотрим колебания круглой пластинки с двумя симметричными круговыми отверстиями единичного радиуса с центрами вдоль диаметра пластинки на расстоянии $2l$ (рис. 2.). По аналогии с решением для статической

задачи комплексные потенциалы выберем в виде [3]

$$\varphi_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_{kn} z^k + \alpha_{kn} \left(\frac{1}{(z-l)^k} + \frac{(-1)^k}{(z+l)^k} \right) \right), \quad \psi_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(B_{kn} z^k + \beta_{kn} \left(\frac{1}{(z-l)^k} + \frac{(-1)^{k+1}}{(z+l)^k} \right) \right),$$

где A_{kn} , B_{kn} , α_{kn} , β_{kn} - неизвестные постоянные, определяемые из условий (7), (8) для нулевого приближения и (10) для других приближений. После определения этих постоянных по формулам (14), (15) найдём напряжения и упругий потенциал.

Численные исследования были проведены для стальной пластинки со следующими параметрами: $\rho = 7860 \text{ кг/м}^3$, $\nu = 0.28$, $l = 1.25 \text{ м.}$, $R_0 = 4 \text{ м.}$

На рис. 3 изображены графики распределения напряжений σ_θ вблизи контура правого отверстия. Пунктирные линии здесь и далее относятся к случаю статической задачи, сплошные – к задачи о колебаниях пластинки, когда $\omega = 1000 \text{ Гц.}$ На рис. 4 показано распределение удельной энергии деформации (в долях $\frac{q_0}{2E}$) по радиусу пластинки вдоль оси Ох. На рис. 5 показана зависимость максимального значения упругого потенциала.

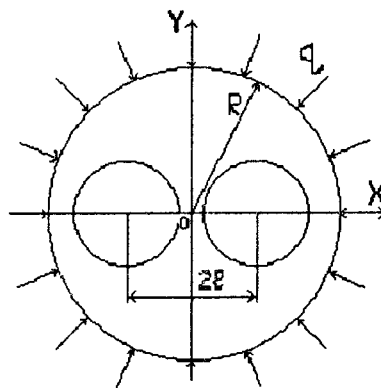


Рис. 2

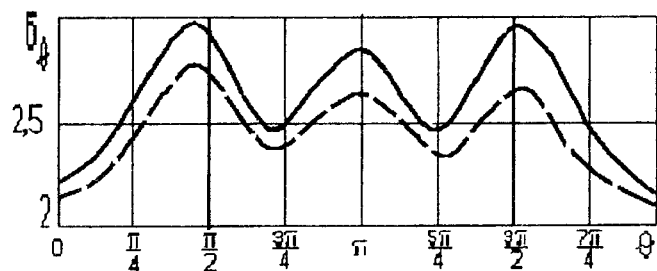


Рис. 3.

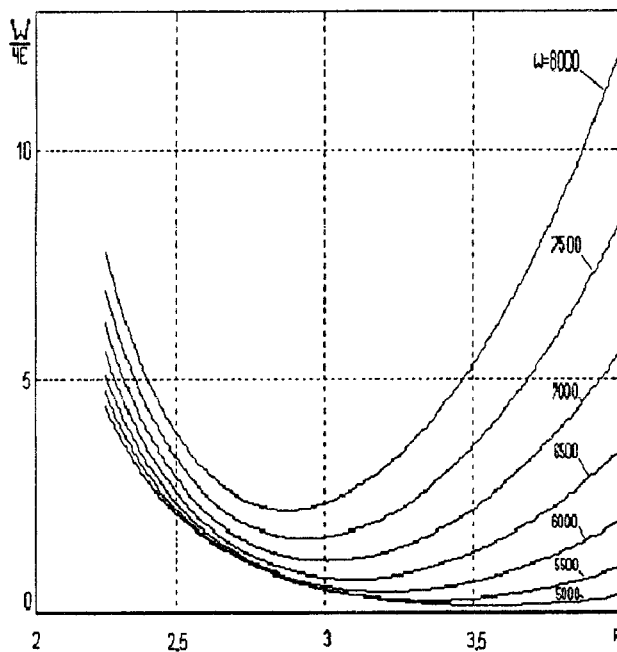


Рис. 4.

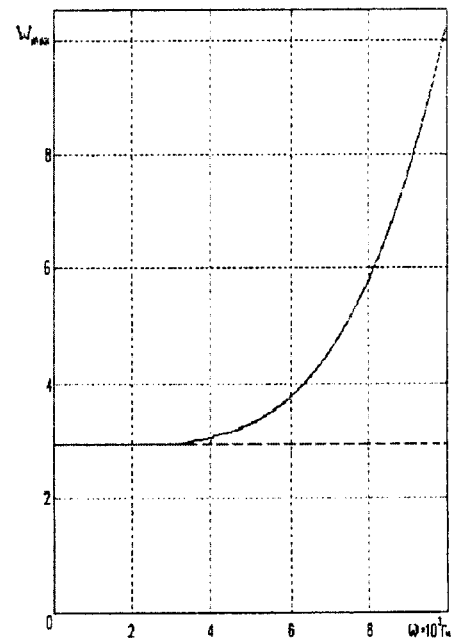


Рис. 5.

Проведенные исследования позволяют установить, что удельная энергия в пластинке растёт при увеличении частоты колебаний. Этот рост увеличивается при сближении границ пластинки. При этом максимальное значение энергии получается вблизи внешнего контура пластинки.

РЕЗЮМЕ

Розглянута задача о вимушених коливаннях кільцевої платівки с круговими отворами. Отвори вільні від зовнішніх зусиль, або підкріплені ребрами жорсткості. Під час розв'язання використовувався метод малого параметра. В якості зразка досліджено напружено-деформований стан кільцевої платівки с двома круговими отворами.

SYMMARY

The problem on forced vibrations of the round plate having the circular holes was considered. The plate's apertures are free from the external forces or firmed with the firm edges. The small parameter method was being used in the time of solving this problem. The stress-deformation stage of the round plate having the two circular holes was investigated as an example.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гофман М. Н., Космодамианский А. С., Кравцов А. М. Продольные колебания составной изотропной пластинки // Теорет. и прикладная механика. – 1989. – Вып. 20. – С. 63-67.
2. Гофман М. Н., Космодамианский А. С. Установившиеся колебания составного плоского кольца. – Жданов. металлург. ун-т – Жданов - 1988г. - 11с. – Деп. в УкрНИИТИ 13.05.88., № 1188 – Ук88.
3. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707с.

Надійшла до редакції 20.04.2002 р.

УДК 532.595

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Ю.Н. Кононов, С.В. Дрынь

В работах [1-4] исследована задача о свободных колебаниях равномерно вращающейся однородной и двухслойной идеальных жидкостей. В настоящей статье обобщены результаты этих работ на случай равномерно вращающейся трехслойной идеальной жидкости.

1. Рассмотрим равномерно вращающееся в поле массовых сил твердое тело, которое частично или полностью заполнено тремя идеальными несмешивающимися и несжимаемыми жидкостями с плотностями $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. За невозмущенное движение принимается вращение всей системы как одного твердого тела с постоянной угловой скоростью $\bar{\omega}_0$. Движение жидкостей будем рассматривать в системе координат $Oxuz$ жестко связанной с твердым телом так, что ось OZ совпадает с вектором угловой скорости $\bar{\omega}_0$. Линеаризованные уравнения движения идеальной трехслойной жидкости и граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial t} + 2\bar{\omega}_0 \times \bar{u}_j + \nabla p_j &= 0; \quad \text{div} \bar{u}_j = 0 \text{ в } Q_j (j=\overline{1,3}); \\ \bar{u}_j \cdot \bar{n}_j|_{S_j} &= 0; \quad \left. \frac{\partial p_1}{\partial t} \right|_{\Sigma_{01}} = b_1 \cdot \bar{u}_1 \cdot \bar{n}_1; \quad (\bar{u}_1 - \bar{u}_2) \cdot \bar{n}_2|_{\Sigma_{02}} = 0; \\ \left(\rho_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial p_2}{\partial t} \right) \Big|_{\Sigma_{02}} &= b_2 \cdot \bar{u}_2 \cdot \bar{n}_2; \quad (\bar{u}_2 - \bar{u}_3) \cdot \bar{n}_3|_{\Sigma_{03}} = 0; \\ \left(\rho_2 \frac{\partial p_2}{\partial t} - \rho_3 \frac{\partial p_3}{\partial t} \right) \Big|_{\Sigma_{03}} &= b_3 \cdot \bar{u}_3 \cdot \bar{n}_3; \quad p_j = \rho_j^{-1} \cdot (P_j - P_0) - U - \frac{1}{2} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r})^2, \quad (j=\overline{1,3}), \\ b_j(x, y, z, \omega_0) &= - \left. \frac{\partial F_j}{\partial v} \right|_{\Sigma_{0j}}; \quad F_1(x, y, z) = U + \frac{1}{2} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r})^2 = 0; \\ F_2(x, y, z) &= (\rho_1 - \rho_2) \cdot \left[U + \frac{1}{2} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r})^2 \right] = 0; \quad F_3(x, y, z) = (\rho_2 - \rho_3) \cdot \left[U + \frac{1}{2} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r})^2 \right] = 0. \end{aligned}$$

Здесь $\bar{u}_j$ и P_j – соответственно относительная скорость и давление жидкости в полости Q_j , P_0 – давление на свободной поверхности Σ_1 (при частичном заполнении); Σ_2, Σ_3 – поверхности раздела жидкостей (внутренние поверхности); U – потенциал массовых сил; Σ_{0j} – соответственно невозмущенная свободная и внутренние поверхности; Q_j – область, занятая j -ой жидкостью; S_j – смоченная поверхность Q_j полости; $\bar{n}$ – орт внешней нормали.

Решение системы (1) ищем в виде гармонических функций времени

$$p_j = \varphi_j(x, y, z)e^{i\lambda t}, \quad \bar{u}_j = \bar{v}_j(x, y, z)e^{i\lambda t} \quad (j=\overline{1,3}).$$

Выражая из первого уравнения системы (1) $\bar{v}_j$ через φ_j [1], приходим к следующей краевой задаче для функций φ_1, φ_2 и φ_3

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_j - \kappa^2 \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial z_j^2} &= 0; \quad \bar{v}_j \cdot L \nabla \varphi_j|_{S_j} = 0; \quad \varphi_1|_{\Sigma_{01}} = - \frac{\kappa_2 b_1}{4\omega_0^2(\kappa^2 - 1)} \bar{v}_1 \cdot L \nabla \varphi_1; \\ \bar{v}_2 \cdot L(\nabla \varphi_1 - \nabla \varphi_2)|_{\Sigma_{02}} &= 0; \quad (\rho_1 \varphi_1 - \rho_2 \varphi_2)|_{\Sigma_{02}} = - \frac{\kappa^2 b_2}{4\omega_0^2(\kappa^2 - 1)} \bar{v}_2 \cdot L \nabla \varphi_2; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\bar{v} \cdot L(\nabla\varphi_2 - \nabla\varphi_3)|_{\Sigma_{03}} = 0; (\rho_2\varphi_2 - \rho_3\varphi_3)|_{\Sigma_{03}} = -\frac{\kappa^2 b_3}{4\omega_0^2(\kappa^2 - 1)} \bar{v}_3 \cdot L\nabla\varphi_3;$$

где $L\nabla\varphi_j = \nabla\varphi_j + i\kappa\bar{k} \times \nabla\varphi_j - \kappa^2\bar{k}(\bar{k} \cdot \nabla\varphi_j)$, $\bar{k}$ — орт оси вращения O , $\kappa = 2\omega_0/\lambda$.

Таким образом, задача исследования свободных колебаний трехслойной идеальной стратифицированной жидкости во вращающемся твердом теле сводится к решению линейной однородной краевой задачи (2) на собственные значения для функций φ_1 , φ_2 и φ_3 .

В случае полного заполнения свободная поверхность отсутствует и граничное условие на ней в (2) исключается из рассмотрения.

Будем считать поле массовых сил однородным, имеющим ускорение $\bar{g}$, направленное параллельно оси вращения. Тогда свободная и внутренние поверхности трехслойной жидкости представляют собой параболоиды вращения, а величины b_j имеют вид

$$b_1 = \rho_1 \sqrt{g^2 + (x^2 + y^2)\omega_0^4}; \quad b_j = (\rho_{j-1} - \rho_j) \sqrt{g^2 + (x^2 + y^2)\omega_0^4}; \quad j = 2, 3. \quad (3)$$

В этом случае для осесимметрической полости происходит отделение круговой координаты θ и решение краевой задачи (2) представляется в виде

$$\varphi_j = \varphi_{j0}(m^2)e^{im\theta}, \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

где функции $\varphi_{j0}(m^2)$ удовлетворяют плоской краевой задаче в меридиональном сечении полости и являются вещественными. Собственные числа для полостей вращения обладают следующим свойством: $\kappa(-m) = -\kappa(m)$ [1].

2. Рассмотрим цилиндрическую полость, образованную двумя соосными цилиндрическими поверхностями высоты $2h$ с радиусами единица и $R_0 \geq 0$. Начало координат поместим в центр цилиндра.

Предположим, что величина центростремительного ускорения значительно превосходит силу тяжести. Этот случай имеет место при достаточно быстром вращении твердого тела и соотношения (3) в этом случае принимают вид

$$b_1 = R_1\omega_0^2, \quad b_2 = (\rho_1 - \rho_2)R_2\omega_0^2; \quad b_3 = (\rho_2 - \rho_3)R_3\omega_0^2.$$

Здесь R_1 — радиус цилиндрической свободной поверхности ($R_1 \leq R_0$), а R_2 — радиусы цилиндрических внутренних поверхностей ($R_2 \leq R_1$). Величины R_1 , R_2 и R_3 определяются количеством жидкости в областях Q_1 , Q_2 и Q_3 .

В случае полного заполнения ($R_1 = R_0$) краевая задача (3) записывается следующим образом.

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_i - \kappa^2 \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} &= 0; \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} = 0, \quad z = \pm h; \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial r} - \frac{i\kappa}{r} \frac{\partial \varphi_3}{\partial \theta} &= 0, \quad r = 1; \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \frac{i\kappa}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} = 0, \quad r = R_0; \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \frac{i\kappa}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} - \frac{i\kappa}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta}, \quad r = R_2; \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} - \frac{i\kappa}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial r} - \frac{i\kappa}{r} \frac{\partial \varphi_3}{\partial \theta}, \quad r = R_3; \quad (4) \\ \rho_1\varphi_1 - \rho_2\varphi_2 &= \frac{r(\rho_1 - \rho_2)\kappa^2}{4(\kappa^2 - 1)} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} - \frac{i\kappa}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} \right), \quad r = R_2; \\ \rho_2\varphi_2 - \rho_3\varphi_3 &= \frac{r(\rho_2 - \rho_3)\kappa^2}{4(\kappa^2 - 1)} \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial r} - \frac{i\kappa}{r} \frac{\partial \varphi_3}{\partial \theta} \right), \quad r = R_3. \end{aligned}$$

Решение задачи (4) будем искать в виде

$$\begin{aligned} \varphi_i &= g_{im}(\xi r) \sin kze^{im\theta}; \\ g_{im}(\xi r) &= C_{im}J_m(\xi r) + D_{im}Y_m(\xi r), \quad \xi = k_l \sqrt{\kappa^2 - 1} \quad \text{при } |\kappa| \geq 1; \end{aligned} \quad (5)$$

$$g_{im}(\xi r) = C_{im} I_m(\xi r) + D_{im} K_m(\xi r), \quad \xi = k_l \sqrt{1 - \kappa^2} \quad \text{при } |\kappa| \leq 1;$$

где J_m, Y_m, I_m, K_m — функции Бесселя первого и второго рода действительного и мнимого аргумента, $k = k_l = \pi(2l+1)/2h, (l = 0, 1, 2, \dots)$.

В начале рассмотрим случай $|\kappa| \geq 1$.

Постоянные C_{im}, D_{im} находятся из решения однородной системы. Приравняв нулю определитель этой системы, получим уравнение для определения собственных чисел краевой задачи (4)

$$\begin{vmatrix} c_1 & d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & d_2 & -c_2 & -d_2 & 0 & 0 \\ \rho_1 J_{m2} & \rho_1 Y_{m2} & -\tilde{c}_2 & -\tilde{d}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & d_3 & -c_3 & -d_3 \\ 0 & 0 & \rho_2 J_{m3} & \rho_2 Y_{m3} & -\tilde{c}_3 & -\tilde{d}_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a &= \xi J_{m-1}(\xi) + m(\kappa-1)J_m(\xi), & b &= \xi Y_{m-1}(\xi) + m(\kappa-1)Y_m(\xi), \\ c_1 &= \xi J_{m-1}(\xi R_0) + \frac{m(\kappa-1)}{R_0} J_m(\xi R_0), & d_1 &= \xi Y_{m-1}(\xi R_0) + \frac{m(\kappa-1)}{R_0} Y_m(\xi R_0), \\ c_j &= \xi J_{m-1}(\xi R_j) + \frac{m(\kappa-1)}{R_j} J_m(\xi R_j), & d_j &= \xi Y_{m-1}(\xi R_j) + \frac{m(\kappa-1)}{R_j} Y_m(\xi R_j), \\ \tilde{c}_j &= \rho_j J_m(\xi R_j) + \frac{R_j(\rho_{j-1} - \rho_j)\kappa^2}{4(\kappa^2 - 1)} c_j, & \tilde{d}_j &= \rho_j Y_m(\xi R_j) + \frac{R_j(\rho_{j-1} - \rho_j)\kappa^2}{4(\kappa^2 - 1)} d_j, \\ J_{m2} &= J_m(\xi R_2), & Y_{m2} &= Y_m(\xi R_2), & J_{m3} &= J_m(\xi R_3), & Y_{m3} &= Y_m(\xi R_3). \end{aligned}$$

Если ξ_{mpl} p -й корень уравнения (6), то собственные числа краевой задачи (4) находятся по формуле $\kappa_{mpl} = \pm(1 + k_l^{-2} \xi_{mpl}^2)^{1/2}$.

В случае частичного заполнения ($R_1 < R_2$) краевая задача (2) записывается в виде (4). Необходимо только вместо граничного условия при $r = R_0$ записать граничное условие на свободной поверхности

$$r = R_1: \frac{\partial \phi_1}{\partial r} - \frac{1}{r} \left(\frac{4(\kappa^2 - 1)}{\kappa^2} \phi_1 + i\kappa \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \right) = 0, \text{ и решение новой краевой задачи снова искать в виде (5).}$$

Для линейной однородной системы получаем определитель, аналогичный (6) в котором следует положить $c_1 = e, d_1 = f$,

где

$$e = J_m(\xi R_1) \frac{(\kappa-1)(\kappa^2 - 4\kappa - 4)}{\kappa^2} + \xi R_1 J_{m-1}(\xi R_1), \quad f = Y_m(\xi R_1) \frac{(\kappa-1)(\kappa^2 - 4\kappa - 4)}{\kappa^2} + \xi R_1 Y_{m-1}(\xi R_1).$$

При $\rho_1 = \rho_2$ уравнения (6) совпадают с уравнением, полученным в работе [2].

Как известно [6], в линейном приближении на движение вращающегося твердого тела оказывают влияние только те колебания жидкости в осесимметричной полости, для которых $m = \pm 1$. Поэтому дальнейшие исследования будут проведены для этого практически наиболее важного случая.

В случае $|\kappa| < 1$ и $m = 1$ функции Бесселя в (6) заменяются функциями Бесселя мнимого аргумента с изменением знака у нулевой функции второго рода [1].

Рассмотрим некоторые частные случаи исходной задачи.

При $R_0 = 0$ уравнение (6) имеет вид

$$F = 0 \quad (7)$$

Уравнение (7) представим в виде

$$F_1(\rho_1 J_2 - \tilde{c}_2) c_2 - F_2(\rho_1 J_2 d_2 - \tilde{d}_2 c_2) = 0. \quad (8)$$

В случае бесконечно малой внутренней поверхности ($R_2 \rightarrow 0$) и $m=1$ уравнение (8) можно записать следующим образом

$$F_2[\Delta \rho \kappa^2 - 4\Delta \rho \kappa - 4(\rho_1 + \rho_2)] = 0,$$

где $\Delta \rho = \rho_2 - \rho_1$.

$$F = \begin{vmatrix} c_2 & -c_2 & -d_2 & 0 & 0 \\ \rho_1 J_2 & -\tilde{c}_2 & -\tilde{d}_2 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & d_3 & -c_3 & -d_3 \\ 0 & \rho_2 J_3 & \rho_2 Y_3 & -\tilde{c}_3 & -\tilde{d}_3 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix}, \quad F_1 = \begin{vmatrix} d_3 & c_3 & -d_3 \\ \rho_2 Y_3 & -c_3 & -\tilde{d}_3 \\ 0 & a & b \end{vmatrix}, \quad F_2 = \begin{vmatrix} d_3 & c_3 & -d_3 \\ \rho_2 Y_3 & -c_3 & -\tilde{d}_3 \\ 0 & a & b \end{vmatrix}.$$

Следовательно, появление в полностью заполненном двухслойной жидкостью цилиндре произвольной высоты малого третьего слоя приводит к тому, что в жидкости возникают колебания с частотой, соответствующей собственному числу

$$\kappa = 2(1 + \sqrt{2\rho_2/\Delta\rho}). \quad (9)$$

Остальные частоты не изменяются и совпадают с частотами двухслойной жидкости в полностью заполненном цилиндре.

При $\rho_1 = 0$ из формулы (9) получаем известное соотношение для однородной жидкости $\kappa = 2(1 + \sqrt{2}) \approx 4.83$ [1]. Так как $\rho_2/\Delta\rho > 1$, то $2(1 + \sqrt{2\rho_2/\Delta\rho}) > 2(1 + \sqrt{2})$. Таким образом, стратификация приводит к уменьшению предельной частоты λ , которая имела место для малой свободной поверхности в однородной жидкости.

Из формулы (9) следует, что при $\rho_1 \rightarrow \rho_2$ $\kappa \rightarrow \infty$ и $\lambda \rightarrow 0$. Следовательно, при небольшом различии плотностей (случай малой стратификации) частота колебания поверхности раздела жидкостей стремиться к нулю. Это находится в хорошем соответствии со случаем не вращающейся трехслойной жидкости.

При $R_1 \rightarrow 0$ ($R_2 \neq 0$) и $m=1$ уравнение (7) можно записывать в виде

$$F_2(\kappa^2 - 4\kappa - 4) = 0$$

Таким образом, появление в полностью заполненном цилиндре произвольной высоты малой свободной поверхности приводит к тому, что в трехслойной вращающейся жидкости возникают колебания с частотой, соответствующей известному числу $\kappa = 2(1 + \sqrt{2}) \approx 4.83$ для однородной жидкости [1]. Остальные частоты не изменяются.

На рис. 1 изображены в случае постоянной массы жидкости три первых собственных числа для колебаний трехслойной жидкости с малой внутренней поверхностью (сплошные линии, $\rho_1 = 0.900$, $\rho_2 = 0.913$, $\rho_3 = 1.017$) и двухслойной жидкости (пунктирные линии, $\rho_1 = 0.900$, $\rho_2 = 1.033$), а на рис. 2 — с немалыми значениями внутренней поверхности (сплошные линии, $\rho_1 = 0.900$, $\rho_2 = 0.952$, $\rho_3 = 1.019$) и трехслойной жидкости, разделенной перегородками (пунктирные линии).

Из приведенных рисунков следует, что в трехслойной жидкости при постоянной массе жидкости появляется предельная частота, которая в случае бесконечно малой внутренней поверхности совпадает с частотой (9), предсказанной теоретически. Остальные частоты (за исключением первых) мало отличаются от частот двухслойной жидкости. При немалых внутренних поверхностях появляется предельная час-

тота, а остальные частоты колебаний трехслойной жидкости мало отличаются от частот колебаний трехслойной жидкости при замене внутренних поверхностей твердыми перегородками.

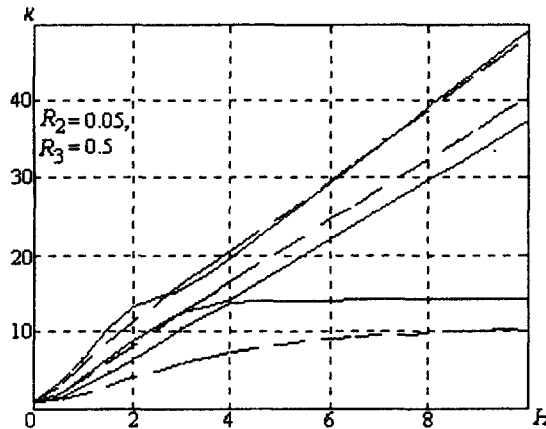


Рис. 1

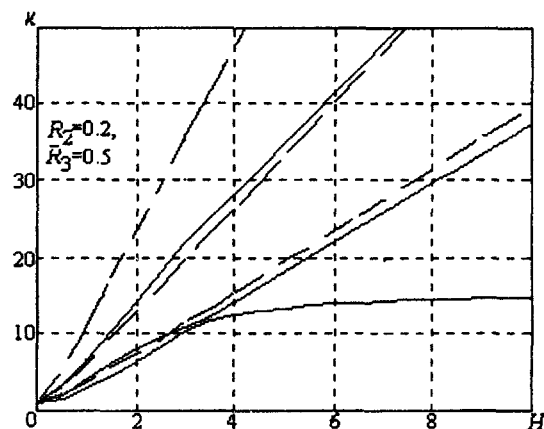


Рис. 2

РЕЗЮМЕ

В лінійній постановці розглянута задача про вільні коливання обертової рідини, яка частково або повністю заповнює порожнину. Задача знаходження спектра частот коливань тришарової стратифікованої рідини зводиться до рішення крайової задачі на власні значення, що може розв'язуватись чисельно або аналітично. одержані точні рішення крайової задачі для циліндричної порожнини в разі швидкого обертання. Проведені чисельні дослідження першої власної частоти у залежності від радіусів вільної та внутрішніх поверхонь, щільності рідини та глибини заповнення. Одержані асимптотичні формули частот для випадків малої вільної та внутрішньої поверхонь.

SUMMARY

The task about rotating fluid what partly or completely filled a cavity free oscillation is considered. The problem of the three-layer stratificated fluid frequency spectrum finding is reduced to the boundary value problem on the own value decision what can solve numerically or analytically. The boundary problem exact decision for cylindrically cavity and for fast rotation are obtained. The first own frequency numerically discovering in the dependence from the radii free and interior surface., the fluid density and the filling deep are led. The asymptotically formulas of the frequencies for little free and interior surface case are obtained.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Рвалов Р.В. Краевая задача о свободных колебаниях вращающейся идеальной жидкости // Изв.АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. — №4. – С. 81-88.
2. Кононов Ю.Н. О свободных колебаниях вращающейся идеальной стратифицированной жидкости // Вісн Донек. ун-та. – Серія А – 1998. – №2. – С. 56-61.
3. Kononov Yu.N., CHEN Men-shi Free Oscillations of a Rotating Ideal Stratified Liquids // J. of Sichuan University. – Eng. Sci. Edition –2001. – Vol. 33, №5. – P.112-115.
4. Копачевский Н.Д., Радякин Н.К. Свободные колебания двух капиллярных жидкостей, вращающихся в цилиндрическом сосуде // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1976. – №5. – С. 97-104.
5. Докучаев Л.В., Рвалов Р.В. Об устойчивости стационарного вращения твердого тела с 14.полостью, содержащей жидкость. // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – №2. – С.6-14.

Надійшла до редакції 05.05.2002 р.

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ВРЕМЕНИ ПРОХОЖДЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ ЧАСТИЦ ПО ТРАКТУ ВЕНТИЛЯЦИОННЫХ СИСТЕМ

В.И. Соколов, О.В. Епифанова*, С.А. Минин*, В.И. Богорад*
 Восточноукраинский национальный университет, г. Луганск
 *НПП «АтомЭнергоСпецЗащита», г. Луганск

В выбросах вентиляционных систем атомных станций присутствует большой спектр радионуклидов, имеющих различный период полураспада. При аттестации средств контроля радиоактивности в ряде случаев важным является оценка динамики изменения радиоактивности аэрозолей при их перемещении от места выброса до средств их регистрации. Для этих целей предложена методика определения времени прохождения дискретных частиц по тракту вентиляционных систем, учитывающая длительность индукционного периода в движении дискретной частицы.

Методика основывается на результатах расчета параметров стационарного режима вентиляционной системы энергоблока. Считаются известными расходы газовой среды во всех линиях системы и геометрические параметры участков магистралей. Основные зависимости построены в соответствии с обобщенной расчетной схемой, представленной на рис. 1.

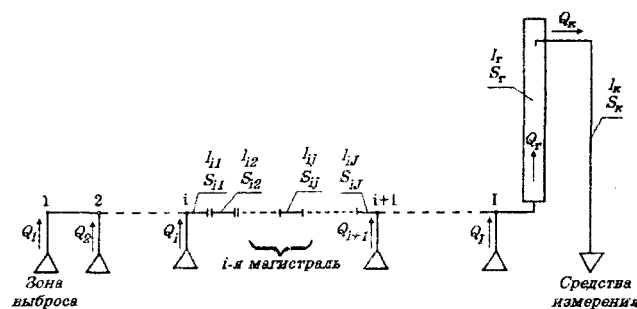


Рис. 1. Расчетная схема

Считаем, что на пути движения частицы по тракту вентиляционной системы в 1-ом узле осуществляется непосредственный ввод частиц от зоны выброса с расходом газовой среды Q_1 , а в последующих узлах $i=2...I$ добавление расходов Q_i неактивной газовой среды. Каждой магистрали между i -м и $i+1$ -м узлами присвоен номер i . В общем случае каждая i -я магистраль состоит из J участков, при этом, каждый участок имеет длину l_{ij} и площадь проходного сечения S_{ij} .

Расход газовой среды в вентиляционной трубе должен быть равным сумме расходов, подаваемых к узлам

$$Q_{\delta} = \sum_{i=1}^I Q_i$$

Как исходный параметр, в расчет задается расход в канале отбора пробы Q_{κ} , который определяется характеристиками канала отбора и устройств, осуществляющих данный отбор.

Известными полагаются площади проходного сечения вентиляционной трубы S_m и канала отбора пробы S_{κ} , длина участка от входа в трубу до заборных отверстий l_m и длина канала отбора l_{κ} .

Исходными данными также принимаются: μ , ρ_f - динамическая вязкость и плотность газовой среды; ρ_p , d - плотность и диаметр частицы; время задержки частиц в устройствах вентиляционной системы (например, в фильтрующих элементах) t_f .

Приняты следующие допущения:

- турбулентность является однородной и стационарной;
- частица имеет сферическую форму и обладает настолько малыми размерами, что ее движение относительно окружающей среды подчиняется Стоксовому закону сопротивления;
- частица мала по сравнению с наименьшей длиной волны, имеющей место при турбулентном движении.

На основании принятых допущений для описания движения частицы и уравнения Бассэ [1, 2] получено выражение для скорости дискретной частицы на ij -ом участке i -ой магистрали:

$$V_{p,ij} = V_{f,ij} (1 - e^{-at}) + V_{p,ij}^0 e^{-at},$$

где t - время; $V_{f,ij}$ - скорость потока газовой среды на ij -ом участке i -ой магистрали; $V_{p,ij}^0$ - начальная скорость дискретной частицы; коэффициент a определяется формулой

$$a = \frac{36\mu}{(2\rho_p + \rho_f)d^2}.$$

Скорость потока газовой среды на ij -ом участке i -ой магистрали

$$V_{f,ij} = \frac{\sum_{n=1}^i Q_n}{S_{ij}}.$$

Скорость частицы в зоне выброса принята равной нулю, поэтому

$$V_{p11}^0 = 0,$$

Для ij -го участка i -ой магистрали

$$V_{p,ij}^0 = \begin{cases} V_{f,i,j-1}, j = 2 \dots J; \\ V_{f,i-1,J}, j = 1. \end{cases}$$

Время разгона частицы до скорости основного потока на ij -м участке i -ой магистрали и путь, пройденный ею за это время, соответственно равны

$$t_{p,ij} = \frac{(2\rho_p + \rho_f)d^2}{12\mu}; \quad l_{ij}^* = \int_0^{t_{p,ij}} V_{p,ij}(\tau) d\tau.$$

Время прохождения частицей ij -го участка i -ой магистрали (полагается, что длины участка достаточно для разгона частицы)

$$T_{ij} = t_{p,ij} + \frac{l_{ij} - l_{ij}^*}{v_{f,ij}}.$$

Для вентиляционной трубы

$$V_{f,m} = \frac{\sum_{i=1}^I Q_i}{S_m};$$

$$V_{p,\delta}^0 = V_{f,IJ};$$

$$V_{p.m} = V_{f.m} (1 - e^{-at}) + V_{p.m}^0 e^{-at};$$

$$t_{p.m} = \frac{(2\rho_p + \rho_f)d^2}{12\mu};$$

$$l_m^* = \int_0^{t_{p.m}} V_{p.m}(\tau) d\tau;$$

$$T_m = t_{p.m} + \frac{l_m - l_m^*}{v_{f.m}}.$$

Для канала отбора пробы

$$V_{f.k} = \frac{Q_k}{S_k};$$

$$V_{p.k}^0 = 0;$$

$$V_{p.k} = V_{f.k} (1 - e^{-at});$$

$$t_{p.k} = \frac{(2\rho_p + \rho_f)d^2}{12\mu};$$

$$l_k^* = \int_0^{t_{p.k}} V_{p.k}(\tau) d\tau;$$

$$T_k = t_{p.k} + \frac{l_k - l_k^*}{V_{f.k}}.$$

Полное время прохождения частицы составит

$$T = t_3 + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J t_{p.ij} + T_m + T_k.$$

Расчеты, выполненные для вентиляционных систем энергоблока ВВЭР-1000, показывают, что время прохождения в ряде случаев составляет более 30 с. Данное время следует учитывать для анализа в реальном времени фактической радиационной обстановки в реакторном отделении по контролируемой радиоактивности выбросов в выходной вентиляционной трубе.

РЕЗЮМЕ

Представлена методика визначення часу проходження дискретних часток по тракту вентиляційних систем, що враховує тривалість індукційного періоду в русі часток. Використання методики для енергоблоків атомних станцій дозволяє уточнювати фактичну радіаційну обстановку в реакторному відділенні по контролю радіоактивних викидів у вихідній вентиляційній трубі.

SUMMARY

The technique of propagation time definition of discrete fragments on a ventilation systems channels taking into account duration of an induction period in fragments motion is submitted. Usage of a technique for generating sets of nuclear power plant allows to update actual radiation situation in pile room under the control of radioactive lets in an output air pipe.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Соколов В.И., Коваленко А.А., Минин С.А. Временные характеристики начальных этапов диффузии аэрозолей в потоке. – Луганск: ВУГУ, 1999. – 22 с.
2. Соколов В.И. и др. Инженерные задачи диффузии примеси в потоке. – Луганск: ВУГУ, 2000. – 168 с.

Надійшла до редакції 13.05.2002 р.

УДК 519.6

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ СЕРОВОДОРОДНОГО СЛОЯ ЧЕРНОГО МОРЯ

Ю.Б. Иванов

Таврический национальный университет, г. Симферополь

Для математического моделирования свободных колебаний сероводородного слоя Черного моря используется математическая модель двухслойной жидкости [1], имеющая в этом случае малый параметр. После разложения задачи по малому параметру для нулевого и первого приближений получена спектральная задача для более простого операторного пучка. Собственные значения и собственные элементы этого пучка после приведения к размерному виду можно интерпретировать как частоты и моды свободных колебаний нижнего, насыщенного сероводородом, слоя жидкости.

Разложение системы уравнений для двухслойной вращающейся жидкости по малому параметру
Систему уравнений [1], определяющую свободные колебания двухслойной жидкости, запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} L\left(H_1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} H_2; \lambda\right) \eta^{(1)} + \lambda(\alpha^2 - \lambda^2) \eta^{(1)} &= -\varepsilon L(H_2; \lambda) \tilde{\eta}^{(2)} \\ L(\delta \rho H_2; \lambda) \tilde{\eta}^{(2)} + \lambda(\alpha^2 - \lambda^2) \tilde{\eta}^{(2)} &= -\varepsilon L(H_2; \lambda) \eta^{(1)}. \end{aligned} \quad (1)$$

где $L(H; \lambda) = \lambda L(H) - \alpha M(H)$, $\delta \rho = 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}$, $\varepsilon = \sqrt{\delta \rho \frac{\rho_1}{\rho_2}}$. Малым параметром системы (1) считаем величину ε , значения которой удовлетворяют неравенствам $0 \leq \varepsilon \leq 0,5$.

Согласно теории возмущений самосопряженных операторов [2], будем искать решения λ, η системы (1) в виде разложения по малому параметру:

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \dots \quad (2)$$

$$\eta = \eta_0 + \varepsilon \eta_1 + \dots = \begin{pmatrix} \eta_0^{(1)} \\ \tilde{\eta}_0^{(2)} \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} \eta_1^{(1)} \\ \tilde{\eta}_1^{(2)} \end{pmatrix} + \dots \quad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в систему (1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем следующие системы уравнений для нулевого и первого приближений.

Система уравнений для нулевого приближения:

$$L(H_1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} H_2; \lambda_0) \eta_0^{(1)} + \lambda_0(\alpha^2 - \lambda_0^2) \eta_0^{(1)} = 0$$

$$L(\delta \rho H_2; \lambda_0) \tilde{\eta}_0^{(2)} + \lambda_0(\alpha^2 - \lambda_0^2) \tilde{\eta}_0^{(2)} = 0,$$

которую мы запишем в виде

$$P(H_1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} H_2; \lambda_0) \eta_0^{(1)} = 0 \quad (4)$$

$$P(\delta \rho H_2; \lambda_0) \tilde{\eta}_0^{(2)} = 0. \quad (5)$$

Система уравнений для поправки первого порядка:

$$P(H_1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} H_2; \lambda_0) \eta_1^{(1)} = -L(H_2; \lambda_0) \tilde{\eta}_0^{(1)} + \lambda_1 \left(L(H_1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} H_2) + (\alpha^2 - 3\lambda_0^2) E \right) \eta_0^{(1)} \quad (6)$$

$$P(\delta \rho H_2; \lambda_0) \tilde{\eta}_1^{(2)} = -L(H_2; \lambda_0) \eta_0^{(1)} + \lambda_1 (L(\delta L(\delta_2) + (\alpha^2 - 3\lambda_0^2)E) \tilde{\eta}_0^{(2)}) \quad (7)$$

Для того, чтобы существовало ненулевое решение $\eta_1 = (\eta_1^{(1)}, \tilde{\eta}_1^{(2)})$ необходимо потребовать, чтобы правая часть системы (6-7) была ортогональна нулевому приближению $\eta_0 = (\eta_0^{(1)}, \tilde{\eta}_0^{(2)})$, то есть параметр λ_1 должен удовлетворять следующему уравнению:

$$\begin{aligned} & (-L(H_2; \lambda_0) \tilde{\eta}_0^{(2)}, \eta_0^{(1)}) + \lambda_1 (L(H_1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} H_2) + (\alpha^2 - 3\lambda_0^2)E) \eta_0^{(1)}, \eta_0^{(1)}) + \\ & + \left(-L(H_2; \lambda_0) \eta_0^{(1)}, \tilde{\eta}_0^{(2)} \right) + \lambda_1 \left(\left(L(\delta L(\delta_2) + (\alpha^2 - 3\lambda_0^2)E) \tilde{\eta}_0^{(2)}, \tilde{\eta}_0^{(2)} \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Спектральные задачи на интервале $(0; \alpha)$ для внутренних волн в нулевом и первом приближениях

Нулевое приближение. Рассмотрим систему уравнений для нулевого приближения (4-5). Система состоит из двух уравнений, связанных между собой только через спектральный параметр λ_0 . Второе уравнение этой системы определяет колебания внутренней границы $\eta^{(2)}$ слоев жидкости, которое можно записать в виде:

$$\left[\lambda_0 L(\delta \rho H_2) - \alpha M(\delta \rho H_2) + \lambda_0 (\alpha^2 - \lambda_0^2) \right] \eta_0^{(2)} = 0. \quad (9)$$

Заметим, что для бассейна с вертикальными стенками, это уравнение совпадает с уравнением колебаний свободной поверхности однородной жидкости [3] для приведенной толщины нижнего слоя $\delta \rho H_2$, где $H_2 = H_2(x, y)$ - кусочно-гладкая функция, определенная в области G .

Будем искать решения уравнения (9) на подпространстве $\mathbf{M}_{H_2}^+$, векторы которого удовлетворяют неравенству

$$\delta \rho \cdot \left(M(H_2) \eta_0^{(2)}, \eta_0^{(2)} \right) \geq 0. \quad (10)$$

Как доказано в [4], уравнение (9) на интервале $(0, \alpha)$ имеет счетное множество собственных значений с предельной точкой ноль. Пусть $\lambda_0 \in (0, \alpha)$, $\eta_0^{(2)} \in \mathbf{M}_{H_2}^+$ - некоторое решение уравнения (9). Отклонение свободной поверхности $\eta_0^{(1)}$ ищем как решение уравнения (4)

$$P(H_1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} H_2; \lambda_0) \eta_0^{(1)} = 0 \quad (11)$$

на подпространстве $\mathbf{M}_{H_1}^-$, то есть среди вектор-функций, удовлетворяющих неравенству

$$\left(M(H_1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} H_2) \eta_0^{(1)}, \eta_0^{(1)} \right) \leq 0. \quad (12)$$

Уравнение (11) запишем в развернутом виде

$$\left[\lambda_0 L(H) - \alpha M(H) + \lambda_0 (\alpha^2 - \lambda_0^2) \right] \eta_0^{(1)} = 0, \quad (13)$$

где $H = H_1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} H_2$ - кусочно-гладкая, определенная в области G , функция. Из условия (12) следует, что пучок (13) на интервале $(0, \alpha)$ собственных значений не имеет, так как оператор $P(H; \lambda_0)$ положительно определен. Следовательно, для $\lambda_0 \in \lambda_0^{(2)}$ на подпространстве $\mathbf{M}^-_H$ вектор – функций $\eta_0^{(1)}$, подчиненных условию (12), уравнение (13) имеет только нулевое решение, которое является устойчивым.

Таким образом, ограниченное нулевое приближение

$$\lambda = \lambda_0^{(2)}, \quad \eta = (\mathbf{0}, \eta_0^{(2)}), \text{ если } \lambda_0^{(2)} \in (0, \alpha), \quad \eta_0^{(2)} \in \mathbf{M}^+_H, \quad (14)$$

для колебаний второго рода (внутренние волны) в двухслойной жидкости существует и устойчиво.

Устойчивость первого приближения на интервале $(0, \alpha)$. Подставляя в уравнение (8) нулевое приближение (14) получаем следующее уравнение для $\lambda_1^{(2)}$

$$\lambda_1^{(2)} \left(L(\delta \rho H_2) + (\alpha^2 - 3\lambda_0^{(2)2}) E \right) \tilde{\eta}_0^{(2)}, \tilde{\eta}_0^{(2)} = 0. \quad (15)$$

Докажем, что скалярное произведение в (15) не равно нулю. Действительно, умножая уравнение (9) скалярно на известный вектор $\tilde{\eta}_0^{(2)}$, приходим к равенству

$$\left(\lambda_0^{(2)} L(\delta \rho H_2) - \alpha M(\delta \rho H_2) + \lambda_0^{(2)} (\alpha^2 - \lambda_0^{(2)2}) \right) \eta_0^{(2)}, \eta_0^{(2)} = 0, \quad (16)$$

левую часть которого можно записать как полином третьей степени относительно $\lambda_0^{(2)}$. Из строгого неравенства $(L\eta, \eta) > |(M\eta, \eta)|$, которое для операторов L и M выполняется [4], следует, что все корни уравнения (16) простые. Тогда производная этого многочлена в корневых точках не равна нулю, то есть

$$\left(L(\delta \rho H_2) + (\alpha^2 - 3\lambda_0^{(2)2}) E \right) \tilde{\eta}_0^{(2)}, \tilde{\eta}_0^{(2)} \neq 0. \quad (17)$$

Из (15) и (17) теперь следует, что $\lambda_1^{(2)} = 0$.

Вектор $\tilde{\eta}_1^{(2)}$ должен удовлетворять уравнению (7), в правую часть которого следует подставить $\lambda_1 = \lambda_1^{(2)} = 0$ и $\eta_0^{(1)} = 0$. Получаем однородное уравнение (7), совпадающее с уравнением (5). Поэтому, в качестве ограниченного решения $\tilde{\eta}_1^{(2)}$ этого уравнения выбираем решение уравнения (5), то есть $\tilde{\eta}_1^{(2)} = \tilde{\eta}_0^{(2)}$.

Вектор-смещение для свободной границы $\eta_1^{(1)}$, согласно уравнению (6), должен удовлетворять теперь неоднородному уравнению

$$P(H; \lambda_0^{(2)}) \eta_1^{(1)} = -L(H_2; \lambda_0^{(2)}) \eta_0^{(2)}. \quad (18)$$

Решение уравнения (18) ищем на подпространстве $\mathbf{M}^-_H$, то есть на множестве векторов $\eta_1^{(1)}$, удовлетворяющих неравенству (12). При значениях параметра $\lambda_0^{(2)} \in (0, \alpha)$ оператор $P(H; \lambda_0^{(2)})$, будет положительно определен на $\mathbf{M}^-_H$. Следовательно, на этом подпространстве существует ограниченный обратный оператор и решение уравнения (18) может быть представлено в виде

$$\eta_1^{(1)} = -P^{-1}(H; \lambda_0^{(2)}) L(H_2; \lambda_0^{(2)}) \tilde{\eta}_0^{(2)}.$$

Таким образом, в нулевом и первом приближениях колебания второго рода (внутренние волны) с частотами $\lambda^{(2)} \in (0, \alpha)$ и модами $\eta^{(1)} \in \mathbf{M}^{-}_H$, существуют и устойчивы на этих подпространствах.

РЕЗЮМЕ

Для математичного моделювання вільних коливань сірководневого шару Чорного моря використовується математична модель двохшарової рідини, маюча в цьому випадку малий параметр. Після розкладу завдання по малому параметру для нульового та першого приближень отримана спектральне завдання для більш простого операторного пучка. Особисті значення та особисті елементи цього пучка після приведення до розмірного виду можна інтерпретувати як частоти та моди вільних коливань, насиченого сірководневого, шару рідини.

SUMMARY

Mathematical modeling of free sulphur – hydrogen layer oscillations in the Black Sea for modeling of free H_2S – layer oscillations in the Black Sea was used hydrodynamic model for two-layer liquid with small parameter. As a result of the parameter-series expansion it were obtained simple spectral problems for operator pencils. Eigenvalues and eigenvectors of the operator pencils in its' dimension form are frequencies and modes underlying H_2S – layer.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов Ю.Б. Двухслойная модель сейшевых колебаний Черного моря. //Доп. НАН України.-2000.-№8.- С. 119-123.
2. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. – 740 с.
3. Иванов Ю.Б. Моделирование баротропных сейш в Черном море. //Доп. НАН України.-1999.-№6.-С. 117-120.
4. Иванов Ю.Б. Обобщенные решения спектральной краевой задачи для системы уравнений теории мелкой воды. // Ученые записки ТНУ. Серия "Математика, Механика, Информатика".-2001, т. 14(53), № 1.-С. 43-50.

Надійшла до редакції 25.04.2002 р.

УДК 532.5

ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МАЛЫХ ОБЪЕКТОВ В ПОТОКЕ

*Д.В. Евдокимов, Н.В. Поляков**Днепропетровский национальный университет*

Гидродинамическое взаимодействие разнообразных объектов в потоках – это широко распространенное явление (уединенный объект в потоке является, скорее, редким исключением, нежели правилом), практическое значение изучения которого весьма велико. Гидродинамическое взаимодействие имеет место не только между телами в потоке, но и между телами и твердыми или свободными границами потока, а также вихревыми структурами, присутствующими в потоке. Влияние иных объектов может существенно сказываться на силовых характеристиках обтекания и на эволюции вихревых структур и свободных границ. Однако сложность задач гидродинамического взаимодействия (сложные, неканонические формы областей и наличие изменяющихся структур) приводит к тому, что на практике эти задачи решаются крайне редко и в упрощенных постановках. Особую сложность представляют случаи, когда в потоке множество взаимодействующих объектов, и когда взаимодействующие объекты имеют разный геометрический масштаб.

Особенно важную роль процессы гидродинамического взаимодействия играют в многофазных средах, когда в потоке присутствует множество микрообъектов (объектов, геометрические размеры которых много меньше характерных масштабов основного потока). В качестве микрообъектов в потоке могут выступать дискретные вихри, малые капли и малые твердые частицы в газовых потоках, малые пузыри газа и малые твердые частицы в течениях жидкости. При этом размеры малых объектов не обязательно должны быть асимптотически малы. Таким образом, предоставляется возможность построения неасимптотических вычислительных моделей многофазной среды.

Среди проблем современной вычислительной гидромеханики проблема учета взаимного влияния явлений разного геометрического масштаба занимает особое место, поскольку трудноразрешима обычными методами – методом конечных разностей и методом конечных элементов. Оба указанных метода не предполагают достоверного представления эффектов подсеточного масштаба, хотя и допускают искусственный учет подсеточных явлений. Поскольку параметры сетки определяются, в основном, макроскопическими параметрами задачи, а также возможностями имеющегося аппаратного и программного обеспечения расчетов, возможности моделирования микроэффектов в классических методах сильно ограничены. Очевидно, что этот недостаток присущ всем эйлеровым методам. В то же время лагранжевы методы, основанные на теории потенциала, – метод дискретных особенностей, метод дискретных вихрей, комбинированный метод граничных элементов и дискретных вихрей – лишены этого недостатка благодаря линейному представлению кинематики течения методами теории потенциала.

Вычислительный алгоритм в данном случае основывается на очевидном расщеплении процессов по геометрическому масштабу. На макроуровне движение микрообъектов описывается движением точечных объектов (кинематические особенности – дискретные вихри, источники, диполи – движутся как жидкие частицы, а движение малых материальных объектов описывается уравнениями динамики точки). Влияние малых объектов на поток в случае, когда малый объект это дискретная особенность, определяется характером и интенсивностью особенности, а для материальных объектов – дискретным вихрем и диполем. В общем случае следует ввести некоторое расстояние, называемое радиусом влияния, начиная с которого следует рассматривать гидродинамическое взаимодействие двух объектов, как двух объемных тел. Понятие радиуса влияния близко понятию радиуса дискретности в методе дискретных вихрей, но не совпадает с ним. При распространении указанного подхода на дискретные кинематические особенности (дискретные вихри, диполи, источники и т.д.) при близком взаимодействии меняется внутренняя структура объекта, что в классическом методе дискретных особенностей не предусмотрено. Так при близком взаимодействии кинематических особенностей возможно объединение таковых, иногда целесообразно моделировать близкое взаимодействие особенностей новой особенностью, например, при взаимодействии пары дискретных вихрей может быть образован вихревой диполь.

В качестве численного алгоритма реализации вышеуказанного подхода особенно удобен комбинированный метод граничных элементов и дискретных вихрей, который в рамках единой формулировки позволяет рассмотреть многофазное течение как систему распределенных по границе кинематических особенностей, распределенных внутри области течения кинематических особенностей, подвижных дискретных кинематических особенностей внутри области и подвижных материальных особенностей внутри области. Регулярный метод граничных элементов с интегрированием по реальной границе позволяет достаточно точно рассчитывать движение дискретных объектов в непосредственной близости от твердых границ области течения.

Описанный выше подход рассмотрим на примере плоской задачи о течении несжимаемой жидкости, которую сформулируем в терминах завихренности – функция тока. Уравнение для функции тока:

$$\Delta \Psi = -\omega, \quad (1)$$

и уравнение переноса завихренности для вязкого течения:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + U \frac{\partial \omega}{\partial x} + V \frac{\partial \omega}{\partial y} = \text{rot} F + \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

и для невязкого потока:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + U \frac{\partial \omega}{\partial x} + V \frac{\partial \omega}{\partial y} = \text{rot} F, \quad (3)$$

где в уравнения переноса завихренности включены массовые силы, которые могут быть непотенциальны.

Обычно для численного решения задачи о движении вихревой структуры используется метод дискретных вихрей [1]. Прямое применение метода граничных элементов к системе уравнений (1), (2) или (1), (3) наталкивается на следующую проблему - для решения данных уравнений методом граничных элементов необходимо вычислить ньютоновский потенциал, что приводит к большим затратам памяти ЭВМ и машинного времени. Подробно вопрос о прямом вычислении ньютоновского потенциала рассмотрен в работе [2,3], а другие подходы вычисления ньютоновского потенциала изложены в работах [4-6]. Кроме того, вопрос о применении метода граничных элементов к уравнениям (2), (3) практически не разработан, так как не известны фундаментальные решения. Поэтому, как правило, применение метода граничных элементов ограничивалось потенциальными движениями идеальной несжимаемой жидкости. В то же время метод дискретных вихрей легко позволяет рассчитывать вихревые течения, при этом завихренность в области течения моделируется дискретными вихрями. Это предположение физически обосновано, так как точечный вихрь в идеальной несжимаемой жидкости не диффундирует и способен сохранять свою интенсивность в течение сколь угодно долгого времени, а образование завихренности в потоке, благодаря отрыву тонкого пограничного слоя, локально неустойчиво, так что сходящая с контура в точке отрыва вихревая пелена распадается на отдельные вихревые структуры, которые можно моделировать либо одним дискретным вихрем, либо системой дискретных вихрей [1, 4, 7]. Однако метод дискретных вихрей недостаточно эффективен для расчета точек, лежащих вблизи границы области решения, метод граничных элементов моделирует поверхность обтекаемого тела намного лучше.

В работе [8] предложен комбинированный алгоритм методов граничных элементов и дискретных вихрей. Этот алгоритм, комбинирующий метод граничных элементов для моделирования поверхности обтекаемого тела и метод дискретных вихрей для вихревого движения внутри области течения, будет сочетать эффективность метода граничных элементов с простотой метода дискретных вихрей для моделирования вихревых структур.

Представим поле завихренности в виде совокупности дискретных вихрей:

$$\omega(x, y) = \sum_{i=1}^M \omega_i \delta(x - x_i, y - y_i), \quad (4)$$

где M – количество свободных вихрей, ω_i – их интенсивность. Основное уравнение теории потенциала, соответствующее уравнению (1), имеет вид [4]:

$$\chi(x_0, y_0) \Psi(x_0, y_0) = \oint_{\Gamma} P(x, y, x_0, y_0) \frac{\partial \Psi}{\partial n} dS - \oint_{\Gamma} \Psi \frac{\partial P}{\partial n}(x, y, x_0, y_0) dS + \sum_{i=1}^M \omega_i P(x_i, y_i, x_0, y_0) \quad (5)$$

где P – фундаментальное решение уравнения Лапласа, или соответствующая функция Грина, функция χ отражает местоположение точки (x_0, y_0) по отношению к границе области решения.

Однако в рассматриваемом нами случае в потоке присутствуют также другие особенности – частицы или капли второй фазы. Их влияние следует учесть введением дополнительных дискретных особенностей – вихрей и диполей. Далее будем полагать обтекание частиц бесциркуляционным, то есть вихрь равным 0. Но в соотношении (5) следует добавить влияние диполей (поскольку функция влияния

диполя затухает с ростом расстояния быстрее, чем функция влияния вихря, влияние диполей будет более локальным). Тогда формула (5) должна быть заменена более общей формулой.

$$\chi(x_0, y_0) \Psi(x_0, y_0) = \oint_{\Gamma} P(x, y, x_0, y_0) \frac{\partial \Psi}{\partial n} dS - \oint_{\Gamma} \Psi \frac{\partial P}{\partial n}(x, y, x_0, y_0) dS +$$

$$+ \sum_{i=1}^M \omega_i P(x_i, y_i, x_0, y_0) + \sum_{i=1}^K d_i P_1(x_i, y_i, x_0, y_0, n_{xi}, n_{yi}) \quad (6)$$

где P_1 – функция влияния диполя, K – число диполей, d_i – их интенсивности, n_{xi} , n_{yi} – координаты вектора нормали к оси диполя. Интенсивность диполя пропорциональна геометрическому размеру (радиусу) материального объекта и скорости движения материального объекта относительно потока. Очевидно

$$P_1 = \frac{\partial P}{\partial n} \quad (7)$$

Отметим, что в потоке могут находиться не только диполи, связанные с частицами (каплями), но и свободные диполи. Так, например, в работе [8] показано, что в плоском течении две вихревые пелены, сходящиеся с острой кромки, образуют дипольно-вихревую пелену, которая распадается на отдельные структуры с постоянной завихренностью и затухающим диполем. В данной работе мы рассматриваем только вихри, связанные с материальными микрообъектами.

Тогда поле скоростей в рассматриваемом потоке описывается формулами (по аналогии с работой [8]):

$$U = 1 + \oint_{\Gamma} \frac{\partial P}{\partial y_0}(x, y, x_0, y_0) \frac{\partial \Psi}{\partial n} dS - \oint_{\Gamma} \Psi \frac{\partial^2 P}{\partial n \partial y_0}(x, y, x_0, y_0) dS +$$

$$+ \sum_{i=1}^M \omega_i \frac{\partial P}{\partial y_0}(x_i, y_i, x_0, y_0) + \sum_{i=1}^K d_i \frac{\partial P_1(x_i, y_i, x_0, y_0, n_{xi}, n_{yi})}{\partial y_0} \quad (8)$$

$$V = - \oint_{\Gamma} \frac{\partial P}{\partial x_0}(x, y, x_0, y_0) \frac{\partial \Psi}{\partial n} dS + \oint_{\Gamma} \Psi \frac{\partial^2 P}{\partial n \partial x_0}(x, y, x_0, y_0) dS -$$

$$- \sum_{i=1}^M \omega_i \frac{\partial P}{\partial x_0}(x_i, y_i, x_0, y_0) + \sum_{i=1}^K d_i \frac{\partial P_1(x_i, y_i, x_0, y_0, n_{xi}, n_{yi})}{\partial x_0} \quad (9)$$

Рассмотрим вопрос о движении микрообъектов в потоке. Кинематические объекты (свободные дискретные вихри, свободные диполи, не связанные с материальными объектами) движутся как жидкие частицы, то есть их скорость равна скорости потока в точке, где они находятся, (рассчитывается по формулам (8), (9)), сами же они на скорость в этой точке не влияют. Положение кинематических особенностей определяется из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = U(x_k, y_k), \dot{y} = V(x_k, y_k), \quad (10)$$

которая решается методом Эйлера.

Движение материальных особенностей (частиц, капель или пузырьков) описывается уравнениями движения материальной точки

$$(m + j) \frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{g} - CS \frac{(\vec{V} - \vec{V}_0) \rho_f (\vec{V} - \vec{V}_0)^2}{|\vec{V} - \vec{V}_0|}, \quad (11)$$

где m – масса объекта, j – присоединенная масса объекта, C – коэффициент гидродинамического сопротивления, определяемый по формуле [9, 10]:

$$C = M Re^{-n}$$

где $M = M(Re)$, $n = n(Re)$, Re – число Рейнольдса обтекания капли;

$$M(Re) = \begin{cases} 25,6, & Re < 1, \\ 26,3, & 1 \leq Re < 13, \\ 12,3, & 13 \leq Re < 800, \\ 0,44, & Re \geq 800, \end{cases} \quad n(Re) = \begin{cases} 1,0, & Re < 1, \\ 0,8, & 1 \leq Re < 13, \\ 0,5, & 13 \leq Re < 800, \\ 0, & Re \geq 800. \end{cases}$$

S – площадь миделева сечения объекта, ρ_f – плотность потока, $\vec{V}$ – скорость объекта, $\vec{V}_0$ – скорость потока в точке, где находится объект. Система обыкновенных дифференциальных уравнений (11) также может быть решена методом Эйлера.

В цели данной работы не входит рассмотрение всех парадоксов и противоречий модели идеальной несжимаемой жидкости и корректности подходов теории вязко-невязкого взаимодействия. Ограничимся лишь одним аспектом этой проблемы – взаимодействием вихрей на малых расстояниях. Очевидно, что традиционный дискретный вихрь предполагает сингулярное значение скорости в точке, где он расположен, что, конечно, некорректно, и поле скоростей вблизи вихря не соответствует реальным скоростям потока. Таким образом, при взаимодействии классических дискретных вихрей на малых расстояниях им могут быть приписаны неправильные, очень большие скорости, что приведет к некорректному перемещению вихрей и исказит всю дальнейшую картину течения.

Имели место многочисленные попытки разрешить вышеописанную проблему, обзор таких попыток дан в работах [11]. В большинстве работ предлагается заменить дискретный вихрь завихренностью, распределенной по малой области (ядру). Следует отметить, что точность решения повышается при использовании любого непрерывного распределения завихренности, то есть замене бесконечной скорости на любую конечную, однако были сделаны попытки повысить точность расчета за счет подбора распределенной завихренности в ядре [8, 12-15].

Особенностью настоящей работы является возможность взаимодействия не только дискретных вихрей, но и материальных особенностей между собой и с дискретными вихрями. Взаимодействие материальных особенностей между собой может происходить по двум сценариям: 1) особенности сливаются (например, капли, коснувшись друг друга, сливаются под действием сил поверхностного натяжения), в этом случае необходимо ввести в поток новую особенность, моделирующую возникший материальный объект; 2) особенности сталкиваются и продолжают движение отдельно, в этом случае, как правило, эффектом столкновения можно пренебречь. Когда же материальный объект сталкивается с дискретным вихрем, он разрушает этот вихрь, образуя новые вихри, интенсивность которых определить затруднительно, поскольку в них входит завихренность не только исходного вихря, но и пограничного слоя, отрыв которого может индуцировать вихрь. Кроме того, некорректное поле скоростей в ядре вихря индуцирует некорректную интенсивность диполя, что ведет к еще большим погрешностям. В данной ситуации необходимо либо рассмотреть обтекание материального тела потоком с распределенной вихревой структурой, либо постулировать сохранение вихря и диполя во время столкновения.

Остановимся на особенностях применения метода граничных элементов для численного решения уравнения (6). Традиционный метод граничных элементов не обеспечивает должной точности решения вблизи границы области решения, поэтому в настоящей работе применен регулярный метод граничных элементов с интегрированием по реальной границе, предложенный в работе [16]. Данный алгоритм обеспечивает, как минимум, на порядок меньшую погрешность вблизи границы. Пусть граница Γ области D является гладкой кривой и описывается функцией от параметра t , тогда дискретный аналог (6)

$$\begin{aligned} 0 = & \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} \varphi_{1k}(\alpha_1^k, \alpha_2^k, \alpha_3^k, \dots, \alpha_n^k, x(t), y(t)) \frac{\partial P}{\partial n}(x_i, y_i, x(t), y(t)) h_k(t) dt - \\ & - \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} \varphi_{2k}(\alpha_1^k, \alpha_2^k, \alpha_3^k, \dots, x(t), y(t)) P(x_i, y_i, x(t), y(t)) h_k(t) dt + \\ & + \sum_{i=1}^M \omega_i P(x_i, y_i, x_0, y_0) + \sum_{i=1}^K d_i P_l(x_i, y_i, x_0, y_0, n_{xi}, n_{yi}) \end{aligned} \quad (12)$$

где $\varphi_{1k}, \varphi_{2k}$ – базисные функции, аппроксимирующие ψ и $\frac{\partial \psi}{\partial n}$, соответственно, $\alpha_1^k, \alpha_2^k, \dots, \alpha_n^k$ –

набор произволов, подлежащий определению при решении системы (12), x_i, y_i – множество точек наблюдения, используемых при решении системы (12), $h_k(t)$ – функция формы кривой, вид которой зависит от способа задания границы. Например, при задании границы в прямоугольных декартовых координатах $y = f(x)$ функция формы определяется как: $h(x) = \sqrt{f_x'^2 + 1}$, при задании границы в полярных координатах $r = \rho(\varphi)$ функция формы: $h(\varphi) = \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho_\varphi'^2(\varphi)}$, при задании границы в параметрическом виде $x = x(t), y = y(t)$ функция формы: $h(t) = \sqrt{x_t'^2(t) + y_t'^2(t)}$.

Разработанный подход был применен к задаче об эволюции вихревой структуры. Наличие в потоке малых материальных объектов снижает устойчивость вихревой структуры, что и следовало ожидать. Кроме того, была рассмотрена задача о взаимодействии вихревых структур между собой и с обтекаемым контуром. В этой задаче особый интерес представляло попадание материальных микрообъектов на поверхность обтекаемого тела (напыление). Проведенные расчеты иллюстрируют работоспособность предложенного подхода.

РЕЗЮМЕ

На основі комбінованого методу граничних елементів і дискретних вихорів запропоновано метод розрахунку взаємодії частинок (краплин) у потоках.

SUMMARY

A method of calculation of particles (drops) in flows is proposed on the base of combined boundary element and discrete vortex methods.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Белоцерковский С.М., Котарский В.Н., Илут М.И., Федоров П.М. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел. - М.: Наука, 1988. - 309 с.
2. Wu J.C. Boundary Element Method and Inhomogeneous Elliptic Differential Equations.// Boundary Element - 1. - Springer, Berlin, 1985. - P. 9/95 - 9/104.
3. Wu J.C. Boundary Element Method and Inhomogeneous Parabolic Equations.// BETECH'85. - Springer, Berlin, 1985. - P.19-30.
4. Беляев Н.М., Евдокимов Д.В. Моделирование плоских вихревых течений идеальной жидкости методом граничных элементов.// Расчет течений жидкостей и газов. - Днепропетровск: ДГУ, 1989. - С. 4-11.
5. Беляев Н.М., Евдокимов Д.В. Применение метода граничных элементов для расчета плоских стационарных температурных полей.// Численно-аналитическое исследование процессов тепломассообмена. - Днепропетровск: ДГУ, 1990. - С. 4 - 11.
6. Беляев Н.М., Евдокимов Д.В. Применение метода граничных элементов в задачах теплопроводности.// Численно-аналитическое исследование процессов тепломассообмена. - Днепропетровск: ДГУ, 1990. - С. 12-20.
7. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985. - 256 с.
8. Yevdokymov D.V. Boundary element and discrete vortices method for ideal fluid flow calculations. in D. Durban and A.R.J. Pearson (Eds.) Non-linear singularities in deformation and flow. Proceeding of IUTAM Symposium held in Haifa, Israel, 17-21 March, 1997. Kluwer Academic Publisher. - P. 217-230.
9. Белоцерковский С.М., Гиневский А.С. Моделирование турбулентных струй и следов на основе метода дискретных вихрей. - М.: Издательская фирма «Физико-математическая литература», 1995. - 368 с.
10. Шрайбер А.А., Гавин Л.Б., Наумов В.А., Яценко В.П. Турбулентное течение газозвеси. - Киев: Наукова думка, 1987. - 240 с.
11. Leonard A. Vortex Method for Flow Simulation.// J. Comp. Phys., 73, 1987. - P. 183-202.
12. Chorin A. Numerical Study of Slightly Viscous Flow.// J. Fluid Mech., 57, 1973. - P. 785-796.
13. Chorin A., Bernard P.S. Discretization of Vortex Sheet with an Example of Roll-up.// J. Comp. Phys., 13, 1973. - P. 423-429.
14. Chorin, A.J. Vorticity and Turbulence, - Springer-Verlag, Berlin, New York, 1994.
15. Hold O.H. Convergence of Vortex Methods for Euler's Equations, II.//SIAM J. Numer. Anal., 16, 1979. - P. 726-755.
16. Евдокимов Д.В. Об одном варианте регулярного метода граничных элементов. // Вісник Дніпропетровського університету. Механіка. Випуск 2. Том 1, 1999. - С. 150-156.

Надійшла до редакції 11.06.2002 р.

ИССЛЕДОВАНИЕ ИМПУЛЬСНОГО ГЕНЕРАТОРА СТРУЙ ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ КАВИТАЦИИ

О. А. Марченко, А. Н. Семко

Гидроимпульсные установки разных конструкций для получения импульсных струй жидкости описаны в [1]. Генератор импульсных струй жидкости с поршневым приводом теоретически и экспериментально исследовался в работе [2]. Теоретическое решение получено при помощи преобразования Лапласа для волнового уравнения линейной акустики с существенными допущениями, экспериментальные исследования сводились к фотографированию струи высокоскоростной камерой. В данной работе в акустической и газодинамической постановках, учитывающих кавитацию жидкости и истечение струи из отверстия, исследуется генератор струй с поршневым приводом.

Исследуемая установка состоит из цилиндра диаметром D и длиной L , который вместе с поршнем, расположенным с одного торца, образует камеру, заполненную водой. С другого торца камеры имеется отверстие малого диаметра d , из которого истекает импульсная струя жидкости. В начальный момент поршень ударом приводится в движение, жидкость сжимается и начинает истекать импульсной струей. Для построения математической модели процесса жидкость считаем идеальной и сжимаемой, радиальным течением из-за малости отверстия пренебрегаем, движение жидкости считаем одномерным, трением поршня не учитываем. В начальный момент жидкость покоится, ее давление равно нулю, начало координат совмещено с поршнем.

В принятой постановке при давлениях до 300 МПа [2] движение жидкости в генераторе можно описать волновым уравнением линейной акустики для потенциала скорости φ со следующими начальными и граничными условиями

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=x_p} = v_p, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0, \quad (1)$$

где c_0 – скорость звука в воде; x_p и v_p – координата и скорость поршня. Потенциал скорости связан со скоростью и давлением соотношениями $v = \partial \varphi / \partial x$, $p = -\rho_0 \partial \varphi / \partial t$, где ρ_0 – плотность воды. Движение поршня описывается уравнениями с начальными условиями

$$m \frac{dv_p}{dt} = -F_c p_p, \quad \frac{dx_p}{dt} = v_p, \quad v_p(0) = v_{p0}, \quad x_p(0) = 0, \quad (2)$$

где F_c и m – площадь и приведенная масса поршня, v_{p0} – начальная скорость поршня.

Поставленная задача решалась численно. Аппроксимация производных в уравнении (1) проводилась центральными разностями на пятиточечном шаблоне по формулам

$$\varphi_i^{j+1} = 2\varphi_i^j - \varphi_i^{j-1} + (\varphi_{i+1}^j - 2\varphi_i^j + \varphi_{i-1}^j) \frac{c_0^2 \tau^2}{h^2}, \quad (3)$$

где τ и h – шаги по времени и координате; i и j – номера узла сетки по координате и по времени. Крайние узлы рассчитывались с учетом граничных условий. Параметры на поршне определялись по формулам

$$p_p^{j-1/2} = -\rho_0 \frac{\varphi_0^j - \varphi_0^{j-1}}{\tau}, \quad v_p^{j+1} = v_p^j - \frac{F_c}{m} \tau p_p^{j-1/2}, \quad \varphi_0^{j+1} = \varphi_0^{j+1} - v_p^{j+1} h, \quad x_p^{j+1} = x_p^j + v_p^{j+1/2} \tau, \quad (4)$$

где полуцелый индекс $j \pm 1/2$ соответствует моменту времени $t_j \pm \tau/2$. Для упрощения алгоритма координата поршня считалась постоянной, что отражает малое перемещение поршня (около 0,2 мм до его остановки согласно данным работы [1]).

Граничный узел N рассчитывался по общим формулам (3) после введения фиктивного узла $(N+1)$, значение потенциала в котором определялось из условия непротекания $\varphi_{N+1} = \varphi_{N-1}$. Истечение струи в этих расчетах, как и в [1], не учитывалось.

Для уточнения расчетов на границах производился пересчет по средним значениям величин. Разностная схема (3) устойчива при выполнении условия Куранта $\tau \leq h/c_0$.

Импульсный генератор струй нами исследовался и в более точной, газодинамической постановке. Одномерное движение идеальной сжимаемой жидкости описывалось системой уравнений нестационарной газовой динамики с начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial (p + \rho v^2)}{\partial x} = 0, \quad p = B \left[\left(\rho / \rho_0 \right)^n - 1 \right]; \\ v(0, x) &= 0, \quad p(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq L; \\ v(t, x_p) &= v_p, \quad v(t, L) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $n = 7,15$, $B = 304,5$ МПа и $\rho_0 = 10^3$ кг/м³ – постоянные в уравнении состояния воды в форме Тэта. Движение поршня описывалось уравнением (2). Скорость истечения струи определялась по уравнению Бернулли $v_s = \sqrt{2p(t, L)/\rho}$.

Система (5) интегрировалась численно методом Годунова [3, 4]. Расчет проводился на подвижной регулярной сетке из 512 ячеек. При расчетах контролировался баланс энергии, который выполнялся с точностью 0,3%.

Известно, что жидкость практически не выдерживает растягивающих напряжений, и в ней возникает кавитация. Например, в обычной водопроводной воде кавитация возникает, если давление становится ниже давления насыщающих паров [5], которое при обычных температурах около 0,001 МПа. Т.к. характерные давления для данной задачи составляют 10 МПа, то давление насыщающих паров не учитывалось, и считалось, что кавитация наступает, если расчетное давление становится отрицательным ($p \leq 0$). Из расчета методом потенциала следует, что к моменту времени $t \approx 250$ мкс (после третьего отражения волны от торца) в окрестности торца начинается кавитация жидкости. С появлением кавитации численный расчет методом потенциала прекращался, т.к. он не учитывал кавитацию. При расчете течений с кавитацией методом Годунова добавляются новые типы «распадов разрывов», что существенно осложняет алгоритм расчета [4]. Однородная разностная схема, основанная на введении искусственной вязкости, позволяет относительно просто учесть кавитацию жидкости, что значительно упрощает алгоритм расчета [6].

Для единообразного описания течения введем в уравнения движения искусственную вязкость q , как добавку к гидростатическому давлению p и запишем уравнения движения в лагранжевом виде с начальными и граничными условиями [7]

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= -\rho \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (p+q)}{\partial x}, \quad \frac{de}{dt} = -\frac{(p+q)}{\rho} \frac{\partial v}{\partial x}; \\ v(0, x) &= 0, \quad \rho(0, x) = \rho_0, \quad e(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq L; \\ v(t, x_p) &= v_p, \quad v(t, L) = v_L, \end{aligned} \quad (6)$$

где e – удельная внутренняя энергия, v_L – скорость жидкости, осредненная по торцевому сечению, учитывающая истечение струи.

Вязкое давление q представим суммой линейной и квадратичной вязкости [6]

$$q_1 = \begin{cases} \lambda_1 c \rho \Delta x \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|, & \frac{\partial v}{\partial x} < 0; \\ 0, & \frac{\partial v}{\partial x} \geq 0, \end{cases} \quad q_2 = \begin{cases} \lambda_2 \rho \Delta x^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2, & \frac{\partial v}{\partial x} < 0; \\ 0, & \frac{\partial v}{\partial x} \geq 0, \end{cases} \quad (8)$$

где λ_1 и λ_2 – коэффициенты линейной и квадратичной вязкости, c – местная скорость звука, Δx – шаг разностной сетки. Квадратичная вязкость q_2 включается на ударных волнах, а линейная вязкость q_1 сглаживает пульсации.

Уравнение состояния воды взято в форме, учитывающей кавитацию жидкости

$$p = \begin{cases} nB \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) + \rho(n-1)e, & \text{если } p > p_{кр}, \\ p_{кр}, & \text{если } p \leq p_{кр}, \end{cases} \quad (9)$$

где $p_{кр}$ – критическое давление, ниже которого возникает кавитация (в расчетах $p_{кр} = 0$).

Аппроксимация уравнений (6) производится на лагранжевой сетке, узлы которой перемещаются со скоростью движения жидкости. Скорость определяется в узлах основной сетки, с координатами x_i , а остальные параметры рассчитываются в узлах вспомогательной сетки, с координатами $x_{i+1/2} = (x_i + x_{i+1})/2$. Разностные формулы имеют вид

$$v_i^{j+1} = v_i^j - \frac{2\Delta t((p+q)_{i+1/2}^j + (p+q)_{i-1/2}^j)}{(\rho\Delta x)_{i-1/2}^j + (\rho\Delta x)_{i+1/2}^j}, \quad \rho_{i+1/2}^{j+1} = \rho_{i+1/2}^j \frac{\Delta x_{i+1/2}^j}{\Delta x_{i+1/2}^{j+1}}, \quad (10)$$

$$e_{i+1/2}^{j+1} = e_{i+1/2}^j - \Delta t^j \left(\frac{p+q}{\rho} \right)_{i+1/2}^j \left(\frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta x_{i+1/2}} \right)^{j+1/2}, \quad x_i^{j+1} = x_i^j + v_i^{j+1/2} \Delta t.$$

Скорость звука определяется по формуле

$$c_{i+1/2} = \sqrt{\frac{n(p_{i+1/2} + B)}{\rho_{i+1/2}}}.$$

В области кавитации скорость звука считается постоянной, равной 30 м/с [8].

Граничные узлы рассчитываются с учетом граничных условий. Скорость поршня определяется по формуле

$$v_p^{j+1} = v_p^j - \frac{F_c}{m} p_p^j \Delta t. \quad (11)$$

Остальные параметры находятся по общим формулам (9).

При численном решении методом искусственной вязкости истечение струи учитывалось на основе баланса массы. По уравнению Бернулли определялась скорость истечения струи $v_s = \sqrt{2p_s/\rho}$. Приравнивая расходы жидкости через отверстие и торцевое сечение $v_s F_s = v_N F_c$, где F_s – площадь отверстия, находим скорость и координату граничного узла N через шаг по времени

$$v_N^{j+1} = v_s^{j+1} \frac{F_s}{F_c}, \quad x_N^{j+1} = L + v_N^{j+1/2} \Delta t. \quad (12)$$

Остальные параметры в граничном узле рассчитывались по общим формулам (9). После расчета параметров координата граничного узла корректировалась: полагалась равной координате торца $x_N^{j+1} = L$.

Шаг по времени разностной схемы ограничен условием устойчивости [6]

$$\Delta t = k \min[\Delta t_1, \Delta t_2], \quad \Delta t_1 = \min \left(\frac{\Delta x_{i+1/2}}{\lambda_1 a_{i+1/2} + \lambda_2 |v_{i+1/2}|} \right), \quad \Delta t_2 = \min \left(\frac{\Delta x_{i+1/2}}{a_{i+1/2} + |v_{i+1/2}|} \right).$$

Здесь $k < 1$ – коэффициент запаса, $\Delta x_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i$. Описанная схема опробована при расчете распада произвольного разрыва, распространения ударной волны и разлете сжатого столба жидкости. Экспериментально установлены оптимальные значения коэффициентов вязкости $\lambda_1 = 0,6$ и $\lambda_2 = 2$ и коэффициента запаса $k = 0,9$.

При расчетах методом Годунова истечение струи учитывалось следующим образом. По уравнению Бернулли определялась скорость истечения струи из отверстия. Скорость на торце определялась из уравнения баланса массы по формуле (12), а скорость звука рассчитывалась по условию на характеристике I семейства.

Ниже приведены некоторые результаты расчетов. На рис.1 представлены графики зависимости давления на поршне от времени. Данные установки взяты из работы [1]: $D = 25$ мм, $d = 2,5$ мм, $L = 75$ мм, $v_{p0} = 3,37$ м/с, $m = 0,088$ кг. Истечение струи при этих расчетах не учитывалось. Кривая 1 – аналитическое решение [1], кривая 2 – численный расчет методом с искусственной вязкостью, 3 (кружочки) – расчет методом потенциала, 4 (крестики) – расчет методом Годунова. Хорошее совпадение результатов расчетов, выполненных разными численными методами, подтверждает их достоверность.

Как видно, процессы в установке носят ярко выраженный волновой характер. Давление на поршне изменяется скачком через характерное время $t_0 = L/2c_0 \approx 0,102$ мс. В принятой постановке скачок

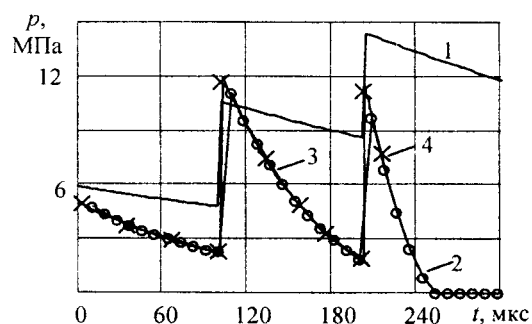


Рис. 1

давления Δp практически не зависит от количества отражений и равен удвоенному значению давления гидроудара $\Delta p = 2\rho_0 c_0 v_{p0} \approx 10$ МПа. При численном решении к моменту времени $t \approx 250$ мкс (после второго отражения волны от поршня) возле поршня и торца начинается кавитация жидкости – давление здесь падает до нуля (кривая 2). Понижение давления и возникновение кавитации связано с торможением поршня и испусканием им волн разрежения. Аналитическое решение (кривая 1) дает завышенное значение давления и не приводит к кавитации. Численный расчет выполнен по единому алгоритму, и все отражения учитываются автоматически. С появлением кавитации численный расчет проводился только методом с искусственной вязкостью, который учитывал кавитацию жидкости по описанному выше алгоритму.

На рис. 2 приведены графики зависимости давления на поршне и на торце камеры, скорости поршня и струи от времени, полученные при расчете методом с искусственной вязкостью (кривые 1, 2, 3 и 4 соответственно). Давление на поршне и на торце изменяется скачкообразно. Поршень быстро тормозится, испуская волны разрежения. К приходу отраженной от торца волны давление на поршне уменьшается почти в два раза, а затем спадает более интенсивно, чем до прихода отраженной волны (кривая 1). Из графиков видно, что к моменту времени $t \approx 250$ мкс на торце и на поршне возникает кавитация. Таким образом, на струе можно зарегистрировать экспериментально не более 3 пульсаций. Поршень к этому моменту движется в обратном направлении, его скорость немного меньше начальной. Изломы на графике скорости поршня соответствуют приходу очередной волны сжатия на поршень.

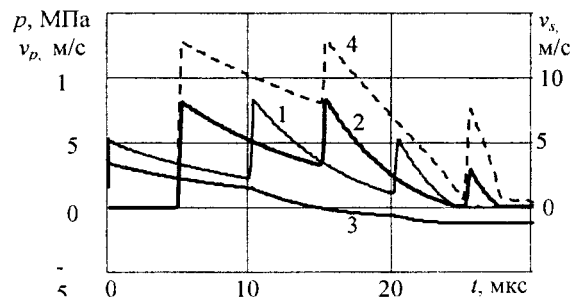


Рис. 2

Можно отметить, что давление на торце и на поршне до прихода очередной волны сжатия, уменьшается по экспоненциальному закону $p = p_0 e^{-\alpha t}$, который широко используется при анализе динамических последовательностей динамического воздействия на преграды в жидкости и газах. Например, для поршня $\alpha = 8,32 \cdot 10^6$ с⁻¹, а время отсчитывается в миллисекундах с момента отражения волны.

РЕЗЮМЕ

Чисельно досліджена течія рідини в імпульсному генераторі з урахуванням кавітації і витоку струменя. Для розрахунку течії адаптовано метод зі штучною в'язкістю. Показано, що процеси в генераторі носять хвильовий характер, що призводить до пульсацій швидкості витікання струменя, і супроводжується кавітацією рідини.

SUMMARY

Flow of a liquid in the impulse generator is investigated numerically with taking into account of a cavitation and outlet of a jet. For calculation of liquid flow the method with artificial viscosity is adapted. It is shown that the processes in the generator carry wave character, which results in pulsations of outlet speed of the jet, and are accompanied by a cavitation of a liquid.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Поздеев В.А. Нестационарная периодическая структура струи, вызванная импульсным движением поршня в струйном генераторе // Известия РАН. Механика жидкости и газа.- 1996. - №4. - С.172-178.
1. Атанов Г. А. Гидроимпульсные установки для разрушения горных пород. К.: Вища школа, 1987. - 155 с.
2. Галиев Ш. У. Динамика гидроупругопластических систем.- Киев: Наук. Думка.- 1981.-276 с.
3. Семко А.Н. Механика пороховой гидропресс пушки // Теоретическая и прикладная механика.- 1996.- Вып. 26. - С. 124 – 128.
4. Атанов Г. А. Обобщение метода С. К. Годунова на расчет течений с отколом // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1978.- №6.- С. 1607 – 1612.
5. Биркгоф Г. Струи, следы и каверны / Г. Биркгоф, Э. Сарантонелло.- М.: Мир, 1964. - 466 с.
6. Уилкинс М. Л.. Расчет упруго пластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. - М: Мир, 1967. - С. 212 - 264.
7. Рождественский Б.Л. Системы квазилинейных уравнений / Б.Л.Рождественский, Н.Н. Яненко.- М.: Наука, 1978. - 687 с.
8. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987.- 840с.

Надійшла до редакції 22.05.2002 р.

УДК 532.517.4

УВЕЛИЧЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ И ДАЛЬНОБОЙНОСТИ ГАЗОВЫХ СТРУЙ

Н.З. Гармаш

Донецкий научно-исследовательский горнорудный институт

В угольных шахтах, опасных по газу и пыли, при проветривании тупиковых забоев горизонтальных подготовительных выработок (штреков) зачастую создается аварийная ситуация из-за недостаточного проветривания участка, где работают шахтеры. При увеличении напора в трубчатом воздуховоде с целью увеличения дальности исходящей струи воздуха возникает турбулентность, и струя быстро распадается. При этом энергозатраты на проветривание возрастают.

С целью увеличения кинетической энергии и дальности истекающей воздушной струи было предложено оригинальное устройство [1].

На рис. 1 показана схема проветривания тупиковой выработки, а на рис. 2 изображен воздуховод синусоидального продольного профиля.

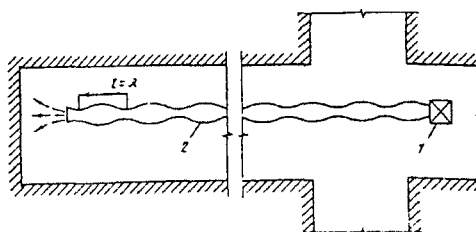


Рис. 1. Схема проветривания тупиковой выработки.



Рис. 2. Воздуховод синусоидального продольного профиля.

Устройство работает следующим образом.

При нагнетании вентилятором 1 свежего воздуха в воздуховод 2 с увеличением скорости движения воздушного потока в нем интенсивно развивается турбулентность со спектром акустических частот колебаний, т.е. происходит рассеяние энергии воздушного потока по спектру сопутствующих частот колебаний, что приводит к увеличению внутреннего трения частиц в воздушном потоке, и как следствие, к значительным потерям кинетической энергии поступательного движения потока, к увеличению энергетических потерь в вентиляционной системе.

Кроме того, в результате взаимодействия пульсирующего воздушного потока со стенками воздуховода из упруго-эластичного материала в воздуховоде также возбуждается спектр продольных и поперечных механических колебаний стенок, что сопровождается дополнительной потерей кинетической энергии воздушного потока.

Процесс потери энергии воздушным потоком еще более усугубляется в случае, когда собственные колебания стенок воздуховода происходят в противофазе с колебаниями воздушного потока, так как энергия потока расходуется на работу по преодолению инерции движения стенок.

Упорядочение пространственных и временных характеристик волновых процессов, протекающих в воздушном потоке и стенках воздуховода, позволяет подавить турбулентный спектр сопутствующих частот, т.е. всю энергию спектра сопутствующих частот воздушного потока сконцентрировать в одной "рабочей" частоте.

Это достигается выполнением воздуховода в виде регулярной пространственной периодичности продольного синусоидального профиля поверхности внутренних стенок воздуховода 2 и согласования временной периодичности потока с пространственной периодичностью внутренней поверхности стенок, изменяющихся вдоль воздуховода по синусоидальному закону согласно формуле:

$$v = v\lambda, \quad (1)$$

где v – скорость движения воздушного потока в воздуховоде; v – выделенная "рабочая" частота колебаний (пульсаций) воздушного потока; λ – длина волны синусоидального продольного профиля стенок.

Отсюда, при известных u и v находим длину волны

$$\lambda = \frac{u}{v}. \quad (2)$$

Рассчитанная длина волны реализуется в устройстве воздуховода, которому придают форму продольного синусоидального профиля внутренней поверхности стенок (внутреннего канала).

Расстояние между соседними впадинами синусоиды стенок воздуховода равно длине волны колебаний воздушного потока на выделенной "рабочей" частоте. Устройство воздуховода в виде вентиляционной трубы 2 из упруго-эластичного материала конструктивно осуществляется, например, путем обжатия вентиляционной трубы регуляторной системой жестких колец седлообразного профиля 3. Шаг между кольцами задается рассчитанной длиной волны колебаний воздушного потока на выделенной "рабочей" частоте.

Пример реализации способа.

Выделяя из спектра акустических частот колебаний вентиляционной струи, например, частоту $\nu=4$ Гц (240 имп/мин) наиболее допустимую из соображений санитарно-гигиенических условий труда горнорабочих в забое, а также приняв расчетную скорость u воздушного потока равную 15 м/сек, определяют пространственную синусоидальную периодичность продольного профиля стенок воздуховода, соответствующую длине волны по формуле:

$$\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{15}{4} = 3,75 \text{ м.}$$

Рассчитанная длина волны, равная 3,75 м на выделенной частоте колебаний воздушного потока, равной 4 Гц (240 имп/мин), реализуется в устройстве воздуховода путем придания ему формы продольного синусоидального внутреннего профиля с шагом соседних впадин синусоиды, равным 3,75 м. С учетом упруго-эластичных свойств материала, применяемого в качестве воздуховода в шахтных условиях, оптимальное (из опыта работы) соотношение минимального и максимального диаметров синусоидального профиля воздуховода должно составлять около 0,8.

Подавление спектра сопутствующих частот в турбулентном потоке, способствует перераспределению энергии пульсирующего потока с ее концентрацией на одной "рабочей" частоте, т.е. происходит перекачка энергии с сопутствующих частот в "рабочую" за счет колебательной самоорганизации (самосинхронизации) частиц потока к одной "рабочей" частоте, что в конечном итоге приводит к увеличению кинетической энергии движения воздушного потока. При установившемся режиме пульсирующего колебательного движения воздушного потока через воздуховод в потоке наступает когерентное движение системы частиц, т.е. все частицы воздуха колеблются согласованно с постоянной разностью фаз. Согласование пространственных и временных волновых характеристик стенок воздуховода и воздушного потока приводит к уменьшению пристеночного (контактного) трения, так как при поступательном движении пульсирующей струи воздушная подвижная нагрузка со стороны потока на стенки изменяется по синусоидальному закону, внутреннее сечение канала воздуховода также синхронно изменяется по такому же закону, что приводит к уменьшению энергетических потерь на трение между воздушным потоком и стенками. Вследствие этого увеличивается кинетическая энергия и дальнобойность свободной воздушной струи.

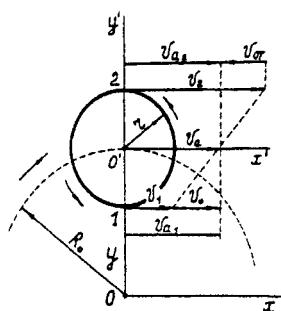


Рис. 3. Механизм закручивания

Увеличение кинетической энергии и дальнобойности затопленной воздушной струи, истекающей из сопла или насадки, возможно путем закручивания ее вокруг продольной оси симметрии.

На рис.3 показан механизм закручивания струи.

Рассмотрим плоскую задачу. Свяжем неподвижную систему координат O_{xy} с плоскостью поперечного сечения струи. Подвижную систему отсчета $O'x'y'$ поместим в этой же плоскости, но таким образом, чтобы начало отсчета совпадало с центром тяжести (он же и геометрический центр) поперечного сечения струи. Приведем струю как целое в орбитальное равномерное движение по окружности радиуса R_0 вокруг неподвижного центра O . Скорость переносного движения центра O' должна быть равна скорости распространения поперечных упругих волн. Абсолютная скорость движения остальных точек рассматриваемого сечения струи определяется по известному правилу сложения скоростей

$$\vec{v}_a = \vec{v}_n + \vec{v}_{om}, \quad (3)$$

где $\vec{v}_n$ - скорость поступательного переносного движения частицы в неподвижной системе отсчета, $\vec{v}_{om}$ - скорость относительного движения частицы в подвижной системе отсчета.

В соответствии с этим частицы, находящиеся на минимальном и максимальном расстояниях от неподвижного центра O , должны иметь следующие абсолютные скорости:

$$\vec{v}_{a1} = \vec{v}_1 + \vec{v}_{om}; \quad \vec{v}_{a2} = \vec{v}_2 + \vec{v}_{om}. \quad (4)$$

Для этого необходимо “включить” осевое вращение струи (спин) в обратном направлении. Если орбитальное движение струи в целом направлено по часовой стрелке, то осевое вращение должно быть направлено против часовой стрелки и наоборот. Условие стационарности струи определяется равенством скоростей

$$\vec{v}_{a1} = \vec{v}_{a2} = \vec{v}_a = \vec{v}_n = \vec{v}_0, \quad (5)$$

где $\vec{v}_0$ - скорость распространения в среде поперечных волн.

Таким образом, согласно уравнениям (3), (4) и (5) все частицы струи двигаются с равными абсолютными скоростями. Между частицами возникает дальняя связь, струя приобретает жесткость, “отвердевает” и вращается как единое целое. Этим обеспечивается динамически устойчивое стационарное состояние струи с постоянной частотой вращения частиц.

Условия стационарности состояния удовлетворяют и требованиям сохранения импульса, момента импульса и энергии струи. Для закрученной монохроматической струи представляет интерес момент импульса (кинетический момент).

При определенном постоянном радиусе поперечного сечения струи “собственное” значение момента импульса отвердевшей цилиндрической элементарной ячейки

$$S_0 = I_0 \omega_0,$$

где S_0 – собственный момент импульса ячейки при осевом вращении струи, I_0 – момент инерции ячейки, ω_0 – скорость осевого вращения ячейки (об/сек), равная собственной циклической частоте поперечных колебаний ячейки.

Поскольку для ячейки цилиндрической формы $I_0 = \frac{1}{2} m_0 r_0^2$, а $\omega_0 = \frac{v_0}{r_0}$, то

$$S_0 = \frac{1}{2} m_0 r_0^2 \frac{v_0}{r_0} = \frac{1}{2} m_0 v_0 r_0. \quad (6)$$

Здесь m_0 , v_0 и r_0 – элементарные параметры ячейки: масса, линейная скорость и радиус.

Для динамически устойчивого стационарного состояния струи произведение $m_0 v_0 r_0$ в выражении (6) является величиной постоянной. Обозначив $m_0 v_0 r_0 = s_0$, получим окончательно

$$S_0 = \frac{1}{2} s_0. \quad (7)$$

Таким образом, собственный момент импульса при осевом вращении отвердевшей элементарной круглоцилиндрической ячейки равен половине константы s_0 , отражающей ячеистую структуру струи.

Орбитальный момент импульса относительно неподвижного центра O

$$L_0 = m_0 v_0 R_0, \quad (8)$$

где R_0 – радиус орбитального движения.

Динамически устойчивое стационарное состояние закрученной струи определяется кратными спин-орбитальными соотношениями. Для сохранения во времени геометрической, кинематической и динамической конфигураций колебательной системы в одном орбитальном движении должно укладываться целое число n элементарных собственных моментов импульса, то есть стационарное состояние закрученной струи должно обеспечиваться условием

$$L_0 = \frac{1}{2} n s_0 = const. \quad (9)$$

На открытых горных работах при добыче и дроблении крепких минеральных сред (флюсовых известняков, гранитов и т.д.) негабаритные блоки, не входящие в дробилки, обычно добрабливают при помощи специальных устройств с падающим грузом – бутобоев. Это приводит к понижению производительности труда с повышением энергозатрат на дробление.

С целью повышения эффективности разрушения крепких минеральных сред предложено устройство для термического разрушения негабаритных блоков породы при помощи сверхзвуковой струи нагретого газа [2].

Устройство (рис.4) содержит газогенератор, имеющий корпус 1, в котором размещена камера 2 сгорания. На выходе из камеры сгорания установлено сопло 7. На корпусе 1 газогенератора предусмотрены выступы 8 с наружной резьбой, посредством которой удерживается на корпусе трубчатый резона-

тор 9, установленный соосно соплу 7. Резонатор 9 состоит из трубы 10, выполненной из упругого токопроводящего материала, и торцевой крышки 11 с отверстием 12. При вращении резонатора 9 он может перемещаться по резьбе выступов 8 вдоль корпуса 1. Снаружи трубы 10 резонатора 9 расположена катушка 13 индуктивности, которая совместно с регулируемым конденсатором 14 составляет электромагнитный колебательный контур, питаемый от внешнего источника 15 постоянного тока.

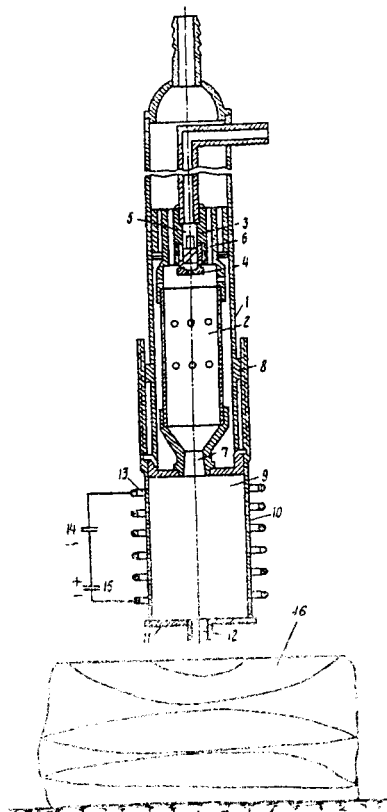


Рис.4. Устройство для термического разрушения негабаритных блоков скальных пород.

Образующееся в камере 2 сгорания газообразные продукты истекают через сопло 7 в виде сверхзвуковой газовой струи с широким спектром колебаний различной частоты. Путем перемещения резонатора 9 вдоль корпуса 1 выделяют и усиливают в резонаторе 9 частоту, равную или близкую к собственной частоте негабаритного блока 16. Электромагнитным колебательным контуром создают вокруг резонатора 9 внешнее электромагнитное поле.

Изменяя величину индуктивности и емкости контура отдельно каждого или совместно, устанавливают собственную частоту колебаний колебательного контура, равную собственной частоте резонатора 9. Резонатор 9, выполненный из токопроводящего материала, экранирует электромагнитные волны, возбуждаемые колебательным контуром. Последние непосредственно не воздействуют на поток газов в резонаторе, но вызывают дополнительные резонансные колебания между стенками резонатора 9 и электромагнитными волнами, генерируемыми колебательным контуром, т.е. увеличивая амплитуду колебаний трубы 10 резонатора 9, увеличивают амплитуду колебаний газового потока внутри резонатора 9. Устройство повышает кинетическую энергию истекающей газовой струи, коэффициент полезного действия газогенератора до 60-65% и производительность разрушения в 2-3 раза.

Дальнейшее увеличение кинетической энергии и дальности газовой струи возможно путем прямого воздействия высокочастотного электромагнитного поля на ионизированный газ струи. Для этого трубчатый резонатор выключают из неэлектропроводящего и неэкранирующего электромагнитную энергию материала. Возбуждаемая электрическим колебательным контуром электромагнитная энергия воздействует непосредственно на колебания ионизированного газового потока в резонаторе. При равенстве частоты колебаний газового потока

в резонаторе и частоты колебаний электрического колебательного контура в этой системе наступает явление резонанса. Это приводит к увеличению амплитуды колебаний газовой струи в резонаторе, а следовательно, и к увеличению кинетической энергии газового потока, подводимого к разрушаемой среде.

РЕЗЮМЕ

Розглянуто збільшення кінетичної енергії і далькості повітряних струменів при провітрюванні тупикових вибоїв вугільних шахт, небезпечних по газу і пилу.

Запропоновано спосіб і пристрій для термічного руйнування мінеральних середовищ надзвуковим струменем нагрітого газу.

SUMMARY

The increase of kinetic energy and range of air-blasts under the airing of the blind coalfaces in the mines dangerous on gas and dust is considered.

The way and device for thermal destruction of mineral environments by a supersonic jet of the heated up gas is offered.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Устройство для проветривания тупиковых забоев / А.И. Краматоренко, Н.З. Гармаш // Авторское свидетельство СССР №1323735, кл. Е 21 F1/00, 1987.
2. Способ термического разрушения минеральных сред сверхзвуковой струей нагретого газа и устройство для его осуществления / Н.З. Гармаш, А.П. Манакин, О.С. Лавриненко // Авторское свидетельство СССР №1036899, кл. Е 21 В7/14, 1983.

Надійшла до редакції 27.03.2002 р.

УДК 532. 526

ВЛИЯНИЕ ЛОКАЛЬНОГО ПРЕПЯТСТВИЯ НА СТРУКТУРУ
ПОЛЯ ПУЛЬСАЦИЙ ДАВЛЕНИЯ*А.В. Воскобойник, В.А. Воскобойник, А.П. Макаренко
Институт гидромеханики НАН Украины, г. Киев***Введение**

Турбулентный пограничный слой развитый на обтекаемой поверхности во многом определяется взаимодействием когерентных вихревых систем, как в пространстве, так и во времени. Эти системы, развиваясь в пограничном слое, создают пульсационные поля скоростей, температур, концентраций, давлений и других физических параметров, характеризующих это турбулентное течение. Хотя эти пульсационные поля и представляют собой случайные процессы в четырехмерном пространстве $(\vec{x}, t)$, но все же они подчиняются определенным закономерностям, которые могут быть определены при использовании соответствующего статистического анализа для таких случайных процессов [1, 2]. Известно, что вихревые системы не находятся обособленно в пограничном слое, они взаимодействуют друг с другом, а также с обтекаемой поверхностью и потенциальным течением на внешней границе пограничного слоя. В настоящее время довольно широко принято мнение, что в турбулентном пограничном слое существует как минимум два класса вихревых систем – мелкомасштабные пристеночные вихри, образующие цикл выброс-смыв, где порождается почти 80 % энергии турбулентности и крупномасштабные вихревые структуры, находящиеся во внешней части пограничного слоя [3, 4].

Воздействие на эти когерентные вихревые системы или на их взаимодействие приводит к значительным изменениям кинематических и динамических характеристик пограничного слоя, изменению энергетических параметров пульсационных и осредненных полей турбулентности, снижению или увеличению тепло массопереноса, гидродинамического сопротивления, улучшению летных качеств авиа и космических аппаратов, виброакустических характеристик обтекаемых объектов. Воздействие на когерентные структуры осуществляется посредством как активных, использующих внешние источники энергии, так и пассивных методов управления [5, 6]. Особый интерес вызывают средства, основанные на изменении геометрических параметров и качества обтекаемой поверхности. Среди них можно выделить прихвощение риблетов, разнообразных пазов и углублений, регулярной и песочной шероховатостей, всевозможных разрушителей вихрей и вихрегенераторов [7, 8].

Данная экспериментальная работа направлена на изучение влияния на статистические характеристики поля пульсаций давления локального препятствия, помещенного в пристеночную область турбулентного пограничного слоя продольно обтекаемого цилиндра. В работе представлены данные об изменении поля пульсаций и структуры пограничного слоя в зависимости от геометрических размеров кольцевого препятствия, местоположения его по длине цилиндра и скорости обтекания.

Программа и методика исследований

Экспериментальные исследования проводились на полигоне ИГМ НАН Украины в гидродинамическом канале методом буксировки протяженного цилиндра с фиксированной скоростью на заданной глубине. Детальное описание экспериментальной установки и методики буксировочных испытаний представлено в работе [9]. Схематическое изображение измерительного участка цилиндра, представлено на рис. 1. Измерения пульсаций пристеночного давления производились ансамблем пьезокерамических датчиков (S), диаметром чувствительной поверхности (d_s), смонтированных заподлицо с обтекаемой поверхностью цилиндра радиусом (a). Кольцевые препятствия в виде тора диа-

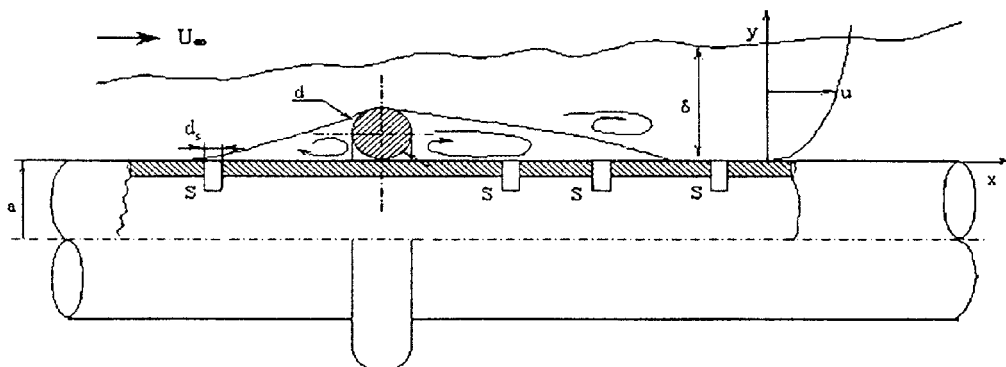


Рис. 1. Схема измерительного участка цилиндра с локальным препятствием.

метром (d) закріплялись на поверхні гладкого циліндра. В дослідженнях використовувались перешкоди діаметром $1.5 \cdot 10^{-3}$ м; $3.0 \cdot 10^{-3}$ м і $6.0 \cdot 10^{-3}$ м. В залежності від місцеположень датчиків і перешкоди реєструвались пульсації пристіночного тиску в областях ближнього і дальнього слідів перешкоди. Для визначення змін в структурі пограничного шару і в характеристиках пульсацій пристіночного тиску вимірювання чергувались, по одній методикі, на циліндричеській моделі як з перешкодами, так і без них.

Буксировочні випробування виконувались при $U_{\infty} = 3.0$ і 5.0 м/с на глибині буксировки циліндра $H = 1.2$ м. Измерительний циліндр діаметром $2a = 29.0 \cdot 10^{-3}$ м мав довжину $L = 20$ м, шероховатість і нерівність обтекаємої поверхні циліндра не перевищували $h = 200 \cdot 10^{-6}$ м. Ефективний діаметр чутливої поверхні датчиків пульсацій тиску $d_s = 1.6 \cdot 10^{-3}$ м. Расчетні значення: швидкісного напору $q = \rho U_{\infty}^2 / 2 = 4.5 \cdot 10^3$ Па і $12.5 \cdot 10^3$ Па, де ρ - густина рідини; число Рейнольдса по радіусу циліндра $Re_a = aU_{\infty} / \nu = 4.3 \cdot 10^4$ і $7.2 \cdot 10^4$ і по довжині циліндра $Re_x = xU_{\infty} / \nu = (1.54 \div 4.7) \cdot 10^7$, де ν - коефіцієнт кінематическої в'язкості; кривизна циліндра $\delta/a = (2.27 \div 3.43)$, де δ - товщина пограничного шару; товщина витеснення $\delta^* = \delta/6.5$; динамічна швидкість $u_{\tau}/U_{\infty} = (3.18 \div 3.77)$; коефіцієнт поверхневого тертя $C_f = \tau_{\omega}/q = (2.01 \div 2.82)$, де τ_{ω} - касательні напруження на стінці; діаметр перешкоди $d^+ = du_{\tau}/\nu = (160 \div 974)$.

Обробка і аналіз результатів досліджень вироблялись з використанням спеціалізованих і універсальних вичислювальних комплексів. Погрешності вимірювань, визначені з надійністю 95 %, для інтегральних или осереднених характеристик не перевищували $(10 \div 15) \%$, а для спектральних залежностей не більше $(1 \div 2)$ дБ в усьому досліджуємому діапазоні частот $(2 \div 12500)$ Гц.

Результати вимірювань

Інтенсивність пульсацій пристіночного тиску при осесиметричному обтеканні гладкого циліндра не змінювалась в межах точності вимірювань, по окружности і довжині циліндра, в досліджуємому діапазоні частот. Установка кільцевого перешкоди в пристіночну область турбулентного пограничного шару, утвореного при осесиметричному обтекании протяженного циліндра, приводить до зростання рівнів пульсацій тиску на стінці і його спектральних складових. Відносительне зміння середньоквадратичних значень пульсацій тиску по сравнению з естественно развитим пограничним шаром на гладком циліндрі показано на рис. 2. На этом

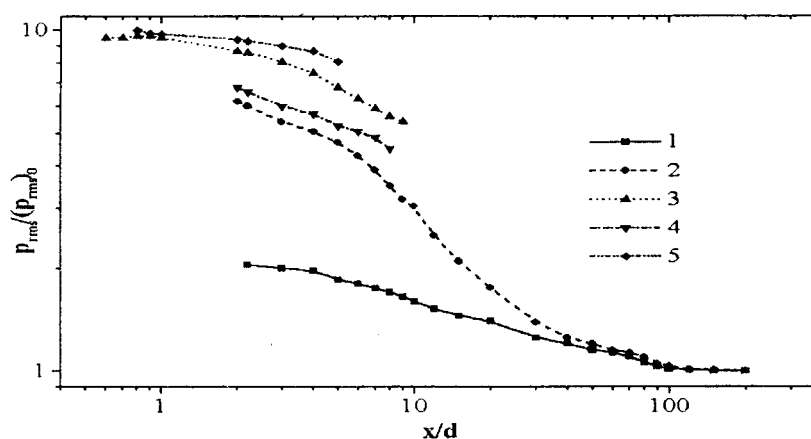


Рис. 2. Відносительні середньоквадратичні пульсації тиску.

на рисунку представлені залежності $(\overline{p'^2})^{1/2} / ((\overline{p'^2})^{1/2})_0$ від безрозмірного віддалення від кільцевого перешкоди x/d для різних діаметрів перешкод і швидкостей обтекания циліндра в місцеположеннях перешкод по довжині циліндра $L_x/L = 0.350$. Крива 1 отримана для $d^+ = 162$;

$U_{\infty} = 3.0$ м/с, кривая 2 - $d^+ = 324$; $U_{\infty} = 3.0$ м/с, кривая 3 - $d^+ = 648$; $U_{\infty} = 3.0$ м/с, кривая 4 - $d^+ = 487$; $U_{\infty} = 5.0$ м/с, кривая 5 - $d^+ = 974$; $U_{\infty} = 5.0$ м/с. При отрыве пограничного слоя с поперечно обтекаемого кольцевого препятствия, максимум интенсивности пристеночных пульсаций давления наблюдается в области ближнего следа препятствия. Затем интенсивность поля пульсаций давления с нарастающим темпом убывает с удалением от препятствия вниз по потоку и при достижении 100 диаметров препятствия турбулентный пограничный слой восстанавливается.

Спектральное представление о поле пульсаций пристеночного давления турбулентного пограничного слоя, нарушенного локальным препятствием, можно получить из рис. 3. Здесь спектраль-

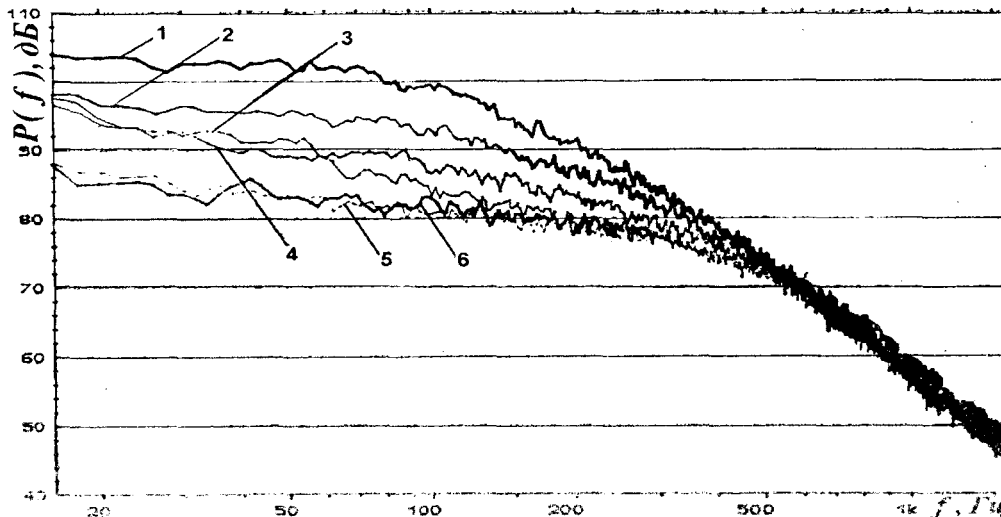


Рис. 3. Спектральная плотность мощности пульсаций давления за препятствием.

ные плотности мощности пульсаций давления, выраженные в дБ относительно $1.54 \cdot 10^{-6}$ Па²/Гц, представлены в частотном диапазоне (16÷1600) Гц для препятствия $d^+ = 324$ и местоположения $L_x/L = 0.356$, при скорости буксировки цилиндра 3.0 м/с. Кривая 1 получена для удаления датчика в кормовую часть препятствия $x/d = 2$; кривая 2 - $x/d = 5$; кривая 3 - $x/d = 17$; кривая 4 - $x/d = 49$; кривая 5 - $x/d = 107$ и кривая 6 – осевое обтекание цилиндра без препятствия. Энергия турбулентных пульсаций пристеночного давления с увеличением частоты постепенно убывает как для нарушенного препятствием, так и естественно развитого турбулентного пограничного. Темп снижения этой энергии по частоте явно разный. Особенно он высок в высокочастотной области (> 500 Гц), обусловленной воздействием мелкомасштабных вихрей, и составляет порядка 16 дБ на октаву или пропорционален ω^{-3} , для всех кривых и несколько расширен в низкочастотную область до (250÷300) Гц для наиболее близких к препятствию датчиков пульсаций давления. С приближением регистрирующего датчика к препятствию, наибольшие изменения в спектрах мощности наблюдаются в области низких частот. В ближнем следе максимальная разница в спектрах относительно ненарушенного пограничного слоя обнаружена в частотном диапазоне от 30 до 80 Гц на 20 дБ при $x/d = 2$ и, практически, в том же частотном диапазоне на 12 дБ для удаления $x/d = 5$. С ростом удаления от препятствия разница в спектральных плотностях убывает и максимум смещается в более низкочастотную область. При удалении около 100 диаметров препятствия различие в спектрах для нарушенного и естественно развитого пограничных слоев исчезает. Следовательно, при $x/d \geq 100$ турбулентный пограничный слой на продольно обтекаемом цилиндре восстанавливается во всем исследуемом частотном диапазоне.

Для определения влияния места установки препятствия по длине цилиндра на структуру турбулентного пограничного слоя, были проведены исследования по перемещению кольцевого препятствия диаметром $3.0 \cdot 10^{-3}$ м вдоль цилиндра, при скорости буксировки $U_{\infty} = 3.0$ м/с. Датчик находился на удалении от препятствия $x/d = 2$, в области его ближнего следа. Результаты этих исследований представлены на рис. 4. Кривая 1 получена для $L_x/L = 0.26$; $Re_x = 1.54 \cdot 10^7$; $\delta/a = 2.71$. Кривая 2 - $L_x/L = 0.29$; $Re_x = 1.73 \cdot 10^7$; $\delta/a = 2.82$. Кривая 3 - $L_x/L = 0.35$;

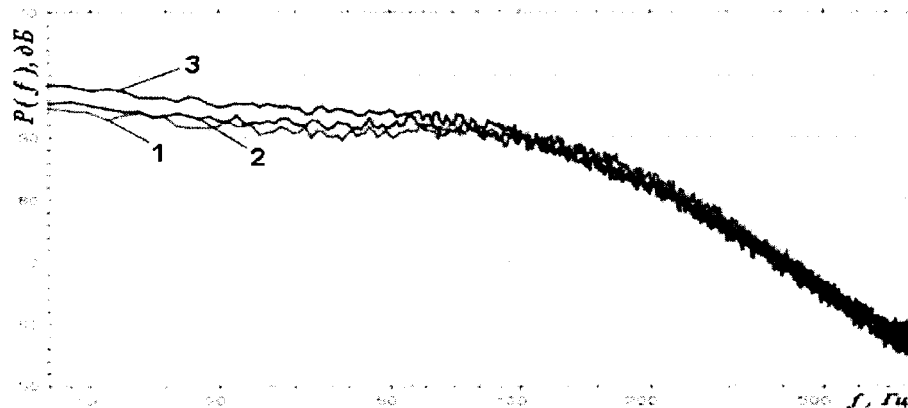


Рис. 4. Спектральная плотность мощности пульсаций давления по длине цилиндра.

$Re_x = 2.08 \cdot 10^7$; $\delta/a = 3.04$. Спектральная плотность мощности пульсаций пристеночного давления в ближнем следе препятствия, по сути, не изменяется вдоль длины цилиндра. Хотя можно отметить незначительное увеличение спектра мощности на (3÷4) дБ в низкочастотной области и почти такое же уменьшение его в частотном диапазоне от 150 до 300 Гц при перемещении препятствия в носовую часть продольно обтекаемого цилиндра. С увеличением L_x происходит трансформация энергии турбулентных пульсаций давления из низкочастотной в высокочастотную область спектра, а поэтому интенсивность пульсаций давления, представляющая собой интегральную характеристику пограничного слоя, остается инвариантной по длине цилиндра, как с локальным препятствием, так и без него, что ранее было отмечено. Такое перераспределение энергии обусловлено нарастанием δ с ростом L_x , а также уменьшением d^+ , поскольку динамическая скорость, являющаяся параметром внешнего масштабирования, обратно пропорциональна числу Рейнольдса.

Спектры мощности пульсаций пристеночного давления, регистрируемые в ближнем следе препятствия датчиками пульсаций давления, показаны на рис. 5, для $L_x/L = 0.29$. Здесь кривая 1 по-

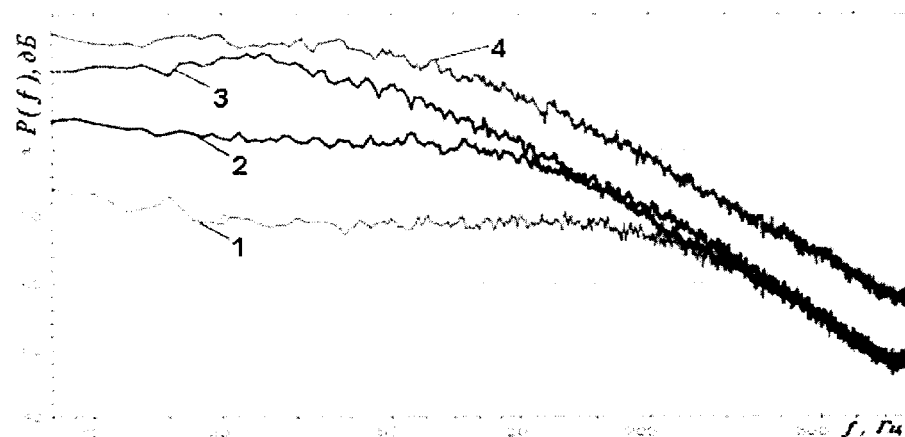


Рис. 5. Спектр мощности пульсаций давления в ближнем следе препятствия.

лучена для $d^+ = 165$; $x/d = 4$; кривая 2 - $d^+ = 330$; $x/d = 2$ и кривая 3 - $d^+ = 660$; $x/d = 1$. Эти результаты измерены при $U_\infty = 3.0$ м/с; $Re_x = 1.73 \cdot 10^7$; $Re_a = 4.3 \cdot 10^4$; $\delta/a = 2.82$. Кривая 4 получена для $d^+ = 992$; $x/d = 1$; $U_\infty = 5.0$ м/с; $Re_x = 2.88 \cdot 10^7$; $Re_a = 7.2 \cdot 10^4$; $\delta/a = 2.31$. Из графиков следует, что, во-первых, увеличение диаметра кольцевого препятствия, который не превышает толщины логарифмической области пограничного слоя на цилиндре, приводит к росту энергии турбулентных пульсаций пристеночного давления в низкочастотной области спектра; во-вторых, увеличение скорости обтекания вызывает общий подъем спектральных плотностей во всем исследуемом диапазоне частот, но в большей степени этот рост проявляется в высокочастотной области спектра; в-

третьих, введение препятствия в пристеночную область пограничного слоя вызывает изменение структуры не только пристеночной области, но и внешней, где основными источниками энергии турбулентности являются крупномасштабные низкочастотные вихревые структуры.

Можно отметить и незначительное уменьшение мощности пульсаций давления для препятствия $d^+ = 660$ в диапазоне частот $150 \leq f \leq 300$ Гц на $(2 \div 3)$ дБ по сравнению с воздействием на пограничный слой препятствий меньших диаметров. Небольшое уменьшение (или точнее сказать тенденцию к уменьшению) можно наблюдать в ближнем следе и для препятствия диаметром $3.0 \cdot 10^{-3}$ м (см. рис. 3) в частотном диапазоне $500 \leq f \leq 750$ Гц по сравнению с ненарушенным пограничным слоем. В области же низких частот имеют место значительные увеличения спектров в ближнем следе препятствий. Так, на частоте $(25 \div 30)$ Гц или $(0.3 \leq \omega^* \leq 0.4)$ - это область наиболее энергонесущих вихревых систем естественно развитых турбулентных пограничных слоев [3, 9, 10]) увеличение диаметра препятствия в 2 раза приводит к росту спектральных уровней пульсаций давления на $(10 \div 12)$ дБ или в $(3.5 \div 4)$ раза. Следовательно, пульсации пристеночного давления в этом частотном диапазоне $(\omega^* = (0.3 \div 0.4))$ возрастают пропорционально квадрату диаметра препятствия. С увеличением скорости обтекания, спектр пульсаций давления в ближнем следе за наибольшим из исследуемых препятствий возрос на $(4 \div 5)$ дБ в области низких частот. Постепенно этот рост увеличивается в область более высоких частот (на частоте около 100 Гц на $(6 \div 8)$ дБ и на частоте 600 Гц на $(10 \div 12)$ дБ), т. е. от 1.5 до 4 раз возрастают уровни пульсаций давления с ростом частоты, при увеличении скорости обтекания с 3.0 до 5.0 м/с. Следовательно, пульсации пристеночного давления турбулентного пограничного слоя в ближнем следе препятствия на расстоянии равном его диаметру пропорциональны скорости обтекания в степени от 0.8 до 2.7, в зависимости от частотного диапазона, а именно, $(p'^2)^{1/2} \sim U_\infty^{0.8}$ для частот порядка 15 Гц и $(p'^2)^{1/2} \sim U_\infty^{2.7}$ для частот порядка 600 Гц.

Заключение

На основании экспериментальных исследований по изучению влияния локального препятствия, помещенного в пристеночную область турбулентного пограничного слоя на цилиндре на структуру и статистические характеристики поля пульсаций пристеночного давления этого пограничного слоя можно сделать следующие выводы:

1) При отрыве пограничного слоя с поперечно обтекаемой поверхности кольцевого препятствия, максимум интенсивности пульсаций пристеночного давления наблюдается в области ближнего следа этого препятствия. При удалении от препятствия на расстояние, превышающее 100 его диаметров, турбулентный пограничный слой восстанавливается.

2) Увеличение диаметра препятствия приводит к росту энергии турбулентных пульсаций, главным образом, в низкочастотной области спектра. С возрастанием скорости обтекания в ближнем следе препятствия наблюдается подъем спектральных плотностей во всем исследуемом диапазоне частот, но в большей степени этот рост проявляется на высоких частотах. В области ближнего следа спектральные плотности мощности пульсаций пристеночного давления не изменяются по длине продольно обтекаемого цилиндра.

3) Уровни пульсаций давления в диапазоне частот наиболее энергонесущих вихревых систем пограничного слоя пропорциональны квадрату диаметра локального препятствия в его ближнем следе и скорости обтекания в степени от 0.8 до 2.7 в зависимости от частоты. С ростом частоты показатель степени возрастает.

4) Введение кольцевого препятствия в пристеночную область вызывает изменение структуры не только пристеночной, но и внешней области пограничного слоя, где основными источниками энергии турбулентности являются низкочастотные крупномасштабные вихревые структуры.

РЕЗЮМЕ

Наведено результати експериментальних досліджень по вивченню впливу локальної перешкоди на структуру та поле пульсацій тиску турбулентного граничного шару, який утворено при повздовжньому обтіканні циліндра. Знайдено зміни статистичних характеристик пульсацій пристінного тиску в залежності від діаметру кільцевої перешкоди, місцезнаходження її по довжині циліндру і швидкості обтікання. Розміщення перешкоди в пристінній області граничного шару циліндра призводить до зростання інтенсивностей пульсацій тиску на стінці та їх спектральних складових, особливо в області низьких частот. Локальна перешкода утворює зміни структури не тільки пристінної області граничного шару, але й зовнішньої і, при віддалені від перешкоди більше 100 її діаметрів, турбулентний граничний шар на циліндрі відновлюється.

SUMMARY

The results of experimental researches on study of influence of the local obstacle on structure and field of the turbulent pressure fluctuations of the boundary layer formed at a longitudinal flow of the cylinder are submitted. The changes of the statistical characteristics of wall pressure fluctuations are found out depending on a diameter of a ring obstacle, site it on length of the cylinder and velocity of a flow. The installation of an obstacle in wall region of the boundary layer of the cylinder results in increase of intensivities of the pressure fluctuations on a wall and their spectral components, it is especial in the field of low frequencies. The local obstacle causes change of structure not only wall region of a boundary layer, but also external and, at distance from an obstacle more 100 its diameters, the turbulent boundary layer on the cylinder is restored.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. - М: Высш. школа, 2000.- 383 с.
2. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных. - М: Мир, 1989.- 540 с.
3. Bull M. K. Wall-pressure fluctuations beneath turbulent boundary layers: Some reflections on forty years of research // Sound Vibr. - 1996. - 190, N 3. - P. 299-315.
4. Robinson S. K. Coherent motions in the turbulent boundary layer // Annu. Rev. Fluid Mech. - 1989. - 21. - P. 1-20.
5. Gad-el-Hak M. Interactive control of turbulent boundary layers: A futuristic overview // AIAA J. - 1994. - 32, N 9. - P. 1753-1765.
6. Lumley J., Blossey P. Control of turbulence // Annu. Rev. Fluid Mech. - 1998. - 30. - P. 311-327.
7. Rockwell D. Vortex-body interactions // Annu. Rev. Fluid Mech. - 1998. - 30. - P. 199-229.
8. Nickels T. B., Marusic I. On the different contributions of coherent structures to the spectra of a turbulent round jet and a turbulent boundary layer // J. Fluid Mech. - 2001. - 448. - P. 367-385.
9. Воскобойник В. А., Макаренков А. П. Спектральные характеристики псевдозвуковой составляющей гидродинамического шума при продольном обтекании гибкого цилиндра // Акустичний вісник. - 2000. - 3, № 2. - С. 32-41.
10. Смольяков А. В. Выявление спектров псевдозвуковых флуктуаций пристеночных давлений в турбулентных пограничных слоях // Акустический журнал - 2000. - 46, № 3. - С. 401-407.

Надійшла до редакції 22.05.2002 р.

УДК 532.526

ЧИСЛЕННИЙ АНАЛІЗ СТРУКТУРЫ ТЕЧЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ С ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Н.В. Розумнюк

Институт гидромеханики НАН Украины, г. Киев

Крупномасштабная геометрическая неоднородность поверхности, обтекаемой потоком вязкой жидкости, является причиной больших локальных градиентов всех параметров течения. При определенных условиях, она может вызывать возникновение и развитие отрыва потока и формирование вихревых структур, которые существенно меняют картину течения не только в окрестности неоднородности, но и, в случае их схода в поток, влияют на значительном расстоянии вниз по потоку.

Рассмотрим поток вязкой жидкости на плоской пластине, расположенной параллельно направлению потока и имеющей одну или несколько впадин различной формы. Задача формулируется в двумерной постановке. Уравнения Навье-Стокса, записанные в переменных завихренность-функция тока, решаются численно методом переменных направлений [1]. Расчетная область разбивается ортогональной сеткой с неравномерными по обоим направлениям шагами. Во впадине прямоугольная расчетная сетка вводится таким образом, чтобы узлы попадали на границу впадины.

Одним из исследованных типов геометрии впадин были одна или несколько впадин синусоидальной формы (рис.1) [1]. Расчеты проводились при числе Рейнольдса по длине пластины $Re=1000$.

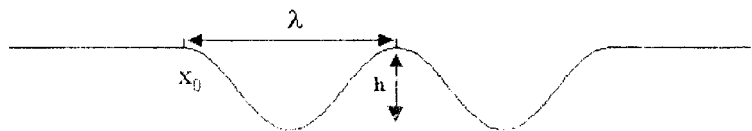


Рис. 1.

Картина течения во впадине зависит от ее размера и соотношения ширины и глубины впадины. При малой относительной глубине ($A < 0.05\lambda$) линии тока над впадиной искривляются, а с дальнейшим увеличением глубины в впадинке формируется замкнутая циркуляционная зона, отделенная от основного течения нулевой линией тока. С дальнейшим увеличением относительной глубины размер этой зоны и интенсивность течения в ней увеличиваются (рис.2).

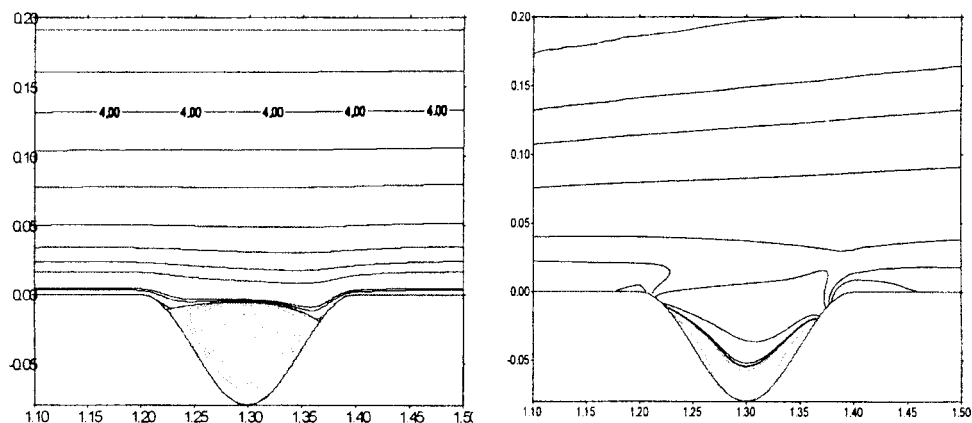


Рис.2. Изолинии функции тока и завихренности в синусоидальной ямке.

Влияние впадины на параметры обтекания пластины имеет локальный характер, т.к. изолинии завихренности и функции тока, а также составляющие скорости, изменяются только в непосредственной окрестности впадины. Поэтому размещение нескольких впадин также практически мало влияет на обтекание пластины в целом. Кроме того, соседние впадины не оказывают заметного влияния друг на друга. Более заметна зависимость от расположения впадины относительно носика пластины - циркуляционное течение интенсивнее во впадинах, которые расположены ближе к носу.

Над впадиной, вблизи уровня пластины, циркуляционное течение имеет такое же направление, как и поток над впадиной, поэтому здесь уменьшается градиент продольной скорости, соответственно уменьшается местное трение. С другой стороны, присутствие неровностей поверхности приводит к повышению локальной завихренности на выпуклых вершинах синусоиды по сравнению с гладкой пластиной и, соответственно, к усилению трения. С уменьшением относительных размеров впадин ($< 0.05 L$) вторая тенденция начинает преобладать, т.к. такие маленькие впадины действуют подобно шероховатой поверхности. Таким образом, локальные эффекты на ширине впадины имеют противоположную направленность, что и объясняет минимальное влияние на интегральные характеристики обтекания.

Другим типом геометрии была ямка в форме полуокружности, имеющая острые кромки. Для этого случая расчеты были проведены при более высоких числах Рейнольдса. Представленные на рис. 3 - 6 результаты описывают полученные характеристики течения в области при

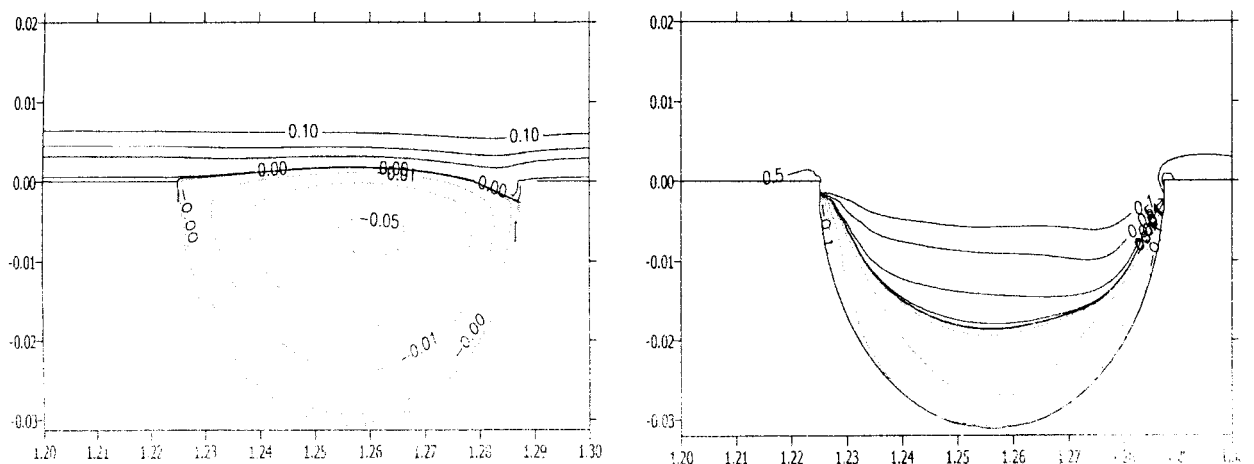


Рис.3. Изолинии завихренности и функции тока при $U=1$ м/с.

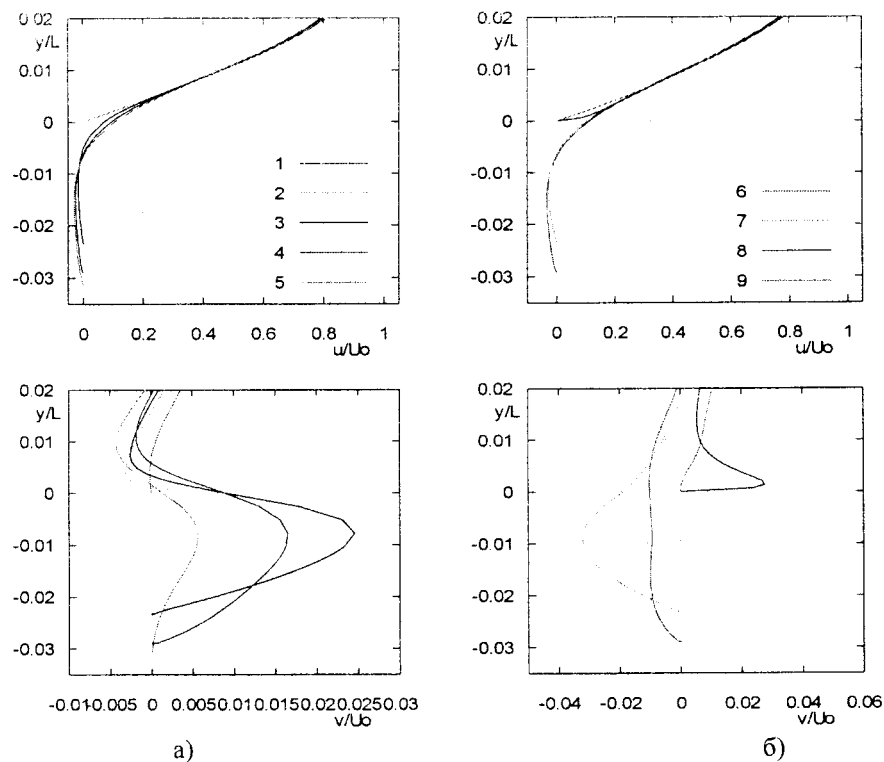


Рис.4. Профили скорости при $U=1$ м/с.

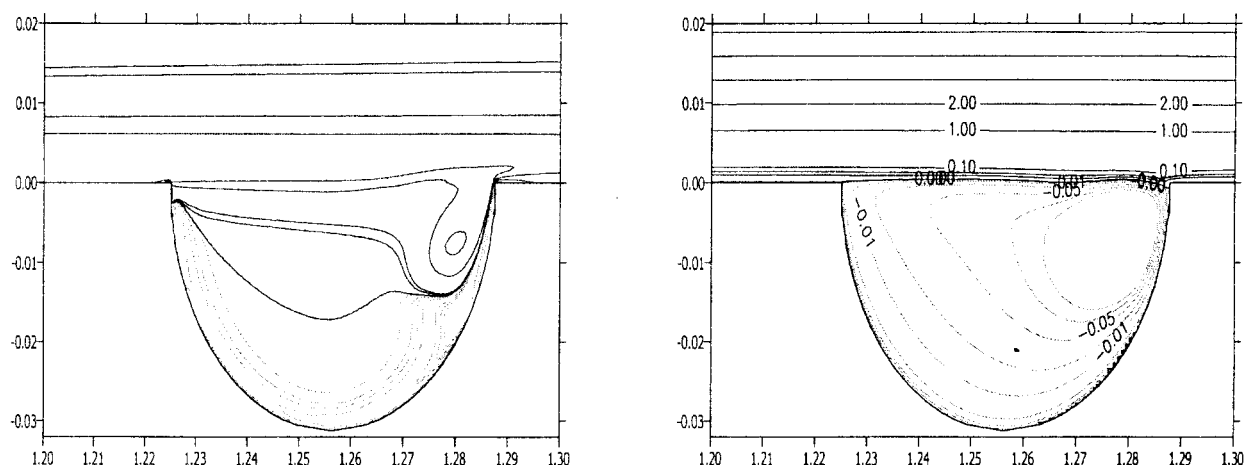


Рис.5. Изолинии завихренности и функции тока при $U=10$ м/с.

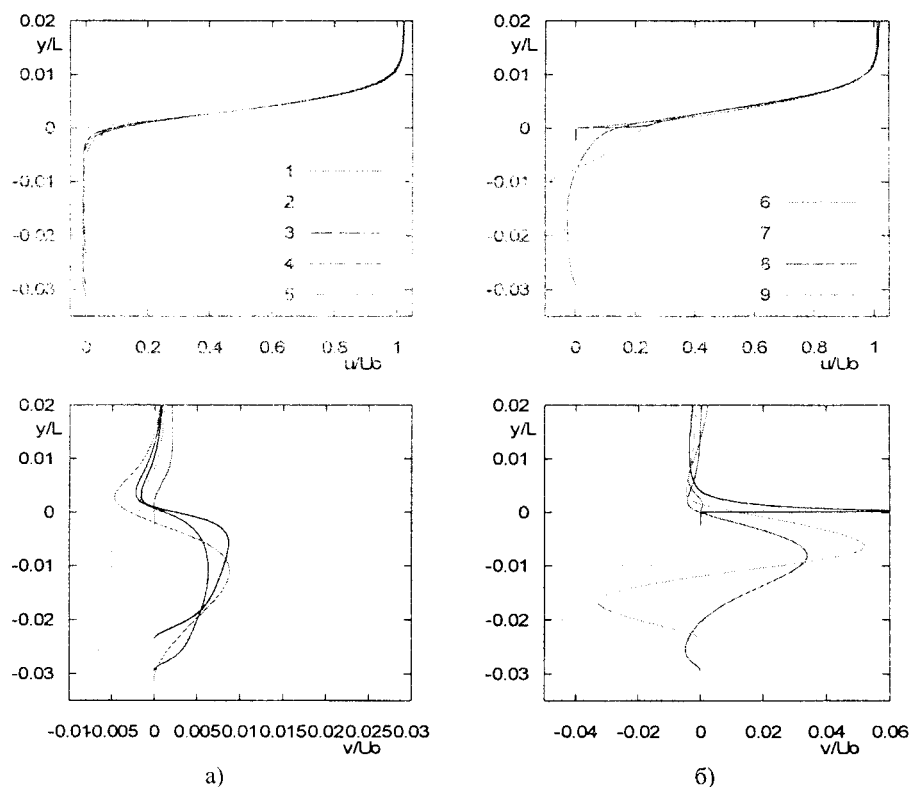


Рис.6. Профили скорости при $U=10$ м/с.

следующих параметрах: длина пластины 16 см, начало ямки в форме полукруглости с радиусом 1 см находится на расстоянии 10 см от носика пластины, скорость набегающего потока равна 1 м/с (рис. 3, 4) и 10 м/с (рис. 5, 6). Пронумерованные линии на рис.4 и 6 показывают профили компонентов скорости в таких последовательных сечениях: 1 и 9 расположены на расстоянии $0.025 L$ от кромок ямки, 2 и 8 соответствуют кромкам, 5 – центру ямки, 3, 4 и 5, 6 находятся на равных расстояниях между кромками и центром ямки.

При скорости 1 м/с, т.е. числе Рейнольдса по длине пластины $\sim 10^4$, в ямке наблюдается картина, подобная полученным для синусоидальных впадин. Формируется циркуляционное течение (рис.3), которое в этом случае занимает всю впадину и слегка выступает в основной поток. Сформировавшийся

вихрь смещен ближе к правой стенке, на угловых точках впадины завихренность существенно выше локальной завихренности пограничного слоя. В окрестности концевой точки ямки линии тока основного течения прогибаются вниз. Профили скоростей (рис. 4) также качественно подобны предыдущему случаю.

При более высокой скорости 10 м/с в расчете получено медленно изменяющееся решение, в котором наблюдается постепенное формирование вихря возле правой границы ямки (рис.5). Присутствие этого вихря также хорошо видно по профилям скоростей (рис. 6). Профиль обеих составляющих скорости заметно изменяется в окрестности правой угловой точки (линии 7,8,9). Край этого вихря имеет тенденцию распространяться в основной поток, и может в результате сформировать возмущение, которое будет мигрировать вниз по течению. Однако на фоне более сильной завихренности, существующей на пластине в окрестности угловой точки, этот процесс проследить не удалось.

При дальнейшем расчете этот вихрь увеличивается в размере и теряет интенсивность, его центр смещается вниз и влево. Соответственно его влияние на поток над пластиной уменьшается.

РЕЗЮМЕ

Вивчаються параметри потоку в'язкої рідини на пластині з виїмками, геометричні розміри яких співставні з місцевою товщиною пограничного шару. Розв'язуються рівняння Нав'є-Стокса у змінних завихреність-функція току. При всіх досліджених числах Рейнольдса ($10^3 \div 10^5$) у виїмках формується циркуляційна течія, конкретні деталі якої залежать від розміру та форми виїмки, її розташування на пластині, швидкості основного потоку. Характеристики потоку над пластиною суттєво змінюються, але ця зміна має локальний характер, оскільки циркуляційна течія у виїмці є стійкою і відділеною від основного потоку нульовою лінією току. При більш високих Re ($\sim 10^5$) картина потоку у виїмці ускладнюється, формується потік, який є потенційно нестійкий до зовнішніх збурень.

SUMMARY

Parameters of flow over a plate with grooves are under investigation. Size of the grooves is comparable with local boundary layer thickness. The Navier-Stokes equations in the vorticity – stream function formulation are solved. At all Reynolds numbers ($10^3 \div 10^5$), a recirculating flow establishes in the grooves. Particular details of the flow depend on size and shape of the groove, its location on the plate, mean flow speed. Flow over the plate changes essentially, but this change is rather local because the recirculating flow is stable and separated by zero stream function. At higher Reynolds number ($\sim 10^5$), flow pattern in the groove became more complex, flow structure is potentially unstable to external disturbances.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Роуч П. Вычислительная гидромеханика. М., Мир, 1980, 616с.
2. Voropaev G.A., Rozumnyuk N.V. A deformed and deformable surface as a means of boundary layer characteristics control. "ORGANIZED VORTICAL MOTION AS A BASIS FOR BOUNDARY-LAYER CONTROL", 20-22 September 2000, Kiev

Надійшла до редакції 22.05.2002 р.

АЕРОДИНАМІЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ШЛЯХОВИХ СТРУКТУР
ТРАНСПОРТНИХ ЗАСОБІВ НА НАДПРОВІДНИХ МАГНІТАХ

Б.Л. Заславський | О.А. Приходько, А.В. Сохацький

Інститут транспортних систем і технологій НАН України, м. Дніпропетровськ

Інтенсивне зростання вантажних і пасажирських перевезень привело до необхідності проведення наукових досліджень по створенню нових, більш ефективних транспортних систем. У області наземного транспорту пошук зосереджений на високошвидкісних безконтактних транспортних системах.

У результаті теоретичних та експериментальних досліджень моделей і макетних екіпажів встановлено, що найбільш повно вимогам економічної витрат енергії, безшумності і малого забруднення навколишнього середовища, відповідає високошвидкісний наземний транспорт (ВСНТ) з магнітним підвішуванням екіпажа, лінійним тяговим електроприводом і автоматизованою системою стабілізації його положення у просторі при русі вдовж направляючої шляхової структури зі швидкостями до 500 км/год і більше [1]. Екіпаж підвішений над шляховою структурою на незначній висоті при наявності взаємозв'язку екіпажу та шляху.

Відсутність механічного контакту зі шляховою структурою істотно знижує механічний знос екіпажа і шляхової структури у процесі експлуатації.

Для усіх відомих систем ВСНТ характерна літакоподібна форма екіпажа.

Характер аеродинамічної взаємодії рухомого складу і колії значною мірою визначається наявністю несучих поверхонь, конструкцією нижньої частини екіпажа (ходової частини, підекіпажного простору і т.д.), схемою сполучення зі шляховою структурою і поверхнею шляху [1].

Збільшення аеродинамічної підйомної сили, стійкості на шляховій структурі екіпажа може бути отримане при використанні крилової схеми і трапецеїдальної форми шляхової структури.

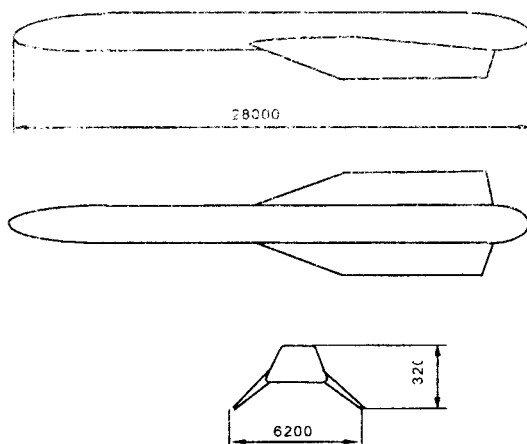


Рис.1. Високошвидкісний транспортний засіб літакоподібної форми.

Сучасний високошвидкісний транспортний засіб на надпровідних магнітах повинен використовувати принцип динамічної повітряної подушки. Цей ефект досягається обладнанням транспортного засобу крилом (рис. 1).

При русі такого засобу біля екрану повітря під крилом змінює під крилом свої кінематичні та динамічні параметри, тиск підвищується. У результаті утворюється повітряна подушка і додаткова підйомна сила, що діє на крило та екіпаж. При цьому можна використовувати менш потужні магніти й у такий спосіб знизити витрати електроенергії, підвищити стійкість і безпеку руху.

При моделюванні обтікання тіл поблизу твердої поверхні виникає ряд труднощів, пов'язаних з реалізацією реальних умов обтікання [2]. В ідеалі між екраном та моделлю транспортного апарату повинен бути відносний рух. Цей фізичний процес важко піддається моделюванню у аеродинамічній трубі і неминуче призводить до невизначеності у результатах.

Для моделювання ефекту землі у аеродинамічній трубі використовують такі методи (рис.2): нерухома пластина, дзеркальне відображення, управління примежовим шаром, рухомий пояс.

Найбільш поширений і найпростіший метод - це нерухома пластина [3]. При такому моделюванні виникає циркуляція навколо комбінації "екран - модель" [3]. Цю проблему усувають шляхом придання нерухомій пластині кута атаки, або використанням закрилка, передкрилка, які регулюють потік над верхньою частиною екрану. Примежовий шар, що виникає на пластині, не характерний для ситуації з повномасштабною моделлю в натурному експерименті [4].

Для вилучення примежового шару в області моделі використовують методи управління примежовим шаром (УПШ). Цей підхід реалізовується шляхом тангенціального вдування або відсмоктування примежового шару з екрану [4]. Цей спосіб дозволяє забезпечити необхідні кінематичні параметри між моделлю та екраном. Для збереження подібності руху рідини в зазорі між екраном та апаратом додають масу та кількість руху, щоб одержати відповідність параметрів, характерних для рухомого екрану. Проте такий процес не завжди вдається реалізувати.

Методом, який зовсім виключає наростання примежового шару на екрані, є метод дзеркального відображення моделі [5]. Проте параметри потоку в площині симетрії не моделюють точно такі ж параметри, як в натурному варіанті і має місце змішування основного та дзеркально відображеного потоку. Для запобігання цього в площині симетрії сліду вводять тонку пластину, яка також вносить похибку в характеристики течії. Крім цього, даний метод вимагає застосування двох абсолютно однакових моделей та дуже точного регулювання.

В обмеженому діапазоні натурних умов можна змоделювати обтікання тіл поблизу екрану в аеродинамічній трубці шляхом використання рухомого екрану [4,6]. Він представляє собою рухомий пояс, верхня частина якого імітує екран. Даний спосіб вимагає точної синхронізації швидкостей течії та рухомого поясу. Крім цього, виникає ряд труднощів спряження поясу з нерухомим екраном. Вважають, що цей спосіб є найбільш близький до реальних умов [6]. Проте даний метод вимагає відведення примежового шару перед поясом для того, щоб вилучити ефекти його релаксації, які можуть виникнути на рухомому поясі.

Окрім експериментальних методів у аеродинамічних трубах дослідження впливу екрану на аеродинамічні характеристики транспортних апаратів можна проводити на спеціальних треках [7]. Проте при даному способі моделювання важко виконати заміри розподілених та інтегральних аеродинамічних характеристик.

Раніше проведені експерименти порівняльного характеру моделювання екрану виявили значні розбіжності в одержаних аеродинамічних характеристиках у залежності від способу моделювання [3,4,8].

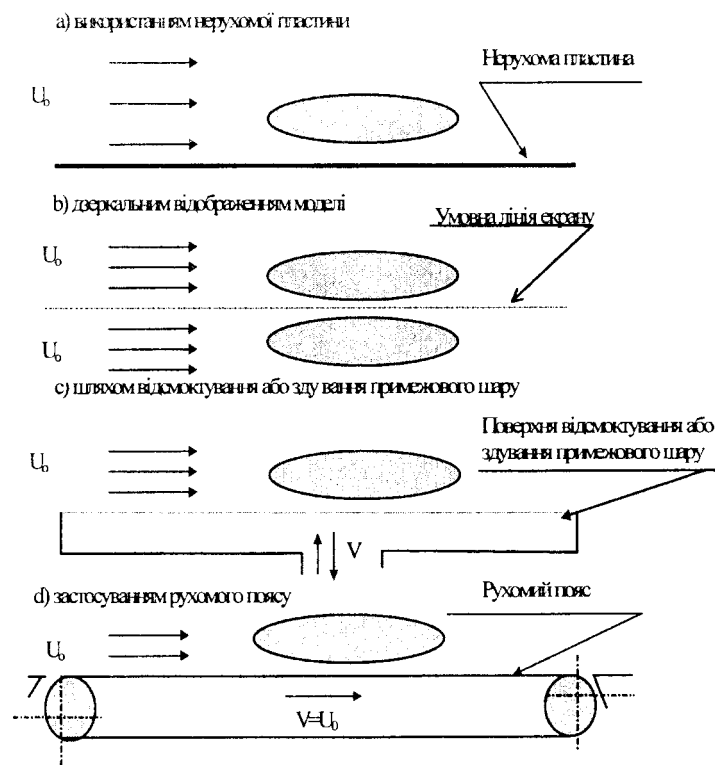


Рис. 2. Методи моделювання обтікання тіл поблизу екрану.

Дослідження впливу нерухомого екрану і рухомого поясу на аеродинамічні характеристики (АДХ) показано в роботі [9]. Виявлено розбіжності у силі опору та бокових силах до 12%, а у підйомній силі - до 10%. Причому, рухомий пояс дав збільшення сили опору і зменшення підйомної сили.

Заміри характеристик потоку між апаратом та екраном при різних способах моделювання екрану приводяться у роботі [3, 4, 8, 9, 10]. Усі вони дають розбіжні результати характеристик потоку між апаратом та екраном.

У роботі [4] відмічається, що при моделюванні обтікання автомобіля у аеродинамічній трубі за умови, при якій відношення товщини витіснення примежового шару до дорожнього кліренсу менше 0,1, спостерігається сильний вплив методу імітації дорожнього полотна на значення сил та моментів, що діють на автомобіль.

Таким чином, розглянуті експериментальні дослідження свідчать, що на їх результати впливає не тільки спосіб моделювання, але й геометричні, кінематичні та динамічні параметри установок. Проведений аналіз показує, що вище розглянуті методи біляекранного моделювання обтікання тіл у аеродинамічній трубі не дозволяють адекватно відобразити натурний експеримент.

Окрім цього для фізичного моделювання характерні великі технічні складності та його значна вартість. Дані дослідів у багатьох випадках носять дуже обмежений характер. Така ситуація виникає і при проектуванні та дослідженні наземних високошвидкісних транспортних засобів - виборі оптимальної форми, прогнозуванні поля швидкостей у сліді, розрахунку динамічних характеристик та ін.

Проведений аналіз показує, що моделювання аеродинамічних характеристик елементів високошвидкісних транспортних засобів поблизу шляхових структур раціонально проводити з використанням методу дзеркального відображення та управлінням примежовим шаром.

В аеродинамічній трубі Харківського авіаційного інституту Т-3, замкнутого типу, з відкритою робочою частиною, методом дзеркального відображення нами виконані експериментальні дослідження обтікання профілю CLARK-Y- 4% поблизу екрану. Відстань до екрану обезрозмірена відносно хорди профілю. На рис. 3, 4 показано залежність коефіцієнта підйомної сили та лобового опору профілю від кута атаки для ряду відстаней до екрану. Дослідження показали, що залежність коефіцієнта підйомної сили від кута атаки для малих відстаней до екрану має нелінійний характер. З графіка видно, що для вивченого діапазону кутів атаки властива обернено-пропорційна залежність від відстані до екрану.

Для вивчення поля течії в області носика профілю проводилась візуалізація потоку з використанням масляної плівки. Результати даних досліджень докладно представлені в монографії [2].

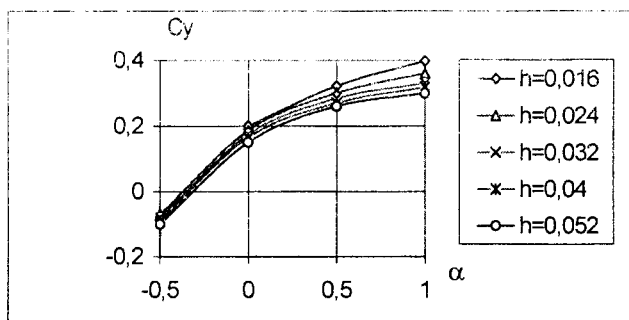


Рис. 3. Залежність коефіцієнта підйомної сили профілю від кута атаки.

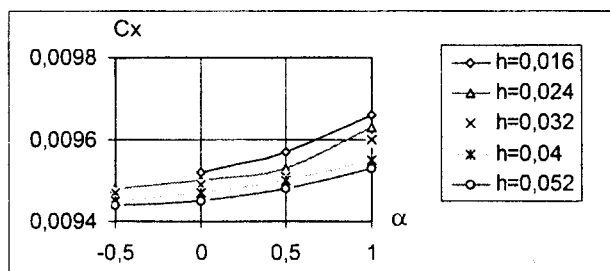


Рис. 4. Залежність коефіцієнта лобового опору профілю від кута атаки.

Питання про відповідність поля тиску при управлінні примежовим шаром у такому експерименті і в натурі залишається відкритим. Можна припустити, що вплив примежового шару на кінематичні параметри течії спостерігається тільки, починаючи з певного значення величини відношення товщини витіс-

нення примежового шару до розміру зазору поміж екрануючою поверхнею та моделлю транспортного апарату. Слід відмітити, що вплив цього співвідношення на аеродинамічні характеристики тіл недостатньо вивчена. На скільки використання від вдуву або відсмоктування примежового шару дасть можливість підвищити точність моделювання? Вивчення цього питання вимагає проведення додаткових досліджень.

Відсмоктування примежового шару з опорної поверхні шляхової структури повинно проводитись рівномірно по усій її довжині. Як показують в [11] такий підхід може бути ефективним засобом зменшення товщини примежового шару. Але таких експериментальних даних, одержаних для моделювання течії біля складної екрануючої поверхні немає.

Технічні рішення для створення моделі з відсмоктуванням примежового шару відомі але дуже складні. При моделюванні необхідно дроселювати поверхню шляхової структури за допомогою променя лазера. Тому було вирішено використати пористі матеріали. В даний час методами порошкової металургії такі матеріали виготовляються. Такий матеріал повинен мати відповідні властивості: пористість, газопроникливість та мінімальну шорсткість. У результаті аналізу цих характеристик був вибраний матеріал ПНС-10. Пориста пластина товщиною 2,2 мм, виготовлена із матеріалу ПНС-10 має пористість 32%, та шорсткість 0,43.

Для визначення необхідного перепаду тиску Δp на пластині при заданій швидкості незбуреного потоку, що забезпечує відповідні характеристики примежового шару використовувалися наближені методи розрахунку. При відсмоктуванні, через проникну поверхню, мікрооб'єми повітря вилучаються з примежового шару і їх місце займають молекули з більш віддалених від стінки шарів течії, що мають більшу кінетичну енергію. У результаті, з ростом інтенсивності відсмоктування профіль швидкості стає більш наповненим. Але умова прилипання частинки рідини до стінки залишається і при наявності відсмоктування.

Для апробації керуванням товщиною примежового шару, шляхом його відсмоктування через пористі пластини була виготовлена відповідна модель показана на рис.5.

Її виконано у вигляді полого корпусу з закругленими передніми та задніми кромками. У верхній стінці моделі, яка імітує опорну поверхню, установлювалась пориста пластина. На нижній частині корпусу розміщено штуцер для з'єднання з вакуумним насосом, який створить всередині моделі задане розрідження Δp .

Продукти виконувались в аеродинамічній трубі АТ-1 з відкритою робочою частиною та відкритим вихідним перерізом сопла з розмірами осей 4250×2600 мм, при швидкості незбуреного потоку $V=40$ м/с, при числі Рейнольдса $6 \cdot 10^6$, $8 \cdot 10^6$, $1 \cdot 10^7$ при степені турбулентності $\varepsilon=0,2\%$. Розрідження всередині корпусу варіювалась в межах від 0 до $8 \cdot 10^3$ Па з кроком $2 \cdot 10^3$ Па. Приймач повного тиску переміщували, як уздовж пористої пластини довжиною L , так і перпендикулярно до неї по висоті примежового шару.

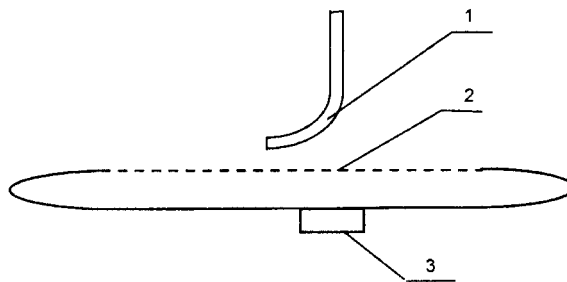


Рис.5. Схема дослідної установки.

1-мікронасадок, 2- опорна поверхня з пористою пластиною, 3- штуцер для відсмоктування повітря.

На рис. 6 показано величини швидкостей по товщині примежового шару. Аналіз результатів показує, що при відсмоктуванні примежового шару, шляхом розрідження його товщина зменшується, а профіль швидкості стає більш наповненим. При $\Delta p=8 \cdot 10^3$, в точці $x=1,0$, $y=0,25$ швидкість у примежовому шарі стає дорівнює швидкості незбуреного потоку, тобто товщина примежового шару зменшилась на 75%. Таким чином, проведені експериментальні дослідження дозволяють зробити висновок, про те що відсмоктування примежового шару є ефективним засобом управління примежовим шаром.

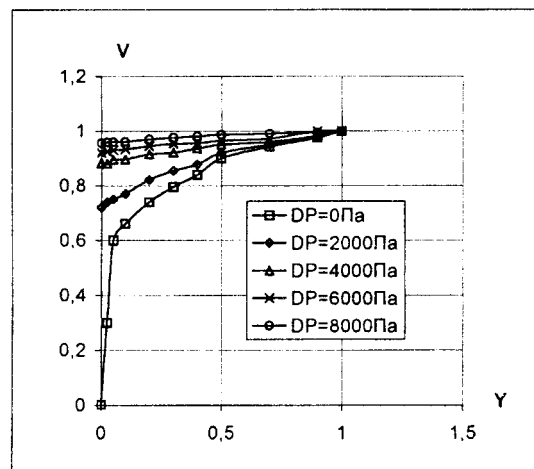


Рис.6. Розподіл швидкості у примежовому шарі в залежності від перепаду тиску.
DP-перепад тиску, Y- відстань від стінки

РЕЗЮМЕ

Проанализированы методы моделирования путевой структуры высокоскоростных транспортных средств на сверхпроводящих магнитах: неподвижный экран; метод зеркального отражения; движущийся пояс и управление пограничным слоем. Приведены результаты экспериментальных исследований обтекания тел с использованием метода зеркального отражения и управления пограничным слоем.

SUMMARY

Methods of modeling of traveling structure of high-speed vehicles on superconducting magnets Are analyses: the motionless screen; a method of mirror reflection; a moving belt and management of a boundary layer. Results of experimental researches of a flow of bodies with use of a method of mirror reflection and management of a boundary layer are given.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Высокоскоростной наземный транспорт с линейным приводом и магнитным подвесом // В.И. Бочаров, В.А. Винокуров, В.А. Нагорский и др. – М.: Транспорт, 1985. – 279 с.
2. Приходько А.А., Сохацкий А.В. Математическое и экспериментальное моделирование аэродинамики транспортных систем вблизи земли. - Днепропетровск: Наука и образование, 1998. - 154с.
3. Гордон М.Г. Экспериментальное исследование поля скоростей и давлений вокруг профиля вблизи земли// Труды ЦАГИ. -1965.- Вып. 974. -24с.
4. Гухо В.А. Аэродинамика автомобиля. - М.: Машиностроение, 1987. - 424с.
5. Серебрянский Я.М., Биячуев Ш.А. Исследование в трубе горизонтально установившегося движения крыла на небольшом расстоянии от земли // Труды ЦАГИ.-Вып. 437.- 1939.- 32с.
6. Butler S.F.J., May B.A. and Pound T.N. A moving belt rig for ground simulation in low speed wind tunnels// Aeronaut. Res. Coun.- Rep. & Memo.-1963.- 3451.
7. Beauvais F.N., Tignor S.C., Turner T.R. Problems of ground simulation in automotive aerodynamics// Soc. Automat. Eng. (SAE).- 1968.-№ 680121.
8. Turner T.R. Wind tunnel investigation of a 3/8-scale automobile model over a moving belt ground plane// NASA, Tech. Note (TND).-1967.-№4229.
9. Stalker E.A. A reflection plate representing the ground// J. Aeronaut. Sci.-1934.-№1.- PP.151-152.
10. Kramer C., Gerhardt H.J., Jaeger E., Stein H. Wind tunnel tests on underbody aerodynamics // Symp. on Industrial Aerodynamics.- Aachen (German).-1974.-P.3.
11. Рейнольдс Г.А., Сарик В.А. Экспериментальное исследование устойчивости пограничного слоя на плоской пластине с отсосом //Аэрокосмическая техника. - 1986.- №11.- С 202–207.

Надійшла до редакції 16.04.2002 р.

УДК 532.5:536.24

УПРАВЛЕНИЕ ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНЫМ ПЕРЕХОДОМ С ПОМОЩЬЮ СЛЕДОВ ЗА ЦИЛИНДРАМИ

*Э.Я. Эпик, Т.Т. Супрун**Институт технической теплофизики НАН Украины, г. Киев*

1. Введение

В виду широкого распространения в проточной части теплоэнергетического и технологического оборудования ламинарно-турбулентный переход (ЛТП) является постоянным объектом как экспериментальных, так и теоретических исследований. Однако до сих пор не найдены универсальные надежные методы управления характеристиками ЛТП, в первую очередь, его расположением на обтекаемой поверхности и протяженностью, а также интенсивностью процессов переноса в пограничных слоях (ПС), предшествующих ЛТП и следующих за ним.. При разработке таких методов предпочтение должно быть отдано тем из них, которые позволяют контролировать воздействие на ЛТП различных возмущающих факторов или их комбинаций. В число таких факторов входит *скоростная* нестационарность, вызванная развитием следов, как за неподвижными, так и движущимися элементами. Необходимо различать нестационарность двух типов:

- обусловленную конструктивным выполнением проточной части теплоэнергетического и технологического оборудования;
- специально организованную для целенаправленного управления пограничным слоем (ПС).

В первом случае выбранная конструкция установки определяет взаимодействие следа с рабочей поверхностью. Например, в турбомашинах следы за сопловыми и рабочими лопатками оказывают существенное влияние на развитие ПС на профилях лопаток, интенсивность теплоотдачи и профильные потери. Во втором случае управление ПС с помощью следов осуществляется как для увеличения, так и снижения интенсивности процессов переноса. Например, в целях интенсификации в теплообменном, химическом и технологическом оборудовании широко используются неподвижные и колеблющиеся интенсификаторы (преимущественно цилиндрического типа). В то же время для снижения аэродинамического сопротивления обтекаемой поверхности (например, крыла самолета) в самом ПС или вне его устанавливаются неподвижные и движущиеся обтекатели оптимальной формы.

Нестационарность потока инициирует особый вид ламинарно-турбулентного перехода (ЛТП), названного *следовым* (СЛТП). Необходимо напомнить, что течение в следе при наличии дефекта скорости обладает повышенной степенью турбулентности Tu . Вследствие этого перед ЛТП можно ожидать развитие псевдоламинарного ПС с повышенными коэффициентами переноса [1]. При турбулизации внешнего потока колеблющимися интенсификаторами или вращающимися элементами конструкций возникающая *периодическая* нестационарность способствует дополнительной интенсификации переноса. Указанные факторы вызывают более ранний СЛТП, характеристики внутренней структуры которого могут быть определены только экспериментально. Поэтому в настоящее время в ряде научных организаций на лабораторных установках методами физического моделирования проводятся экспериментальные исследования механизма и закономерностей СЛТП, на основе которых разрабатываются методы прогнозирования и управления СЛТП.

Наибольшее число работ в этой области посвящено роторно-статорному взаимодействию в турбомашинах, воспроизводимому с помощью вращающегося «беличьего» колеса, расположенного перед испытываемой поверхностью. В [2] сделан важный вывод о том, что именно высокие значения Tu (а не дефект скорости) несут основную ответственность за протекание СЛТП. Отсюда вытекает отмеченная в [3] общность отдельных аспектов СЛТП и байпасного ЛТП, возникающего при $Tu > 0$. В настоящей статье содержатся результаты экспериментальных исследований ИТТФ НАНУ применительно к СЛТП в следе за неподвижным и колеблющимся цилиндрами.

2. Описание экспериментальной установки

Эксперименты проводились в аэродинамической трубе Т-5 ИТТФ НАНУ открытого типа с рабочим участком 120х120 мм длиной 700 мм. Плоская пластина была установлена несимметрично по высоте рабочего участка таким образом, что расстояние от ее поверхности до верхней стенки трубы составляло 90 мм. Для организации безотрывного обтекания входной кромки пластины, закругленной радиусом 1.5 мм, в выходном сечении рабочего участка на верхней стенке крепился интерцептор высотой 60 мм.

Неподвижный цилиндр диаметром 3 мм устанавливался на расстоянии 15 мм перед пластиной так, что ось цилиндра располагалась на высоте $y_c = 10$ или 20 мм относительно оси входной кромки пластины. Подвижный цилиндр колебался от $y = 0$ до $y = 20$ мм с частотой 4.4 Гц. При определении коэффициентов теплоотдачи в качестве определяющей была выбрана скорость на входе в рабочий участок $U \approx 9$ м/с. Всего было проведено 4 серии экспериментов: при отсутствии цилиндра (серия 1, естественный ЛТП при $Tu = 0.2 - 0.4\%$), при двух установках неподвижного цилиндра (серии 2 и 3, $y_c = 20$ и 10 мм) и при колебаниях цилиндра (серия 4).

Исследования теплообмена проводились электрокалориметрическим методом. Граничные условия на поверхности пластины были близки к $q_w \approx \text{const}$. Для измерений характеристик внутренней структуры пограничного слоя и внешнего потока использовалась термоанемометрическая аппаратура ДИСА-55М.

3. Анализ экспериментальных данных

3.1 Характеристики внешнего потока

Образование СЛТП протекало в условиях взаимодействия расширяющегося следа за неподвижным цилиндром с обтекаемой поверхностью, т.е. развития ПС в турбулированном сдвиговом потоке. Наличие колеблющегося следа дополнительно усложняло внешние условия.

При установке цилиндра на расстоянии $y_c = 20$ мм от оси передней кромки пластины за ним развивался след, характеризующийся четко выраженным дефектом скорости. Формирование следа при $x < 150$ мм до смыкания с внешней границей ПС происходило по законам, характерным для плоского следа. Под воздействием интерцептора и нарастающего ПС в сечениях $x > 150$ мм след начинал деформироваться. Однако, несмотря на деформацию следа, как видно из рис. 1а, при $y_c = 20$ мм вблизи внешней границы ПС по всей длине пластины сохранялась область с постоянной скоростью U_e , максимальная протяженность которой составила $y \sim 9$ мм при $x = 600$ мм. Это дает основание рассматривать область $U_e = \text{const}$ в качестве бессдвигового внешнего течения при формировании ПС.

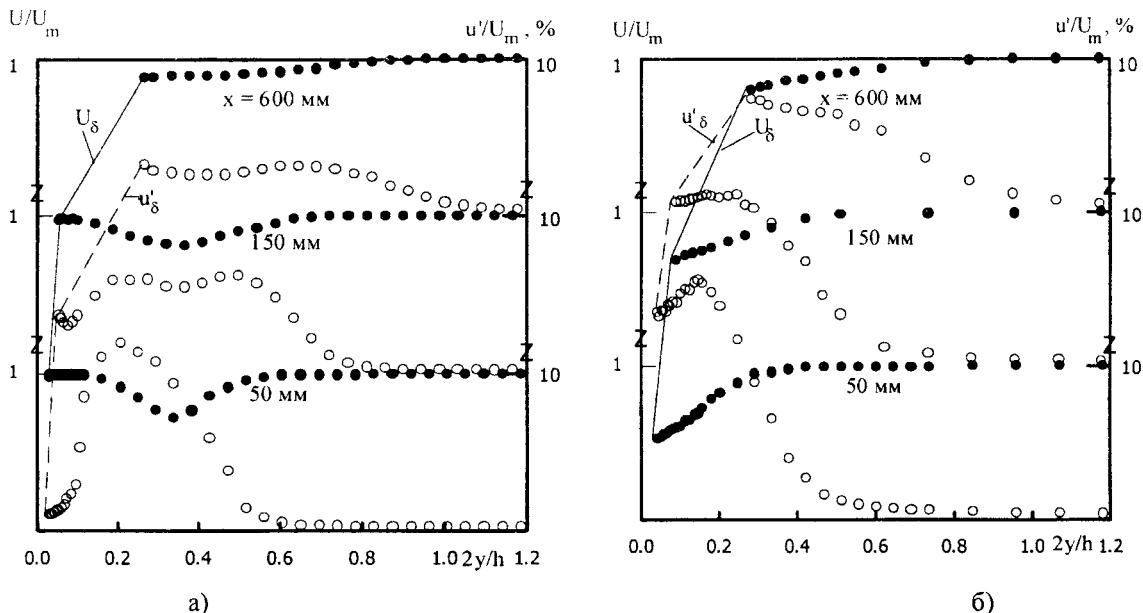


Рис. 1 Характеристики внешнего потока при $y_c = 20$ мм (а), при $y_c = 10$ мм (б).

Поэтому толщина гидродинамического ПС δ и скорость U_δ на его внешней границе определялись на основании общепринятого условия: $U_\delta = 0.99U_e$. По длине пластины по мере удаления от ис-

точника возмущений отношение U_δ/U_m изменялось от 0.98 до 0.88 при $x=50$ и 600 мм, свидетельствуя о наличии слабого положительного продольного градиента давления на внешней границе гидродинамического ПС (U_m - максимальная скорость вне следа).

При установке цилиндра на высоте 10 мм (рис.1б) взаимодействие ПС со следом деформировало след таким образом, что скорость увеличивалась от U_δ до U_m всей длине пластины. Область $U_e=\text{const}$ практически отсутствовала, что затрудняло нахождение толщины гидродинамического ПС и соответственно значений U_δ . Выбор последних в этом случае осуществлялся по точке перегиба в соответствующих профилях скорости. Таким образом, формирование ПС при $y_c=10$ мм происходило в условиях сдвигового внешнего течения. По длине пластины по мере удаления от источника возмущений отношение U_δ/U_m изменялось от 0.53 до 0.82 при $x=50$ и 600 мм, свидетельствуя о возникновении отрицательного градиента давления на внешней границе гидродинамического ПС.

Генерация возмущений в следе за неподвижными цилиндрами способствовала формированию неравномерного профиля продольных пульсаций u'/U_m по ширине следа в каждом сечении пластины. При $y_c=20$ мм максимальные значения продольных пульсаций скорости в следе изменялись от $u'/U_m=11.9\%$ до 3.2% , а при $y_c=10$ мм – от 15.5% до 7.3% по длине пластины при $x=50$ и 600 мм (ср. рис.1а и 1б). При этом на внешней границе ПС значения u'_δ/U_m составляли $1 - 3.27\%$ ($y_c=20$ мм) и $13.2 - 7.3\%$ ($y_c=10$ мм) при $x=50$ и 600 мм соответственно. Особенностью распределения $u'_\delta/U_m = f(x)$ при $y_c=20$ мм являлся их немонотонный характер с максимумом 5.5% ($x=300$ мм), тогда как при $y_c=10$ мм сохранялась монотонность.

3.2 Интенсивность процессов переноса

Разработка методов контроля СЛТП проводилась на основе анализа распределений коэффициентов теплоотдачи по длине пластины, представленных в виде зависимостей $St = f(Re_x)$ (рис.2), а также характеристик внутренней структуры динамического ПС.

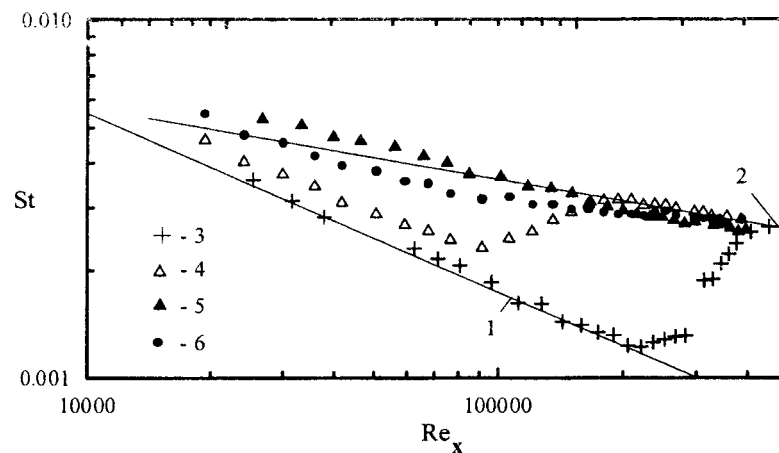


Рис.2 Теплообмен пластины при установке неподвижного и колеблющегося цилиндров:

1 – уравнение (1); 2 – уравнение (2); 3 – при отсутствии цилиндра; 4 – $y_c=20$ мм;

5 – $y_c=10$ мм; 6 – колеблющийся цилиндр;

В качестве исходной использовалась серия 1, полученная при отсутствии цилиндра. В этой серии вплоть до начала ЛТП ($Re_{xst}=2 \cdot 10^5$) опытные точки следовали известной зависимости для теплообмена в ламинарном ПС при $q_w \approx \text{const}$:

$$St_l = 0.55 Re_x^{-0.5} \quad (1)$$

Конец ЛТП ($Re_{xend}=4.5 \cdot 10^5$) располагался вблизи заднего торца пластины, так что в этой серии турбулентные режимы течения практически не были реализованы. Протяженность области перехода составляла $Re_{xend}/Re_{xst}=2.25$ (где Re_{xst} и Re_{xend} – координаты соответственно начала и конца ЛТП).

При возникновении СЛТП широко использовались специальные методы диагностики, разработанные в ИТТФ НАНУ для байпасного БЛТ и приведенные в [4].

В серии 2 при $y_c=20$ мм по сравнению с серией 1 наблюдались существенные изменения в распределениях коэффициентов теплоотдачи, вызванные как сдвигом области СЛТП вверх по потоку, так и ростом теплоотдачи в предпереходном ПС (до 20% при $Re_x=6 \cdot 10^4$). Этот факт позволяет считать предпереходной ПС псевдоламинарным [1]. Несмотря на развитие псевдоламинарного ПС перед ЛТП, характер распределения коэффициентов теплоотдачи сохранился немонотонным, но стал более сглаженным. Координаты области СЛТП соответствовали $Re_{xst}=9 \cdot 10^4$ и $Re_{xend}/Re_{xst}=2.94$. При $y_c=20$ мм в области $Re_x > 2.65 \cdot 10^5$ данные по теплообмену совпадали с рекомендациями для расчета турбулентного ПС.

В серии 3 при $y_c=10$ мм влияние следа привело к монотонному изменению коэффициентов теплоотдачи по длине пластины, вследствие чего имел место подход к характеристикам турбулентного ПС «сверху». Интенсивность теплоотдачи в псевдоламинарном ПС при $Re_x=6 \cdot 10^4$ возросла в 1.9 раза. Координаты области СЛТП, определенные с помощью упомянутого выше комплексного метода диагностики переходных процессов, соответствовали: $Re_{xst}=8.2 \cdot 10^4$, $Re_{xend}/Re_{xst}=2.82$.

В серии 4 под воздействием колеблющегося цилиндра опытные точки располагались между сериями 2 ($y_c=20$ мм) и 3 ($y_c=10$ мм), причем изменения коэффициентов теплоотдачи отличались немонотонностью. Интенсификация теплообмена в псевдоламинарном ПС достигала ~40% при $Re_x=6 \cdot 10^4$. Начало области перехода соответствовало $Re_{xst}=8.5 \cdot 10^4$ при $Re_{xend}/Re_{xst}=2.8$.

Во всех сериях экспериментов за областью ЛТП или СЛТП развивался турбулентный ПС, теплообмен в котором описывался известной зависимостью:

$$St_t = 0.035 Re_x^{-0.2} \quad (2)$$

Анализ полученных распределений локальных коэффициентов теплоотдачи по длине пластины показывает, что по мере увеличения турбулизации внешнего потока, вызванной расположением цилиндра (ср. серии 1 и 2, 4, 3), наблюдается увеличение коэффициентов теплоотдачи в псевдоламинарном ПС. Область СЛТП сдвигается вверх по потоку, однако ее относительная протяженность Re_{xend}/Re_{xst} в сериях 2, 4 и 3 изменяется незначительно (в пределах 5%), тогда как абсолютная протяженность ($Re_{xend} - Re_{xst}$) уменьшается от $1.75 \cdot 10^5$ до $1.48 \cdot 10^5$ соответственно. Эти установленные экспериментально факты позволяют прогнозировать местоположение СЛТП и интенсификацию теплообмена в псевдоламинарном ПС, т.е. контролировать процесс СЛТП с помощью следов за цилиндрами при различных расположениях неподвижных и колеблющегося цилиндров в диапазоне изменения параметров данных экспериментов.

Необходимо отметить, что обработка данных по изменению коэффициентов трения с помощью измеренных градиентов скорости вблизи стенки в серии 2 позволила определить координаты области СЛТП и оценить интенсификацию трения (до 10%) в области, предшествующей СЛТП. В то же время при обработке данных серии 3 возникли трудности, вызванные выбором определяющей скорости. Как показано в предыдущем разделе, на внешней границе динамического ПС в серии 3 имел место значительный продольный отрицательный градиент давления, возникновение которого привело к существенным отличиям значений U_δ и U . Расчеты, проведенные с помощью указанных скоростей для серии 3, показали в первом случае завышенные, а во втором – заниженные значения коэффициентов трения, не соответствующие общепринятым физическим представлениям.

Как и в случае байпасного ЛТП, процесс СЛТП сопровождался деформацией поля скорости: от профиля Блазиуса (с повышенными градиентами скорости у стенки) до профиля с четко выраженной областью действия логарифмического закона, свидетельствуя о трансформации псевдоламинарного ПС в турбулентный ПС через СЛТП. При этом в псевдоламинарном ПС имела место генерация энергии турбулентности с максимумом при $y/\delta \sim 0.3-0.4$, тогда как за СЛТП в области турбулентного ПС максимум располагался вблизи стенки (рис.3).

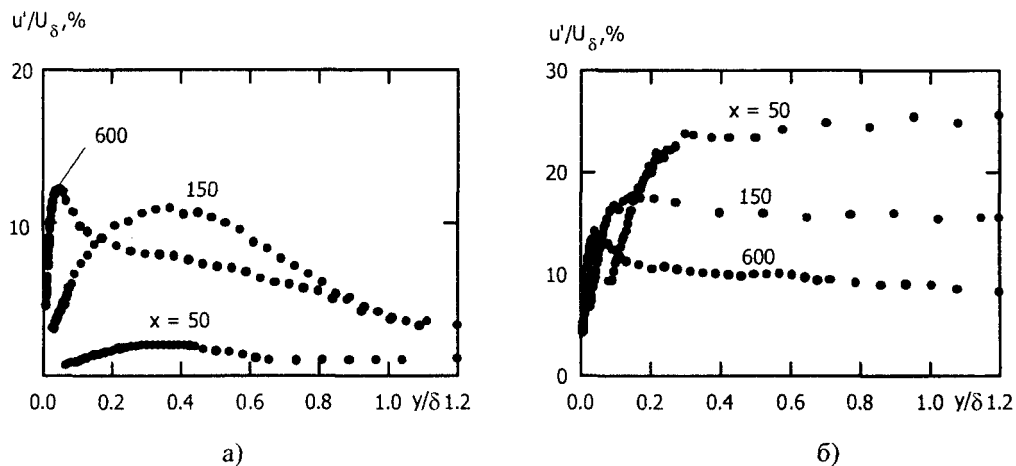


Рис.3 Распределение продольной пульсации скорости в пограничном слое пластины:

а) $y_c = 20$ мм; б) $y_c = 10$ мм;

Выводы

Проведено експериментальне дослідження теплообміну плоскої пластини при наявності СЛТП за неподвижним (на висоті $y_c = 10, 20$ мм) і колиблущимся (с частотой 4.4 Гц и амплитудой $y = 0-20$ мм) циліндрами.

Установлено, що виникаючий СЛТП сдвигается вверх по потоку по сравнению с естественным ЛТП. Предшествующий СЛТП псевдоламинарный ПС характеризуется ростом трения и теплообмена, что приводит к исчезновению немонотонности в распределениях $St = f(Re_x)$ и возникновению верхнего теплового СЛТП ($y_c = 10$ мм).

На основе полученных данных в диапазоне изменения параметров, имеющих место в рассмотренных экспериментах, обоснованы возможности управления СЛТП: его местоположением (от $x_{st} \approx 100$ до 250 мм при $y_c = 10$ и 20 мм), протяженностью (от $(x_{end} - x_{st}) \sim 230$ до 300 мм при тех же y_c), интенсивностью переноса в предшествующем псевдоламинарном ПС от $\sim 20\%$ ($y_c = 20$ мм) до $\sim 90\%$ ($y_c = 10$ мм) при $Re_x = 6 \cdot 10^4$. Разработка универсальных методов управления СЛТП с помощью следов за цилиндрами требует проведения дополнительных экспериментальных исследований.

РЕЗЮМЕ

На основі експериментального дослідження характеристик динамічного і теплового прикордонних шарів за нерухомим і колиблущимся циліндрами обґрунтований метод керування слідовим ламінарно-турбулентним переходом. Оцінено можливості варіювання місцем розташування і довжиною зони переходу, а також впливу на інтенсивність переносу в псевдоламинарному прикордонному шарі, що передуює переходу.

SUMMARY

On the basis of the experimental investigation of dynamic and thermal boundary layer characteristics after still and hesitating cylinders the method of wake-induced laminar-turbulent transition control was grounded. The possibilities of variation of position and length of transition as well as of effect on transport process intensity in preceding pseudolaminar boundary layer were estimated.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Дыбан Е.П., Эпик Э.Я. Тепломассообмен и гидродинамика турбулизированных потоков. - Киев: Наук. думка, 1985. - 296 с.
2. Orth U. Unsteady boundary-layer transition in flow periodically disturbed by wakes // ASME J. of Turbomachinery. - 1993. - Vol. 115. - P. 707-713.
3. Верцинский З., Супрун Т., Эпик Э. Характеристики ламінарно-турбулентного переходу, індукціованного следом одиночного движущегося цилиндра // Промышленная теплотехника. - 2001. - Т.23, №3. - С. 22-30.
4. Epik E.Ya., Suprun T.T. Heat transfer and diagnostics of bypass laminar-turbulent transition. In Proc. of 3rd Int. Symp. on Turbulence, Heat and Mass Transfer, Nagoya, Japan. -2000.- P. 1-8.

Надійшла до редакції 22.04.2002 р.

УДК 532.529

ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ РОЗВИТКУ ТЕЧІЇ РІДИНИ У КАНАЛІ З ОБЕРНЕНОЮ СХОДИНКОЮ, ЩО ЗАПОВНЕНА ПОРИСТИМ СЕРЕДОВИЩЕМ.

М.В. Федоровська

Дніпропетровський національний університет

В багатьох галузях сучасної промисловості особливого значення набувають процеси, пов'язані з рухом рідини у пористих середовищах. Широке застосування пористих матеріалів у машинобудуванні, енергетиці, харчовій, авіаційній та хімічній промисловостях обумовлює необхідність інтенсивного дослідження процесів переносу у пористих структурах.

Особливої уваги заслуговує використання моделей переносу у пористих середовищах при розв'язку актуальних задач гідроекології, а саме: проблем регулювання балансу водних ресурсів земних надр, задач затоплення шахт [1], проблем вторинного забруднення водних об'єктів [2], глибинного заховання рідких радіоактивних відходів [3] тощо.

Водночас недосконалість моделей, що використовуються, труднощі точного визначення теплофізичних властивостей матеріалів, відсутність ефективних методів аналітичного розрахунку суттєво ускладнюють розв'язок багатьох важливих задач. Альтернативою аналітичного та експериментального дослідження процесів переносу у пористих середовищах є чисельне моделювання, що дозволяє використовувати різноманітні моделі гідродинаміки і теплообміну, розглядати широкий клас процесів, узагальнювати отримані результати.

Особливою увагою багатьох дослідників користуються взаємопроникаючі моделі, які дозволяють досліджувати течії як в середині пористих середовищ, так і поза ними. Прикладом застосування однієї з таких моделей може слугувати [4], де для опису течії у плоскому каналі при обтіканні пористих тіл в'язкою рідиною використовувалась взаємопроникаюча модель, що була приведена у роботі [5].

У роботі, що пропонується, була розглянута модельна задача про течію рідини у плоскому каналі з оберненою насадкою сходиною, що заповнена пористим середовищем. Схема розрахункової області зображена на рис. 1.

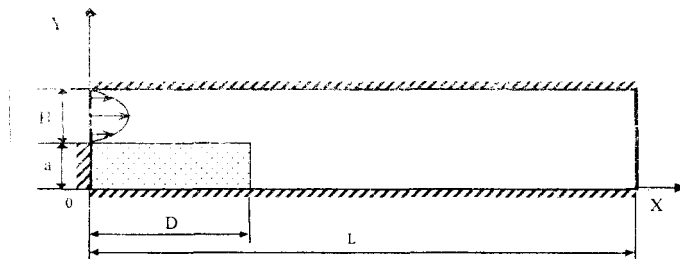


Рис. 1.

Задача двовимірна. Течія вимушена. Геометрія області суттєво впливає на характер течії. Вплив вільної конвекції не враховується. Для описання процесів гідродинаміки була використана узагальнена модель Дарсі-Брінкмана-Форшхаймера (1), яка враховує нелінійні ефекти перенесення

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\rho}{\varepsilon} \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \left(\frac{\mu}{k} + \frac{\rho c}{\sqrt{k}} |\vec{\omega}| \right) \vec{\omega} &= \mu \nabla^2 \vec{\omega} - \text{grad } P + \rho_0 g \beta (T - T_0) \text{grad } h \end{aligned} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{aligned} (\rho c_p)_T \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho c_p)_{ж} (\vec{\omega} \cdot \nabla T) &= \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + q_v \end{aligned} \right. \quad (2)$$

$$\text{div } \vec{\omega} = 0 \quad (3)$$

При моделюванні перенесення ентальпії у пористих середовищах широке розповсюдження отримала "однотемпературна" модель процесу, згідно з якою субстанцією, що переноситься, є осереднена за об'ємом рідкої і твердої фаз температура, що характеризує міру енергії насиченого рідиною пористого тіла в цілому. Згідно з цією моделлю рівняння енергії у пористому середовищі записується у вигляді (2). Вказані рівняння доповнюються рівняннями нерозривності. (3).

У наведених рівняннях: c — емпірично визначасий коефіцієнт інерції, що залежить від якостей, типу і характеристик пористого середовища, індекс "ж" визначає якості рідкої фази, індекс "Т" визначає якості твердої фази, T — температура, λ — ефективна теплопровідність середовища, q_v — потужність

джерел стоків тепла, ε - пористість середовища, $\bar{t}$ - час, $\bar{\omega}$ - швидкість, що являє собою осереднену величину, ρ - щільність, c_p - питома теплоємність при постійному тиску, k - проникливість, μ_s - ефективна динамічна в'язкість, μ динамічна в'язкість. В ряді праць вважається $\mu_s = \mu$, найчастіше при розрахунках використовується рівність $\mu_s = \mu/\varepsilon$. Останній доданок в рівнянні (1) враховує дію архімедових сил, але оскільки ми нехтуємо впливом вільної конвекції, то у нашому випадку він враховуватись не буде.

На практиці існує можливість формулювання крайових двовимірних задач конвективно-дифузійного перенесення на основі рівнянь гідродинаміки і теплообміну для пористих середовищ. Таке формулювання має цікаву особливість. Граничні значення проникності і пористості відповідають двом різним фазовим станам цих матеріалів: ($\kappa = \infty; \varepsilon = 1$) - рідина і тверде тіло ($\kappa = 0; \varepsilon = 0$). І задаючи граничні значення в рівняннях перенесення, можна моделювати процеси граничних станів пористого тіла.[6]

Проведемо безрозмірювання системи рівнянь (1)-(3), додавши до лівої частини першого рівняння конвективний член

$$\frac{\rho(\bar{\omega} \cdot \nabla) \bar{\omega}}{\varepsilon^2}$$

для урахування конвективного перенесення імпульсу в пористих середовищах.

Візьмемо l , $\bar{\omega}$, ΔT за характерні лінійні розмір, швидкість, температуру в області відповідно. $\bar{t}$ - розмірний час

Математична постановка крайової задачі про течію рідини і теплообмін у плоскому каналі з оберненою назад сходинкою при наявності пористої вставки після безрозмірювання буде мати вигляд:

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{t}} + \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial(U^2)}{\partial X} + \frac{\partial(VU)}{\partial Y} \right] + \frac{\varepsilon}{Da} \left[\frac{1}{Re} + C\sqrt{Da|W|} \right] U = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) - \varepsilon \frac{\partial p}{\partial X} \quad (4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \bar{t}} + \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial(UV)}{\partial X} + \frac{\partial(V^2)}{\partial Y} \right] + \frac{\varepsilon}{Da} \left[\frac{1}{Re} + C\sqrt{Da|W|} \right] V = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) - \varepsilon \frac{\partial p}{\partial Y} \quad (5)$$

$$Pr \left\{ \kappa_p \cdot Re \frac{\partial \theta}{\partial \bar{t}} + Re \left[\frac{\partial(U\theta)}{\partial X} + \frac{\partial(V\theta)}{\partial Y} \right] \right\} = \frac{\partial}{\partial X} \left(A \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(A \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) \quad (6)$$

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (7)$$

Система рівнянь (4)-(7) доповнюється наступними крайовими умовами:

1. Початкові $V|_{t=t_0} = 0$; $P|_{t=t_0} = -3(x-L)/Re$; $\theta|_{t=t_0} = 0$; $U|_{t=t_0} = \frac{3}{2}(1-y^2)$.

2. На вході у канал задається профіль Пуазейля, який для конкретного випадку має певний вигляд

$$U|_{x=0} = \frac{3}{2}(1-y^2); \quad V|_{x=0} = 0; \quad \theta|_{x=0} = 0.$$

3. На твердих стінках задаються умови "прилипання" та умова рівності теплових потоків.

$$V_{ж}|_{\Gamma_m} = V_m|_{\Gamma_m} = 0; \quad \theta|_{y=H+a} = 0, \quad \theta|_{y=0} = 1 \quad 0 < X < L; ;$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial X} \right|_{0 \leq y \leq a, x=0} = 0; \quad A_{ж} \left. \frac{\partial \theta_{ж}}{\partial n_{\Gamma}} \right|_{\Gamma_T} = A_T \left. \frac{\partial \theta_T}{\partial n_{\Gamma}} \right|_{\Gamma_T};$$

де Γ_m - межа поділу фаз, n - нормаль до Γ_m . У випадку зробленого вище безрозмірювання $A_{ж}=1$, $A_m=A$.

4. На межі поділу фаз Γ_n (рідина - пористе середовище) ставляться умови нерозривності компонент вектора швидкості, тиску, температури, а також умови зрощування теплового потоку, нормального і дотичного напруження.

$$U_{ж}|_{\Gamma_n} = U_n|_{\Gamma_n}; \quad V_{ж}|_{\Gamma_n} = V_n|_{\Gamma_n}; \quad P_{ж}|_{\Gamma_n} = P_n|_{\Gamma_n}; \quad \theta_{ж}|_{\Gamma_n} = \theta_n|_{\Gamma_n}$$

$$\lambda_{жс} \frac{\partial \theta_{жс}}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{П}} = \lambda_{э} \frac{\partial \theta_n}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{П}} ; \quad \mu_{жс} \frac{\partial U_{жсn}}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{П}} = \mu_{э} \frac{\partial U_{nn}}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{П}} ;$$

$$\mu_{жс} \left(\frac{\partial U_{жс\tau}}{\partial n} + \frac{\partial U_{жсn}}{\partial \tau} \right) \Big|_{\Gamma_{П}} = \mu_{э} \left(\frac{\partial U_{n\tau}}{\partial n} + \frac{\partial U_{nn}}{\partial \tau} \right) \Big|_{\Gamma_{П}} .$$

Чисельний розв'язок задачі, отриманий з використанням методу скінчених елементів, дав можливість проаналізувати характер течії в каналі з пористою вставкою. За результатами розрахунків були побудовані ізолінії функції струму, ізотерми, ізобари, а також профілі компонент швидкості і температури у різних перерізах осі OX при числах Рейнольдса від 10 до 250 для різних значень пористості середовища. Розглядався випадок, коли висота пористої вставки $a=1$, $H=1$, $L=20$, $D=2$.

На рис.2 подана діаграма, що зображує профіль вертикальної компоненти швидкості для випадку, коли $\varepsilon=0.4$, а число Рейнольдса $Re=100$.

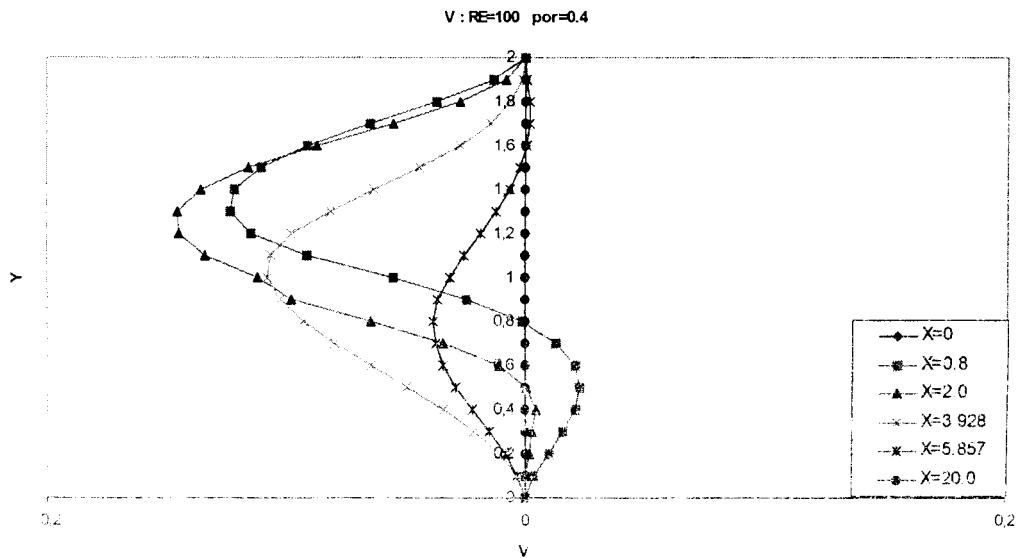


Рис. 2.

Приклад ізоліній функції струму зображує рис.3, що відповідає випадку, коли $\varepsilon=0.6$ при числах $Re=50, 60, 70$.

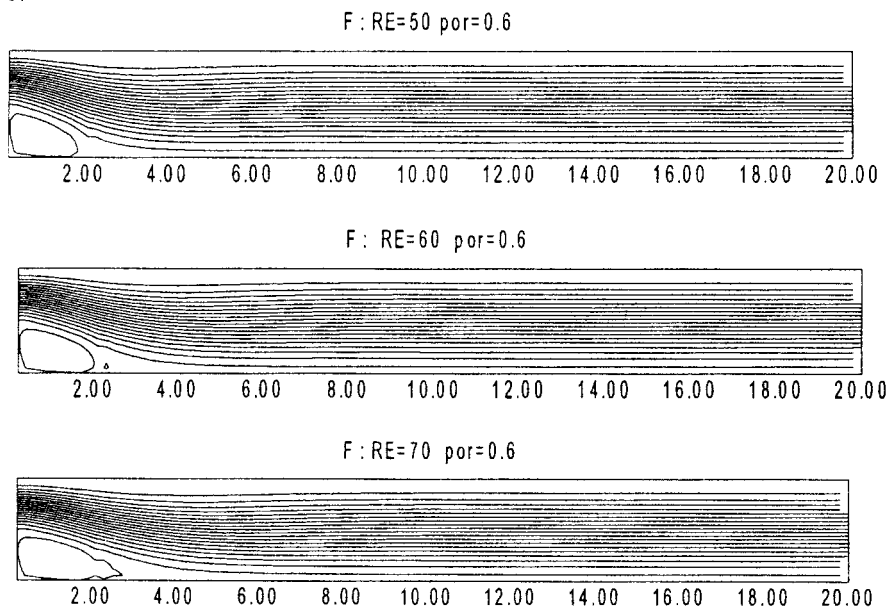


Рис. 3.

Порівняльний аналіз розвитку течії рідини у каналі при різних значеннях пористості ($\varepsilon=0.4$; $\varepsilon=0.6$; $\varepsilon=1.0$) дозволив побачити, що і при наявності в каналі пористої вставки, і при її відсутності при певних значеннях числа Рейнольдса спостерігається утворення вихору у лівому нижньому куті каналу, що обумовлено геометрією області. Слід зауважити, що згідно означенню пористості значення $\varepsilon=1.0$ відповідає випадку, коли у сходинці замість пористого середовища знаходиться рідина.

Заслугує уваги той факт, що при $Re=60$ у каналах, що містять пористу вставку, зароджується другий вихор біля границі пористої сходинки. Через відсутність аналогічного явища при $\varepsilon=1.0$ можна припустити, що причиною появи нового вихору є саме наявність пористої вставки.

Для $\varepsilon=0.4$; $\varepsilon=0.6$ при збільшенні числа Рейнольдса спостерігається злиття двох вихорів. При подальшому зростанні значення Re для $\varepsilon=0.4$ спостерігається поява третього вихору, його злиття з попереднім вихором, а при $Re=240$ - утворення пристінного вихору на верхній стінці каналу. При $\varepsilon=0.6$ не відбувається зародження третього вихору, а спостерігається зростання розміру об'єднаного вихору, що, ймовірно, пояснюється збільшенням значення пористості.

На рис.4 зображені ізотерми при $\varepsilon=0.6$ і числах $Re=10, 20, 40$.

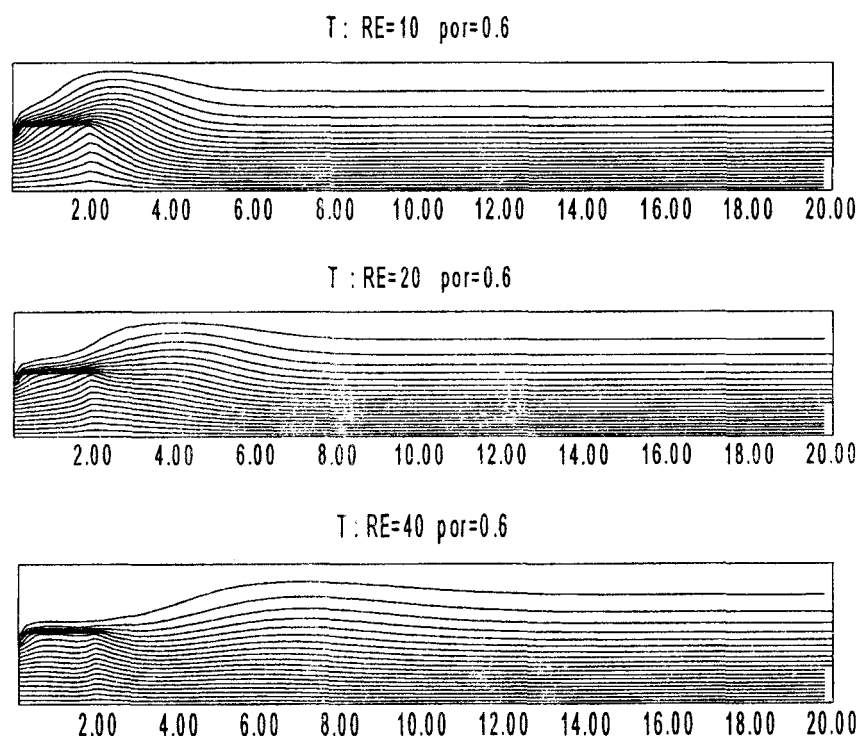


Рис. 4.

Аналіз ізотерм дозволяє зробити висновок про фізичність отриманих результатів, бо рідина прогрівається біля стінки каналу з більш високою температурою, а ізотерми змінюють свою форму на границі між рідиною і пористою вставкою, що пояснюється різницею між значеннями їх теплопровідності.

РЕЗЮМЕ

Рассмотрена модельная задача о движении жидкости в плоском канале с пористой вставкой. Для описания гидродинамики течения использовалась модель Дарси-Бринкмана-Форшхаймера. Результаты представлены в виде диаграмм.

SUMMARY

Deals with the model problem about flow of fluid in the plain channel with the porous insertion. The hydrodynamic of the flow is described by Darcy-Brinkman-Forsheimer model. The results of the solution are represented on the diagrams.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кусковский В.С., Кашеваров А.А., Рассказов Н.М., Рыбакова С.Т. Экологические проблемы использования подземных вод Кузбасса // Инженерная экология .-1999.-№ 5.-С. 11-17.
2. Бреховских В.Ф., Волкова З.В., Перекальский В.М. Гидроэкология: к проблеме вторичного загрязнения водных объектов // Инженерная экология .-1999.-№ 5.-С. 18-23.
3. Камнев Е.Н., Рыбальченко А.И. Глубинное захоронение жидких радиоактивных отходов предприятий атомной промышленности // Инженерная экология .-2001.-№ 1.-С. 2-9.
4. Далабаев У. Об одном подходе к моделированию течений при обтекании пористых сред вязким потоком // Теплофизика и аэромеханика.-1998.-Т.5, № 1.-С. 53-58.
5. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.1-М.: Наука,1987.- 464с.
6. Кочубей А.А., Рядно А.А. Численное моделирование процессов конвективного переноса на основе метода конечных элементов. – Днепропетровск: ДГУ, 1991.- 188 с.

Надійшла до редакції 18.05.2002 р.

УДК 537.84:669.713.7

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МГД – ПРОЦЕССОВ В АЛЮМИНИЕВЫХ ЭЛЕКТРОЛИЗЕРАХ

И.Д. Борисов, С.А. Никифоров*, Н.Ф. Пацегон, Ю.И. Руднев, А.П. Скворцов*

Харьковский национальный университет

*Всероссийский алюминиево-магниевый институт, Россия

Введение.

МГД – процессы в алюминиевых электролизерах большой мощности относятся к числу факторов, оказывающих наиболее существенное влияние на технологический режим электролиза. Интенсивные вихревые течения расплава, перекосы и колебания поверхности раздела «металл – электролит» приводят к значительному снижению выхода алюминия по току и повышению удельных энергозатрат. К настоящему времени выполнен большой объем экспериментальных и теоретических исследований, разработаны приближенные схемы и методы расчета основных параметров МГД – течений расплава [1-9]. Вместе с тем, в связи с возрастающими требованиями к количественной достоверности результатов вопросы математического моделирования по-прежнему остаются весьма актуальными. Активизация исследований в этой области, наблюдаемая в последние годы, связана с разработками сверхмощных электролизеров на силу тока 300 – 400 кА. рядом ведущих фирм – производителей алюминия. В данной работе исследуются стационарные течения расплава, формы поверхности раздела «металл – электролит» и волновые движения расплава. Предложены расчетные схемы, позволяющие учитывать практически все конструктивные и технологические параметры электролизера, существенные для МГД – процессов.

1. Постановка задачи.

Ограничиваясь в дальнейшем рассмотрением электролизеров с предварительно обожженными анодами (рис. 1), обозначим через Ω_k ($k = \overline{1,6}$) области, соответствующие в порядке возрастания индекса k расплавам алюминия, электролиту, анодному массиву, траверсам и катодным стержням, через Γ_k – границу области Ω_k , Γ_{ik} – общую часть границы двух соприкасающихся

областей Ω_i, Ω_k . Пусть $\Omega_0 = R^3 \setminus \bigcup_{k=1}^6 \Omega_k$. По-

тенциал электрического поля Φ и токораспределение $\vec{j}$ определяются следующей системой уравнений и граничных условий:

$$\Omega_k: \operatorname{div}(\sigma_k \nabla \Phi^{(k)}) = \begin{cases} \operatorname{div}(\vec{v}^{(1)} \times \vec{B}) & (k=1) \\ 0 & (k=\overline{2,6}) \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\Gamma_{ik}: \{\Phi\} = -\kappa_{ik}(\vec{n} \cdot \vec{j}); \quad \{\vec{n} \cdot \vec{j}\} = 0; \quad (ik = 12, 14, 23, 35, 46); \quad (1.2)$$

$$\Gamma_{0k}: \vec{n} \cdot \nabla \Phi^{(k)} = 0 \quad (k = \overline{1,6}); \quad (1.3)$$

$$\Gamma_5^{(i)}: \Phi^{(5)} = u^{(5,i)} \quad (i = \overline{1,2A}); \quad (1.4)$$

$$\Gamma_6^{(k)}: \Phi^{(6)} = u^{(6,k)} \quad (k = \overline{1,2K}); \quad (1.5)$$

$$\Omega_k: \vec{j}^{(k)} = \begin{cases} \sigma_I(-\nabla \Phi^{(1)} + \vec{v}^{(1)} \times \vec{B}) & (k=1) \\ -\sigma_k \nabla \Phi^{(k)} & (k=\overline{2,6}) \end{cases} \quad (1.6)$$

Здесь σ_k – удельная электропроводность среды в области Ω_k ; κ_{ik} – удельное контактное сопротивление на поверхности Γ_{ik} ; $\vec{v}$ – поле скоростей расплава; $\vec{B}$ – индукция магнитного поля; $u^{(5,i)}, u^{(6,k)}$ – потенциалы электрического поля на выходных сечениях $\Gamma_5^{(i)}, \Gamma_6^{(k)}$ анодных и катодных стержней; A, K – количество анодных и катодных стержней вдоль продольной стороны ванны. Фигурные скобки в (1.2)

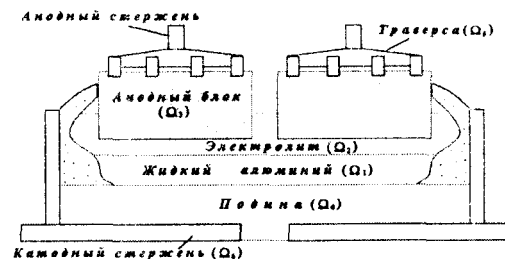


Рис. 1. Схема электролизера

обозначают скачок заключенной в них величины на поверхности $\Gamma_{ik} : \{\Phi\} \equiv (\Phi^{(k)} - \Phi^{(i)})|_{\Gamma_{ik}}$. Единичный вектор нормали $\vec{n}$ к поверхности Γ_{ik} условимся направлять в сторону области Ω_k .

Расчетная схема, принятая при определении электрического поля, включает в себя катодный узел предшествующего рассматриваемому и анодный узел следующего (по ходу тока серии) электролизеров, а также все элементы соединяющей их ошиновки. Электрические потенциалы металла $\Phi^{(+l)}$, $\Phi^{(-l)}$ соседних электролизеров, включенных в расчетную схему, с достаточной для практических целей точностью можно считать постоянными, полагая $\Phi^{(+l)} = U = const$, $\Phi^{(-l)} = 0$. Рассматривая дополнительные элементы расчетной схемы как линейную электрическую цепь, обозначим через J_i ($i = \overline{1, p}$) токи, проходящие по i -му звену, через u_k ($k = \overline{1, q}$) потенциалы в узлах этой цепи. Пусть J_0 - полный ток, протекающий через последовательно соединенные электролизеры (ток серии). Соотношения, связывающие J_i , U , u_k запишем в виде.

$$\begin{pmatrix} I \\ R \\ S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J \\ u \end{pmatrix} = 0; \quad J := (J_0, J_1, \dots, J_p)^t, \quad u := (U, u_1, \dots, u_q)^t \quad (1.7)$$

Здесь I , S - матрицы, определяемые схемой ошиновки, R - матрица сопротивлений звеньев дополнительной электрической цепи. Матрица R включает в себя предварительно рассчитываемые матрицы сопротивлений катодного и анодного узлов соседних электролизеров.

Отметим, что при заданных токе серии J_0 , поле скоростей расплава $\vec{v}$ и индукции магнитного поля $\vec{B}$ уравнения и граничные условия (1.1) - (1.6), дополненные соотношениями (1.7), полностью определяют электрическое поле и токораспределение в рассматриваемом электролизере, включая ошиновку.

В нормальном технологическом режиме работы электролизера магнитное поле можно считать стационарным. Стационарное приближение будем использовать также при исследовании низкочастотных колебаний расплава. В этом случае

$$R^3 : \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (1.8)$$

$$\Gamma_{ik} : \{\vec{n} \times \vec{H}\} = 0, \quad \{\vec{n} \cdot \vec{B}\} = 0; \quad \vec{H}(\vec{x}, t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty \quad (1.9); (1.10)$$

$$\Omega_{0k} : \vec{B} = \mu_0 \mu_k(H) \vec{H} \quad (k = \overline{1, m}); \quad R^3 \setminus \bigcup_{k=1}^m \Omega_{0k} : \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (1.11)$$

где μ_0 - магнитная постоянная, μ_k - относительная магнитная проницаемость ферромагнитных деталей электролизера, расположенных в области $\Omega_{0k} \subset \Omega_0$. Функции $\mu_k(H)$ ($k = \overline{1, m}$) считаются при этом заданными.

Течение расплава в ванне электролизера является, как правило, турбулентным. Задавая поверхность раздела «металл - электролит» Γ_{12} и свободную поверхность электролита $\tilde{\Gamma}_2$ в виде: $z = f_k(x, y)$, $k = 1, 2$ для определения функций f_k и осредненного поля скоростей расплава $\vec{v}$ примем следующую систему уравнений и граничных условий:

$$\Omega_k : \rho_k \left(\frac{\partial \vec{v}^{(k)}}{\partial t} + (\vec{v}^{(k)} \cdot \nabla) \vec{v}^{(k)} \right) = -\nabla p^{(k)} + \operatorname{div} T^{(k)} + \rho_k \vec{g} + \vec{j}^{(k)} \times \vec{B}^{(k)}, \quad (1.12)$$

$$\operatorname{div} \vec{v}^{(k)} = 0 \quad (k = 1, 2);$$

$$\Gamma_{12} : \{\vec{v}\} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_1 = v_z, \quad \left\{ -p \delta_i^j + \tau_i^j \right\} n_j = 0 \quad (i = \overline{1, 3}) \quad (1.13)$$

$$\tilde{\Gamma}_2 : \frac{\partial f_2}{\partial t} + \vec{v}^{(2)} \cdot \nabla f_2 = v_z^{(2)}, \quad \left(-p^{(2)} \delta_i^j + \tau_i^j \right) n_j = -p_0 n_i \quad (i = \overline{1, 3}) \quad (1.14)$$

$$\Gamma_1 \setminus \Gamma_{12} : \vec{v}^{(1)} = 0; \quad \Gamma_2 \setminus \tilde{\Gamma}_2 : \vec{v}^{(2)} = 0 \quad (1.15)$$

где $T = \left[\tau_i^j \right]$ - тензор турбулентных напряжений, $p_0 = const$ - давление на свободной поверхности электролита.

В проведенных расчетах использовались различные модели турбулентности ($k-\varepsilon$, $k-L$ и др.), показавшие качественно совпадающие результаты. Дополнительные уравнения и замыкающие соотношения -

шения этих моделей, ввиду их громоздкости, здесь не приводятся.

2. Стационарные течения расплава.

Расчет стационарных течений расплава сводится к итерационной процедуре последовательного уточнения электрического и магнитного полей, форм поверхности раздела «металл - электролит» и свободной поверхности электролита, поля скоростей металла и электролита. На каждом шаге итерационного процесса потенциал электрического поля в Ω_k ($k = \overline{1,6}$) представляется в виде:

$$\Phi^{(k)} = \Phi_0^{(k)} + \sum_{i=1}^{2A} \Phi_{li}^{(k)} u^{(5,i)} + \sum_{i=1}^{2K} \Phi_{2i}^{(k)} u^{(6,i)} \quad (k = \overline{1,6}) \quad (2.1)$$

Потенциал Φ_0 , индуцируемый движением расплава, является решением краевой задачи (1.1) – (1.6) при $\vec{v} \neq 0$ и однородных граничных условиях (1.4), (1.5). Потенциалы Φ_{li} ($i = \overline{1,2A}$), Φ_{2i} ($i = \overline{1,2K}$) определяются как решения этой задачи при $\vec{v} = 0$, удовлетворяющие вместо (1.4), (1.5) условиям:

$$\begin{aligned} \Gamma_5^{(j)} : \quad \Phi_{li} &= \delta_i^j \quad \forall i, j = \overline{1,2A}; & \Gamma_6^{(j)} : \quad \Phi_{li} &= 0 \quad \forall i, j = \overline{1,2K}; \\ \Gamma_5^{(j)} : \quad \Phi_{2i} &= 0 \quad \forall i, j = \overline{1,2A}; & \Gamma_6^{(j)} : \quad \Phi_{2i} &= \delta_i^j \quad \forall i, j = \overline{1,2K}; \end{aligned}$$

Фактическое построение этих решений осуществляется численно на основе метода конечных элементов. По найденным решениям и заданному току серии J_0 определяются токи J_i ($i = \overline{1,p}$) в звеньях ошиновки, что сводится к численному решению системы линейных алгебраических уравнений (1.7). Одновременно определяются потенциалы $u^{(5,i)}$ ($i = \overline{1,2A}$), $u^{(6,i)}$ ($i = \overline{1,2K}$). Этим завершается построение электрического поля на каждом шаге общего итерационного процесса.

Напряженность магнитного поля представляется в виде: $\vec{H} = \vec{H}_J + \vec{H}_f$, где $\vec{H}_J$ - токовая составляющая, $\vec{H}_f$ - возмущение поля, вносимое ферромагнитными деталями электролизера. Токовая составляющая $\vec{H}_J$ определяется, как обычно, по формуле Био-Савара. Определение $\vec{H}_f$ сводится к решению нелинейного интегрального уравнения.

По найденным значениям токов и магнитного поля в расплаве определяется объемная плотность силы Лоренца $\vec{F} = \vec{j} \times \vec{B}$ и осуществляется ее разложение на градиентную и соленоидальную составляющие: $\vec{F} = -\nabla \chi + \vec{F}'$. Потенциал $\chi^{(k)}$ силы Лоренца в Ω_k ($k = \overline{1,2}$) является решением следующей краевой задачи:

$$\Omega_k : \quad \Delta \chi^{(k)} = -\text{div} \vec{F}^{(k)}; \quad \Gamma_k : \quad \vec{n} \cdot \nabla \chi^{(k)} = -\vec{n} \cdot \vec{F}^{(k)} \quad (k = \overline{1,2}) \quad (2.2)$$

Давление $p^{(k)}$ в Ω_k ($k = \overline{1,2}$) представляется в виде:

$$p^{(k)} = -(\chi^{(k)} + \rho g z) + p'^{(k)} + \text{const} \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в динамическое условие (1.13), получим

$$f_1 = \frac{1}{g(\rho_1 - \rho_2)} \left(\{ \chi \}_{\Gamma_{12}} + \{ -p' + \tau'_i n'_i n_j \}_{\Gamma_{12}} \right) + c \quad (2.4)$$

Аналогичное соотношение для f_2 легко следует из динамического условия (1.14). Эти соотношения позволяют последовательно уточнять формы поверхности раздела «металл - электролит» и свободной поверхности электролита.

Эксперименты показывают, что при длительной работе электролизера в стационарном режиме подосва анода, выгорая в процессе электролиза, достаточно точно повторяет форму поверхности «металл - электролит». В связи с этим после уточнения формы поверхности металла проводится уточнение формы подосвы анода. Предусмотрены также режимы расчета с нарушением эквидистантности этих поверхностей. Такие режимы позволяют моделировать ситуации, возникающие при опускании или подъеме анодного массива, когда подосва анода, в силу относительной медленности процессов выгорания, сохраняет свою форму, а поверхность «металл - электролит», достаточно быстро перестраиваясь, приобретает новую форму.

Дискретизация уравнений движения расплава (1.12) осуществляется на основе метода Галеркина с конечноэлементными базисными функциями. Разработаны итерационные методы решения получаемой

при этом системы нелинейных алгебраических уравнений. При выборе конечноэлементного базиса в пристенной области и вблизи поверхности раздела «металл - электролит» учитывается турбулентный характер течения расплава.

Проведенные вычисления позволили выявить целый ряд характерных особенностей влияния конструктивных и технологических параметров электролизера на токораспределение в анодном и катодном узлах, конфигурацию магнитного поля и МГД – течения расплава. В качестве примера расчетов на рис. 2 показаны формы поверхности «металл - электролит» для электролизера на силу тока 175 кА. Как показали вычисления, перекосы этой поверхности, обусловлены, в основном, градиентной составляющей силы Лоренца. Величина перекосов в значительной мере определяется токораспределением в катодном узле. Для электролизеров с чередующимся расположением коротких и длинных катодных стержней характерна существенная неравномерность токовой нагрузки по стержням. Неравномерность токораспределения заметно возрастает с увеличением числа катодных стержней, подключенных к одному пакету катодных шин. Зона перехода с одного пакета шин на другой является, как правило, зоной повышенной интенсивности вихревых течений металла. Поля скоростей металла и электролита существенно различны. Несогласованность этих полей является, по-видимому, одной из основных причин, приводящих к интенсификации процессов переноса растворенного в электролите алюминия к аноду и, как следствие, к потерям металла.

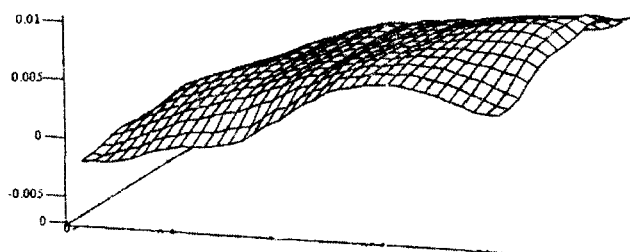


Рис. 2 Форма поверхности «металл - электролит»

3. Линейные волновые процессы

С увеличением силы тока J_0 и/или уменьшением междуполусного расстояния (МПР) h стационарные течения расплава сменяются волновым режимом движения. С появлением волн на поверхности «металл - электролит» и ростом их амплитуды заметно снижаются технико-экономические показатели работы электролизера. Определение критических значений тока серии J_0^* является, таким образом, одной из основных задач, возникающих при исследовании МГД – процессов в алюминиевых электролизерах.

Проведенные на промышленных электролизерах экспериментальные исследования показывают, что при малых отклонениях J_0 от критического значения J_0^* возбуждаемые колебания носят синусоидальный характер, причем амплитуды колебаний поверхности «металл - электролит», токов по анодным стержням и других электрофизических величин также малы. Это позволяет утверждать, что возбуждаемые колебания расплава носят линейный характер и могут быть описаны линеаризованными уравнениями (1.1) – (1.15).

Ограничимся исследованием низкочастотных колебаний расплава, длина волны которых соизмерима с горизонтальными размерами ванны электролизера. Взаимодействием возмущенного и стационарного течений будем пренебрегать. В линейном приближении об условиях возбуждения колебаний можно судить, рассматривая эволюцию возмущений поля скоростей $\vec{v}$, поверхности «металл - электролит» N и других величин, зависящих от времени по экспоненциальному закону,

$$(\vec{v}, N, \dots)(t, \vec{x}) = \exp(\lambda t)(\vec{v}, N, \dots)(\vec{x})$$

Решение полученной при этом спектральной краевой задачи (относительно комплексных собственных значений λ и мод колебаний) осуществляется численно на основе метода Галеркина. Приближенное решение спектральной краевой задачи отыскивается в виде:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n a_i \vec{v}_i(\vec{x}), \quad N = \sum_{i=1}^n a_i N_i(\vec{x}), \dots$$

где $\vec{v}_i$, N_i ($i = \overline{1, n}$) – базисные функции, и сводится к алгебраической проблеме собственных значений для квадратичного пучка матриц

$$(\lambda^2 A + \lambda(D + Q) + C + M)a = 0, \quad a := (a_1, a_2, \dots, a_n)^T \quad (3.1)$$

Здесь A , C - матрицы кинетической и потенциальной энергий, D , Q - матрицы вязкой и джоулевой диссипации, M - матрица МГД - взаимодействия.

Базисные функции $\bar{v}(\bar{x})$, $k = \overline{1, n}$ выбирались в виде комбинации предварительно определяемых собственных функций задачи о потенциальных колебаниях расплава (в предположении пренебрежимо малой вязкости) и функций типа пограничного слоя вблизи твердых стенок и поверхности «металл - электролит». Собственные числа $\lambda_k = \gamma_k + i\omega_k$, $k = \overline{1, 2n}$ и отвечающие им собственные векторы a_k , $k = \overline{1, 2n}$ задачи (3.1) определялись численно (QR - алгоритм).

Обозначая всю совокупность конструктивных и технологических параметров электролизера через q , условие возбуждения поверхностных волн (условие МГД - неустойчивости) можно записать в виде: $\max_k \gamma_k(q) > 0$. Неравенство $\max_k \gamma_k(q) < 0$ отвечает случаю МГД - устойчивости (поверхностные волны отсутствуют), а уравнение $\max_k \gamma_k(q) = 0$ опреде-

ляет границу области устойчивости в пространстве параметров электролизера.

Разработан комплекс программ, позволяющий определять критические значения тока серии $J_{кр}$, частоты и формы периодических волн в зависимости от МПР, формы рабочего пространства и других параметров электролизера. На рис. 3 показаны результаты расчета и экспериментальных замеров $J_{кр}(h)$ для промышленного электролизера на силу тока 160 кА. Заниженные расчетные значения $J_{кр}$ можно объяснить тем, что погранслоиные базисные функции недостаточно полно учитывают диссипативные эффекты в расплаве.

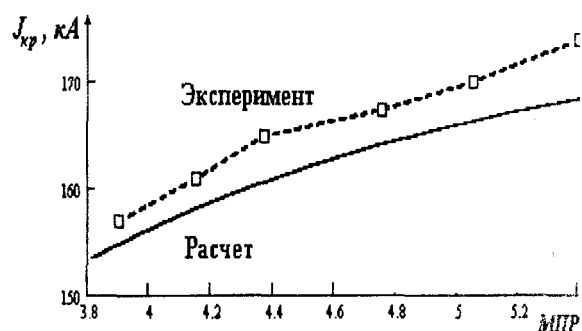


Рис. 3. Зависимость $J_{кр}$ от МПР.

РЕЗЮМЕ

Розвинуті ефективні методи та запропоновані програми розрахунків магнітогідродинамічних процесів в електролізерах для виробництва алюмінію. Для різних видів виробничих електролізерів проведені розрахунки магнітних та електричних полів, стаціонарних форм поверхні розділу «метал - електроліт» та вихорових течій. Визначені критичні значення струму серії, відповідні режиму збудження хвиль на поверхні «метал - електроліт» в залежності від міжполюсної відстані, середнього рівня металу та інших конструктивних і технологічних характеристик електролізерів. Отримані результати співставлені з даними експериментальних досліджень.

SUMMARY

The effective methods and calculation programs of MHD - processes in aluminium reduction cells are developed. The numerical results describing a distribution of electric, magnetic fields and vorticity of velocity in different kinds of industrial cells are obtained. The critical values of the electric current corresponding the excitation of surface waves on the metal - cryolite interface are determined depending on anode - cathode distance, middle metal level, another technological and constructive parameters. The theoretical results with experimental ones are compared.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sele T. Instabilities of then Metal Surface in Electrolytic Cells //Light Metals - 1977. - P. 7-24
2. Sneyd A.D. Stability of Fluid Layers Carrying a Normal Electrical Current. // J.Fluid Mech. - 1985. - P. 223-236.
3. Urata N. Magnetics and Metal Pad Instability // Light Metal - 1985. - P. 581 - 591.
4. Moreau R., Ziegler D. Stability of Aluminium Cells - A New Approach. // Light Metals 1986. - P. 359 - 364.
5. Desloux J., Romero M.V. On the Analysis by Perturbation Methods of the Anoc Current Fluctuations in an Electrolitical Cell for Al // Light Metals - 1989. -P. 237-243.
6. Bojarevich V., Romero M.V. Long Waves Instability of Liquid Metal - Electrolyte Interface in Aluminium Electrolysis Cells: a Generation of Sele's Criterion // Euro.J.Mech. B/Fluids - 1994 - 13 - P. 33-56.
7. Sneyd A.D., Wang A. Interfacial Instability due to MHD Mode Coupling in Aluminium Reduction Cells // J.Fluid Mech - 1994 - 263 - P. 243-259.
8. Davidson P.A., Lindsay J.R. Stability of Interfacial Waves in Aluminium Reduction Ceils. // J.Fluid Mech. - 1998 - 362 - P. 273-295.
9. Деркач А.С., Скворцов А.П., Цыбуков И.К. и др. Трехмерная модель расчета МГД - параметров алюминиевого электролизера // Цветные металлы. - 2001 - №1 - С. 30-34.

Надійшла до редакції 14.05.2002 р.

УДК 551.463

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТА В ТУРБУЛЕНТНОЙ МОРСКОЙ ВОДЕ

В.В. Никишов, В.В. Олексюк

Институт гидромеханики НАН Украины, г. Киев

При распространении света в среде со случайными неоднородностями происходят изменения амплитуды волны, фазы, угла прихода. Эти возмущения носят случайный характер. Одной из причин появления указанных неоднородностей является турбулентность, которая, например, в стратифицированной атмосфере обуславливает существование случайных флуктуаций температуры и влажности, а значит и оптического показателя преломления (ПП).

Теоретические основы изучения характеристик световой волны, распространяющейся в турбулентной атмосфере, разработаны в монографии [1], обобщение результатов расчетов характеристик световой волны приведено в [2]. В этих работах показано, что статистические характеристики флуктуаций параметров световой волны зависят от спектра флуктуаций температуры. Как правило, для расчетов использовалась модель спектра флуктуаций температуры, которая для больших масштабов соответствует закону Обухова-Коррсины $E_T \approx \kappa^{-5/3}$ (инерционный интервал), для малых масштабов спектр затухает по экспоненциальному закону (диссипативный интервал). Здесь κ - волновое число. Дальнейшее развитие теоретических основ распространения света в турбулентной атмосфере основано на использовании более точных моделей спектра флуктуаций ПП [3], учете дифракционных эффектов [4], сильных флуктуаций ПП [5].

Аналогичные вопросы распространения света в турбулентной водной среде, в частности, в морской воде, изучены в меньшей степени. Показатель преломления морской воды n определяется в реальных условиях, в основном, температурой T и соленостью S . В области больших масштабов спектры флуктуаций температуры E_T и солености E_S , как и в атмосфере, подчиняются закону Обухова-Коррсины: $E_T \approx \kappa^{-5/3}$ и $E_S \approx \kappa^{-5/3}$ [1]. Для малых масштабов кинематический коэффициент вязкости ν значительно превышает молекулярный коэффициент температуропроводности χ_T и тем более молекулярный коэффициент переноса соли χ_S . Это приводит к тому, что в области, где вязкость уже оказывает существенное влияние на флуктуации скорости, влияние температуропроводности и диффузии соли на флуктуации температуры и солености незначительно. Здесь можно выделить вязко-конвективный спектральный интервал (интервал Бэтчелора), в котором спектры флуктуаций температуры и солености пропорциональны κ^{-1} : $E_T \approx \kappa^{-1}$, $E_S \approx \kappa^{-1}$ [1], а спектр флуктуаций скорости затухает по экспоненциальному закону.

Взаимное влияние флуктуаций температуры и солености может приводить к аномальному поведению спектра флуктуаций ПП в области малых масштабов, что соответствующим образом проявляется в статистических характеристиках распространяющихся волн. Впервые такое предположение было высказано Хиллом [6]. В работе [7] для локально однородной и изотропной турбулентности на основе предположения о локальности переноса энергии турбулентности по спектру (модель Коррсины-Пао [2]) получено выражение для спектра флуктуаций показателя преломления E_n , зависящее от скоростей диссипации (выравнивания) флуктуаций температуры ε_T и солености ε_S , которые вместе со скоростью диссипации турбулентной энергии ε определяют статистический режим флуктуаций ПП. Ограничиваясь линейным приближением, флуктуирующая часть оптического показателя преломления принималась в виде $n = -\alpha T' + \beta S'$, где $\alpha = 2.6 \cdot 10^{-4}$ 1/град, $\beta = 1.75 \cdot 10^{-4}$ литр/г. На основе градиентной гипотезы была осуществлена параметризация указанных скоростей. В результате получено выражение, описывающее спектр E_n , в следующем виде

$$E_n(\kappa) = C_0 \varepsilon_n \varepsilon^{-1/3} \kappa^{-5/3} \left[1 + C_1 (\kappa \eta)^{2/3} \right] \Phi(\kappa \eta, \omega), \quad (1)$$

где

$$\Phi(\kappa \eta, \omega) = \frac{\omega^2 \theta \exp(-A_T \delta) + \exp(-A_S \delta) - \omega(1+\theta) \exp(-A_{TS} \delta)}{\omega^2 \theta + 1 - \omega(1+\theta)},$$

$$\omega = \frac{\alpha(dT_0/dz)}{\beta(dS_0/dz)}, \quad \theta = \frac{K_T}{K_S}, \quad \varepsilon_n = \alpha^2 \varepsilon_T + \beta^2 \varepsilon_S - 2\alpha\beta \varepsilon_{TS},$$

$$\delta = \frac{3}{2} C_I^2 (\kappa \eta)^{4/3} + C_I^3 (\kappa \eta)^2, \quad A_T = C_0 C_I^{-2} \chi_T \nu^{-1},$$

$A_S = C_0 C_I^{-2} \chi_S \nu^{-1}$, $A_{TS} = 0.5 \cdot C_0 C_I^{-2} (\chi_T + \chi_S) \nu^{-1}$, $T_0(z), S_0(z)$ - осредненные профили температуры и солёности, соответственно, $\eta = (\varepsilon^3 / \nu)^{1/4}$ - масштаб Колмогорова, K_T, K_S - коэффициенты турбулентной температуропроводности и диффузии соли, соответственно, C_0 - постоянная Обухова-Коррсины, $C_0 \cong 0.72$, C_I - постоянная, определяемая из сравнения с экспериментальными данными, $C_I \cong 2.35$ [3].

Для постоянных градиентов средних величин температуры и солёности $\omega = \alpha \Delta T_0 / \beta \Delta S_0$, где ΔT_0 и ΔS_0 - соответственно разности температуры и солёности между верхней и нижней границами рассматриваемой области. Величина ω определяет вклады температурного и солёностного полей в распределение поля оптического показателя преломления. Было показано, что в спектре E_n в зависимости от ω могут наблюдаться области аномального поведения, в частности, могут возникать локальные экстремумы. На рис. 1 в качестве примера представлен график функции $\varepsilon_n^{-1} \varepsilon^{1/3} \kappa^{5/3} E_n$ для $\theta = 1$ и $\omega = -1$. Видно, что в области малых параметров имеются локальные экстремумы спектра.

Рассмотрим некоторые статистические характеристики плоской волны, распространяющейся в турбулентной водной среде. Будем считать, что свободные заряды отсутствуют в водной среде, ток смещения равен нулю и магнитная проницаемость равна единице. Мы будем рассматривать распространение волн в турбулентной водной среде лишь на такие расстояния l , чтобы выполнялось условие $l/c \ll 2\pi/\omega_T$, где ω_T - частоты компонент турбулентности, вносящих существенный вклад во флуктуации поля световой волны. Тогда распространяющуюся волну можно считать монохроматической с фиксированной частотой $\tilde{\omega}$. После ряда преобразований систему уравнений Максвелла можно свести к одному уравнению относительно напряжённости электрического поля [1]

$$\Delta \vec{E}_* + k^2 \varepsilon_* \vec{E}_* = -\text{grad}(\vec{E}_* \text{grad} \ln \varepsilon_*), \quad (2)$$

где E_* - амплитуда напряжённости электрического поля, ε_* - диэлектрическая проницаемость, $k = \tilde{\omega}/c$.

Произведем оценку правой части уравнения (2). Полагаем, что флуктуации диэлектрической проницаемости малы. Тогда, выделяя среднее значение $\langle \varepsilon_* \rangle$, можно записать $|\varepsilon_f| \ll \langle \varepsilon_* \rangle = O(1)$, где ε_f - флуктуирующая часть диэлектрической проницаемости, причем $\langle \varepsilon_f \rangle = 0$. Учитывая, что неоднородности поля ε_f обусловлены турбулентностью, можно полагать, что $\text{grad} \varepsilon_f \approx \varepsilon_f / l^+$, где l^+ - размер турбулентных вихрей, вносящих существенный вклад во флуктуации электромагнитного поля. Мы ограничимся изучением флуктуаций параметров лишь для коротких волн, длины которых малы по сравнению с l^+ , т.е.

$$\lambda \ll l^+. \quad (3)$$

Для атмосферы в качестве l^+ обычно рассматривают масштаб Колмогорова η [1]. В водной среде минимальный масштаб, характеризующий флуктуации поля температуры, имеет вид $l^+ = l_T^+ = (\chi_T^3 / \varepsilon)^{1/4}$. Для условий океана характерное значение скорости диссипации энергии турбулентности $\varepsilon = 4 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2 \text{ сек}^{-1}$ [8], тогда $\eta \approx 2 \text{ мм}$. и $l_T^+ \approx 0.4 \text{ мм}$. и неравенство (3) выполняется. Неоднородности ε_f в водной среде определяются также и флуктуациями поля солёности. Оценка минимального масштаба флуктуаций солёности $l^+ = l_S^+ = (\chi_S^3 / \varepsilon)^{1/4}$ приводит к тому, что неравенство (3) не выполняется для инфракрасной области спектра. Но такие волны сильно поглощаются в воде и рассмотрение их распространения нецелесообразно. С другой стороны, неравенство (3) выполняется для электромагнитных волн видимого диапазона, распространяющихся в морской среде, в которой флуктуации ПП определяются турбулентными флуктуациями температуры и солёности. Переходя к уравнению (2), можно показать, учитывая неравенство (3), что правой частью можно пренебречь и уравнение можно представить в виде

$$\Delta\Phi + k^2 n_*^2 \Phi = 0, \quad (4)$$

где $n_* = \sqrt{\varepsilon_*}$ - показатель преломления, Φ - может обозначать любую из компонент вектора $\vec{E}_*$.

Задачу о распространении электромагнитных волн в турбулентной водной среде будем рассматривать в следующей формулировке. Пусть турбулентность сосредоточена лишь в некотором объеме V и на этот объем падает плоская волна. Полагаем, что флуктуации поля ПП отличны от нуля только в этом объеме V , вне его - $n_* = 0$. Для случая, когда показатель преломления мало меняется на длине волны, решение уравнения (4) можно искать в виде [1]

$$\Phi(\vec{r}) = A(\vec{r}) \exp[ik\mathcal{G}(\vec{r})], \quad (5)$$

где амплитуда $A(\vec{r})$ и эйконал $\mathcal{G}(\vec{r})$ - медленно меняющиеся функции.

Функцию $A(\vec{r})$ представляем в виде ряда по степеням малой величины k^{-1} и после подстановки в (4) получаем уравнение эйконала

$$\left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_j} \right)^2 - n_*^2 = 0. \quad (6)$$

Пусть среда со случайными неоднородностями показателя преломления занимает полупространство $x > 0$ и пусть на нее падает плоская монохроматическая волна $\Phi_0 = A_0 \exp(ikx)$. Мы будем рассматривать поле световой волны в некоторой точке $\vec{x}$ внутри турбулентной водной среды.

Введем для удобства величину среднеквадратичного отклонения флуктуаций диэлектрической проницаемости от среднего значения $\sigma = \sqrt{\langle (\varepsilon_* - \langle \varepsilon_* \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle \varepsilon_f^2 \rangle} \ll 1$. Здесь $\varepsilon_f = \sigma \psi$, где $\psi = \varepsilon_f / \sigma = O(1)$. Будем искать решение уравнения (6) в виде разложения по малому параметру σ , $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 + \sigma \mathcal{G}_1 + \sigma^2 \mathcal{G}_2 + \dots$. Тогда в нулевом приближении выражении для эйконала с точностью до членов второго порядка малости имеет вид [1]

$$\mathcal{G}(x, y, z) = x + \frac{1}{2} \int_0^x \varepsilon_f(\zeta, y, z) d\zeta. \quad (7)$$

Здесь интеграл вычисляется вдоль невозмущенного луча, в данном случае прямолинейного.

Корреляционная функция флуктуаций эйконала с учетом однородности флуктуаций ПП имеет вид

$$\Psi_{\mathcal{G}\mathcal{G}}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{4} \int_0^{x_1} d\zeta_1 \int_0^{x_2} d\zeta_2 \Psi_{\varepsilon\varepsilon}(\zeta_1 - \zeta_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2) d\zeta_2, \quad (8)$$

где $\Psi_{\varepsilon\varepsilon}$ - корреляционная функция флуктуаций диэлектрической проницаемости.

Выражая корреляционную функцию флуктуаций диэлектрической проницаемости через соответствующий спектр, в [9] показано, что для изотропных флуктуаций выражение (8) может быть представлено в следующем виде

$$\Psi_{\mathcal{G}\mathcal{G}}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \pi^2 x_{\min} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\varepsilon\varepsilon}(m) J_0(mr) m dm, \quad (9)$$

где $m = \sqrt{\kappa_2^2 + \kappa_3^2}$, $\vec{r} = (y_1 - y_2, z_1 - z_2)$, J_0 - функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Отсюда могут быть найдены выражения, описывающие дисперсию, продольную и поперечную корреляционные функции флуктуаций эйконала [1]. Мы остановимся более подробно на структурной функции фазы $\varphi = k\mathcal{G}$ [1,9]

$$D_\varphi(L, r) = 2\pi^2 k^2 L \int_0^\infty E_{\mathcal{G}\mathcal{G}}(\kappa) [1 - J_0(\kappa r)] \kappa d\kappa. \quad (11)$$

На основе последнего выражения был проведен численный расчет структурной функций фазы в случае, когда флуктуации ПП определяются флуктуациями температуры и солености. Подставляя выражение для спектра флуктуаций n , получаем

$$D_{\varphi} = g \int_0^{\infty} (\kappa \eta)^{-8/3} \Phi(\kappa \eta, \omega) [1 - J_0(\kappa r)] d(\kappa \eta), \quad (12)$$

где $g = C_0 \frac{8\pi^3}{\lambda^2} L \varepsilon^{-1/3} \varepsilon_n \eta^{5/3}$, λ - длина световой волны, L - расстояние, которое прошла световая волна. Здесь полагалось, что коэффициенты K_T, K_S равны друг другу.

На рис. 2 представлены нормированные по максимальным значениям графики структурных функций $\tilde{D}_{\varphi} = g^{-1} (r \kappa_B)^{-5/3} D_{\varphi}$. Здесь график 1 соответствует $\omega = -2$, график 2 - $\omega = -1$, график 3 - $\omega = -0.5$, график 4 - $\omega = -0.2$, график 5 - $\omega = 0$. В зависимости от величины ω происходит смещение положения максимума функции $\tilde{D}_{\varphi}$. Кроме того, графики становятся более наполненными, причем возникающие локальные выпуклости расположены по разные стороны от максимума. По мере уменьшения ω график функции $\tilde{D}_{\varphi}$ приближается к графику, который соответствует отсутствию флуктуаций температурного поля.

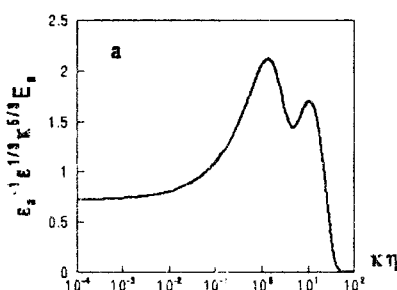


Рис. 1.

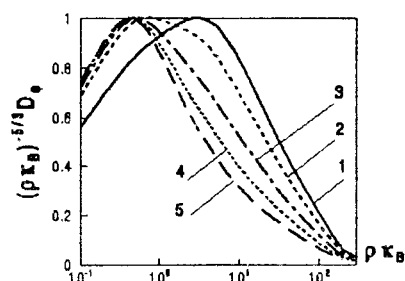


Рис. 2.

Таким образом, используя полученное в [7] выражения для спектра E_n , в приближении геометрической оптики рассмотрены некоторые статистические характеристики поля световой волны, в частности структурная функция фазы D_{φ} . Были проведены численные расчеты для конкретных распределений температуры и солёности. Сравнение с аналогичными результатами в случае, когда флуктуации n определяются только флуктуациями одной из компонент (T' или S'), показало, что D_{φ} претерпевает заметные искажения в зависимости от вклада флуктуаций температуры и солёности во флуктуации n . Подобного рода изменения должны наблюдаться и в других статистических характеристиках поля световой волны, распространяющейся в турбулентной водной среде, когда показатель преломления определяется двумя и более компонентами с различными молекулярными коэффициентами переноса.

РЕЗЮМЕ

В наближенні геометричної оптики вивчаються статистичні характеристики світлової хвилі, яка розповсюджується у турбулентній морській воді у випадку, коли флуктуації оптичного показника заломлення визначаються різними внесками показників флуктуацій температури та солоності. Подано вираз, який описує спектр флуктуацій показника заломлення для локально однорідної та ізотропної турбулентності. Проказано, що в області малих масштабів структурна функція фази суттєво залежить від внесків флуктуацій окремих компонент в флуктуації показника заломлення.

SUMMARY

Statistical characteristics of light wave propagating in turbulent sea water in geometrical optic approximation in the case, when fluctuations of optic refractive index are determined by fluctuations of temperature and salinity with different contributions, are studied. The expression describing the spectrum of fluctuations of refractive index for locally homogeneous

ous and isotropic turbulence is represented. It is found that the structural function of phase is considerably depends on the contributions of fluctuations of separated components in fluctuations of the refractive index.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере- М.: Наука, 1967.- 548 с.
2. Лоуренс, Стробен Эффекты, существенные для оптической связи, которые возникают при распространении света в нерассеивающей атмосфере. Обзор // ТИИЭР.-1971.- С. 130-153.
3. Hill R.J. Models of the scalar spectrum for turbulent advection// J. Fluid Mech.- 1978.- vol. 88, No. 3.- P.541-562.
4. Yura H.T. Physical model for strong optical amplitude fluctuations in a turbulent medium // JOSA.- 1974.- vol. 64.- P.59-67.
5. Hill R.J., Clifford S.F. Theory of saturation of optical scintillation by strong turbulence for arbitrary refractive index spectra // JOSA.-1981.-vol. 71.- P. 675-686.
6. Hill R.J. Optical propagation in turbulent water // JOSA.- 1978.- vol.68.- P.1067-1072.
7. Никишов В.В., Никишов В.И. Спектр турбулентных флуктуаций оптического показателя преломления морской воды // Прикладная гидромеханика 1999.- т. 1(73)б, п. 1.- P. 52-63.
8. Монин А.С., Озмидов Р.В. Океанская турбулентность- Л.: -Гидрометеониздат, 1981.- 320 с.
9. Рытов С.М.,Кравцов Ю.А.,Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. ч. 2.- М.: Наука, 1978.-463 с.

Надійшла до редакції 16.04.2002 р.

УДК 621.039

ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПОТОКА В ОСЕВЫХ ШНЕКОВЫХ ЗАВИХРИТЕЛЯХ

Н.С. Прядко

Институт технической механики НАН и НКА Украины, г.Днепропетровск

В последнее время для сжигания низкосортных твердых топлив широко используется низкотемпературный кипящий слой. Но с ростом мощности топок возникают проблемы, связанные с регулированием тепловой нагрузки, предотвращением надслоевого горения, увеличением потерь с уносимыми частицами и др. Некоторые трудности можно преодолеть при переходе к технологии сжигания высокозольных углей в циркулирующем псевдоожиженном слое с интенсивной внутренней и внешней циркуляцией частиц. Важной частью устройства, позволяющего реализовать такую технологию, является циклон, позволяющий создать циркуляцию частиц твердого топлива. Циклоны (так обычно называют сухие инерционные золоуловители) работают с использованием центробежных и гравитационных сил движущихся частиц золы.

Использование циклонов при решении технических задач связано с оптимизацией их геометрических параметров для получения заданных гидродинамических характеристик потока. Однако в большинстве случаев эта оптимизация проводится экспериментальным путем, и расчеты циклона при этом часто строятся на эмпирических зависимостях. Это объясняется сложностью разработки алгоритма, связывающего геометрические характеристики шнека с гидродинамикой потока. Решение задачи сопряжения гидравлических характеристик потока с геометрическими параметрами шнека усложняется спецификой конструкции устройства, имеющего относительно большую длину и широкие лопасти, для которых не допускаются сильные деформации.

В данной работе рассматриваются гидродинамические параметры газа в винтовых каналах циклонов. Несущий газ считаем идеальной несжимаемой жидкостью. Влиянием частиц пренебрегаем. Движение жидкости в винтовом канале определяется геометрией самого канала, то есть наружной поверхностью цилиндра 1, внутренней поверхностью трубопровода 2 и винтовыми поверхностями 3 и 4 (рис.1), причем толщиной винтовых поверхностей также пренебрегаем. Геометрические характеристики шнеков описывают, исходя из понятия винтовой линии, получаемой на поверхности полого цилиндра. Винтовая линия характеризуется своим углом наклона касательной α r (угол подъема винтовой линии). С увеличением радиуса полого цилиндра α r уменьшается при постоянном шаге h , но для каждой винтовой линии остается величиной постоянной. Винтовая поверхность, образованная с помощью только одной образующей линией, создает устройство, которое называется однозаходным винтом. Если образовать вторую винтовую поверхность с помощью линии, смещенной относительно первой на 180° , то получается двузаходный винт. Таким образом, на рис. 1 изображен двузаходный шнек правой навинки, который имеет два одинаковых канала.

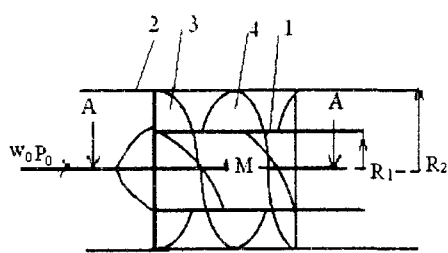


Рис. 1.

Направление течения жидкости с заданными скоростью w_0 и полным давлением p_0 на входе показано на рис.1 стрелкой, то есть слева направо. Линии тока жидкости считаем совпадающими с винтовыми линиями, определяемыми геометрией двух винтовых каналов.

Для определения распределения абсолютных скоростей (то есть скорости вдоль линии тока) возьмем точку M (рис.1), движущуюся по винтовой линии, расположенной на цилиндре радиуса R . Радиус кривизны этой винтовой линии в т. M и центр кривизны определяются по формулам параметрического уравне-

ния винтовой линии [2]: $\rho = (a^2 + b^2) / a$; $k = \frac{a}{a^2 + b^2}$; $S = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$; где $a = R$ - радиус винто-

вой линии, h - шаг винтовой линии, $b = h/2\pi$, S - длина одного витка винтовой линии. Радиус кривизны

можно еще выразить: $\rho = R + \frac{h^2}{4\pi R}$. Эти параметры считаем известными, поскольку геометрия вин-

товых каналов задана. Параметры потока вдоль образующей KN (результат пересечения горизонтальной плоскости с тонким цилиндром радиуса R) считаем постоянными, но пока неизвестными. Параметры потока будут изменяться лишь по линии $C_2 CC_1 M$, полученной при пересечения горизонтальной и вертикальной плоскостей. Вдоль этой линии, начиная с наружной поверхности цилиндра радиуса R_1 и до внутренней поверхности трубопровода радиуса R_2 , для любой точки (в том числе и для точки M) имеет

место радиус кривизны, изменяющийся от ρ_1 до ρ_2 (соответственно винтовым линиями, расположенными на цилиндрах радиусов R_1 и R_2). Вокруг точки M выделим элементарный объем жидкости, определяемый размерами dl , $d\rho$, θ , где ρ - радиус кривизны винтовой линии в точке M ; θ - элементарный угол (рис. 2). Для выделенного таким образом элементарного объема жидкости определяем условия его равновесия, причем силой тяжести выделенного элемента пренебрегаем. Тогда, спроецировав силы, приложенные к элементу на направление радиуса кривизны в точке M и отбросив величины второго порядка малости при разложении в ряд, получим:

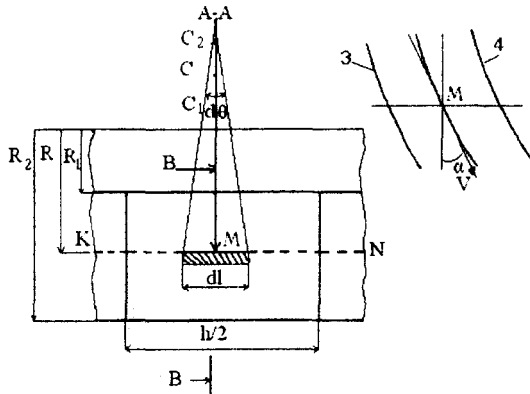


Рис. 2.

ответственно; v - текущая абсолютная скорость в винтовой струйке радиуса R . При этом абсолютная скорость по величине убывает в направлении от цилиндра, радиусом R_1 к цилиндру с радиусом R_2 . Частицы же жидкости, лежащие на прямой $KN = h/2$ (см. рис.2), имеют одинаковые абсолютные скорости.

С учетом выражения для радиуса кривизны винтовой линии, получаем распределение абсолютных скоростей в винтовом канале, исходя из его заданных геометрических характеристик:

$$v = v_1 \frac{(R_1 + \frac{h^2}{4\pi^2 R_1})}{(R + \frac{h^2}{2\pi^2 R})} = v_2 \frac{(R_2 + \frac{h^2}{4\pi^2 R_2})}{(R + \frac{h^2}{4\pi^2 R})}, \quad (2)$$

где R - радиус цилиндра, ρ - радиус кривизны.

Аналогичным образом определяется распределение статических давлений несущего газа в винтовом канале в зависимости от его геометрических параметров.

Определим статические давления в винтовом канале через заданные параметры жидкости во входном канале. Для этого запишем уравнения Бернулли в виде:

$$p + \frac{\rho_{ж} v^2}{2} = p_0 + \frac{\rho_{ж} w_0^2}{2} (1 - \xi), \quad (3)$$

где ξ - коэффициент гидравлического сопротивления винтового канала. Из уравнения неразрывности

$$\text{имеем: } 2\pi R_2^2 w_0 = 2 \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{h}{2} v \cos \alpha d\rho = h \int_{\rho_1}^{\rho_2} v \cos \alpha d\rho. \text{ После преобразований } \int_{\rho_1}^{\rho_2} v \cos \alpha d\rho = \rho v_1 A_1, \text{ где}$$

величина A_1 имеет конечное выражение через геометрические параметры винтовых линий с радиусами кривизны ρ_1 и ρ_2 . Таким образом, абсолютную скорость в винтовой струйке радиуса R_1 можно определить через заданную скорость на входе w_0

$$v_l = \frac{2\pi R_2^2}{\rho_l h A_l} w_0. \quad (4)$$

Используя формулу (2), можно определить распределение абсолютных скоростей v и v_2 , а значит и распределение статического давления в винтовом канале из (3) через заданную скорость w_0 на входе в канал.

Важным параметром является распределение окружной скорости по радиусу завихрителя. Зависимость окружной (тангенциальной) скорости потока W_τ от осевой W_a : $\frac{W_\tau}{W_a} = \operatorname{tg} \alpha$. Эта зависимость справедлива для любого текущего радиуса R . Используем соотношения для внутренней геометрии шнекового завихрителя [1]: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{R_n} \operatorname{tg} \alpha_n$ и

$$F = 2\pi R_n^2 \left(\frac{1}{\cos \alpha_n} + 1 \right)^{-1}, \quad (5)$$

где F - площадь проходного сечения канала вдоль оси завихрителя. Тогда получим зависимость, характеризующую изменение окружной скорости потока по радиусу завихрителя. Для этого преобразуем (5) с учетом приведенных формул, что даст [3]

$$\frac{W_\tau}{R} = \frac{Q}{2\pi R_n^3} (\operatorname{tg} \alpha_n + \sin \alpha_n) = w_0 / R \cdot (\operatorname{tg} \alpha_n + \sin \alpha_n), \quad (6)$$

где Q - объемный расход потока.

Рассмотрим силы, действующие на частицу во вращательном движении в кольцевом канале (рис.3). Положение частицы зафиксируем углом φ и радиусом r ($R < r < R_n$). К частице приложена сила тяжести, центробежная сила и сила аэродинамического сопротивления. Чтобы частица двигалась к поверхности радиуса R_n должно выполняться условие $F_y > F_\tau \sin \varphi + F_c$ или

$$\frac{m W_\tau^2}{r} > m g \sin \varphi + C_x S \frac{\rho_a W_a^2}{2}, \quad (7)$$

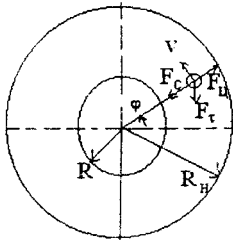


Рис. 3.

где обозначены параметры частицы: m -масса, W_τ , W_a - окружная и осевая скорость, C_x - коэффициент аэродинамического сопротивления, S - площадь миделя, а также ρ_a - плотность воздуха. Более подробно оценим эту формулу на основе данных экспериментов, проведенных в ИТМ НАН Украины.

Были испытаны три модели циклона шнекового типа с горизонтальной осью. Каждая модель представляет собой два соосно расположенных цилиндра 1 и 2. Кольцевой зазор, образованный поверхностями цилиндров, разделен на два винтовых канала двумя винтовыми лопастями 3 и 4. Винтовые лопасти жестко соединены с внутренним цилиндром, торцы которого наглухо закрыты для двухфазного потока: на входе в криволинейные каналы - коническим обтекателем о, на выходе из каналов - плоским днищем. Внутренний цилиндр с винтовыми лопастями представляет собой, таким образом, двухфазный одношаговый шнек левой навивки. В модели были установлены окна для сбора выбрасываемых частиц. Проходные сечения окон расположены в диаметральной плоскости, наклоненной от вертикальной плоскости на 30° по часовой стрелке. Геометрические характеристики трех испытанных моделей приведены в таблице, где F_1 - площадь окна, F_2 - площадь в сечении винтового канала, α_1 и α_2 - углы подъема винтовых линий радиуса R_1 и R_2 соответственно.

Таблица

Модель	R_2 , м	R_1 , м	h , м	F_1 , м ²	F_2 , м ²	α_1 , град	α_2 , град
1	0,200	0,675	5	0,0097	0,0632	49,5	21,7
2	0,223	0,670	5	0,0106	0,0642	49,5	19,6
3	0,258	0,680	5	0,0125	0,0782	49,5	17,2

Моделі були испытаны на стенде «Циклон». Эта экспериментальная установка создана на базе стенда ИТМ НАН Украины, предназначенного для исследования параметров псевдооживленного слоя и описана в [4]. В качестве твердой фазы была использована зола от сжигания угля АШ на Приднепровской ГРЭС и отсев Рыбальского гранитного карьера. Размеры частиц этого отсева от 0,4 до 1,0 мм.

В процессе исследований было обнаружено, что при всех реализованных начальных скоростях двухфазного потока (2,5; 6; 10 м/с) перед входом в модель циклона на нижней поверхности воздуховода стенда "Циклон" и в начале винтовых каналов для всех испытанных моделей имели место завалы золы. Эти завалы были тем больше, чем меньше была скорость двухфазного потока и его концентрация. С учетом массы завалов золы коэффициент очистки воздуха от золы, т.е. отношение массы уловленной золы к массе золы, введенной в поток, не превышал 10-12%. Такой низкий коэффициент очистки воздуха от золы в завихрителе можно объяснить двумя причинами. В исследуемых завихрителях не выполняется условие (7) и частицы не перемещаются к отверстиям окон или окна завихрителя расположены на очень малом расстоянии от входного сечения завихрителя и частицы не успевают переместиться к поверхности наружного цилиндра, и не попадают в окна, оставаясь внутри канала завихрителя.

В ходе экспериментов было доказано выполнение условия (7), которое после преобразований имеет вид:

$$W_{\tau}^2 > \frac{2g \sin \varphi \cdot m r t g \alpha_n}{(2m t g \alpha_n - r C_x S \rho_g)} \quad (8)$$

или с учетом (6), получаем соотношение:

$$w_0^2 > \frac{2m g r \cdot t g \alpha_n \sin \varphi}{(t g \alpha_n + \sin \alpha_n)(2m \cdot t g \alpha_n - r C_x S \rho_g)} \quad (9)$$

Подставляя значения известных из эксперимента параметров, получаем требование приданных условий эксперимента для величины начальной скорости $w_0 > 3,75$ м/с, вытекающее из необходимости выполнения первого условия (7).

Проведены исследования второй возможной причины низкой эффективности работы завихрителя. Рассмотрим на каком расстоянии частица с координатами (r, φ) достигнет внутренней поверхности внешнего цилиндра, т.е. частицы будут удалены через окно. Уравнение винтовой линии, по которой движется частица, можно записать в виде $S = t\sqrt{a^2 + b^2} = t\sqrt{r^2 + (h/2\pi)^2}$, приняв за параметр t длину дуги, отсчитываемую от начальной точки при $t=0$. Пусть плоскость перпендикулярная оси внешнего цилиндра и совпадающая с вертикальной образующей окна будет задана координатами (R_n, φ_1) . Тогда длина винтовой линии по поверхности внешнего цилиндра до пересечения с этой плоскостью будут

$$\text{равна } S_1 = \int_0^{\varphi_1} \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt = \varphi_1 \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{или для исследуемых завихрите-}$$

$$\text{лей } S_1 = \varphi_1 \sqrt{R_n^2 + (h/\pi)^2} = \varphi_1 \sqrt{R_n^2 + 2,56} \text{ . Аналогично длина винтовой линии до конца окна}$$

$S_2 = \varphi_2 \sqrt{R_n^2 + 2,56}$. Если для заданных завихрителей длина винтовых линий частиц $S_2 < S < S_1$, то частицы не попадают в окно и не выносятся из канала.

Эти исследования стали основанием для усовершенствования конструкций моделей циклонов. В модели № 1 циклона были определенным образом выполнены окна, а шнеку была придана возможность перемещения вдоль его продольной оси и поворота (вращения) относительно этой оси. Было рекомендовано увеличить начальную скорость потока перед входом в циклон ($w_0 > 3,75$ м/с). При предварительных испытаниях доработанной модели получено, что эффективность циклона может быть повышена до 68-73%.

РЕЗЮМЕ

Проведено дослідження залежності гідродинамічних параметрів газової фази потоку в гвинтових каналах циклонів шнекового типу від їх геометричних характеристик. Розроблена методика дозволяє знайти розподіл абсолютної швидкості та статичного тиску потоку у гвинтових каналах виходячи з його геометричних параметрів та швидко-

сті на вході в канал. Запропоновано рекомендації щодо вдосконалення конструкцій дослідних моделей циклонів шнекового типу.

SUMMARY

The research of dependence of gas flow hydrodynamic parameters in screw cyclone helical channel from its geometrical characteristics has been held. The produced method allows the definition the channel flow absolute velocity and static pressure according channel geometry and entrance velocity. Carried experiments confirmed these results. The recommendations for improving of investigating cyclone models construction have been proposed.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ

1. Щукін В.К., Халатов А.А. Теплообмен, массообмен и гидродинамика закрученных потоков в осесимметричных каналах.- М.: Машиностроение, 1982.- 200с.
2. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике.- М:Наука.-1967.- 608с.
3. Королев А.В., Стеценко О.П. К одномерному расчету осевого шнекового завихрителя // Известия ВУЗов.- Энергетика 1990.- №2.-С.104-107.
4. Коваленко Н.Д., Кулаков А.Н., Прядко Н.С. Экспериментальные исследования моделей циклона шнекового типа //Техническая механика 2002.-№1.- С.126-132.

Надійшла до редакції 12.06.2002 р.

УДК 621.444+621.577

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОВОГО И ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО
ПОДОБИЯ В МАШИНАХ СТИРЛИНГА

С.А. Горожанкин

Донбасская государственная академия строительства и архитектуры, г. Макеевка

Одними из наиболее перспективных тепловых машин были и остаются двигатели Стирлинга. Основное их преимущество - возможность практической реализации термодинамического цикла, близкого к циклу Карно. В настоящее время КПД их опытных образцов достиг уровня лучших дизелей, причем скоростные и нагрузочные характеристики двигателей Стирлинга предпочтительнее. Хорошие экологические параметры - низкий уровень шума, малый выброс вредных веществ на единицу полезной отдаваемой мощности являются важным достоинством, зачастую паритетным с энергетическими параметрами. Основным ограничением для широкого применения, даже при организации серийного производства двигателей Стирлинга, является их сравнительно высокая стоимость. Обусловлено это неизбежностью применения дорогостоящих жаропрочных материалов, жесткими требованиями обеспечения надежных уплотнений и смазки при высоких температурах. Несмотря на перечисленные обстоятельства, двигатели Стирлинга находят применение в опытных образцах транспортных силовых установок, а также некоторых уникальных устройствах – космических аппаратах, подводных лодках и др. [1].

К одному из важных достоинств двигателей Стирлинга является их обратимость, поскольку ни одна реальная тепловая машина не обладает такими возможностями. Обусловлено это внешним способом подвода и отвода теплоты от ее источников. Г.Н. Алексеев [2] называет такие двигатели, с учетом обратимости, универсальными тепловыми машинами Стирлинга. Это наименование представляется наиболее удачным. Применение таких машин в качестве термотрансформаторов является более перспективным, по сравнению с двигателями, в силу ряда преимуществ [3].

Тепловые машины Стирлинга (ТМС) наиболее приемлемы для современных систем теплоснабжения и кондиционирования в качестве тепловых насосов или охладителей. Коэффициенты преобразования энергии (КПЭ) у них выше, чем у компрессионных и абсорбционных установок. Поэтому включение таких термотрансформаторов в состав комплексных установок теплоснабжения, даже в случае использования электромеханического привода, дает возможность значительно снизить энергопотребление. При этом снижается загрязнение окружающей среды (в расчете на единицу отдаваемой тепловой мощности) несмотря на необходимость дополнительной выработки электроэнергии на ТЭС. В ряде стран созданы и эксплуатируются опытные экземпляры охладителей и тепловых насосов подобного типа, причем в качестве источников теплоты для последних используются природные возобновляемые (водоемы, грунт, воздух).

Анализ и оптимизацию параметров теплонасосных установок (ТНУ) на базе ТМС следует проводить с учетом как достаточно сложных процессов, происходящих во внутреннем контуре самой машины, так и параметров внешних устройств: систем отопления, горячего водоснабжения, подвода теплоносителя от источника теплоты. Особенностью низкотемпературных систем теплоснабжения с ТНУ являются развитые сети трубопроводов с большими гидравлическими сопротивлениями. Поэтому потери на прокачку теплоносителей внешних контуров могут составить значительную долю общих затрат мощности, их относительное значение достигает 25 %. Поскольку движение теплоносителей в этих контурах является установившимся, а параметры этих систем, как правило, известны, расчет потерь в них особых затруднений не вызывает.

Для ТМС, используемых в качестве термотрансформаторов, характерны повышенные, по сравнению с двигателями, значения «мертвого» объема внутреннего контура. Это объясняется малыми температурными напорами в нагревателях и охладителях, в качестве которых чаще всего применяют трубчатые теплообменники. В двигателях Стирлинга внутренний диаметр трубок обычно лежит в пределах 0,5...3 мм. Для теплообменников систем теплоснабжения необходимо предусматривать вероятность загрязнения межтрубного пространства, в котором движутся теплоносители, различными отложениями, продуктами коррозии деталей и др. Это требует применения трубок диаметром не менее 5мм, что, в свою очередь, приводит к увеличению их количества и росту «мертвого» объема.

Величина гидравлических потерь во внутреннем контуре (их доля составляет обычно от 8 до 15 % общих потерь энергии) характеризует совершенство машины с точки зрения гидромеханики. Увеличение скорости рабочего тела приводит к росту гидравлических потерь, но при этом повышаются и коэффициенты теплоотдачи на внутренних поверхностях трубок. В целом это улучшает процессы теплопередачи в нагревателе и охладителе, снижает потери вследствие несовершенства теплообмена. Их суммарная относительная доля сравнительно велика и достигает 30-35 % общих потерь в ТНУ. В целом

эффективность процессов теплообмена, регенерации определяют совершенство ТМС именно как тепловой машины. Количественно оценить его можно путем введения понятия внутреннего КПД. Его аналогом может служить внутренний КПД газотурбинных установок, индикаторный КПД, используемый в теории ДВС.

Учет всех потерь во внутреннем контуре дает возможность добиться максимума внутреннего КПД ТМС. Поэтому при проектировании ТНУ и ТМС неизбежно возникает вопрос правильного выбора геометрических, кинематических и др. параметров и оптимальных соотношений для них. Это дает возможность свести к минимуму суммарные потери энергии во внутреннем контуре.

Для двигателей Стирлинга [1] характерны существенные температурные напоры на внутренних и внешних поверхностях теплообменников, составляющие 20...100 К, а средние значения чисел Рейнольдса в трубках нагревателей и охладителей могут различаться в 5-8 раз вследствие изменения плотности и вязкости рабочего тела в полостях. Отличия в числах Нуссельта и коэффициентах теплоотдачи несколько меньше, хотя и остаются существенными. В термотрансформаторах систем теплоснабжения температуры и плотности рабочего тела в рабочих полостях, геометрические параметры нагревателей и охладителей примерно одинаковы, поэтому режимы течения в теплообменниках таких машин отличаются незначительно.

В зависимости от тепловой нагрузки объектов мощность ТМС для систем теплоснабжения может лежать в диапазоне от ~1 до 100 кВт и более, а глубина регулирования составлять 0.2...1.0 от номинальной мощности. Выбор оптимальной схемы машины, параметров основных узлов осложняется многообразием факторов, влияющих на ее эффективность. Среди них - потери во внутреннем и внешних контурах, механические, на привод вспомогательных агрегатов. С целью облегчения решения этих вопросов выполнены исследования гидродинамического и теплового подобия в ТМС путем математического моделирования на ЭВМ. В качестве примера рассмотрены 12-цилиндровые ТМС двойного действия с тепловой мощностью от 1 до 1000 кВт. Конечная цель – определение диапазона мощностей и параметров ТМС с приемлемыми значениями эффективного КПД.

При моделировании с применением метода замкнутой оптимизации [4] геометрическое подобие предусматривало строго пропорциональное изменение всех размеров ТМС (диаметров и длин цилиндров, трубок нагревателя, охладителя, элементов насадки регенератора и т.д.) в зависимости от мощности. Температуры источников теплоты (+45 °С/+10 °С) и максимального давления цикла 20 МПа при этом приняты постоянными. С целью выявления четкой картины процессов теплообмена во внутреннем контуре, на первом этапе исследований внешние потери не учитывались. В дальнейшем они определены в соответствии с принятыми параметрами источников и потребителей теплоты.

Числа Рейнольдса и коэффициенты теплоотдачи в трубках нагревателя и охладителя ТМС вычислены по критериальным уравнениям [5] для каждого текущего значения угла поворота коленчатого вала и усреднены по циклу. Для геометрически подобных машин с повышением их тепловой мощности средние значения чисел Рейнольдса неуклонно увеличиваются. Это вызывает рост гидравлических потерь, снижение внутреннего КПД, несмотря на интенсификацию процессов теплообмена в нагревателе, охладителе и регенераторе. Идентичные результаты получены для других модификаций машин.

Сохраняя частичное геометрическое подобие, т.е. варьируя объемами теплообменников, длинами трубок, регенератора удается несколько уменьшить рост гидравлических потерь, несмотря на снижение КПД. Как это следует из зависимостей, представленных на рис.1, коэффициенты теплоотдачи в трубках при этом стабилизируются и составляют около 3000 Вт/(м² К), причем замечен характерный их «скачок» при переходе от ламинарного движения к турбулентному. Однако при тепловой мощности около 1000 кВт диаметр цилиндров достигает 0.25 м, а средняя скорость поршней около 6 м/с, что на практике неприемлемо.

В дальнейшем, помимо геометрического, рассмотрено кинематическое подобие, которое в данном случае выражено в постоянстве средней скорости движения поршня, т.е. выполнении соотношения

$$D \cdot n = \text{Const},$$

где D - диаметр цилиндра; n – частота вращения вала.

Для таких геометрически и кинематически подобных ТМС коэффициенты теплоотдачи в трубках теплообменников незначительно снижаются с увеличением мощности. При этом рост гидравлических потерь замедляется, и внутренний КПД имеет максимальное значение 0.78 при мощности ~100 кВт. Результаты, представленные на рис.2, получены для машин со средней скоростью поршня 1.5 м/с. Увеличение этой скорости до 3 м/с, с целью уменьшения габаритов ТМС, как показали исследования, приводит к снижению максимума внутреннего КПД до 0.675.

И, наконец, одновременное выполнение условий кинематического и частичного геометрического подобия двигателей позволяет повысить значение внутреннего КПД до 0.816. При этом так же, как и

ранее, хорошо заметен переход от ламинарного режима течения в трубках нагревателей и охладителей к турбулентному (см. рис.3).

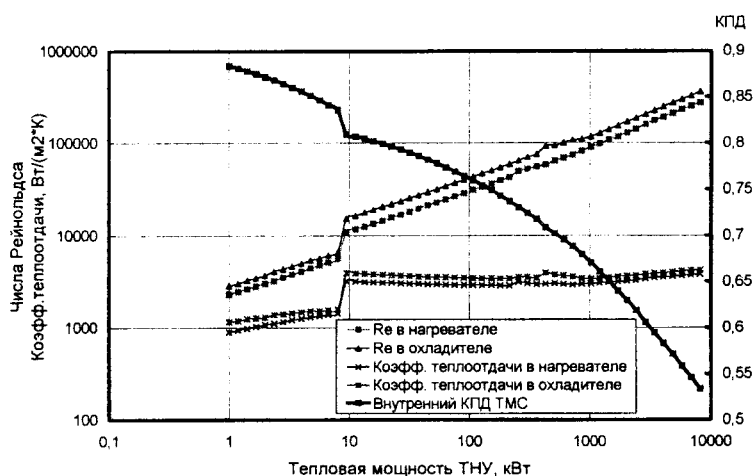


Рис.1. Средние значения чисел Рейнольдса, коэффициенты теплоотдачи, КПД в зависимости от мощности для частично геометрически подобных ТМС.

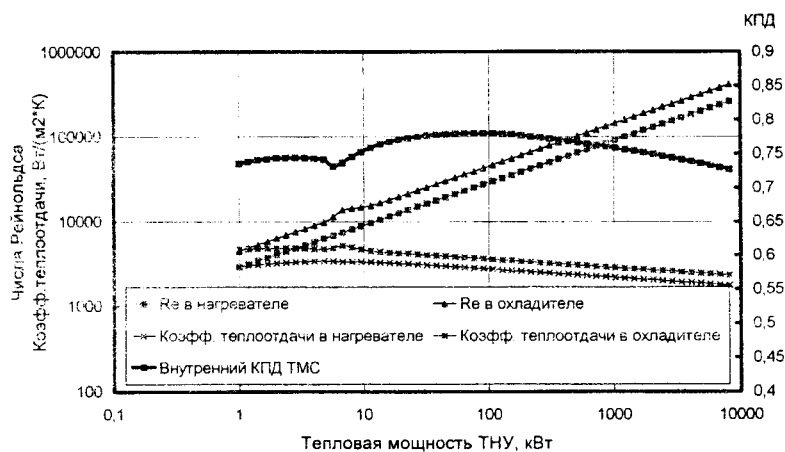


Рис.2. Параметры для кинематически и геометрически подобных ТМС.

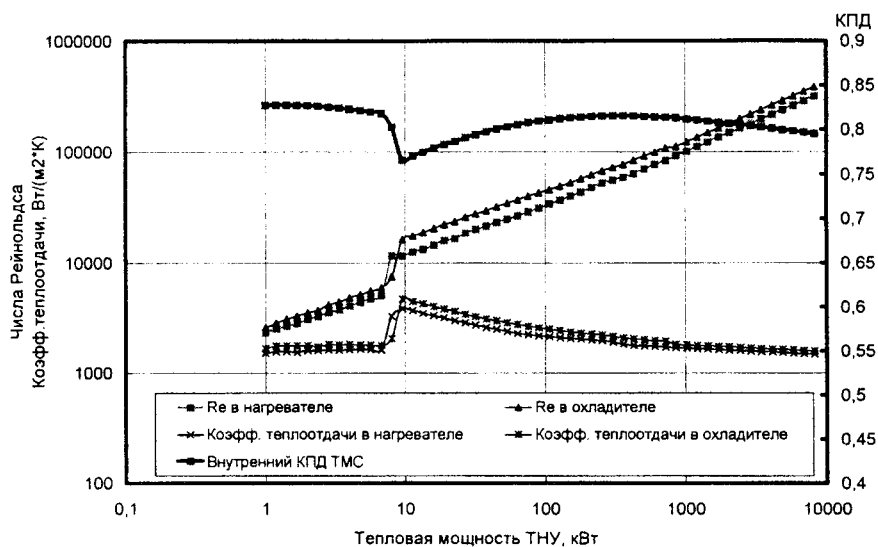


Рис.3. Кинематически и частично геометрически подобные ТМС.

При отклонении параметров ТМС от их оптимальных значений внутренний КПД снижается. Но на практике, к сожалению, сложно обеспечить выполнение подобия в широком диапазоне мощностей и, соответственно, размеров машин в силу ряда причин – необходимости обеспечения минимально допустимых зазоров, выбора размеров деталей исходя из условий прочности, возможностей технологии производства, требований эксплуатации. Поэтому ряд величин приходится принимать с их фиксированными значениями, исходя из вышеприведенных обстоятельств. На рис.4 представлены результаты оптимизации параметров тепловых насосов для локальных систем отопления и горячего водоснабжения при этих условиях. Отчетливо просматривается достаточно широкий диапазон мощностей 10...1000 кВт, в котором числа Рейнольдса стабилизировались и лежат в интервале 25000...35000 как для нагревателя, так и охладителя. Отличие обусловлено лишь изменением плотности и вязкости рабочего газа – водорода. Коэффициенты теплоотдачи на внутренних поверхностях трубок при этом также примерно постоянны для каждого из теплообменников. При других температурах численные значения параметров, естественно, отличаются, но качественно картина не изменяется.

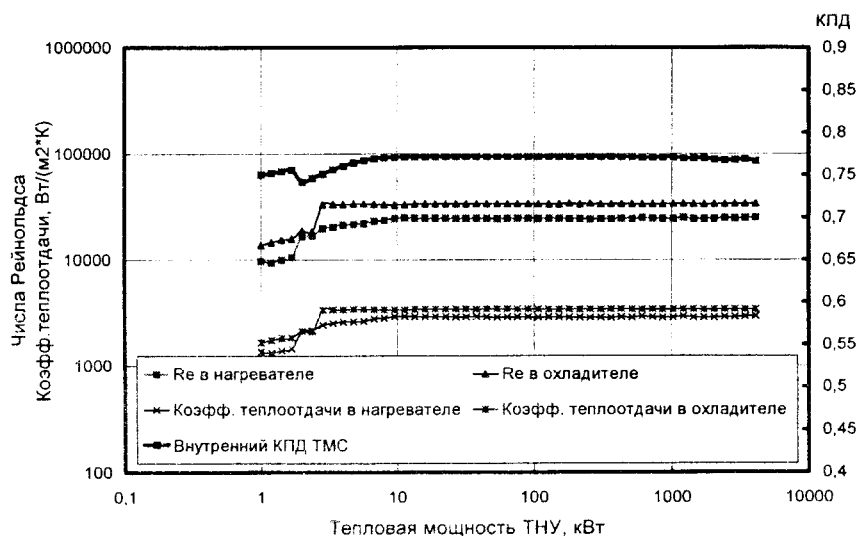


Рис.4. Подобие ТМС с частично фиксированными параметрами.

Все вышеприведенные результаты получены без учета дополнительных и внешних потерь в ТНУ. К ним относятся внутренние потери теплоты в ТМС, на трение в механизме, привод вспомогательных агрегатов – насосов, вентиляторов, компрессоров, гидравлические потери во внешних контурах. Кроме того, следует учитывать потери в процессах теплообмена в источниках теплоты, дополнительных устройствах систем отопления и вентиляции и др. Коэффициент преобразования и эффективный КПД ТНУ в целом существенно зависят от перечисленных потерь энергии. На рис.5 в качестве примера приве-

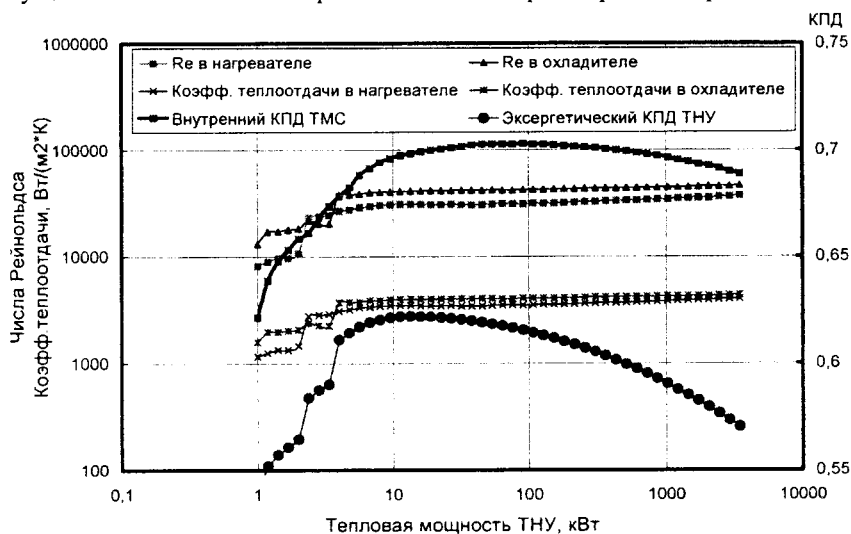


Рис.5. Параметры ТНУ с учетом внешних потерь энергии.

дены результаты оптимизации параметров ТНУ с их учетом. Несмотря на то, что внутренний КПД составляет 0.7 или чуть выше в интервале мощностей 20...500 кВт, эффективный КПД сохраняется на уровне 0.62 в значительно более узком диапазоне 8...35 кВт.

Полученные результаты следует рассматривать с учетом конструктивных ограничений машины. К ним следует, помимо частоты вращения, отнести предельные значения чисел трубок теплообменников, минимальный диаметр цилиндра, диаметр проволоки насадки, шаг ее сетки и т.д. Это приводит к необходимости рассмотрения и анализа в дальнейшем модульного принципа построения ТСМ различной тепловой мощности на базе ее основных узлов нескольких типоразмеров.

Проведенные исследования потерь во внутреннем контуре ТМС позволили установить, что в достаточно широком диапазоне мощности режимы течения и коэффициенты теплоотдачи в трубках теплообменников могут быть стабилизированы. Это дает возможность устанавливать оптимальные сочетания параметров машин на номинальных режимах их работы, а также обеспечивать приближение эффективного КПД ТНУ к его максимуму на режимах частичной мощности, а также в процессе ее регулирования.

РЕЗЮМЕ

Розглянуто питання гідродинамічної і теплової подоби при течії газу у внутрішньому контурі термотрансформаторів, які працюють за циклом Стірлінга. Проведено аналіз геометричної і кінематичної подоби машин. Досліджено вплив режимів течії робочого тіла на коефіцієнти тепловіддачі в теплообмінниках і ККД. Моделювання й оптимізація параметрів на ЕОМ виконані з застосуванням методу замкнутої оптимізації. Розглянуто результати розрахунків на прикладі теплових насосів з машинами подвійної дії.

SUMMARY

The problems of a hydrodynamic and thermal similarity surveyed at flow of gas in an interior loop heat pumps, working on a Stirling cycle. The analysis of a geometrical and kinematics similarity of machines is carried out. The influence of conditions of flow of a propulsive mass on coefficients of heat rejection in heat exchangers and efficiency of machines is explored. Simulation and optimization of parameters on a computer are executed with application of a method of the optimization. The outcomes of calculations on an example of thermal pumps with machines of a double operation surveyed also.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Уокер Г. Двигатели Стирлинга. -М.:Машиностроение,1985. -408с.
2. Алексеев Г.Н. Общая теплотехника. -М.:Высш.школа,1980. -552с.
3. Горожанкин С.А. Перспективы тепловых насосов и рефрижераторов на базе двигателей Стирлинга. - В сб.: Вестник Донбасской гос. акад. стр-ва и арх. -Вып.98-2(10).- 1998.- С.48-52..
4. Горожанкин С.А. Математическое моделирование термотрансформаторов и обратных циклов Стирлинга. – В сб. Коммунальное хозяйство городов. Вып.38. –Киев: Техніка. - 2002.- С. 182-189.
5. Михеев М.А., Михеева И.М. Основы теплопередачи. - М.: Энергия, 1977. -320с.

Надійшла до редакції 24.04.2002 р.

УДК 697.432.6.69.057.2

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА ТЕПЛОТЫ В ТОПКАХ ЖАРОТРУБНЫХ ТЕПЛОГЕНЕРАТОРОВ

А.В. Лукьянов, С.А. Губарь, М.З. Флер

Донбасская государственная академия строительства и архитектуры, г. Макеевка

При имеющейся в нашей стране тенденции децентрализации систем теплоснабжения наиболее перспективным источником теплоты являются газотрубные теплогенераторы производительностью до 3,0 МВт с тупиковыми топками цилиндрической формы. Эти теплогенераторы обладают высокими маневренными качествами: изменение тепловой мощности может осуществляться в пределах от 30 до 100% номинальной. Кроме того, они просты в изготовлении и эксплуатации и имеют высокие экологические характеристики.

Решение задачи оптимизации соотношения длины жаровой трубы топки и ее диаметра для теплогенераторов определенной мощности показывает, что дальнейшим путем уменьшения их размеров и металлоемкости является повышение в сложном теплообмене доли конвективного переноса. Реализация этого процесса возможна при закручивании потока газов вдоль боковой поверхности топки.

В обобщенном виде решение аэродинамической задачи по определению скорости потока в пристенном пограничном слое и коэффициентов поверхностного трения нашло отражение в ряде работ [1, 2]. Для анализа процесса конвективной теплоотдачи от потока газов к цилиндрической поверхности топки нами использована гидродинамическая теория теплообмена. Движение газа представлено в форме струйного потока, распространяющегося по винтовой линии около цилиндрической стенки с постоянным радиусом продольной кривизны R_c . Координата "х" направлена вдоль поверхности топки по траектории движения газового потока, а "у" - нормально к ней. Начало координат совмещено с выходным срезом горелки. Поскольку скорость потока умеренная, тепловыделение за счет трения ничтожно, а мы им пренебрегаем.

При принятых положениях интегральная плотность теплового потока на стенке топки (q_c) будет определяться следующим соотношением:

$$q_c = \rho \cdot C_p \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_c} w \cdot (T - T_c) \cdot dy, \quad (1)$$

где T - температура дымовых газов, °К;

T_c - температура поверхности стенки, °К;

ρ - плотность газов, кг/м³;

w - скорость газового потока, м/с;

C_p - теплоемкость газов при постоянном давлении, Дж/(кг·град).

Профили избыточной температуры $\Theta = T - T_c$ и скорости в пограничном слое примем в соответствии с опытными данными [2] степенными зависимостями с показателем степени, равным 1/12.

После подстановки в уравнение (1) выражения для скорости и температуры при условии, что число Pr для дымовых газов при средней температуре газов в топке равно 0,56, после соответствующих преобразований получим зависимость для определения значения среднеинтегрального значения числа

$$\text{Нуссельта } \bar{Nu} = \alpha_{cp} \cdot \frac{D_m}{\lambda}.$$

$$\bar{Nu} = 0.168 \cdot \bar{R}_c^{0.134} \cdot Re^{0.866} \cdot \bar{L}^{0.632}, \quad (2)$$

где α_{cp} - средний коэффициент теплоотдачи на поверхности топки, Вт/(м² град); D_m - внутренний диаметр топки, м; λ - коэффициент теплопроводности газов, Вт/(м град); $\bar{R}_c = \frac{R_c}{d_{ex}}$ - относительный радиус

кривизны топки; d_{ex} - ширина входного патрубка газовой горелки, м; $\bar{L} = \frac{L}{d_{ex}}$ - безразмерная длина топки.

Это уравнение позволяет определить условия теплообмена между дымовыми газами в закругленном потоке и цилиндрической стенкой топки при отсутствии начального необогреваемого участка.

РЕЗЮМЕ

З використанням гідродинамічної теорії теплообміну запропоноване рівняння для розрахунку умов конвективного теплообміну в циліндричній топці жаротрубних теплогенераторів при організації закрученого введення газів, що нагрівають.

SUMMARY

With use of the hydrodynamical theory of heat exchange the equation for account of conditions convectional of heat exchange in cylindrical stoking of down-flue boilers is offered at organization of the twirled input of heating up gases.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сабуров Э.Н. Циклонные нагревательные устройства с интенсифицированным конвективным теплообменом - Архангельск: Сев.- Зап. кн. изд-во, 1995. - 341 с.
2. Сабуров Э.Н., Орехов А.Н. Расчет аэродинамических характеристик циклонных камер большой относительной длины // Изв. вузов. Лесной журнал. - 1994. №1-2. - С. 115-124.

Надійшла до редакції 22.04.2002 р.

УДК 532.543

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЕЙ КОНЦЕНТРАЦИИ ВБЛИЗИ ПРЕПЯТСТВИЯ ПРИ ЕГО ОБТЕКАНИИ ТЕРМИЧЕСКИ СТРАТИФИЦИРОВАННЫМ ПОТОКОМ

Е.В. Бруязкий*, А.Б. Ступин, В.С. Оверко, Н.А. Дмитренко

*Институт гидромеханики НАН Украины

Рост промышленных мощностей и сопутствующее ему загрязнение биосферы различными типами загрязняющих веществ требуют решения задач экологической направленности.

При этом особую актуальность приобретают исследования по расчёту диффузии загрязняющих веществ в атмосфере. Широкое развитие получили эмпирические модели и модели, основанные на аналитическом решении уравнения диффузии [1]. При этом значительный прогресс в этой области связан с отказом от концепции точечного источника. Учет крупномасштабных флуктуаций ветрового потока, различных типов подстилающей поверхности, неустойчивости приземного слоя атмосферы, хорошее согласование рассеяния примеси и распределения Гаусса, все это делает их наиболее приемлемыми для решения экологических задач в глобальных и региональных масштабах. Однако, если исследуемая область сравнительно невелика, например представляет собой промплощадку, то орографическая неоднородность местности делает непригодными аналитические методы расчета рассеяния примеси. Этого недостатка лишены численные методы, которые позволяют учесть влияние вихревых структур, возникающих в области гидродинамической тени за препятствием. Поэтому в данном случае более перспективным представляются численные методы, основанные на решении уравнений Навье-Стокса, которые при современном развитии вычислительной техники дают более точное представление о распределении загрязнений в локальных масштабах.

В настоящей работе проведен численный расчет распространения выброса от постоянно действующего источника в термически стратифицированной атмосфере при наличии двух полуэллиптических препятствий. Задача решалась в двумерной постановке, в декартовых координатах. С физической точки зрения она может описывать процесс рассеивания промышленных выбросов в районе двух протяженных гряд холмов или в местах промышленной застройки.

Рассмотрим обтекание термически стратифицированным несжимаемым потоком двух препятствий. Если время релаксации частиц, рассчитанное по методике предложенной в работе [2] сравнимо с временем релаксации потока, то частицы успевают реагировать на изменение параметров несущей среды; поэтому приближённо можно полагать, что во всех точках геометрического пространства скорости и температуры частиц равны скорости и температуре несущей среды. При анализе выбросов на различных ГРЭС отмечено, что подобное время релаксации характерно для 85% частиц по массе, поэтому численный расчет был проведен в однофазной постановке.

Численное исследование полей концентрации проведено путем решения полной системы уравнений Навье-Стокса и уравнений тепло- и массопереноса. С целью уменьшения влияния границ расчетная область выбиралась таким образом, чтобы высота расчетной области H была в 5-10 раз больше характерного размера препятствия b . При этом продольный размер L был выбран в восемь раз больше поперечного.

Система расчетных уравнений имеет вид [3]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + Ri \left(T + \frac{b}{H} z \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{Pe} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + w \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{1}{Pe_d} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) \quad (4)$$

где $Re = \frac{U \cdot b}{\nu}$ - число Рейнольдса, $Ri = \frac{g \cdot \beta \cdot b(T_0 - T_h)}{U^2}$ - число Ричардсона, $Pe = \frac{U \cdot b}{a}$ - тепловое

число Пекле, $Pe_d = \frac{U \cdot b}{D}$ -диффузионное число Пекле.

Для удовлетворения граничных условий на препятствии применим описанный в работе [4] метод фиктивных областей с продолжением по младшим коэффициентам в расширенной области $D_0 \cup D$. Запишем вспомогательную задачу для системы уравнений (1)-(4):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - S \cdot (u - u_0), \quad (5)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + Ri \left(T + \frac{b}{H} z \right) - S \cdot (w - w_0), \quad (6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{1}{Pe} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - S \cdot (T - T_0), \quad (7)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + w \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{1}{Pe_d} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right), \quad (8)$$

где $S(x, z) = \begin{cases} 0, & (x, z) \in D \\ \varepsilon^{-2}, & (x, z) \in D_0 \end{cases}$, ε - малый параметр, u_0, w_0, T_0 - значения составляющих скорости ветра и температуры на нижней границе.

Для численного решения сформулированной задачи в качестве основы был взят описанный в [5] метод расщепления. В отличие от [5] в настоящей работе для аппроксимации конвективных членов использованы разности против потока, что приводит к повышению устойчивости расчетного алгоритма для более высоких чисел Рейнольдса и Пекле.

Пусть в некоторый момент времени $t_n = n\tau$ (τ -шаг по времени, n - число шагов) известны поля скорости $V=(u, w)$, давления P , температуры T и концентрации примеси C . Тогда процедуру определения неизвестных функций в момент времени $t_{n+1} = (n+1)\tau$ организуем в виде трехэтапной схемы расщепления.

На первом этапе определим промежуточные значения скорости, температуры и концентрации по уравнениям:

$$\frac{\tilde{u} - u}{\tau} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - S \cdot (u - u_0), \quad (9)$$

$$\frac{\tilde{w} - w}{\tau} = -u \frac{\partial w}{\partial x} - w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + Ri \left(T + \frac{b}{H} z \right) - S \cdot (w - w_0), \quad (10)$$

$$\frac{\tilde{T} - T}{\tau} = -u \frac{\partial T}{\partial x} - w \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{1}{Pe} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - S \cdot (T - T_0), \quad (11)$$

$$\frac{\tilde{C} - C}{\tau} = -u \frac{\partial C}{\partial x} - w \frac{\partial C}{\partial z} + \frac{1}{Pe_d} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right), \quad (12)$$

На втором этапе по вычисленным на первом этапе промежуточным значениям скорости проведем расчет поля давления по уравнению Пуассона:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \frac{1}{\tau} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right) \quad (13)$$

На третьем этапе определим окончательные (на временном слое $n+1$) значения скорости, температуры и концентрации по уравнениям:

$$\frac{u - \tilde{u}}{\tau} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (14)$$

$$\frac{w - \tilde{w}}{\tau} = \frac{\partial P}{\partial z}, \quad (15)$$

$$\frac{T - \tilde{T}}{\tau} = -u \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} - w \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} + \frac{1}{Pe} \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2} \right) - S \cdot (\tilde{T} - T_0), \quad (16)$$

$$\frac{C - \tilde{C}}{\tau} = -u \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} - w \frac{\partial \tilde{C}}{\partial z} + \frac{1}{Pe_d} \left(\frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial z^2} \right). \quad (17)$$

На основании вышеизложенного можно определить следующий цикл вычислений:

1. По известному в начальный момент времени полю скорости из уравнения (9)-(10) находится промежуточное поле скорости. При этом определяется правая часть уравнения (13). Таким образом выполняется первая итерация определения температуры и концентрации (уравнения (11)-(12));
2. После этого решается уравнение Пуассона (13) с целью определения давления;
3. В дальнейшем подправляется на текущем временном слое поле скорости с использованием уравнения (14)-(15). После этого выполняется вторая итерация определения температуры и концентрации (уравнения (16)-(17)).

Расчетное время выбиралось так, чтобы фронт рассеивания покрывал всю расчетную область. Цикл повторяется до заданного момента времени.

Поиск решения рассматриваемой задачи происходит в прямоугольной области $D \cup D_0$. В качестве начальных данных задаются исходные поля скоростей, давления, температуры и концентрации.

Начальный профиль скорости зададим следующим образом:

$$u(0, x, z) = u_H \cdot \left(\frac{z}{H} \right)^{1/7}, \quad w(0, x, z) = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq z \leq H,$$

Для давления за начальное распределение примем гидростатическое. Следовательно, рассматриваемое избыточное давление P будет равно нулю, т.е. $P(0, x, z) = 0$, $0 \leq x \leq L$, $0 \leq z \leq H$.

Примем, что начальное распределение температуры имеет вид

$$T_c(0, x, z) = T_0 - \frac{T_0 - T_H}{H} z, \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq z \leq H,$$

т.е. она линейно меняется с высотой (убывает при условии $T_0 > T_H$).

Для безразмерной температуры получим

$$T = \frac{T_c - T_H}{T_H - T_0}, \quad T(0, x, z) = \frac{1}{H} z, \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq z \leq H$$

Начальное распределение для концентрации примем на левой границе в форме двумерной функции Гаусса с максимумом, на высоте, сравнимой с высотой препятствия [1]:

$$C(0, x, z) = \frac{C_0}{2\pi\sigma_x\sigma_z} \cdot \exp\left(-\frac{(z - z_s)^2}{2\sigma_z^2}\right),$$

Теперь обратимся к краевым условиям.

Во входном сечении рассматриваемой области, т.е. при $x=0$, значения скорости, давления, температуры совпадают с начальными условиями:

$$u(t, 0, z) = u(0, 0, z), \quad w(t, 0, z) = 0, \quad t > 0, \quad x = 0, \quad 0 \leq z \leq H,$$

$$P(t, 0, z) = P(0, 0, z) = 0, \quad t > 0, \quad x = 0, \quad 0 \leq z \leq H,$$

$$T(t, 0, z) = T(0, 0, z), \quad t > 0, \quad x = 0, \quad 0 \leq z \leq H,$$

Для концентрации примем на левой границе (при $x=0$) условие:

$$C(t, 0, z) = C(0, 0, z) \cdot \exp(-k \cdot t),$$

которое определяет продолжительно действующий источник переменной (убывающей) интенсивности. При большом k получим модель мгновенного выброса. В настоящей работе проведен расчет для постоянно действующего источника, т.е. $k=0$.

На выходе, т.е. при $x=L$, используются следующие условия:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 0, \quad f = (u, w, T, P, C), \quad x=L, \\ u(t, x, H) &= u(0, 0, H), \quad w(t, x, H) = 0, \quad t > 0, \quad z = H, \quad 0 \leq x \leq L, \\ P(t, x, H) &= 0, \quad t > 0, \quad z = H, \quad 0 \leq x \leq L, \\ T(t, x, H) &= T(0, 0, H) = 1, \quad t > 0, \quad z = H, \quad 0 \leq x \leq L,\end{aligned}$$

Для концентрации на верхней границе примем условие:

$$C(t, x, H) = 0, \quad t > 0, \quad z = H, \quad 0 \leq x \leq L,$$

На нижней границе рассматриваемой области, т.е. при $z = 0$, примем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned}u(t, x, 0) &= 0, \quad w(t, x, 0) = 0, \quad t > 0, \quad z = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \\ P(t, x, 0) &= 0, \quad t > 0, \quad z = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \\ T(t, x, 0) &= T(0, 0, 0) = 0, \quad t > 0, \quad z = 0, \quad 0 \leq x \leq L,\end{aligned}$$

Для концентрации примем на нижней границе условие непроницаемости:

$$\frac{\partial C}{\partial z} = 0, \quad t > 0, \quad z = 0, \quad 0 \leq x \leq L.$$

Выбор краевых условий на верхней границе области D требует особого внимания, так как верхняя граница (и выходное сечение) расчетной области должны быть достаточно удалены от источника возмущений. Поэтому выбор этих условий следует осуществить так, чтобы приближенная постановка краевых условий на этих границах не оказывала заметного влияния на расчетную картину течения. Верхнюю границу ($z=H$) будем отождествлять с плоской поверхностью, которая движется параллельно оси x и имеет скорость $u(0, 0, H)$.

При расчете полей искомых величин на 1-м этапе проводится прямое продвижение по времени с контролем условия устойчивости в виде ограничения на максимальный шаг по времени [5]:

$$0.25(|u| + |w|)^2 \Delta t \operatorname{Re} \leq 1 \quad \text{и} \quad \Delta t / (\operatorname{Re} \Delta x^2) \leq 0.25.$$

При исследовании устойчивости схемы численного расчета для первого этапа был использован метод дифференциальных приближений [6,7], основанный на определении условий положительности коэффициентов диффузии соответствующих дифференциальных приближений. Отметим, что при отрицательных коэффициентах диффузии у диссипативных членов дифференциального приближения допускается экспоненциально возрастающее во времени решение, что говорит о неустойчивости [5]. Для уравнений второго и третьего этапов был использован метод фон Неймана [7], в котором решение уравнений представляется рядом Фурье с конечным числом членов и устойчивость определяется тем, что каждое отдельное колебание затухает.

На первом этапе исследований были проведены расчеты для обтекания двух полуэллиптических препятствий. Для получения исследуемых полей концентрации были определены поля скорости, давления и температуры. Число Ричардсона варьировалось от 0 до 0.05. В качестве тестовой использовалась задача по обтеканию цилиндра. Полученные в расчетах распределения вихревых структур (дорожка Кармана) хорошо согласуется с опытными данными.

Результаты численных расчетов обтекания термически стратифицированным потоком двух полуэллиптических препятствий показали, что большое влияние на исследуемый процесс имеет не только размер препятствий, но и характер их расположения, при этом последний принципиально меняет локализацию зон с повышенной и пониженной концентрацией примеси (рис. 1-3).

На рис. 1-3 представлены распределения полей концентрации вблизи двух полуэллиптических препятствий, отличающихся размерами и формой расположения.

Из анализа распределения полей концентрации видно, что при обтекании одинаковых по высоте препятствий примесь вытесняется в область над ними (рис. 1). Для случая, когда вниз по потоку находится препятствие меньшей высоты, наблюдается втягивание примеси в вихревую зону между препятствиями (рис. 2). В случае же обратного расположения препятствий (рис. 3) за ними вниз по потоку образуется значительная по размерам область с пониженной концентрацией примеси.

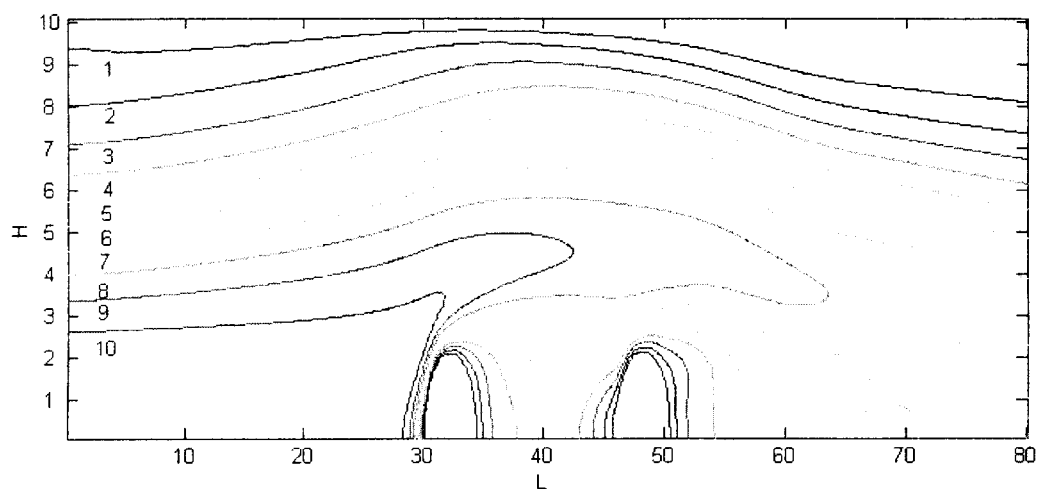


Рис. 1. Поле концентрации для обтекания двух полуэллиптических препятствий $Re=300$, $Tau=60$. Где 1 – $0.086 C_{max}$, 2 – $0.17 C_{max}$, 3 – $0.26 C_{max}$, 4 – $0.34 C_{max}$, 5 – $0.43 C_{max}$, 6 – $0.52 C_{max}$, 7 – $0.60 C_{max}$, 8 – $0.69 C_{max}$, 9 – $0.78 C_{max}$, 10 – $0.86 C_{max}$.

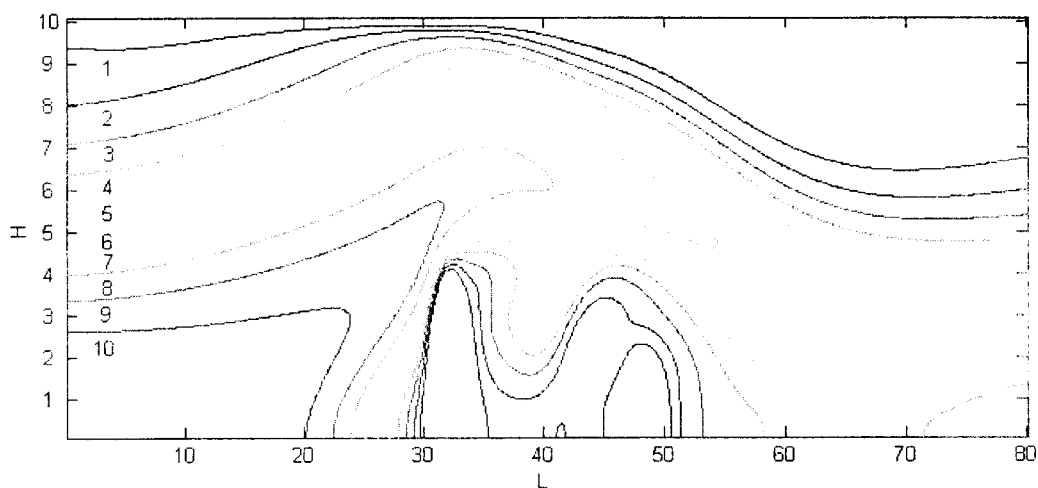


Рис. 2. Поле концентрации для обтекания двух полуэллиптических препятствий $Re=300$, $Tau=60$. Где 1 – $0.086 C_{max}$, 2 – $0.17 C_{max}$, 3 – $0.26 C_{max}$, 4 – $0.34 C_{max}$, 5 – $0.43 C_{max}$, 6 – $0.52 C_{max}$, 7 – $0.60 C_{max}$, 8 – $0.69 C_{max}$, 9 – $0.78 C_{max}$, 10 – $0.86 C_{max}$.

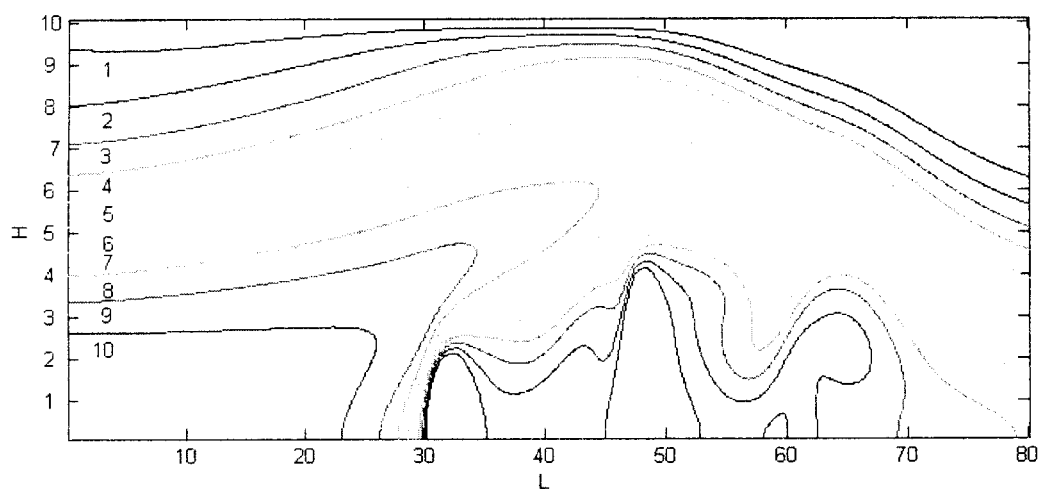


Рис. 3. Поле концентрации для обтекания двух полуэллиптических препятствий $Re=300$, $Tau=60$. Где 1 – $0.086 C_{max}$, 2 – $0.17 C_{max}$, 3 – $0.26 C_{max}$, 4 – $0.34 C_{max}$, 5 – $0.43 C_{max}$, 6 – $0.52 C_{max}$, 7 – $0.60 C_{max}$, 8 – $0.69 C_{max}$, 9 – $0.78 C_{max}$, 10 – $0.86 C_{max}$.

РЕЗЮМЕ

Дослідження розсіювання консервативних домішок при обтіканні вуз рівновеликих полу еліптичних перешкод. Визначено результат впливу порядку розташування та величини перешкод на характер розподілу полів концентрації для різних їх комбінацій.

SUMMARY

The dispersion of a conservative impurity is investigated at a flow two different semiellipse of obstacles. The result of influence about an arrangement and size of obstacles on character of change of distribution of fields of concentration is determined at their various combinations

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бруязкий Е.В. Турбулентные стратифицированные течения. – Киев: Наук. Думка, 1986. – 296 с.
2. Шрайбер А.А., Гавин Л.Б., Наумов В.А., Яценко В.П. Турбулентные течения газовзвеси. – Киев: Наук. Думка, 1987. – 240 с.
3. Монин А.С. Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Теория турбулентности.-С.-Пб: Гидрометеиздат, 1992.- 694 с.
4. Вабищевич П.Н.. Метод фиктивных областей в задачах математической физики. М.: МГУ, 1991.- 156 с.
5. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М, Физматгиз, 1994.- 245 с.
6. Яценко Н.Н., Шокин Ю.И. О корректности первых дифференциальных приближений разностных схем.- ДАН СССР, 1968., 182, №4, с.776-778.
7. Роуч П. Вычислительная гидродинамика.- М.: Наука, 1976.- 616 с.

Ф І З И К А

УДК 532.527

УТВОРЕННЯ ВИХОРОВОЇ ПАРИ ПРИ ІМПУЛЬСНОМУ ВИКИДІ РІДИНИ ІЗ ТРУБКИ

Г. Г. Буланчук *, В. В. Гаркуша

*Приазовський державний технічний університет

Процес утворення вихрових кілець або їх плоского аналогу - вихрових пар добре вивчений експериментально [1,2]. В теоретичних дослідженнях, як правило, динаміка вихрової пари або вихрового кільця вивчається в припущенні, що в початковий момент часу дані структури вже існують [2,3]. Методика моделювання процесу їх утворення розроблена недостатньо. В експериментальних умовах вихрову пару або кільце можна одержати за допомогою імпульсного струменя - короткочасовому викиді рідини із трубки.

В даній роботі розглядається модель плоского імпульсного струменя в рамках схеми ідеальної нестисливої рідини. Задача розв'язується методом дискретних вихорів, який добре зарекомендував себе при моделюванні струменевих течій [4,5]. На можливість розв'язку задач даного типу було вказано також в роботі [4].

Постановка задачі.

В площині XOY розглянемо область Ω , обмежену твердою границею $\sigma = \bigcup_{i=1}^2 \sigma_i$:

$$\sigma_i(x, y) = 0 \quad i = 1, 2,$$

і заповнену ідеальною нестисливою рідиною (рис. 1).

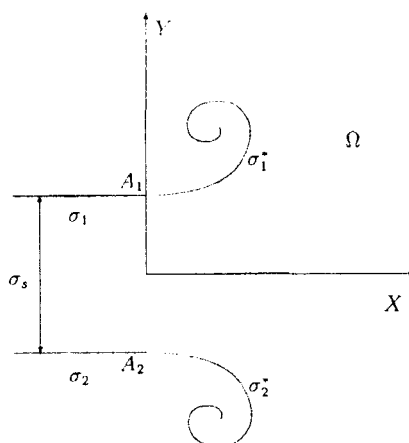


Рис. 1. Область розв'язку задачі Неймана для імпульсного струменя

Із сопла діаметром d витікає струмінь, границі якого будемо моделювати вихровими пеленами σ_i^* , які сходять із гострих кромek A_1 і A_2

$$\sigma_i^*(x, y, t) = 0 \quad i = 1, 2$$

$$\sigma^* = \bigcup \sigma_i^*$$

В області Ω , всюди, крім вихрових пелен σ_i^* , існує потенціал швидкості Φ , який задовольняє рівняння Лапласа:

$$\Delta \Phi(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in \Omega \setminus (\sigma \cup \sigma^*). \quad (1)$$

Граничними умовами для рівняння (1) будуть умови на границях

σ_i, σ_i^* і на рідкій границі σ_x у деякому перерізі сопла, а також на нескінченності:

1) умова непротікання на твердих границях σ_i :

$$(\nabla\Phi(x, y, t), \vec{n}_i) = 0, (x, y) \in \sigma_i, i = 1, 2; \quad (2)$$

2) витрата рідини через сопло d :

$$\int_{\sigma_x} \frac{\partial\Phi}{\partial x} dy = Q(t); \quad (3)$$

3) незмінність з часом потенціалу на нескінченності і згасання збудженої границею швидкості:

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_p \rightarrow \infty} \nabla\Phi = 0, \quad \lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_p \rightarrow \infty} \frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0; \quad (4)$$

4) відсутність перепаду нормальної швидкості на вихрових пеленах σ_i^* :

$$[\nabla\Phi(x, y, t) \cdot \vec{n}] = 0, (x, y) \in \sigma_i^*. \quad (5)$$

Наслідком всіх зроблених припущень відносно властивостей середовища буде умова постійності циркуляції по довільному рідинному контуру l_0 (теорема Кельвіна):

$$\int_{l_0} \nabla\Phi \cdot \vec{\tau}(s) ds = const. \quad (6)$$

Додатковою умовою буде умова скінченності швидкості в точках A_1 і A_2 :

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_{A_i}, y_{A_i})} \nabla\Phi(x, y, t) = \vec{W}_{A_i}, i = 1, 2. \quad (7)$$

Початкова умова:

$$\nabla\Phi = 0, \quad t = 0 \quad (x, y) \in \Omega. \quad (8)$$

Покладемо:

$$Q(t) = Q_x, \quad 0 \leq t \leq t_1, \\ Q(t) = 0, \quad t > t_1.$$

Сформульована задача є задачею Неймана для потенціалу Φ і має єдиний розв'язок $\Phi = \Phi(x, y, t)$, звідки однозначно визначається поле швидкості:

$$\vec{W} = \nabla\Phi$$

Із умови руху вихрових пелен по траєкторіям частинок рідини для знаходження їх координат будемо мати систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx_i^*(t, t^*)}{dt} = W_x(x_i^*(t, t^*), y_i^*(t, t^*)) \\ \frac{dy_i^*(t, t^*)}{dt} = W_y(x_i^*(t, t^*), y_i^*(t, t^*)) \quad (x_i^*, y_i^*) \in \sigma_i^*, \quad (9)$$

Початковими умовами для (9) будуть:

$$x_i^*(t^*, t^*) = x_{A_i}, \quad y_i^*(t^*, t^*) = y_{A_i}.$$

2. Розв'язок методом дискретних вихорів

Вихровий шар σ моделюється системою N приєднаних вихорів інтенсивності $\Gamma_{\Sigma\mu}^r$, рівномірно (з кроком Δl) розміщених на границі, а вихорові пелени σ_i^* - вільними вихорами $\delta_i^{(1)s}$, які сходять в потік в кожен розрахунковий момент часу τ_s з точок A_1 і A_2 і далі рухаються, не змінюючи своєї циркуляції (рис.2).

Задача розв'язувалась в безрозмірному вигляді. За характерні величини було прийнято витрату рідини Q_x і діаметр сопла d . Безрозмірні величини мають вигляд:

$$\tau = \frac{tQ_x}{d^2}, \quad \bar{w} = \frac{\bar{W}d}{Q_x}, \quad \bar{x} = \frac{x}{d}, \quad \bar{y} = \frac{y}{d},$$

$$\varphi = \frac{\Phi}{Q_x}, \quad \overline{\Gamma_{\Sigma\mu}^r} = \frac{\Gamma_{\Sigma\mu}^r}{Q_x}, \quad \overline{\delta_i^{(1)s}} = \frac{\delta_i^{(1)s}}{Q_x}$$

(далі рисочки будемо опускати).

Виконання умови непротікання у будь-який момент часу τ_r вимагається в контрольних точках (x_v, y_v) , розміщених посередині між приєднаними вихорами. Вважаємо, що вихори у початковий момент часу в потоці відсутні, а за рідинний контур l_0 візьмемо контур, що охоплює всі вихори у потоці. Тоді константа в умові (6) буде дорівнювати нулю. Із умов (2), (3) і (6) одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно циркуляції приєднаних вихорів $\Gamma_{\Sigma\mu}^r$ в кожен розрахунковий момент часу τ_r :

$$\sum_{\mu=1}^{N+2} \Gamma_{\Sigma\mu}^r a_{\mu\nu} = -(w_{x\nu}^r n_{x\nu} + w_{y\nu}^r n_{y\nu}), \quad \nu = \overline{1, N} \quad (12)$$

$$\sum_{\mu=1}^{N+2} \Gamma_{\Sigma\mu}^r = \sum_{i=1}^2 \sum_{s=1}^{\tau_s} \delta_i^{(1)s}$$

$$\sum_{j=1}^m \left(\sum_{\mu=1}^{N+2} w_{x\mu}(B_j) \Gamma_{\Sigma\mu}^r + \sum_{s=1}^{\tau_s} \sum_{i=1}^2 w_{xi}(B_j) \delta_i^{(1)s} \right) \Delta S_j = Q(\tau_r),$$

де $a_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi} (v_{x\mu\nu} n_{x\nu} + v_{y\mu\nu} n_{y\nu})$, $v_{x\mu\nu}$ и $v_{y\mu\nu}$ - функції координат, $w_{x\nu}^r, w_{y\nu}^r$ - відповідно поздовжня і поперечна швидкості в контрольній точці, збуджені вільними вихорами, B_j - точки в перерізі σ_s , $w_{x\mu}(B_j)$ - поздовжня швидкість у точці B_j , викликана системою вихорів $\Gamma_{\Sigma\mu}^r$, $w_{xi}(B_j)$ - поздовжня швидкість у точці B_j від системи вихорів $\delta_i^{(1)s}$.

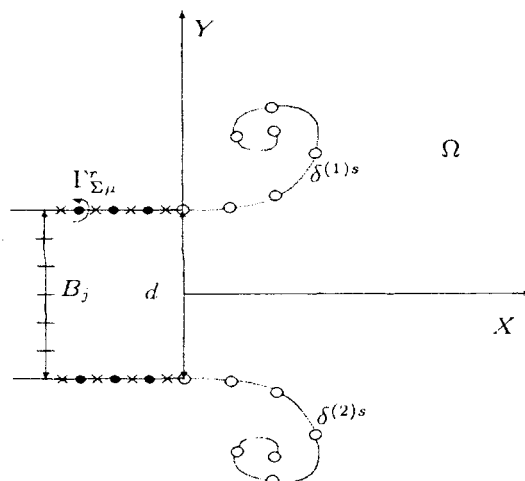


Рис. 2. Моделювання границь струменя дискретними вихорами

Для знаходження нових координат вільних вихорів розв'язується система:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i^s(\tau, \tau_s)}{d\tau} &= w_{ix}^s(x^s(\tau, \tau_s), y^s(\tau, \tau_s)) \\ \frac{dy_i^s(\tau, \tau_s)}{d\tau} &= w_{iy}^s(x^s(\tau, \tau_s), y^s(\tau, \tau_s)) \quad s = \overline{1, r}, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (11)$$

$\vec{w}_{is}^r = (w_{ix}^r, w_{iy}^r)$ - швидкість вільного вихору $\delta_i^{(1)s}$ в момент часу τ_r , збуджена всією системою вихорів.

Швидкість від кожного окремого вихору знаходиться за формулою Біо-Савара.

Початковими умовами для рівняння (11) будуть:

$$x_i^s(\tau_s, \tau_s) = x_{A_i}, \quad y_i^s(\tau_s, \tau_s) = y_{A_i}, \quad s = \overline{1, r}, \quad i = 1, 2. \quad (12)$$

Функція течії в будь-якій точці потоку є сумою функцій течії всіх вихорів:

$$\psi(x, y, \tau) = - \sum_{i=1}^{N+2+2r} \frac{\Gamma_i(\tau)}{4\pi} \ln((x - x_i(\tau))^2 + (y - y_i(\tau))^2). \quad (13)$$

Для побудови ліній течії вводилась двовимірна сітка і обчислювалось значення функції течії в точках цієї сітки за формулою (13). Лінії течії будувались як ізолінії функції течії. На границі розміщувалось 120 вихорів на відстані $5d$. Обчислення показали, що збільшення кількості вихорів практично не впливає на результати. Крок по часу обчислювався за формулою:

$$\Delta\tau_s = \frac{\Delta l}{w_p(\tau_s)},$$

де Δl – відстань між приєднаними вихорами, $w_p(\tau_s)$ – середня швидкість в точках A_1 і A_2 . З часом швидкість $w_p(\tau_s)$ ставала занадто малою, а крок відповідно – великим, тому вводилось обмеження: якщо $\Delta\tau > 0.1$, крок по часу покладався рівним 0.1. Моделювання було проведене до $\tau = 200$. Проведена також комп'ютерна анімація, яка дозволяє більш детально визначити внутрішній характер течії.

3. Результати моделювання

В початкові моменти часу рідина, що витікає із сопла, закручується в два великомасштабні вихори з протилежним напрямком обертання (рис.3).

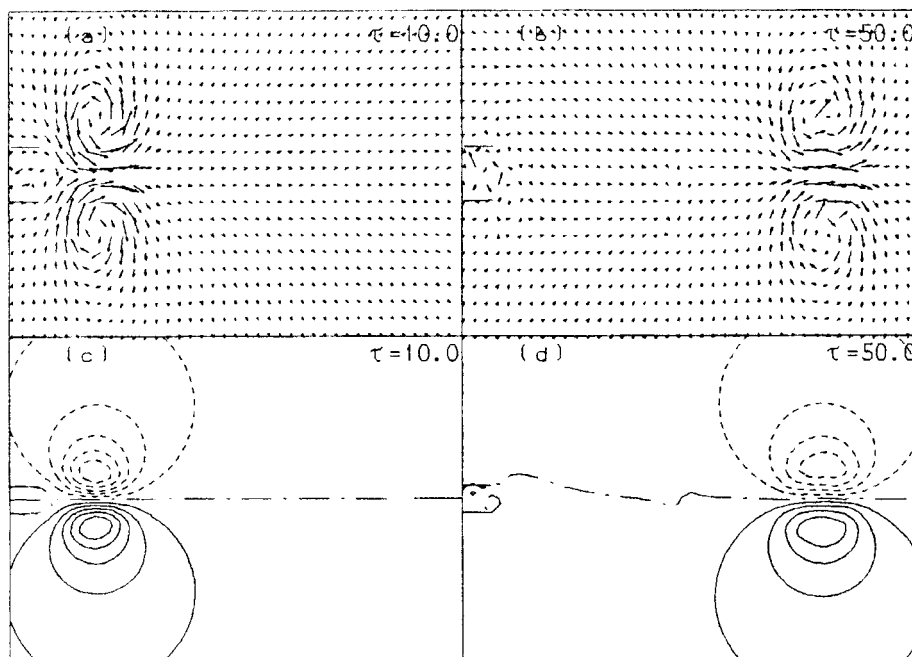


Рис.3. Поле швидкості і лінії течії в окремі моменти часу.

До моменту $\tau = 5$ формується картина ліній течії, схожа на класичну двовихрову пару. Тому в обчисленнях цей час був вибраний за τ_1 . В наступні моменти часу витрата рідини через сопло дорівнює нулю. Приблизно при $\tau = 6$ сформована пара відривається від основної маси і продовжує рухатись вперед, обертаючись зсередини назовні. Момент відриву схожий на розрив тіста. Такий характер спостерігався експериментально в [4]. Поле швидкості і картина ліній течії в окремі моменти часу представлені на Рис.3. Швидкість утвореної вихрової структури становить приблизно $1/4$ початкової швидкості в перерізі сопла. Обчислення проводились до $\tau = 200$. Обертально-поступальна структура течії зберігається приблизно до $\tau = 170$, за цей час пара проходить близько $33d$, швидкість її руху з часом дещо падає, але незначно. Симетрична картина ліній течії зберігається десь до $\tau = 100$. Потім симетрія порушується внаслідок накопичення чисельних похибок. При $\tau \approx 170$ вихрова структура руйнується.

Відомо, що разом з утвореною парою рухається деяка частина рідини, яка називається атмосферою пари, має еліпсоїдальну форму і значну кінетичну енергію. На Рис.4 зображена зміна картини ліній течії в системі координат, що рухається разом з парою. Характер течії аналогічний обтіканню твердого тіла, форма якого співпадає з атмосферою пари. Із густини ліній течії видно, що швидкість обертання рідини всередині атмосфери з часом падає, а сама атмосфера дещо розширюється.

Слід сказати, що даний рух рідини є досить стійким і мало залежить від обчислювальних параметрів (кількості вихорів на границі та кроку по часу).

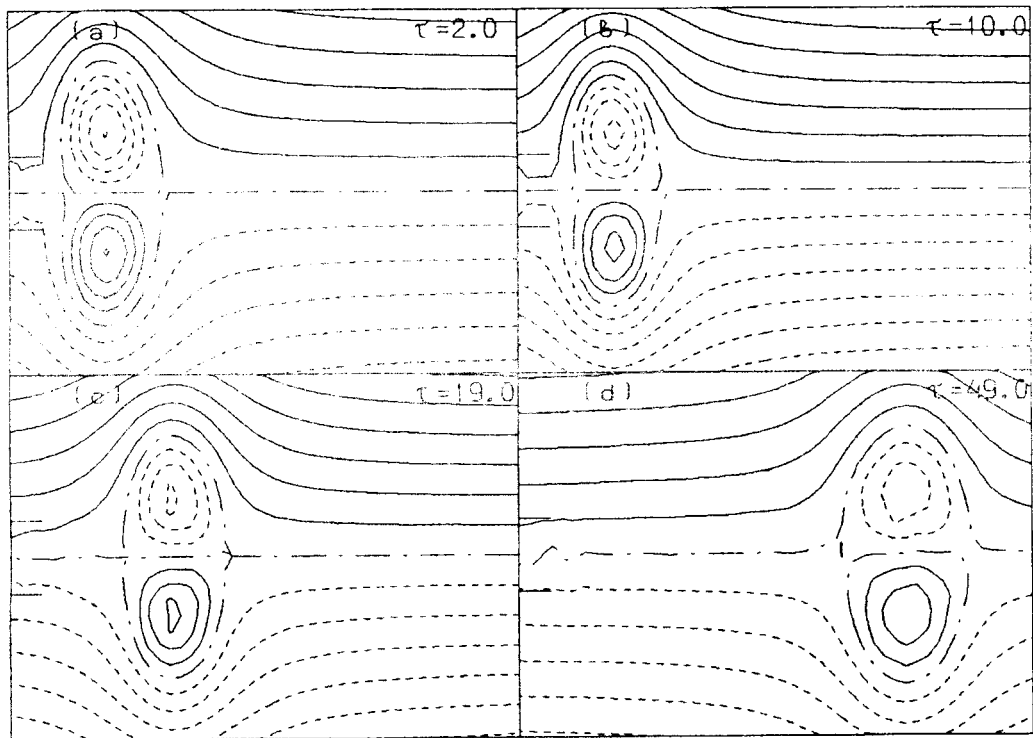


Рис.4. Лінії течії в рухомій системі координат.

4. Висновки

Результати моделювання якісно узгоджуються з добре відомими експериментальними та теоретичними даними щодо процесу утворення та динаміки вихрового кільця або пари [2]. Тому такі течії можуть бути вивчені в рамках методу дискретних вихорів, а дана методика може бути поширена на більш складні випадки.

РЕЗЮМЕ

В работе изучается возможность моделирования процесса образования и динамики вихревой пары с помощью метода дискретных вихрей. Исследуется импульсный выброс жидкости из трубки (импульсная струя). Жидкость считается идеальной и несжимаемой. Изучается изменение поля скорости, картины линий тока в подвижной и

неподвижной системе координат. Результаты согласуются с известными экспериментальными и теоретическими данными.

SUMMARY

In this work the computer simulation capability of generation and movement vortex pair process by discrete vortex method is investigated. The fluid pulse ejection from the tube (impulse jet) is researched. Fluid is considered ideal and incompressible. Velocity field changing, streamline picture in moving and fixed coordinate system is studied. Our results are in a good accordance with known experimental and theoretical data.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Владимиров В. А., Тарасов В. Ф. Формирование вихревых колец // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук – 1980.- №3 – Вып. 1. – С. 3 –11.
2. Мелешко В. В., Константинов М. Ю. Динамика вихревых структур, К.: Наукова думка.- 1993.- 279 с.
3. Спаларт Ф. Р., Стрелец М. Х., Травин А. К., Шур М. Л. Моделирование взаимодействия вихревой пары с поверхностью земли // МЖГ, №6, 2001, С. 52-63.
4. Белоцерковский С. М., Гиневский А. С. Моделирование турбулентных струй и следов на основе метода дискретных вихрей.- М. -1995.- 368 с.
5. Довгий С. О., Буланчук Г. Г. Чисельне моделювання динаміки когерентних вихрових структур в плоскому затопленому струмені // Доповіді НАН України, 1998, №12., С. 59-62.

Надійшла до редакції 18.03.2002 р.

УДК 535.377

МОДЕЛЬ ОДИНОЧНОГО ПИКА ТЕРМОСТИМУЛИРОВАННОЙ ЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ В СЛУЧАЕ ОБЩЕЙ КИНЕТИКИ СВЕЧЕНИЯ.

Я.М. Кривошеев, А.И. Бажин, Н.В. Сунцов.

В последнее время значительно возросла роль оптического излучения в технологических процессах и научных исследованиях. Широкий спектральный диапазон используемых излучений, их большой интервал временных и мощностных характеристик затрудняет их измерение наиболее распространенными электронными методами и стимулирует разработку малогабаритных интегрирующих детекторов, в которых для регистрации оптических излучений могут быть использованы различные физические эффекты. Для регистрации малых доз необходима высокая чувствительность материала детектора, в качестве которого могут применяться многие перспективные полупроводники, в качестве которых можно предложить твердые растворы халькогенидов, некоторые оксиды со строго контролируемым стехиометрическим составом.

Одним из наиболее чувствительных и наиболее простых методов считывания дозиметрической информации является термостимулированная люминесценция (ТСЛ).

В работах [1-3] рассмотрена и развита теория ТСЛ для модели полупроводника в запрещенной зоне которого находится один уровень захвата (ловушка) и один уровень излучательной рекомбинации. Авторы этих работ рассматривали два предельных случая для ТСЛ: линейная кинетика свечения (малая вероятность повторного захвата электронов на ловушки) и квадратичная кинетика свечения с большой вероятностью этого захвата. Однако работы для общей кинетики свечения либо немногочисленны [4,5], либо содержат громоздкий математический аппарат. В этих работах выстраивались различные варианты устранения неоднозначности в определении кинетики ТСЛ исследуемых образцов.

Целью данной работы было построение системы уравнений для определения характеристик дефектов, оказывающих преобладающее воздействие на ТСЛ, не зависящих от типа кинетики свечения и пригодных для программного прогнозирования свойств новых материалов, обладающих способностью к ТСЛ и пригодных к использованию в термолюминесцентной дозиметрии.

В условиях модели полупроводника с одним типом центров захвата и одним типом центров свечения в [1] получена следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= -\gamma n P_r, \\ \frac{dn_t}{dt} &= \gamma_t n N_t - W_t n_t, \\ n_t &= P_r, \end{aligned} \quad (1)$$

где n , P_r – концентрация электронов на уровнях захвата и дырок на центрах свечения, W_t – вероятность захвата электронов на ловушки, n – концентрация электронов, γ , γ_t – коэффициенты рекомбинации и захвата.

Для проведения расчета введем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} n_m \Rightarrow T_m, n_p = \frac{n_m}{p} \Rightarrow T_p, p > 1, \\ \frac{dn}{dT} = 0 (n p T = T_m). \end{aligned} \quad (2)$$

Из уравнений (1) при линейной скорости нагрева можно получить, используя методику, предложенную в [6]:

$$\frac{P_{r_m}}{P_{r_p}} = P \frac{T_p}{T_m} \exp\left(-\frac{E_t}{k_b} \left(\frac{1}{T_m} - \frac{1}{T_p}\right)\right), \quad (3)$$

где T_p , T_m – температура, взятая в произвольной части пика ТСЛ, T_m – температура максимума, k_b – постоянная Больцмана, P – параметр, определяемый экспериментально, P_{rp} , P_{rm} – концентрации дырок на центрах свечения, соответствующие T_m , T_p . Далее получаем следующие выражения:

$$E_t = k_b \frac{\ln(P) + \frac{W_0}{\beta} \int_{T_p}^{T_m} \exp\left(-\frac{E_t}{k_b T}\right) dT}{\left(\frac{1}{T_p} - \frac{1}{T_m}\right)} \quad (4)$$

(Линейная кинетика), $k_b = 1,38 \times 10^{-23}$ Дж / К.

$$\langle \tau_t \rangle = \frac{T_m - T_p}{\beta \left(\frac{E_t}{\beta} \left(\frac{1}{T_m} - \frac{1}{T_p} \right) - \ln(P) \frac{T_p}{T_m} \right)} \quad (5)$$

$\langle \tau_t \rangle$ - среднее время жизни электронов и для квадратичной кинетики:

$$\langle \tau_t \rangle = \frac{\gamma P_r (T_m - T_p) T_m}{\gamma_t N_t \beta T_m T_p P} \left\{ \exp \left(- \frac{E_t}{k_b} \left(\frac{1}{T_p} - \frac{1}{T_m} \right) \right) - 1 \right\}. \quad (6)$$

Анализ структуры системы уравнений (1) позволяет получить следующее уравнение для температуры максимума ТСЛ в случае общей кинетики свечения:

$$T_m = \frac{E_t}{k_b} \left\{ \ln \left(\frac{W_0 k_b T_m^2 P_r (2(\gamma P_r + \gamma_t N_t) - \gamma P_r)}{E_t \beta (\gamma P_r + \gamma_t N_t)^2} \right) \right\}^{-1} \quad (7)$$

Рассмотрим частные случаи формулы (7). В случае линейной кинетики свечения будет выполняться неравенство $\gamma_t N_t \ll \gamma P_r$ и выражение (7) примет вид:

$$T_m = \frac{E_t}{k_b} \left\{ \ln \left(\frac{k_b T_m^2 W_0}{E_t \beta} \right) \right\}^{-1}. \quad (8)$$

В случае квадратичной кинетики свечения, когда выполняется неравенство $\gamma P_r \ll \gamma_t N_t$ выражение (7) преобразуется в следующее соотношение:

$$T_m = \frac{E_t}{k_b} \left\{ \ln \left(\frac{k_b T_m^2 W_0 P_r}{E_t \beta \gamma_t N_t} \right) \right\}^{-1} \quad (9)$$

Полученные формулы (8) и (9), как частные случаи (6), совпадают с приведенными в литературе [1].

Соотношения (8) - (9) не зависят от типа кинетики свечения кристаллофосфора и тем самым возможно снять с рассмотрения вопрос о неоднозначности ее определения. Параметры центров свечения и захвата, которые необходимы для физико-химических расчетов с использованием полученных соотношений можно получить из данных по ЭПР, совместных измерений фотопроводимости, термостимулированной проводимости и люминесценции, исследований поглощения и отражения излучения от образца. Анализ же литературных данных позволит установить какой тип дефектов оказывает преобладающее воздействие на кинетику ТСЛ при данной определенной температуре.

Для интенсивности пика ТСЛ при общей кинетике можно получить:

$$I = \frac{\gamma^{b-1} W_0 P_r^b \exp \left(- \frac{E_t}{k_b T} \right) \left\{ \exp \left(- W_0 \int_{T_0}^T \exp \left(- \frac{E_t}{k_b T} \right) dT \right) / \beta \right\}^{2-b}}{(\gamma_t N_t)^{b-1} \left[1 + \frac{\gamma W_0 P_r}{\beta \gamma_t N_t} \int_{T_0}^T \exp \left(- \frac{E_t}{k_b T} \right) dT \right]^{b(b-1)}} \quad (10)$$

где b - некоторый кинетический параметр, I - интенсивность пика ТСЛ.

Необходимость полученных формул достаточно очевидна в случае, когда присутствует фоновый ток и положение нулевой точки не определено с достаточной степенью точности. Поэтому, достаточно провести прямую, параллельную оси температур, и в точках пересечения с нарастающей и спадающей частью пика ТСЛ зафиксировать соответствующие значения температур.

Результаты численного моделирования находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными.

РЕЗЮМЕ

У роботі розглянуто практично важливий випадок термостимульованої люмінесценції. Отримана система рівнянь при використанні якої не з'являється потреба розрішати невизначеність у кінетиці свічення кристаллофосфору. Частині випадки, які отримуються отриманої системи рівнянь, співпадають з літературними даними, що дозволяє використовувати отримані результати для програмного модулювання ТСЛ перспективних люмінофорів.

SUMMARY

In work described a practical important case of thermostimulated luminescence. The set of equations is obtained, at which use there is no necessity to permit ambiguity in definition of a kinetics of a luminescence of a crystalline phosphor. The special cases following from an obtained set of equations, coincide with the literary data, that allows to utilize the obtained outcomes for program model operation TSL of perspective luminophors.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Сердюк В.В., Ваксман Ю.Ф. Люминесценция полупроводников. Киев – Одесса: Вища школа.-1989. -С.139 – 151.
2. Вертопрахов В.Н., Сальман Е.Г. Термостимулированные токи в неорганических веществах. Новосибирск: Наука.- 1979. – С. 49 – 65.
3. Чмырев В.И., Дудкина Т.Л., Скорников В.М. и др. Термостимулированные и фотоэлектрические свойства кремния, легированного золотом./ Неорганические материалы. – т.33. - №9, 1997. – с.1041 – 1053.
4. Канунников Л.А. Порядок реакции термостимулированной рекомбинации./ Журнал прикладной спектроскопии. – т.28. - №5, 1978. –с. 877 – 880.
5. Mahmoud Said Rasheedy. On the general order kinetics of the termoluminescence glow./ Journal of Physics: condens. Matter. - v.5. - 1993.- p.633 – 636.
6. Чмырев В.И. Расчет одиночного пика термостимулированной проводимости в приближении слабого и сильного перезахвата. / Неорганические материалы. – т.35. - №10, 1999. – с.1159 – 1160.

Надійшла до редакції 03.04.2002 р.

УДК 535.56

ЕСТЕСТВЕННАЯ ОПТИЧЕСКАЯ АКТИВНОСТЬ МОЛЕКУЛЯРНЫХ КРИСТАЛЛОВ С ВАКАНСИЯМИ

В.В. Румянцев, С.А. Федоров, Ю.Г. Пашкевич
Донецкий физико-технический институт НАН Украины

К настоящему времени имеется значительное число работ, посвященных теоретическим исследованиям естественной оптической активности (ЕОА) идеальных и топологически упорядоченных примесных молекулярных кристаллов (см., например, [1-10] и приведенные там ссылки). Используемые в этих работах микроскопические модели упомянутых систем дают возможность рассматривать эффекты пространственной дисперсии (одним из которых является ЕОА) без учета дефектов кристаллического строения – вакансий, дислокаций, дисклинаций, их различных комбинаций и т.п. Однако реальные молекулярные кристаллы всегда содержат дефекты, поэтому адекватная интерпретация соответствующих экспериментальных данных, идентификация различных механизмов гиротропии, понимание их особенностей в каждом конкретном случае часто возможны лишь с позиции микротeorии, учитывающей указанные несовершенства. Развитие такой микротeorии проще всего осуществить для дефектных структур, которые имеют ту же топологию, что и примесные системы, рассмотренные в [6-10]. В этом случае можно использовать без существенных модификаций методику расчета вращательной способности $\rho(\vec{s}, \omega, C)$ ($\vec{s} = \vec{k} / k$, где $\vec{k}$ – волновой вектор, ω – частота света, а C – концентрация дефектов), разработанную в [6-10], и проводить соответствующие вычисления по стандартной схеме. Простейшими из дефектных структур являются молекулярные кристаллы с вакансиями, в которых искажения молекул и их смещения из равновесных положений в регулярной кристаллической решетке пренебрежимо малы. В этом случае указанные дефекты формально можно рассматривать как примеси замещения с нулевыми значениями молекулярных токов $\vec{J}_{\vec{n}\alpha;f0}(\vec{k}) = \langle \Psi_{\vec{n}\alpha}^{(f)} | \vec{I}_{\vec{n}\alpha}(\vec{k}) | \Psi_{\vec{n}\alpha}^{(0)} \rangle$ ($\vec{n}$ – целочисленный вектор решетки, α – номер подрешетки, $\vec{I}_{\vec{n}\alpha}(\vec{k})$ – Фурье-образ оператора плотности тока молекулы $\vec{n}\alpha$, $\Psi_{\vec{n}\alpha}^{(0)}$ и $\Psi_{\vec{n}\alpha}^{(f)}$ – волновые функции соответственно ее основного и возбужденного состояний), энергий $\vec{E}_{\vec{n}\alpha}$ и матрицы резонансного межмолекулярного взаимодействия $V_{\vec{n}\alpha m\beta}$. Поэтому описание квазичастичных возбуждений в топологически упорядоченных кристаллах с вакансиями (и, следовательно, расчет $\rho(\vec{s}, \omega, C)$) возможно в рамках тех же модельных представлений и с использованием тех же методик, которые применялись в [6-10] для изучения ЕОА в системах с реальными примесями замещения. Учет деформаций молекул представляет собой отдельную задачу, которая решается в зависимости от типа химической связи, величины меж- и внутримолекулярного взаимодействия, конфигурации молекул, концентрации вакансий с помощью аналитических методов, изложенных в [11].

В настоящей работе микроскопически исследовано ЕОА молекулярных кристаллов с вакансиями при пренебрежении указанными искажениями. Ниже рассматриваются системы с произвольным числом K подрешеток, расчет $\rho(\vec{s}, \omega, C)$ для экситонной области спектра выполнен в рамках одноуровневой молекулярной модели. На основе полученных результатов проведен анализ ЕОА систем с примитивной решеткой.

2. Хорошо известно [1], что для пространственно – диспергирующих молекулярных кристаллов феноменологическое и микроскопическое описание процессов распространения электромагнитных волн, а также расчет $\rho(\vec{s}, \omega, C)$ (далее C – концентрация вакансий) удобно осуществлять с помощью поперечного тензора диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{il}^{\perp}(\vec{k}, \omega, C)$. В экситонной области спектра его зависящую от $\vec{k}$ – часть $\Delta \varepsilon^{\perp}(\vec{k}, \omega, C)$ можно представить [6] в следующем виде:

$$\Delta \varepsilon_{il}^{\perp}(\vec{k}, \omega, C) = \frac{4\pi}{V\omega^2\hbar} \sum_{n,m=1}^N \sum_{\alpha,\beta=1}^K \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r}_{n\alpha m\beta}) P J_{n\alpha;f0}^i(-\vec{k}) \langle (B_{n\alpha}^+ - B_{n\alpha}) | B_{n\beta}^+ - B_{n\beta} \rangle \rangle_{\omega} J_{m\beta;f0}^l(\vec{k}), \quad (1)$$

В (1) N – число элементарных ячеек в объеме V , P – оператор конфигурационного усреднения [12, 13], Фурье-образ двухвременной запаздывающей функции Грина

$$\begin{aligned} << (B_{n\alpha}^+ - B_{n\alpha}) \left| (B_{m\beta}^+ - B_{m\beta}) \right>>_{\omega}^r = < \Psi_0^{(ex)} \left| (B_{n\alpha}^+ - B_{n\alpha}) (\hbar\omega - H^{(ex)})^{-1} (B_{m\beta}^+ - B_{m\beta}) \right| \Psi_0^{(ex)} > - \\ < \Psi_0^{(ex)} \left| (B_{m\beta}^+ - B_{m\beta}) (\hbar\omega + H^{(ex)})^{-1} (B_{n\alpha}^+ - B_{n\alpha}) \right| \Psi_0^{(ex)} >, \end{aligned} \quad (2)$$

от разностей операторов рождения $B_{n\alpha}^+$ и уничтожения $B_{m\alpha}$ молекулярных возбуждений соответствует экситонному гамильтониану $H^{(ex)}$, имеющему для всех рассматриваемых систем стандартный вид:

$$H^{(ex)} = \sum_{n\alpha} E_{n\alpha} B_{n\alpha}^+ B_{n\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{n\alpha, m\beta} V_{n\alpha m\beta} (B_{n\alpha}^+ + B_{n\alpha}) (B_{m\beta}^+ + B_{m\beta}) \quad (3)$$

Смысл остальных обозначений – общепринятый (см., например, [6]).

Из (1) видно, что микроскопический расчет $\varepsilon_{il}^{\perp}(\vec{k}, \omega, C)$ непосредственно связан с конфигурационным усреднением произведения молекулярных токов и функции Грина (2). Эту процедуру удобно осуществить предварительно выразив микроскопические характеристики $E_{\vec{n}\alpha}$ и $V_{\vec{n}\alpha\vec{m}\beta}$, определяющие, как видно из (2) и (3), значения функции

$$<< (B_{n\alpha}^+ - B_{n\alpha}) \left| (B_{m\beta}^+ - B_{m\beta}) \right>>_{\omega}^r \text{ и } \bar{J}_{n\alpha;f0}(\vec{k}) \text{ через конфигурационно зависимые случай-}$$

ные величины $\eta_{n\alpha}, \eta_{n\alpha}^{(v)}$. Где $\eta_{n\alpha}(\eta_{n\alpha}^{(v)})=1$, если в узле $\vec{n}\alpha$ находится молекула (вакансия), $\eta_{n\alpha}(\eta_{n\alpha}^{(v)})=0$ в другом случае. Поскольку для «занятых» вакансиями узлов каждая из перечисленных характеристик равна нулю, то пренебрегая (как и в [6-10]) обусловленным наличием дефектов изменением кристаллического поля, действующего на выделенную молекулу, можно записать равенства:

$$\bar{J}_{n\alpha;f0}(\vec{k}) = \bar{J}_{\alpha;f0}(\vec{k}) \eta_{n\alpha}, \quad (4a)$$

$$E_{\vec{n}\alpha} = E_{\alpha} \eta_{n\alpha}, \quad (4b)$$

$$V_{\vec{n}\alpha\vec{m}\beta} = \eta_{n\alpha} W_{n\alpha m\beta} \eta_{m\beta}, \quad (4c)$$

$$\eta_{n\alpha} + \eta_{n\alpha}^{(v)} = 1, \quad (4d)$$

где матричный элемент $\bar{J}_{\alpha;f0}(\vec{k})$ Фурье-образа оператора плотности тока α -ой молекулы, ее энергия возбуждения E_{α} и матрица резонансного межмолекулярного взаимодействия $W_{n\alpha m\beta}$ соответствуют идеальному кристаллу. Здесь, также как и в предыдущих работах [6-10], пренебрежем изменением кристаллического поля, действующего на выделенную молекулу, обусловленного наличием дефектов. Симметричный анализ ниже приведенной формулы (11) показывает, что используемое при записи равенств (4a) – (4в) приближение не позволяет проводить микроскопическое описание индуцированной вакансиями ЕОА. В последнем случае аналитическая связь $\bar{J}_{n\alpha;f0}(\vec{k})$, $E_{\vec{n}\alpha}$, $W_{n\alpha m\beta}$ с $\eta_{n\alpha}$ должна выражаться более точными (чем (4a-4в)) соотношениями. В то же время для оптически активных и без вакансий кристаллов с малым (по сравнению с E_{α}) межмолекулярным взаимодействием использование упомянутого приближения вполне оправдано. Только такие кристаллы и будут рассмотрены ниже.

Формулы (4a-4г) автоматически обеспечивают правильные предельные значения $\varepsilon_{il}^{\perp}(\vec{k}, \omega, C)$ и $\rho(\vec{s}, \omega, C)$ при $C \rightarrow 0$. Из (4г) следует, что концентрация молекул C_{α} и вакансий $C_{\alpha}^{(v)}$ α -ой подрешетки связаны соотношением:

$$C_{\alpha} + C_{\alpha}^{(v)} = 1 \quad (5)$$

$$\text{При этом очевидно, что } C = \sum_{\alpha=1}^{\kappa} C_{\alpha}^{(v)}.$$

Функция $<< (B_{n\alpha}^+ - B_{n\alpha}) \left| (B_{m\beta}^+ - B_{m\beta}) \right>>_{\omega}^r$, фигурирующая в (1), выражается через величины

$E_{\vec{n}\alpha}$, $V_{\vec{n}\alpha\vec{m}\beta}$ и для квадратичного по операторам $B_{n\alpha}^+$, $B_{m\alpha}$ экситонного гамильтониана $H^{(ex)}$ может быть найдена точно. Воспользовавшись методом уравнений движения [14, 15], получим:

$$\langle\langle (B_{n\alpha}^+ - B_{n\alpha}) | (B_{m\beta}^+ - B_{m\beta}) \rangle\rangle_{\omega}^r = -2\hbar\{[\hbar^2\omega^2 - (E + 2V)E]^{-1}(E + 2V)\}_{\bar{n}\alpha\bar{m}\beta}, \quad (6)$$

где $[E]_{\bar{n}\alpha\bar{m}\beta} = E_{n\alpha}\delta_{nm}\delta_{\alpha\beta}$, $[V]_{\bar{n}\alpha\bar{m}\beta} = V_{n\alpha m\beta}$. Приведенное в [6] аналитическое выражение для указанной функции в данном случае неприменимо, поскольку как видно из (5) в [6], последняя расходится при нулевых значениях $E_{n\alpha}$ и $E_{m\beta}$.

Из (1) и (4а) следует, что значения матричных элементов (их зависимость от C является неявной) $\Phi_{n\alpha m\beta}(\omega, C) \equiv P\eta_{n\alpha} \cdot \langle\langle (B_{n\alpha}^+ - B_{n\alpha}) | (B_{m\beta}^+ - B_{m\beta}) \rangle\rangle_{\omega}^r \cdot \eta_{m\beta}$ определяют поведение $\Delta\varepsilon^{\perp}(\vec{k}, \omega, C)$ во всей частотно – концентрационной области. С учетом (4б), (4в) и (6) $\Phi_{n\alpha m\beta}(\omega, C)$ может быть записано в виде:

$$\Phi_{n\alpha m\beta}(\omega, C) = 2\hbar\{(C_{\alpha}/E_{\alpha})\delta_{nm}\delta_{\alpha\beta} - \hbar^2\omega^2[g_{\alpha}(\omega)/E_{\alpha}]^{\frac{1}{2}}[(\sigma^{-1}(\omega, C_{\alpha}) - u(\omega))^{-1}]_{n\alpha m\beta}[g_{\beta}(\omega)/E_{\beta}]^{\frac{1}{2}}\} \quad (7)$$

$$\sigma(\omega, C_{\alpha}) = P\eta \sum_{p=0}^{\infty} [u(\omega)Q\eta]^p. \quad (8)$$

Где $[u(\omega)]_{n\alpha m\beta} = [2E_{\alpha}g_{\alpha}(\omega)]^{\frac{1}{2}}W_{n\alpha m\beta}[2E_{\beta}g_{\beta}(\omega)]^{\frac{1}{2}}$, $g_{\alpha}(\omega) = (\hbar^2\omega^2 - E_{\alpha}^2)^{-1}$, $Q = I - P$,

$[\eta]_{n\alpha m\beta} = \eta_{n\alpha}\delta_{nm}\delta_{\alpha\beta}$, I - единичный оператор.

При выводе формулы (7) использован метод оператора проектирования [12, 13], удобный для определения приведенной связи $E_{n\alpha}, V_{n\alpha m\beta}, \bar{J}_{n\alpha;f0}(\vec{k})$ со случайными величинами $\eta_{n\alpha}$. Поскольку матричная функция (8) имеет ту же структуру, что и массовый оператор для усредненной резольвенты (см. (6) в [12]), то расчет $\sigma(\omega, C_{\alpha})$ можно осуществлять с помощью тех же методов, используя те же приближения, что и в [12, 13]. Очевидно, что $[\sigma(\omega, C_{\alpha})]_{n\alpha m\beta} \rightarrow \delta_{nm}\delta_{\alpha\beta}$ при $C \rightarrow 0$. В простейшем одноузельном приближении (т. е. приближении усредненной Т-матрицы, УТМ) указанная функция диагональна по всем индексам и имеет следующий вид:

$$[\sigma^{(VTH)}(\omega, C_{\alpha})]_{n\alpha m\beta} = C_{\alpha}\delta_{nm}\delta_{\alpha\beta}. \quad (9)$$

После подстановки (7) в (1) и несложных преобразований получим микроскопическое выражение для $\Delta\varepsilon^{\perp}(\vec{k}, \omega, C)$ в экситонной области спектра:

$$\Delta\varepsilon_{il}^{\perp}(\vec{k}, \omega, C) = \frac{8\pi}{v_0\omega^2} \sum_{\alpha=1}^K C_{\alpha} E_{\alpha}^{-1} J_{\alpha;0f}^i(-\vec{k}) J_{\alpha;f0}^l - \frac{8\pi\hbar^2}{v_0} \sum_{\alpha,\beta=1}^K J_{\alpha;0f}^i(-\vec{k}) F_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega, C_{\alpha}) J_{\beta;f0}^l(\vec{k}), \quad (10)$$

$$F_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega, C_{\alpha}) = [g_{\alpha}(\omega)g_{\beta}(\omega)/E_{\alpha}E_{\beta}]^{\frac{1}{2}}\{[\sigma^{-1}(\vec{k}, \omega, C_{\alpha}) - u(\vec{k}, \omega)]^{-1}\}_{\alpha\beta},$$

$$[\sigma(\vec{k}, \omega, C_{\alpha})]_{\alpha\beta} = \sum_n [\sigma(\omega, C_{\alpha})]_{n\alpha m\beta} \exp(-i\vec{k}\vec{r}_{n\alpha m\beta}), [u(\vec{k}, \omega)]_{\alpha\beta} = \sum_n [u(\omega)]_{n\alpha m\beta} \exp(-i\vec{k}\vec{r}_{n\alpha m\beta}),$$

$v_0 = V/N$. Выражение (10) получено в рамках одноуровневой модели, без каких-либо аппроксимаций функции $\Phi_{n\alpha m\beta}(\omega, C)$, в то время как в случае смешанных и ориентационно-разупорядоченных кристаллов указанная функция записывалась в приближенном виде [6-8]. Расчет характеристик нормальных электромагнитных волн, с помощью выражения (10), может быть осуществлен как с учетом, так и без учета пространственной дисперсии.

3. Используя (10) с учетом феноменологической связи $\rho(\vec{s}, \omega, C)$ с $\varepsilon_{il}^{\perp}(\vec{k}, \omega, C)$ (см. [1, 3, 4]), получим:

$$\rho(\vec{s}, \omega, C) = i \frac{2\pi}{v_0} \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 s^l \sum_{\alpha, \beta} \left\{ \hbar (E_\alpha / E_\beta)^2 \frac{1}{2} [\vec{s} \times \vec{P}_{\alpha;0f}]_l Q_{\beta;f0}^{ll} [F_{\alpha\beta}(\vec{s}, \omega, C_\alpha) + F_{\beta\alpha}(\vec{s}, \omega, C_\alpha)] + \right. \\ \left. + (E_\alpha E_\beta)^2 [\vec{P}_{\alpha;0f} \times \vec{P}_{\beta;f0}] \cdot \vec{s} \frac{\partial F_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega, C_\alpha)}{\partial k^l} \right\} \Big|_{\vec{k}=0}. \quad (11)$$

В (11) по дважды повторяющимся индексам производится суммирование, c – скорость света, $\vec{P}_{\alpha;0f}$ – матричный элемент оператора дипольного момента α -ой молекулы. Чисто мнимая величина

$Q_{\alpha;f0}^{ll} = -i \frac{\partial J_{\alpha;f0}^l(\vec{k})}{\partial k^l} \Big|_{\vec{k}=0}$ обычным образом [1, 4] выражается через матричные элементы операторов квадрупольного и магнитодипольного моментов соответствующей молекулы

Анализ зависимости $\rho(\vec{s}, \omega, C)$ от концентрации вакансий позволяет решить вопрос о целесообразности их учета при исследовании ЕОА конкретных систем. Поскольку вращательная способность является функцией ω , то роль эффектов разупорядочения в различных частотных областях может быть различной. Легче всего сказанное проиллюстрировать на примере рассматриваемых систем с примитивной решеткой. В этом случае в одноузельном приближении, как следует из (5), (9) и (11), вращательная способность представима в виде:

$$\rho(\vec{s}, \omega, C) = i \frac{4\pi}{v_0 \hbar c^2} s^l Q_{f0}^{ll} [\vec{s} \times \vec{P}_{0f}]_l \frac{\hbar^2 \omega^2 (1 - C)}{\hbar^2 \omega^2 - E_0^2 - 2E_0 W(\vec{s})(1 - C)} \quad (12)$$

Здесь E_0 и $W(\vec{s})$ соответственно энергия возбуждения молекулы и Фурье-образ матрицы резонансного межмолекулярного взаимодействия в идеальном кристалле.

Из формулы (12) видно, что для рассматриваемых систем имеются две частотные области, которым соответствует существенно различные зависимости вращательной способности от C . Графики указанных зависимостей для $\hbar\omega_1 = 2,8 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$ и $\hbar\omega_2 = 4 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$ изображены (в относительных единицах) на рисунке.

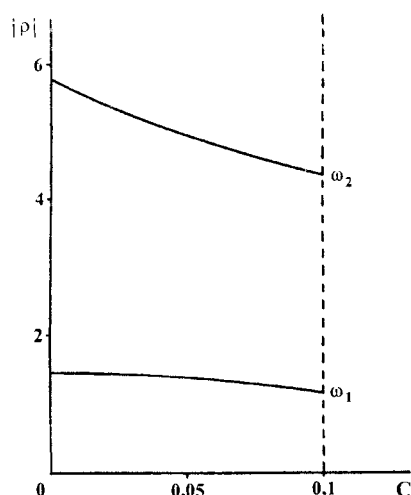


Рис. 1. Концентрационная зависимость вращательной способности для двух частотных областей.

В расчетах использовались характерные значения величин E_0 и $W(\vec{s})$ соответственно $3 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$ и $0,7 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$. Из рисунка видно, что в первой частотной области оптическая активность менее чувствительна к изменению концентрации вакансий, чем во второй. Такое поведение вращательной способности связано с перенормировкой экситонной энергии и ее зависимостью от C . Относительно широкая (по сравнению с $\rho(\vec{s}, \omega_2, C = 0)$) область значений $\rho(\vec{s}, \omega_2, C)$ указывает на возможность значительных изменений ЕОА, связанных с наличием вакансий.

4. Очевидно, что в случае систем со сложной решеткой имеется больше, чем в рассмотренном примере, частотных областей, для которых зависимости вращательной способности от C качественно

отличаются друг от друга. Из [6-8] следует, что выше приведенное микроскопическое рассмотрение ЕОА легко обобщить на случай смешанных и ориентационно-разупорядоченных систем с вакансиями. Для них специфика и особенности вращательной способности определяются зависимостями $\bar{J}_{n\alpha}(\vec{k}), E_{n\alpha}, V_{n\alpha m\beta}$ от конфигураций как вакансий, так и примесных молекул. Поскольку даже для систем одного типа эти зависимости могут существенно отличаться (как, например, в случае ориентационно-разупорядоченных кристаллов с различными углами переориентаций [10]), то и роль рассматриваемых дефектов в ЕОА соответствующих сред может быть принципиально разной.

РЕЗЮМЕ

Мікроскопічно досліджена природна оптична активність (ПОА) молекулярних кристалів, у яких деформацією молекул і їх зсувом із рівноважних положень у регулярних кристалічних ґратах можна знехтувати. Розрахунок виконаний для екситонної області спектру в рамках однорівневої молекулярної моделі. На основі отриманих результатів проведений аналіз ПОА систем із примітивними ґратами. Показано, що для розглянутих систем маються дві частотні області, яким відповідають істотно різні залежності оберальної здатності від концентрації вакансій.

SUMMARY

The natural optical activity (NOA) of molecular crystals, in which distortion of molecules and their displacements from equilibrium positions in a regular crystal lattice are small, is investigated microscopically. The account is executed for exciton area of a spectrum within the framework of single-level molecular model. The systems NOA analysis for a primitive lattice is carried out on the basis of the received results. Is shown, that for examined systems there are two frequency areas, to which there correspond much various dependences of rotary ability on concentration of vacancies.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Агранович В.М. Теория экситонов.- М.: Наука, 1968.- 382с.
2. Haikenscheid L.M., Vlieger J. On the dielectric properties of molecular crystals. First- order spatial dispersion and optical activity// Physica. - 1973, A79, N 5. - P.517-542.
3. Kranendonk J., Sipr J.E. About multiple expansion in the theory of optical activity// Can. J. Phys. - 1976, 54, № 5. - P.471-474.
4. Кизель В.А., Бурков В.И. Гиретрония кристаллов. - М.: Наука, 1980.- 304с.
5. Овандер Л.Н., Го Н.С., Федоров С.А. К теории оптической активности молекулярных кристаллов. 2. Теория оптической активности// УФЖ. - 1983, 73, № 11. - С.1674-1677.
6. Пашкевич Ю.Г., Федоров С.А. Микроскопическая теория естественной оптической активности смешанных молекулярных кристаллов// Опт. и спектроск. - 1991, Т.71, вып.6.- С. 979- 984.
7. Федоров С.А. Учет недиагонального беспорядка в теории естественной оптической активности смешанных молекулярных кристаллов// Опт. и спектроск. - 1992, Т.73, вып.5. - С.980-982.
8. Федоров С.А. Микротекория естественной оптической активности ориентационно-разупорядоченных органических кристаллов// Опт. и спектроск. - 1995, Т.79, вып.3. - С. 495- 498.
9. Федоров С.А. Электрооптическая активность смешанных молекулярных кристаллов// Кристаллография. - 1997, Т.42, № 2. - С.706-709.
10. Федоров С.А. Электрогирация ориентационно-разупорядоченных молекулярных кристаллов // Опт. и спектроск. - 1998, Т.85, вып.5. - С.790-793.
11. Стоунхэм А.М. Теория дефектов в твердых телах. Т.2. - М.: Мир, 1978.- 357с.
12. Лось В.Ф. Метод проекционного оператора в в теории неупорядоченных систем// Теор. и мат. физика. - 1987. - Т.73, № 1. - С.85-102.
13. Федоров С.А. Проекционный формализм в теории неупорядоченных систем с недиагональным беспорядком//УФЖ. -1993, Т.31, № 2. - С.316-321.
14. Тябликов С.В. Методы квантовой теории магнетизма. -М.: Наука, 1975.- 528с.
15. Реймс С. Теория многоэлектронных систем. - М.: Мир, 1976.- 334с.

Надійшла до редакції 21.03.2002 р.

УДК 535.8.32.34.36:535.15

ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКИЕ ВОЛОКОННЫЕ СВЕТОВОДЫ
СРЕДНЕГО ИНФРАКРАСНОГО ДИАПАЗОНА

В.В. Данилов

Введение

Основной областью применения волоконных световодов является связь [1]. Другой областью применения волоконных световодов, в силу отсутствия влияния на них электромагнитных помех, стали информационно - измерительные системы, где они используют в качестве первичных преобразователей (датчиков) различных физических величин [2]. Световодным волоконно-оптическим жгутам обязана своим появлением техническая визуальная диагностика в промышленности и медицине [3]. И конечно же, так называемые силовые волоконно-оптические элементы для технологических нужд в промышленности (например, сварка под водой) и медицине (хирургия, терапия, офтальмология) - еще одна отрасль техники где световоды, особенно в последнее десятилетие, находят широкое применение [4].

Теоретические вопросы распространения электромагнитных волн оптического диапазона по волноводным структурам достаточно хорошо изучены [5]. Технические средства получения и номенклатура материалов световодов видимого диапазона, для волоконно-оптической связи широко обсуждается в [1,6]. Вопросы расчета и проектирования планарных и волоконных оптических датчиков излагаются в [2,7].

Как показано в работе [8], значительно лучшие технические характеристики линий локальной связи, да и новые области использования, могут дать волоконные световоды из материалов, область высокой прозрачности (низких оптических потерь) которых сдвинута в более длинноволновый, по сравнению с кварцевыми стеклами, средний инфракрасный (ИК) диапазон (2...25 мкм).

Целенаправленный поиск материалов с наиболее низкими оптическими потерями, а также разработка методов очистки и получения на их основе световодов, начались с работ [9,10]. Согласно выполненным к настоящему времени оценкам [11,12], собственные оптические потери в некоторых классах ИК-материалов, к которым в первую очередь относят кристаллы галогенидов таллия, серебра и цинковых металлов могут быть на 1-3 порядка ниже, чем в кварцевом стекле. Минимум оптических потерь этих кристаллов, в коротковолновой области, определяется электронным поглощением - β_e и рассеянием Манделштама-Бриллюэна - γ_{MB} , в длинноволновой области - многофононным поглощением β_{mp} :

$$\beta = \beta_e + \beta_{mp} + \gamma_{MB} = \beta_e^0 e^{\omega/\omega_e} + \beta_{mp}^0 e^{-\omega/\omega_{mp}} + \gamma_{MB}^0 \omega^4 n^8(\omega),$$

где β_e^0 , β_{mp}^0 , γ_{MB}^0 , ω_e , ω_{mp} - величины постоянные для конкретного вида монокристалла, $n(\omega)$ - показатель преломления кристалла, ω - частота пропускаемого излучения.

Поскольку на коротковолновом краю, в области малых оптических потерь - $\gamma_{MB} \gg \beta_e$, минимум собственных оптических потерь кристаллов $AgCl$, $AgBr$, КРС-13, КРС-5, КРС-6 и CsJ может быть определен расчетным путем из оценки манделштам - бриллюэновского рассеяния γ_{MB} и многофононного поглощения β_{mp} , результаты которого представлены на рис. 1.

Параметры многофононного поглощения β_{mp}^0 и ω_{mp} определяются из измерений длинноволнового края спектров пропускания образцов разной длины при комнатной температуре. Значения полученных минимумов и соответствующие длины волн, для разных кристаллов приведены в таблице.

Для кристаллов $AgBr$, $AgCl$ и КРС-5, известен вклад поглощения свободными носителями зарядов - свободными поляронами, коэффициент поглощения которых определяется из соотношения: $\beta_p = 4\pi \text{Re} \sigma(\omega)/(cn)$, где $\sigma(\omega)$ - комплексная динамическая проводимость. При оценке $\beta_p(\omega)$ по величине электронной проводимости $\sigma_e(\omega)$, измеренной при комнатной температуре в наиболее чистых образцах, вклад поляронного поглощения может быть значительным. Для указанных кристаллов, его учет привел к повышению предполагаемого минимума оптических потерь с $10^{-4} \dots 10^{-3}$ дБ/км до $10^{-1} \dots 10^{-2}$ дБ/км.

Таким образом, из рассмотренных кристаллов, наименьшие собственные оптические потери ожидаются в кристаллах CsJ (см. рис. 1); в котором электронная проводимость значительно ниже ионной.

В настоящий момент, основные усилия разработчиков сводятся к выяснению механизмов оптических потерь в высокопрозрачных, среднего ИК диапазона, твердотельных материалах, а также световодах на их основе в рамках более общей задачи - разработки ИК волоконных световодов с малыми опти-

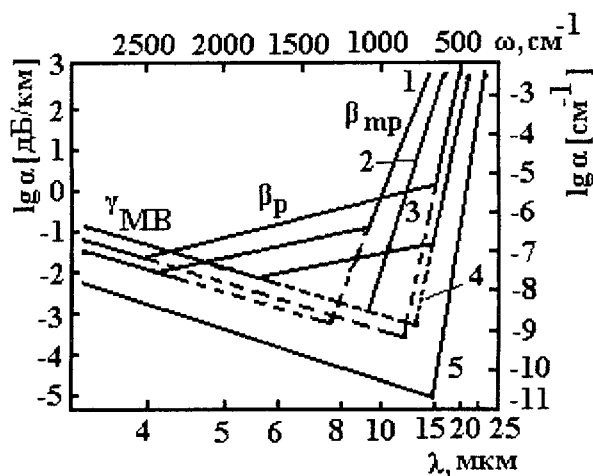


Рис. 1. Области предполагаемого минимума собственных оптических потерь *AgCl* (1), *KPC-13* (2), *AgBr* (3), *KPC-5* (4), *CsJ* (5).

Таблица. Расчетные оптические потери в кристаллах и световодах на их основе.

Кристалл	$\beta_{\min}$, 10^{-3} дБ/км	$\lambda_{\min}$, мкм	β_V , дБ/км	α , дБ/км
<i>AgCl</i>	1.0 (10)	8 (4,3)	130	500
<i>AgBr</i>	0.3 (40)	12 (38)	47	510
<i>KPC-13</i>	1.0 (10)	9 (5)	26	200
<i>KPC-5</i>	0.37 (10)	12.9 (5,7)	6.5	120
<i>KPC-6</i>	1.2	7.9	5.2	1000
<i>CsJ</i>	0.01	15.4	3.9	300

Примечание: $\beta_{\min}$, $\lambda_{\min}$ - параметры минимума собственных оптических потерь (в скобках - с учетом полярного поглощения, (см. рис. 1); β_V - наименьший коэффициент объемного поглощения, измеренный в образцах монокристаллов; α - наименьшие оптические потери в образцах световодов.

ческими потерями, пригодными для практических применений. Для изготовления поликристаллических световодов (ПКС) известны три способа пластической деформации: экструзия, прокатка и волочение. Лучшие результаты дает метод экструзии, т.е. выдавливания монокристаллической заготовки через фильеру (см. рис.2)

Физико-технические основы создания поликристаллических световодов

Основной трудностью метода экструзии является подавление потерь на рассеяние, что достигается путем формирования однородной и малодефектной структуры. Этому препятствует деформация

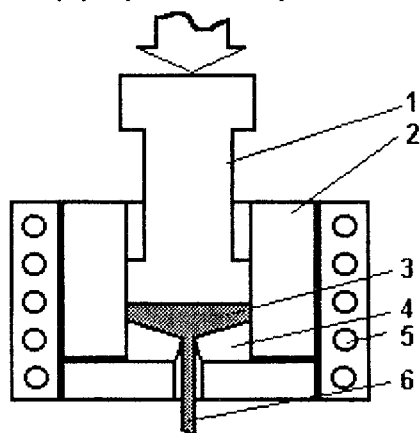


Рис. 2. Структура установки экструзии, где 1-плунжер; 2-экструзионная камера; 3- экструдированный кристалл; 4 - фильера; 5- нагреватель; 6 - световод.

$\varepsilon = \ln(D/D_0)^2$, где D/D_0 - отношение диаметров заготовки и световода, и большие напряжения экструзии: $p = k_0\mu\varepsilon + p_0$, где μ - модуль сдвига, k_0 и p_0 - константы. Большие значения p и ε приводят к сложному характеру процесса деформации, при котором условия баланса деформационного упрочнения и термоактивируемого разупрочнения, в основном и определяют видоизменения экструдированного ПКС. По-видимому, в условия баланса входят как параметры экструдированных кристаллов, так и параметры экструзии: температура, геометрия течения, напряжение и скорость. Физические механизмы экструзии очевидно наиболее близки ползучести, скорость которой лимитируется скольжением дислока-

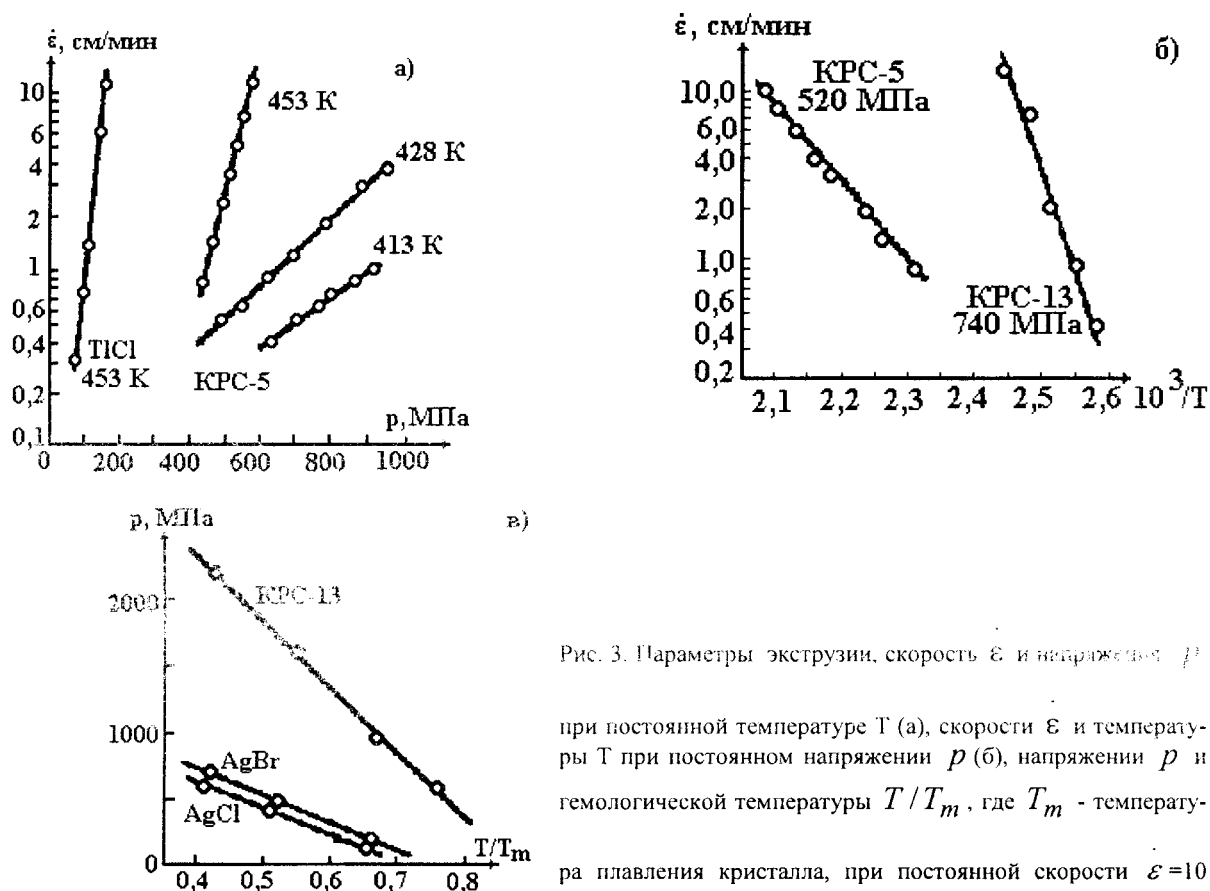


Рис. 3. Параметры экструзии, скорость $\dot{\varepsilon}$ и напряжение p при постоянной температуре T (а), скорости $\dot{\varepsilon}$ и температуры T при постоянном напряжении p (б), напряжении p и гемологической температуре T/T_m , где T_m - температура плавления кристалла, при постоянной скорости $\dot{\varepsilon} = 10$ см/мин (в).

ций с переползающей ступенькой (в области незначительных температур и высоких напряжений) [13]:

$$\dot{\varepsilon} \sim \dot{\varepsilon}_0 e^{-(U-\gamma p)/kT}, \quad (1)$$

где p и T - напряжение и температура деформации, γ и U - объем и активационная энергия экструдированного кристалла, не зависящие от напряжения. Как показано на экспериментальных зависимостях (см. рис. 3), хотя и в общем случае псевдоэкспоненциальный фактор может быть функцией T и p , для экструзии $TiCl$, $AgCl$, $AgBr$, KPC-5 и KPC-13, его можно считать константой [13,14].

Выбор кристаллов для экструзии.

При переходе от пластичных моногалогенидов таллия и серебра к их твердым растворам, как видно из рис. 3, величина U возрастает, что обусловлено явлением твердорастворного упрочнения. Напротив, $\gamma = kT\partial(\ln \dot{\varepsilon})/\partial p$ - активационный объем, существенно уменьшается, так как в нем возрастает концентрация барьеров а пробег дислокаций уменьшается. Анализируя (1), можно прийти к выводу, что

возможна оптимизация состава исходных кристаллов, пригодных для реализации процесса экструзии: во-первых, для увеличения механической прочности экструдированных световодов, выбором состава с максимальной активационной энергией; во-вторых, для уменьшения локальных перенапряжений, приводящих к образованию микротрещин, за счет более однородной деформации, выбором составов с минимальным активационным объемом.

Этим требованиям удовлетворяют составы КРС-13 (ряд твердых растворов в системе $AgCl - AgBr$), КРС-5 ($TlBr - TlI$), соответствующие точкам минимума диаграмм состояний [13-15].

В системе $AgCl - AgBr$, твердотельное упрочнение усиливается упрочнением деформационным, при выбранных параметрах экструзии предел текучести световодов из материалов этой системы определяется (см. рис. 4):

$$\sigma_t \sim p \sim [\mu(1 - \Delta\mu T)]^{1,4} \varepsilon + \sigma_0, \quad (2)$$

где $\Delta\mu$ - температурный коэффициент модуля сдвига, σ_0 - константа [15]. По сообщениям [16,17], наибольший предел текучести (120 МПа) достигнут в ПКС на основе КРС-13. Прочность этих световодов на

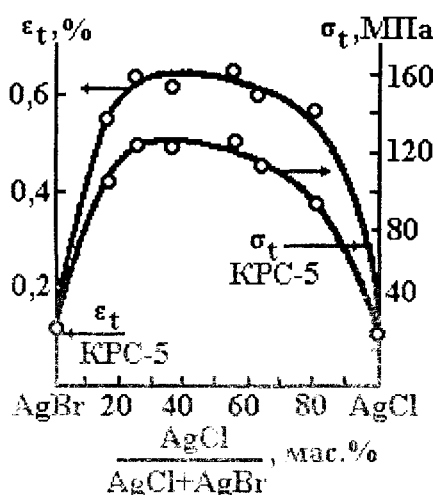


Рис. 4. Зависимость предела текучести σ_t и упругой деформации ε_t от состава твердого раствора $AgCl - AgBr$, световодов экструдированных при 370 К.

разрыв (~150 МПа) должна существенно превышать прочность световодов из КРС-5. Упругая деформация ПКС из КРС-13 (до 0,7%) также существенно превышает этот параметр у КРС-5, $AgCl$ и $AgBr$ (0,1-0,3 %). Значительно большая прочность ПКС из КРС-13 по сравнению со световодами из КРС-5 объясняется разницей в их структуре.

Экструдирование ПКС с оптимальными параметрами.

Как было показано выше, выбор состава кристаллов необходим, но не только он определяет оптимальность структуры ПКС. Выбор оптимального сочетания параметров экструзии кристалла также позволяет сдерживать эволюцию структуры, ведущую к образованию микротрещин и микропор [12]. Эти структурные дефекты, дающие основной вклад в образующийся при деформации дефект плотности, существенно увеличивают потери на рассеяние и влияют на механическую прочность [16-18].

Как было установлено экспериментально [11,13], так как для уменьшения дефекта плотности необходимо, чтобы динамическая активность элементов структуры на всех ее уровнях преобладала над процессом отвода атомов в объем кристалла из образующихся микротрещин и пор, то для оптимизации параметров экструзии следует добиваться баланса процессов деформационного упрочнения и термоактивируемого разупрочнения. Это обусловлено, с одной стороны, требованием ограничения локальных перенапряжений уровнем ниже теоретической прочности кристалла, так как иначе начинается процесс зарождения трещин в местах искажения решетки - в плотных сплетениях дислокаций, на стыках и обрывах границ с наибольшей разориентацией. С противоположной стороны - динамический возврат и рекристаллизацию также нельзя сильно активировать, хотя они и являются причиной препятствия микронапряжений. Известно, что рекристаллизация снимает напряжения, приводящие к трещинам, но относительно высокая динамическая активность границ может спровоцировать их отрыв от трещин, и они пре-

крашают развитие, преобразуясь в диффузно растущую пору.

По данным работы [15], большая динамическая активность структурных элементов при экструзии КРС-13 позволяет не только уменьшать плотность заторможенных дислокаций за счет динамического возврата и препятствовать зарождению микротрещин в этих сплетениях, но и преобладает над конкурирующими процессами диффузионного преобразования за счет твердорастворного замедления в КРС-13 по сравнению с $AgCl$ или $AgBr$. Вследствие чего при экструзии ПКС из КРС-13 формируется структура, еще не перестроенная на субзеренную или зеренную, с малым дефектом плотности. В результате разрушение ПКС из КРС-13 имеет вязкий характер, а их прочность и упругость в несколько раз превышает аналогичное значение для ПКС из КРС-5.

Известно, что средний размер зерна $\bar{d}$ связан с напряжением деформации соотношением Холла-Петча [14]:

$$p = k_d \bar{d}^{-1/2} + p_1, \quad (3)$$

где k_d и p_1 - константы. Анализ структуры световодов из КРС-5, $AgCl$ и $AgBr$ показывает, что в диапазонах реально осуществимых технологических режимов экструзия протекает в условиях полной динамической рекристаллизации, в соответствии с (3). Экспериментальные исследования проведенные в [19], возможностей оптимизации параметров экструзии ПКС из КРС-5 показывают, что их прочность нелинейно растет с уменьшением температуры экструзии. При этом наблюдается (см. рис. 5), снижение уровня рассеяния и уменьшение среднего размера зерна в соответствии с эмпирическим соотношением:

$$R_m \sim D_0 \bar{d}^{-0,6}. \quad (4)$$

В соответствии с работой [17], описанный эффект объясняется тем что при экструзии КРС-5 сильно развиты термоактивируемые процессы поперечного скольжения и снижением температуры можно реально это разупрочнение уменьшить. Параметры (1) изменяются при снижении температуры от 420 до 414 К (см. рис. 3а): активационная энергия уменьшается от 0,87 до 0,76 эВ, а активационный объем уменьшается более чем в 3 раза. Это объясняется [13] уменьшением числа задействованных незадействованных решеточных механизмов.

Уменьшение эффекта разупрочнения в принципе, может быть достигнуто не только снижением температуры, но и увеличением скорости деформации, так как при этом остается меньше времени для протекания термически активируемых процессов. Однако для ощутимого эффекта скорость надо изменять более сильнее, чем температуру, так как энергия активации этих процессов зависит от скорости по логарифмическому закону, что следует из выражения (1):

$$U = kT \ln(\dot{\epsilon}/\dot{\epsilon}_0) + p. \quad (5)$$

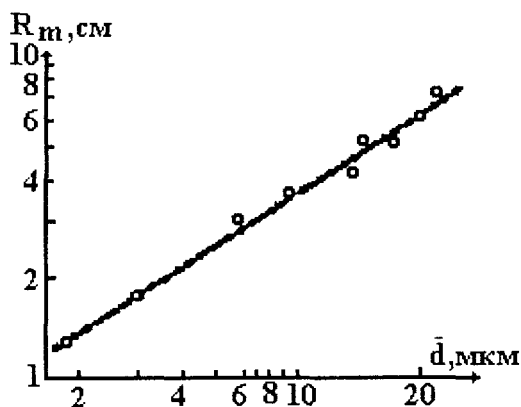


Рис. 5. Минимальный радиус изгиба R_m как функция среднего размера зерна $\bar{d}$ световода на основе КРС-5 диаметром $D_0 = 0,7$ мм.

Итак, оптимизация параметров экструзии ПКС достигается в условиях наиболее однородной деформации при установлении баланса процессов деформационного упрочнения и термоактивируемых процессов разупрочнения на возможно ранней стадии эволюции структуры определенного кристалла.

Результаты эксперимента.

Структура созданной установки экструзии поликристаллических световодов соответствует приведенной на рис. 2., основными элементами которой являются гидравлический пресс П-125, вакуумная и нагревательная системы, герметичная рабочая камера, узлы экструзии и транспортировки световода. Рабочая камера охлаждается проточной водой. Режим поддержания температуры – автоматический. Конструкция установки позволяет производить процесс экструзии при удельных давлениях более 10 кг/см^2 . Филлера, через которую выдавливается световод, полирована до зеркальной поверхности и изготовлена из сплавов титана и молибдена. Процесс экструзии «обратный», т.е. экструдированный световод движется навстречу плунжеру. Заготовку монокристалла помещают в экструзионную камеру, которую в свою очередь, помещают в рабочую. После чего, рабочую камеру откачивают до остаточного давления $\sim 10 \text{ мм. рт. ст.}$ и нагревают до температуры, обусловленной видом экструдированного кристалла. После выдержки, примерно 1,5 – 2 часа, необходимой для равномерного прогрева монокристаллической заготовки, выводят пресс на рабочее давление и проводится экструдирование световода. При использовании монокристаллических заготовок (диаметр 1,5 см, высота $\sim 3 \text{ см}$) на основе КРС-13, диаметре отверстия фильеры 0,6 мм, установка позволяет в течение 30 минут, получить отрезки световода до 20 метров.

Выводы.

Из рассмотренных кристаллов (заготовок), предназначенных для получения поликристаллических световодов, наименьшие собственные оптические потери имеет *CsJ* (см. рис. 1).

Анализ физико-технических условий процесса экструзии, как самого распространенного метода получения ПКС, показывает: большие значения напряжения экструзии p и деформации ε приводят к сложному характеру процесса деформации, при котором условия баланса деформационного упрочнения и термоактивируемого разупрочнения, в основном и определяют видоизменения структуры экструдированного ПКС. Для обеспечения такого баланса в процессе экструзии необходим учет как физико-технических параметров экструдированных кристаллов, так и параметры экструзии (температуры, геометрии течения, напряжения и скорости).

Физико-технические параметры кристаллов (заготовок) пригодных для реализации процесса экструзии должны быть оптимальными, т.е., во-первых, для увеличения механической прочности экструдированных световодов, состав заготовки должен иметь максимальную активационную энергию; во-вторых, для уменьшения локальных перенапряжений, приводящих к образованию микротрещин, иметь минимальный активационный объем. Наилучшим образом этим требованиям удовлетворяют монокристаллы КРС-13.

Оптимизация параметров экструзии ПКС достигается в условиях наиболее однородной деформации при установлении баланса процессов деформационного упрочнения и термоактивируемых процессов разупрочнения на возможно ранней стадии эволюции структуры определенного кристалла.

Создана установка, позволяющая в лабораторных условиях получить поликристаллические световоды длиной до 20 м, диаметром 0,6 мм.

РЕЗЮМЕ

Розглядаються достоїнства, фізичні основи створення, вибір матеріалів і процес оптимального одержання полікристалічних волоконних світловодів середнього інфрачервоного діапазону.

SUMMARY

The advantages, physical bases of creation, choice of materials and process of optimum reception polycrystalline fiber light guide of an average infra-red range are considered.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гауэр Дж. Оптические системы связи. Пер с англ. Под ред. А.И. Ларкина. –М.: Радио и связь, 1989.
2. Волоконно-оптические датчики./ Т. Окоси, К. Окамото, М. Оцу, Х. Нисихара, К. Каюма, К. Хатаэ. Под ред. Т. Окоси. Пер с япон. –Л.: Энергоатомиздат, 1990.
3. Марков П.И., Кеткович А.А., Саттаров Д.К. Волоконно-оптическая интроскопия. –Л.: Машиностроение, 1987.
4. Кацуяма Т., Мацумура Х. Инфракрасные волоконные световоды. Пер с англ. –М., Мир, 1993.
5. Унгер Х.-Г. Планарные и волоконные оптические волноводы. Пер. с англ. Под ред. В.В. Шевченко. –М.: Мир, 1980.

6. Справочник по волоконно-оптическим линиям связи./ Л.М. Андрушко, В.А. Вознесенский, В.Б. Каток и др. Под ред. С.В. Свечникова и Л.М. Андрушко.-К.: Техніка, 1988.
7. Бусурии В.И., Носов Ю.Р. Волоконно-оптические датчики: Физические основы, вопросы расчета и применения. – М.: Энергоатомиздат, 1990.
8. Дианов Е.М. Волоконные световоды среднего ИК диапазона. Известия ВУЗов СССР. Радиоэлектроника. 1983, т.26, №5, с. 27-42.
9. Tangonan G., Pastor F.C., Pastor R.C. Single crystal KCl fibers for 10,6 μm integrated optics. Appl. Optics, 1973, V.12, №6, p. 1110-1112.
10. Pinnow D.A., Gentile A.L., Standlee A.G. et all. Polycrystalline fiber optical wave-guides for infrared transmission. Appl. Phys. Lett., 1978, v.33, p. 28-30.
11. Данилов В.В., Москаленко С.Ю. Поликристаллические волоконные световоды инфракрасного диапазона. Труды международной научно-практической конференции «Современные информационные и электронные технологии». Одесса, 2000, с. 92-93.
12. Данилов В.В. Москаленко С.Ю. Монокристаллические волоконные световоды инфракрасного диапазона. Материалы 10-й Международной Крымской микроволновой конференции «СВЧ- техника и телекоммуникационные технологии», Севастополь, 2000 г., с.361- 362.
13. Данилов В.В., Плотниченко В.Г., Булгаков А.А., Чуркин А.В. Получение экструдированных поликристаллических волоконных световодов. Тезисы докладов VI-й международной научно-технической конференции «ВОЛ-СПИ-95». Г. Запорожье, 1995, с. 29-31.
14. Артюшенко В.Г., Бутвина Л.Н., Войцеховский В.В. и др. Механизмы процесса экструзии поликристаллических световодов из галогенидов талия. Препр. ИФТН АН СССР, № 191, -М.: 1986, 21 с.
15. Ikeda M., Ishivatari H., Watari M. et all. Infrared optical fiber for energy transmission. Rev. Laser Eng. 1983, v/ 11, №11, p. 20-27.
16. Панин В.Е., Лихачев В.А. Гриняев Ю.В. Структурные уровни деформации твердых тел. Новосибирск: Наука, 1985.
17. Смирнов Б.И. Дислокационная структура и упрочнение кристаллов. Л.: Наука, 1981.
18. Полухин П.И., Горелик С.С., Воронцов В.К. Физические основы пластической деформации. М.: Металлургия, 1984.
19. Отчет по ОКР «Разработка и организация производства волоконных световодов ИК - диапазона» (Шифр «Ариадна»). НИИ комплексной автоматизации. Минмашпром Украины. Донецк. 1994.

Надійшла до редакції 04.03.2002 р.

ВЛИЯНИЕ ТОЧЕЧНЫХ ДЕФЕКТОВ НА ПРОЦЕССЫ НАМАГНИЧИВАНИЯ
В ФЕРРОМАГНЕТИКАХ.

О.В. Ефимова, В.И. Фиошин,

1. ВВЕДЕНИЕ.

Хорошо известно, что структурные дефекты (примеси, дислокации, границы зерен и т.д.) существенно влияют на динамические и кинетические свойства магнитных материалов. В частности, они являются одной из причин эффектов магнитного последствия (магнитной вязкости, дезаккомодации) и таких тесно связанных с ними явлений, как гистерезис, шумы Баркгаузена и коэрцитивность [1-9].

Обычно эти эффекты объясняются в рамках феноменологии [1, 4 - 5] либо на основе простых моделей [6-7]. В частности, в последнее время интенсивно развивается подход, основанный на применении методов теории критических явлений [3].

В данной работе рассматривается процесс намагничивания тонких магнитных пленок, содержащих случайно распределенные дефекты, в изменяющемся со временем однородном магнитном поле. Скорость изменения поля предполагается достаточно большой, чтобы влиянием термически активируемых переходов ДГ между различными метастабильными состояниями можно было пренебречь. Взаимодействие дефектов с ДГ предполагается слабым так, что обусловленное ими изменение ДГ может рассматриваться как малое возмущение, а эффективный радиус их взаимодействия с ДГ - много меньшим среднего расстояния между дефектами.

2. КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ В ПРЕДЕЛЕ БОЛЬШИХ СКОРОСТЕЙ ИЗМЕНЕНИЯ
ВНЕШНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ.

Создаваемый дефектами потенциальный рельеф приводит к появлению множества стационарных конфигураций ДГ, области устойчивости которых могут перекрываться. Вследствие этого состояние доменной структуры (ДС) зависит не только от мгновенного значения внешнего магнитного поля, но и его значений в предшествующие моменты времени, что приводит к гистерезису, магнитной вязкости, дезаккомодации. При этом движение ДГ представляет собой последовательность переходов между различными метастабильными состояниями [6, 8].

Поскольку взаимное влияние двух различных участков ДГ, очевидно, убывает с увеличением расстояния между ними, при описании движения ДГ можно ограничиться рассмотрением фрагмента конечной длины. При этом вблизи состояния равновесия можно учитывать лишь такие состояния, в которых число дефектов, захвативших ДГ близко к среднему значению.

В данной работе рассмотрено движение фрагмента ДГ, длина которого равна удвоенному среднему расстоянию между дефектами, захватившими ДГ, при этом учитываются лишь те состояния, в которых число дефектов, захвативших ДГ, не превышает 3. На рис. 1 схематично изображен фрагмент (сплошной линией) и некоторые возможные переходы (пунктиром). Соответственно этому считается, что дефекты распределены случайно вдоль двух прямых $x = l$ и $x = 2l$, где величина l выбирается из условия самосогласования, так, чтобы вероятность найти фрагмент в состояниях (1, 3, 2) и (1, 4, 2) была максимальна.

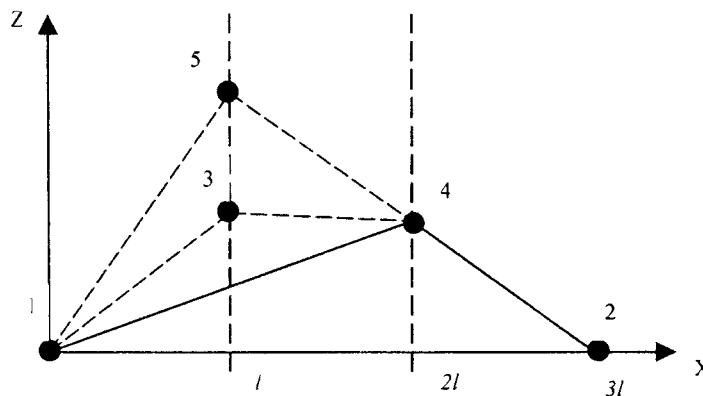


Рис.1. Схематичное изображение некоторых возможных стационарных состояний фрагмента ДС.

Граничные условия для рассматриваемого фрагмента имеют следующий вид

$$u(0) = u(3l) = \langle u(x) \rangle, \quad (1)$$

где $u(x)$ - положение ДГ в точке x .

Обозначим через P_0 , $P_1(z_1)$, $\tilde{P}_1(z_2)$, $P_2(z_1, z_2)$ - вероятности найти ДГ в конфигурациях (1, 2), (1, 3, 2), (1, 4, 2), (1, 3, 4, 2) (в обозначениях Рис.1) соответственно.

Записывая уравнения баланса, получим систему уравнений для функций P_0 , $P_1(z_1)$, $\tilde{P}_1(z_2)$, $P_2(z_1, z_2)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} P_1(z_1) = -V \frac{\partial}{\partial z_1} P_1(z_1) - \frac{\rho V}{2} P_1(z_1) + V P_2(z_1, z_{2c}(z_1)) \\ \frac{\partial}{\partial t} P_2(z_1, z_2) = -V \left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2} \right) P_2(z_1, z_2) \end{cases} \quad (2)$$

Здесь V - средняя скорость движения ДГ, ρ - линейная плотность дефектов вдоль прямых $x = l$, $x = 2l$, $z_{2c}(z_1)$ - критическое значение z_2 ,

$$z_{2c}(z_1) = \frac{z_1}{2} + \delta \left(1 + \frac{1}{2} \frac{d}{\sigma \delta^2} \frac{l}{h} \right), \quad (3)$$

где σ - плотность поверхностной энергии, d - постоянная взаимодействия ДГ с дефектом, δ - эффективный радиус взаимодействия ДГ с дефектом, h - толщина пленки.

P_0 определяется условием нормировки:

$$P_0 + 2 \int P_1(z) dz + \int dz_1 \int dz_2 P_2(z_1, z_2) = 1, \quad (4)$$

где интегрирование ведется по всем возможным стационарным состояниям ДГ. Кроме того, вследствие симметрии задачи

$$P_1(z_1) = \tilde{P}_1(z_2), \quad P_2(z_1, z_2) = P_2(z_2, z_1). \quad (5)$$

Далее будем рассматривать стационарный случай, считая скорость изменения величины внешнего магнитного поля постоянной.

Граничные условия для (2) в этом случае имеют вид:

$$P_1(0) - \rho P_0 = 0, \quad (6)$$

$$P_2(z_1, \tilde{z}(z_1)) - \frac{\rho}{2} P_1(z_1) = 0, \quad (7)$$

где

$$\tilde{z}(z_1) = \frac{z_1}{2ch\epsilon l}, \quad \epsilon = \sqrt{g/\sigma}, \quad (8)$$

g - константа жесткости [2].

Из второго уравнения системы (2) получаем

$$P_2(z_1 - a, z_2 - a) = P_2(z_1, z_2) \quad (9)$$

где α - произвольная постоянная. Отсюда, с учетом (7), находим

$$P_2(z_1, z_2) - \frac{\rho}{2} P_1 \left(\frac{z_2 - z_1}{1 - 2/ch\epsilon l} \right) = 0. \quad (10)$$

Подставляя это соотношение в первое уравнение системы (2), приходим к замкнутому уравнению для $P_1(z_1)$

$$\frac{\partial}{\partial z_1} P_1(z_1) + \frac{\rho}{2} [P_1(z_1) - \Theta(z_1 - \tilde{z}(z_{1c})) P_1(z_{1c} - z_1)] = 0, \quad (11)$$

где

$$z_{1c} = \delta \left(1 + \frac{2}{3} \frac{d}{\sigma \delta^2} \frac{l}{h} \right), \quad (12)$$

Интегрируя обе части уравнения (11) по интервалу $(\tilde{z}(z_{1c}), z_{1c})$, получим

$$P_1(z_{1c}) = P_1(\tilde{z}(z_{1c})). \quad (13)$$

Нетрудно показать, что единственным непрерывным решением уравнения (11) с условиями (13) является константа. Таким образом, с учетом (6), находим

$$P_1(z_1) = \begin{cases} \rho P_0 \exp\left(-\frac{\rho}{2} z_1\right), & z_1 < \tilde{z}(z_{1c}) \\ \rho P_0 \exp\left(-\frac{\rho}{2} \tilde{z}(z_{1c})\right), & z_1 \geq \tilde{z}(z_{1c}) \end{cases} \quad (14)$$

При этом условие нормировки принимает вид

$$P_0 \left\{ 1 + 2\lambda \left[1 - \exp\left(-\frac{\rho}{\lambda^2} z_{1c}\right) \right] \left(1 - \frac{\rho(\lambda-1)}{\lambda^2} z_{1c} \right) \right\} + 2 \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda} \times \\ \times \left\{ \frac{\rho}{\lambda} z_{1c} - 1 + \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\rho}{\lambda^2} z_{1c}\right) \left(1 + \left(1 - \frac{\rho(\lambda-1)}{\lambda^2} z_{1c} \right)^2 \right) \right\} = 1 \quad (15)$$

где

$$\lambda = 2ch(\epsilon l). \quad (16)$$

Как уже говорилось выше, значение l определяется из условия максимальности P_1 . Используя (12)-(16) находим, что максимум P_1 достигается при выполнении условия

$$\frac{\rho}{\lambda^2} z_{1c} \approx 0.377, \quad (17)$$

откуда, используя (12) и учитывая, что $\epsilon l \ll 1$ нетрудно найти значение l .

Соотношения (10), (14) и (15) полностью определяют вероятности возможных состояний рассматриваемого фрагмента ДГ.

3. МАГНИТНАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ ТОНКОЙ ФЕРРОМАГНИТНОЙ ПЛЕНКИ СО СЛУЧАЙНО РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ТОЧЕЧНЫМИ ДЕФЕКТАМИ.

Рассмотрим влияние дефектов на магнитную восприимчивость образца в случае, когда обратная частота осцилляций много меньше «времени жизни» состояния, т. е.

$$\frac{1}{\omega} \ll \frac{z_{1c}}{V}. \quad (18)$$

В этом случае вклад от смещения $ДГ$ в продольную восприимчивость образца определяется выражением [2]

$$\chi_{||} = \frac{\chi_0 g L}{2 M L_0} \int \frac{\partial u}{\partial H_{||}} dx, \quad (19)$$

где χ_0 - статическая восприимчивость в отсутствие дефектов, u - решение уравнения движения ДС

$$\mu h u_{tt} - \sigma h u_{xx} + \beta u_t + g h u - 2 M_S H h = 0 \quad (20)$$

с граничными условиями

$$u(r_{1x}) = r_{1y}, \quad u(r_{2x}) = r_{2y}, \quad (21)$$

во внешнем магнитном поле H с частотой ω [2].

Здесь β - постоянная торможения, μ - плотность массы, M_S - намагниченность насыщения. На временах $t \ll z_{1c}/V$ взаимным влиянием двух участков $ДГ$, разделенных дефектом, можно пренебречь.

При этом выражение (19) для восприимчивости образца распадается на сумму независимых вкладов от свободных участков $ДГ$. Тогда, решая (с учетом массы) уравнения движения (20) с граничными условиями (21) во внешнем поле с частотой ω , получим выражение для вклада фрагмента с координатами $\{\bar{r}_1, \bar{r}_2\}$ в восприимчивость образца:

$$\chi_{||}(\omega, \bar{r}_1, \bar{r}_2) = \frac{\chi_0}{4L} \frac{g}{\sigma \xi^3} \left(\operatorname{tg} \xi (r_{2x} - r_{1x}) - \xi (r_{2x} - r_{1x}) \right), \quad (22)$$

где

$$\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu h \omega^2 - i \beta \omega - g h}{\sigma h}}. \quad (23)$$

Усредняя выражение (22) с функцией распределения (14), учетом (10), (15), получим выражение для восприимчивости образца с равновесной $ДГ$ в пределе низких частот

$$\begin{aligned} \chi_{||} = & \frac{\chi_0}{4} \frac{g}{\sigma} l^2 \left\{ 9 + 12 \lambda \left[1 - \exp \left(-\frac{\rho}{\lambda^2} z_{1c} \right) \left(1 - \frac{\rho(\lambda-1)}{\lambda^2} z_{1c} \right) \right] + \right. \\ & \left. 2 \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda} \left[\frac{\rho}{\lambda} z_{1c} - 1 + \frac{1}{2} \exp \left(-\frac{\rho}{\lambda^2} z_{1c} \right) \left(1 + \left(1 - \frac{\rho(\lambda-1)}{\lambda^2} z_{1c} \right)^2 \right) \right] \right\} \times \\ & \times \left\{ 1 + 2 \lambda \left[1 - \exp \left(-\frac{\rho}{\lambda^2} z_{1c} \right) \left(1 - \frac{\rho(\lambda-1)}{\lambda^2} z_{1c} \right) \right] + \right. \\ & \left. 2 \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda} \left[\frac{\rho}{\lambda} z_{1c} - 1 + \frac{1}{2} \exp \left(-\frac{\rho}{\lambda^2} z_{1c} \right) \left(1 + \left(1 - \frac{\rho(\lambda-1)}{\lambda^2} z_{1c} \right)^2 \right) \right] \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (24)$$

4. Заключение

В заключение обсудим условия применимости полученных результатов. Уравнения (2) получены в предположении, что тепловыми переходами между различными стационарными состояниями $ДГ$ можно пренебречь. Это справедливо в том случае, когда «время жизни» стационарного состояния мало в

сравнении с τ - временем релаксации ДС, обусловленной тепловыми переходами, т.е. при $z_{1c}/V \ll \tau$. С учетом (12), (17), а также очевидной оценки для скорости движения ДГ в поле с частотой ω - $V \sim \omega p H / H_C$ (p - период ДС, H_C - поле коллапса ДС), это условие преобразуется к виду:

$$\omega H \gg \frac{H_C}{p\tau} \sqrt{\frac{4d}{3\rho_S \sigma \delta h}} \quad (25)$$

где ρ_S - поверхностная плотность дефектов.

РЕЗЮМЕ

Розглянуто поведінку доменної стінки (ДС) тонкої ферромагнітної плівки з випадково розподіленими крапковими дефектами у зовнішньому магнітному полі, що змінюється з часом. Записано кінетичні рівняння руху ДС у випадку, коли зовнішнє магнітне поле змінюється досить швидко. На основі аналітичного рішення системи кінетичних рівнянь побудовано вираз для магнітної сприйнятливості зразка із ДС, що знаходиться у стані термодинамічної рівноваги, у випадку низьких частот.

SUMMARY

We consider the behaviour of the domain wall (DW) in the thin ferromagnetic film with randomly distributed point defects in external magnetic field, which changes by the time. We write kinetic equations of the DW motion in the limit of high velocities of change of an external magnetic field. Their solutions are found by the analytical treatment. It makes us possible to define the expression for the susceptibility of the sample with the thermodynamically equilibrium DW at low frequencies.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ:

1. Вонсовский С.В. Магнетизм. - М.: Наука, 1977. - 1932 с.
2. Малоземов А., Слобзуски Дж. Доменные стенки в материалах с цилиндрическими магнитными доменами. - М.: Мир, 1982. - 382 с.
3. T. Nattermann, V. Pokrovsky, V. M. Vinokur. Hysteretic Dynamics of Domain Walls at Finite Temperatures. Phys. Rev. Lett. - 2001, Vol. 87 197005.
4. M. Pasquale, G. Bertotti, D. C. Jiles, Y. Bi. Application of the Preisach and Jiles-Atherton models to the simulation of hysteresis in soft magnetic alloys. Journal of Applied Physics - 1999 - Vol. 85, Iss. 8. P. 4373-4375.
5. Giorgio Bertotti. Energetic and thermodynamic aspects of hysteresis. Phys. Rev. Lett. - 1996. - Vol. 76, Iss. 10. P. 1739-1742.
6. Bosiljka Tadic and Ulrich Nowak. Barkhausen avalanches in anisotropic ferromagnets with 180° domain walls. Phys. Rev. E - 2000. - Vol. 61, Iss. 4. P. 4610-4613.
7. M. Muroi, R. Street, J. W. Cochrane, G. J. Russell. Disaccommodation in LaMnO_{3,075}. Phys. Rev. B. - 2000. - Vol. 62, Iss. 14. P. R9268-R9270.
8. Stefano Zapperi, Pierre Cizeau, Gianfranco Durin, H. Eugene Stanley. Dynamics of a ferromagnetic domain wall: Avalanches, depinning transition, and the Barkhausen effect. Phys. Rev. B. - 1998. - Vol. 58, Iss. 10. P. 6353-6366.
9. G. Bayreuther, P. Bruno, G. Lugert, C. Turtur. Magnetic aftereffect in ultrathin ferromagnetic films. Phys. Rev. B. - 1989. - Vol. 40. P. 7399.
10. Matthew C. Kuntz, James P. Sethna. Noise in disordered systems: The power spectrum and dynamic exponents in avalanche models. Phys. Rev. B - 2000. - Vol. 62, Iss. 17. P. 11699-11708.

Надійшла до редакції 16.05.2002 р.

УДК 538.971

ИОНОЛУМИНЕСЦЕНЦИЯ ШИРОКОЗОННЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ В МЕТАСТАБИЛЬНОМ СОСТОЯНИИ И ДЕСОРБЦИЯ, ВЫЗВАННАЯ ЭЛЕКТРОННЫМИ ПЕРЕХОДАМИ

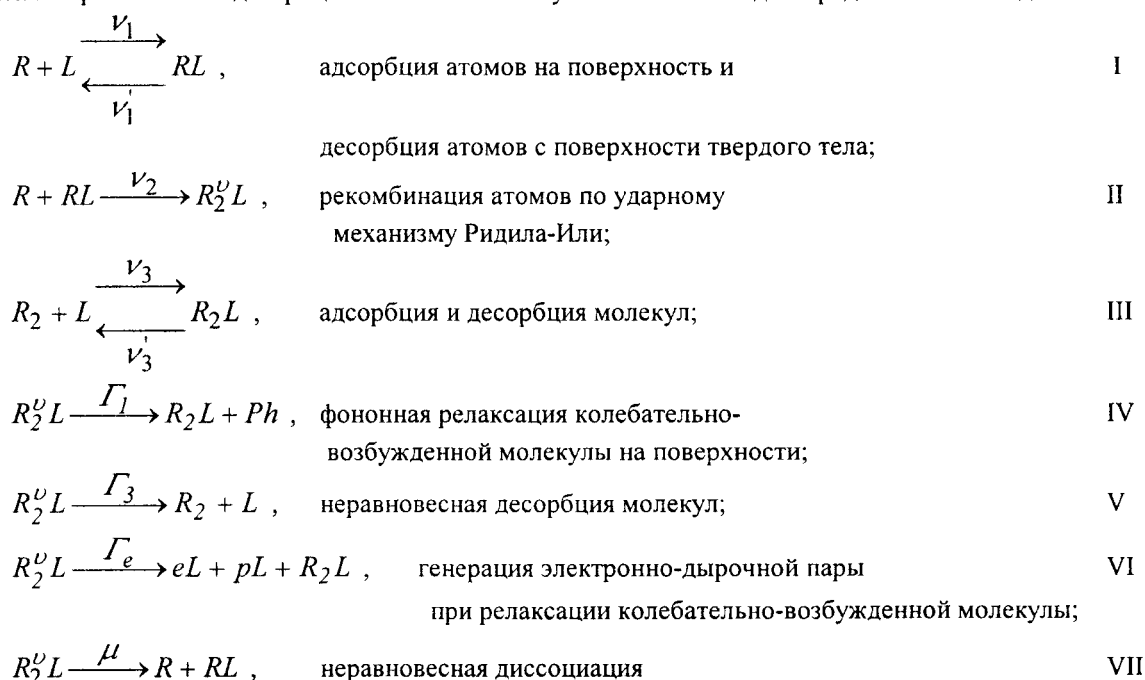
А.И. Бажин, Д.В. Гранкин*

*Приазовский государственный технический университет, г. Мариуполь

Бомбардировка твердых тел ускоренными ионами сопровождается электронным возбуждением мишени и излучением света в видимой области – ионолуминесценцией (ИЛ) [1]. ИЛ зависит от состояния поверхности, фазового состава, дефектности, наличия адсорбированных частиц, и поэтому несет информацию о кристалле. В результате ионного удара на поверхности и в объеме образуются колебательно-возбужденные состояния вблизи и выше порога диссоциации (разрыва химической связи). Такие состояния могут возникать на поверхности и в результате гетерогенных химических реакций. Концентрация колебательно-возбужденных молекул зависит от энергии и массы ионов, плотности возбуждения, а также скорости аккомодации колебательной энергии по различным каналам. Основным каналом аккомодации является фононный, а для образцов с системой мелких электронных ловушек существенную роль может также играть и электронный канал [2]. В случае наличия адсорбированных слоев эффективным может быть Т-V и Т-Т обмен (преобразование кинетической энергии иона в поступательную и колебательную энергию адсорбированной частицы). Оба процесса определяют скорость десорбции при ионной бомбардировке.

В работе [3] было обнаружено явление высокоэффективной электронной гетерогенной аккомодации (ВЭГА), заключающееся в увеличении на несколько порядков величины скорости генерации носителей в зону и увеличении до нескольких раз скорости аккомодации колебательной энергии при заселении электронных ловушек (являющихся центрами ВЭГА) светом. Управляя концентрацией электронов на ловушках можно управлять скоростью диссипации колебательной энергии, концентрацией колебательно-возбужденных связей, интенсивностью ИЛ и скоростью десорбции частиц газа с поверхности. Скорость ВЭГА уже при концентрациях заполненных электронных ловушек на поверхности 10^{11} см^{-2} может быть соизмерима с фононным каналом.

В работе разработана кинетическая модель ИЛ и атомно-молекулярных процессов для случая взаимодействия низкоэнергетических ионов ($E_{I+} \sim 10^2 \text{ эВ}$) с поверхностью двухкомпонентного полупроводника (XY), на которой могут находиться адсорбированные газы. В модели колебательное возбуждение атомов мишени и адсорбированных частиц происходит за счет ионного удара, а колебательная релаксация сопровождается электронным возбуждением полупроводника, опустошением ловушек и неравновесной десорбцией атомов и молекул. Основные стадии представлены в виде:



$R_2^v L + eT \xrightarrow{K_2} R_2 L + eL + T$,	электронная аккомодация энергии колебательного возбуждения;	VIII
$I^+ + RL \xrightarrow{\nu_{11}'} R + L$,	десорбция атомов при ионном ударе;	IX
$I^+ + R_2 L \xrightarrow{\nu_{31}'} R_2 + L$,	ионостимулированная десорбция молекул;	X
$I^+ + R_2 L \xrightarrow{\nu_{21}} R_2^v L$,	колебательное возбуждение адсорбированных молекул при ионном ударе;	XI
$I^+ + L \xrightarrow{\nu_{22}} (XY)^v L$,	колебательное возбуждение атомов твёрдого тела ионами;	XII
$I^+ + L \xrightarrow{\nu_{e2}} eL + pL + L$,	генерация электронно-дырочной пары в твёрдом теле ионом I^+ ;	XIII
$I^+ + eT \xrightarrow{\nu_{e3}} T + eL$,	высвечивание ловушек при ионной бомбардировке;	XIV
$(XY)^v L \xrightarrow{\Gamma_{e2}} eL + pL + L$,	генерация е-р пары при релаксации высоковозбужденной V-связи;	XV
$(XY)^v L \xrightarrow{\Gamma_{12}} L + Ph$,	фононная релаксация;	XVI
$(XY)^v L + eT \xrightarrow{K_{22}} L + eL + T$,	высокоэффективная электронная аккомодация колебательной энергии;	XVII
$(XY)^v L \xrightarrow{\alpha \Gamma_{32}} (XY)^* + L \xrightarrow{\beta_1} XY + L + h\nu_2$,	вторичная эмиссия молекул и молекулярных ионов вещества и их излучательная и	XVIII
$(XY)^v L \xrightarrow{\alpha \Gamma_{12}} (XY)^* + L \xrightarrow{(1-\beta_1)} XY + L$,	безизлучательная релаксация;	XIX
$(XY)^v L \xrightarrow{(1-\alpha) \Gamma_{32}} X^* + L \xrightarrow{\beta_2} X + L + h\nu_2$,	вторичная эмиссия атомов и ионов твёрдого тела и их	XX
$(XY)^v L \xrightarrow{(1-\alpha) \Gamma_{32}} Y^* + L \xrightarrow{\beta_3} Y + L + h\nu_2$,	излучательная и	XXI
$(XY)^v L \xrightarrow{(1-\alpha) \Gamma_{32}} X^* + L \xrightarrow{(1-\beta_2)} X + L$,	безизлучательная	XXII
$(XY)^v L \xrightarrow{(1-\alpha) \Gamma_{32}} Y^* + L \xrightarrow{(1-\beta_3)} Y + L$,	релаксация;	XXIII
$h\nu + L_0 \xrightarrow{\nu_{e4}} eL + pL + L_0$,	фотовозбуждение твёрдого тела;	XXIV
$h\nu_{ИК} + eT \xrightarrow{\nu_{e5}} eL + T$,	высвечивание ловушек ИК светом;	XXV
$eL + T \xrightleftharpoons[\nu_{eT}]{\alpha_e} eT$,	заселение и термическая ионизация электронных ловушек;	XXVI
$pL + AL \xrightarrow{\alpha_p} ApL$,	ионизация центра свечения;	XXVII
$ApL + eL \xrightarrow{\eta \alpha^*} AL + h\nu_1$,	излучательная рекомбинация электрона с дыркой на центре свечения;	XXVIII
$ApL + eL \xrightarrow{(1-\eta) \alpha^*} AL$,	безизлучательная рекомбинация электрона с ионизованным центром свечения.	XXIX

Здесь v_{ij} , v'_{ij} , v_{ei} – вероятности рассмотренных процессов; Γ_{ij} , Γ_{ei} , μ – отнесенные к единице времени скорости соответствующих процессов; $\nu_{1,2} = j_1 \sigma_{1,2}$, $\nu_3 = j_2 \sigma_3$, $\nu_{21,22} = j_3 \sigma_{21,22}$, $\nu'_{11,31} = j_3 \sigma_{11,31}$, $\nu_{eT} = \nu_{eT_0} \exp\left(-\frac{\Delta E_1}{kT}\right)$, $\nu'_{1,3} = \nu'_{10,30} \exp\left(-\frac{\Delta E_{2,3}}{kT}\right)$, $\nu_{e2,3} = j_3 \sigma_{e2,3}$, $\nu_{e4} = \Phi_1 \sigma_{e4}$, $\nu_{e5} = \Phi_2 \sigma_{e5}$, где $j_{1,2,3}$ – плотность потока атомов, молекул и ионов соответственно, $\Phi_{1,2}$ – плотности потоков УФ и ИК света, $\sigma_{1,2}$ – сечения адсорбции и рекомбинации атомов по ударному механизму Ридила-Или, σ_3 – сечение адсорбции молекул, $\sigma_{21,22}$ – сечения колебательного возбуждения адсорбированных молекул и атомов твердого тела ионами I^+ , $\sigma_{11,31}$ – сечения ионостимулированной десорбции адсорбированных атомов и молекул, $\sigma_{e2,3}$ – сечения возбуждения электронно-дырочной пары и опустошения электронных ловушек ионами I^+ , $\sigma_{e4,5}$ – сечения поглощения УФ и ИК квантов, ν_{eT_0} – частотный фактор термической ионизации электронных ловушек, $\nu'_{10,30}$ – частотные факторы десорбции атомов и молекул, ΔE_1 – глубина залегания ловушки, $\Delta E_{2,3}$ – энергии активации десорбции атомов и молекул; $K_{2,22}$ – константы скорости релаксации колебательно-возбужденного состояния на поверхности и в твердом теле при взаимодействии с электроном на ловушке (по механизму ВЭГА), α_{ep} , α^* – константы скорости захвата электрона на ловушку, ионизации центра свечения и рекомбинации электрона с дыркой на центре свечения; $\beta_{1,2,3}$ – квантовый выход излучательной релаксации вторичной частицы; η – доля излучательных переходов в реакции рекомбинации электрона с дыркой на центре свечения.

В модели колебательное возбуждение молекул газа на поверхности происходит в стадиях II, XI, а колебательное возбуждение атомов решетки в объеме и на поверхности – в стадии XII. Процессы высокоэффективной аккомодации энергии колебательно-возбужденных молекул учтены в стадиях VIII и XVII. Заселение электронных ловушек в модели возможно за счет УФ света (стадии XXIV, XXVI) и их высвечивание – за счет тепла (стадия XXVI) и ИК света (стадия XXV).

Введем обозначения для концентраций атомов, молекул, ловушек, электронов, дырок и центров свечения в момент времени t : $[RL] \rightarrow N_1(t)$, $[R_2L] \rightarrow N_2(t)$, $[R_2^vL] \rightarrow N_2^v(t)$, $[L] \rightarrow N_3(t)$, $[(XY)^vL] \rightarrow N_{XY}^v(t)$, $[(XY)^*] \rightarrow N_{XY_{эмисс}}^*(t)$, $[X^*] \rightarrow N_{X_{эмисс}}^*(t)$, $[Y^*] \rightarrow N_{Y_{эмисс}}^*(t)$, $[eT] \rightarrow n_e(t)$, $[T] \rightarrow n(t)$, $[eL] \rightarrow n_c(t)$, $[pL] \rightarrow n_p(t)$, $[A] \rightarrow m(t)$, $[ApL] \rightarrow m_p(t)$.

Приведенной модели соответствует следующая система кинетических дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = v_1 N - (v'_1 + v_2 + v'_{11}) N_1 + \mu N_2^v; \\ \dot{N}_2 = v_3 N - (v'_{31} + v_{21} + v'_3) N_2 + (\Gamma_1 + \Gamma_e + K_2 n_e) N_2^v; \\ \dot{N}_2^v = v_2 N_1 + v_{21} N_2 - (\mu + \Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_e + K_2 n_e) N_2^v; \\ \dot{n}_e = (v_{e3} + K_{22} N_{XY}^v + v_{e5} + v_{eT} + K_2 N_2^v) n_e + v_{e2} N + \Gamma_{e2} N_{XY}^v + v_{e4} N_0 - (\alpha_e n + \alpha^* m_p) n_c + \Gamma_e N_2^v; \\ \dot{n}_p = v_{e2} N + \Gamma_{e2} N_{XY}^v + v_{e4} N_0 - \alpha_p n_p m + \Gamma_e N_2^v; \\ \dot{n}_c = \alpha_e n_c n - (v_{e3} + K_{22} N_{XY}^v + v_{e5} + v_{eT} + K_2 N_2^v) n_c; \\ \dot{N}_{XY}^v = v_{22} N - (\Gamma_{e2} + \Gamma_{12} + \Gamma_{32} + K_{22} n_e) N_{XY}^v; \\ \dot{N}_{XY_{эмисс}}^* = \alpha \Gamma_{32} N_{XY}^v; \quad \dot{N}_{X_{эмисс}}^* = (1 - \alpha) \Gamma_{32} N_{XY}^v; \quad \dot{N}_{Y_{эмисс}}^* = (1 - \alpha) \Gamma_{32} N_{XY}^v; \\ \dot{m} = \alpha^* m_p n_c - \alpha_p n_p m; \\ m_p = m_0 - m; \quad n = n_0 - n_e. \end{cases} \quad (1)$$

С учетом того, что величины скоростей $\Gamma_{ij} \sim 10^5 - 10^{11} \text{ c}^{-1}$ много больше вероятностей процессов $v_{ij} < 1 \text{ c}^{-1}$, имеет место квазиравновесие ($\dot{N}_2^v = 0$, $\dot{n}_c = 0$, $\dot{n}_p = 0$, $\dot{N}_{XY}^v = 0$), позволяющее

определить N_2^v , n_c , n_p и N_{XY}^v из третьего – пятого и седьмого уравнений системы (1). Тогда интенсивность ИЛ равна

$$I_{ИЛ} = \frac{\alpha^* \eta m_p}{\alpha_e n + \alpha^* m_p} \left[\left(\nu_{e3} + \frac{K_{22} \nu_{22} N}{\Gamma_{e2} + \Gamma_{12} + \Gamma_{32} + K_{22} n_e} + \nu_{e5} + \nu_{eT} + \frac{K_2 (\nu_2 N_1 + \nu_{21} N_2)}{\mu + \Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_e + K_2 n_e} \right) n_e + \right. \\ \left. + \nu_{e2} N + \frac{\Gamma_{e2} \nu_{22} N}{\Gamma_{e2} + \Gamma_{12} + \Gamma_{32} + K_{22} n_e} + \nu_{e4} N_0 + \frac{\Gamma_e (\nu_2 N_1 + \nu_{21} N_2)}{\mu + \Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_e + K_2 n_e} \right].$$

Здесь в круглой скобке описаны процессы, связанные с высвечиванием электронов с ловушек за счет ионного удара, колебательно-электронной релаксации, ИК света, тепла и ударной рекомбинации по механизму Ридила-Или. Второе и четвертое слагаемые в квадратных скобках описывают процессы ионизации решетки за счет ионного удара и УФ света, а третье и пятое – за счет многоквантового колебательно-электронного перехода соответственно.

Для разрешенного дипольного перехода в твердом теле и большой энергии первого колебательного кванта молекулы скорость многоквантового колебательно-электронного перехода максимальна и может достигать 10^9 с^{-1} [4]. В этом случае для таких адсорбированных молекул и больших заполнений поверхности ($\Gamma_e \nu_{21} > \Gamma_{e2} \nu_{22}$, ν_{e2}) интенсивность ИЛ на начальных этапах кинетики будет определяться электронным возбуждением поверхности в актах релаксации колебательно-возбужденных молекул (рис.1, кривая 1). По мере десорбции молекул интенсивность ИЛ падает. С уменьшением Γ_e вклад адсорбированного слоя в интенсивность ИЛ уменьшается (кривая 2), а для молекул с малыми Γ_e интенсивность ИЛ на начальных участках кинетики, наоборот, меньше стационарной интенсивности ИЛ за счет блокировки поверхности кристалла адсорбированными частицами (кривая 3).

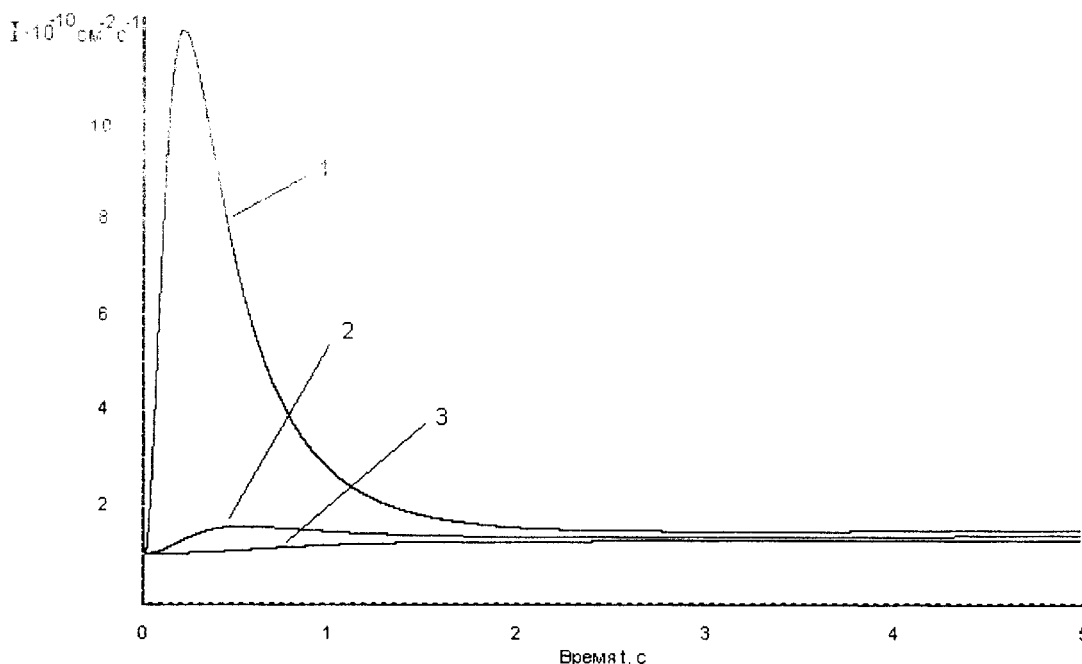


Рис. 1. Зависимость от времени интенсивности ИЛ образца с адсорбированными молекулами. 1 – $\Gamma_e = 10^7 \text{ с}^{-1}$; 2 – $\Gamma_e = 10^6 \text{ с}^{-1}$; $\Gamma_e = 10^5 \text{ с}^{-1}$. $j_3 = 10^{14} \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$, $N_1 = N_2 = 5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$. $T = 250 \text{ К}$.

Скорости десорбции адсорбированных атомов и молекул, согласно модели, равны:

$$\dot{N}_{1\text{ дес}} = (\nu'_1 + \nu'_{11}) N_1 + \mu N_2^v, \\ \dot{N}_{2\text{ дес}} = (\nu'_3 + \nu'_{31}) N_2 + \Gamma_3 N_2^v.$$

Вторые слагаемые в уравнениях определяют неравновесную десорбцию и определяются концентрацией колебательно-возбужденных молекул, которые в свою очередь зависят от скорости аккомодации колебательной энергии, включая и электронный канал. Заселение электронных ловушек

УФ светом приводит к увеличению скорости релаксации колебательно-возбужденных молекул и уменьшению их концентрации. Это приводит к уменьшению скорости десорбции атомов и молекул с поверхности за счет ионного удара (рис. 2, 3). Электронные переходы в твердом теле сильнее влияли на десорбцию молекул. При $T = 50$ К электронное возбуждение приводило к уменьшению скорости десорбции молекул в несколько раз. Величина уменьшения скорости десорбции зависела от потока УФ света и росла с увеличением Φ_1 (рис. 4). Аналогичное действие света наблюдалось для скорости распыления твердого тела ионным ударом.

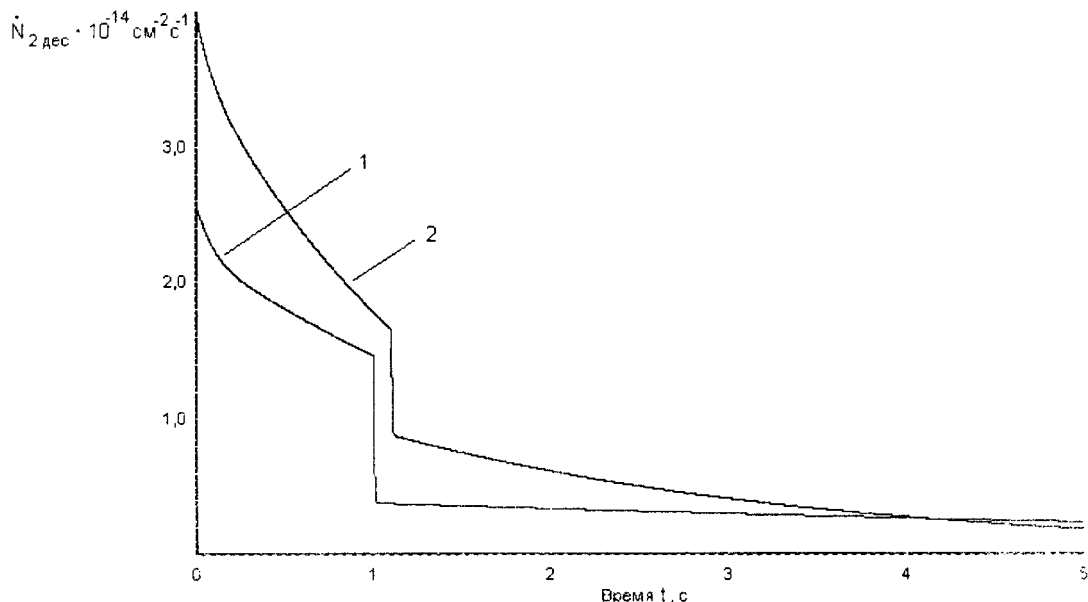


Рис. 2. Зависимость от времени скорости десорбции молекул с поверхности при действии ионного пучка с $E = 50$ эВ. 1 – 50 К; 2 – 250 К. $j_3 = 10^{14}$ см $^{-2}$ с $^{-1}$, $N_1 = N_2 = 5 \cdot 10^{14}$ см $^{-2}$. Включение потока УФ света $\Phi_1 = 10^{14}$ см $^{-2}$ с $^{-1}$ при $t = 1$ с и 1,1 с.

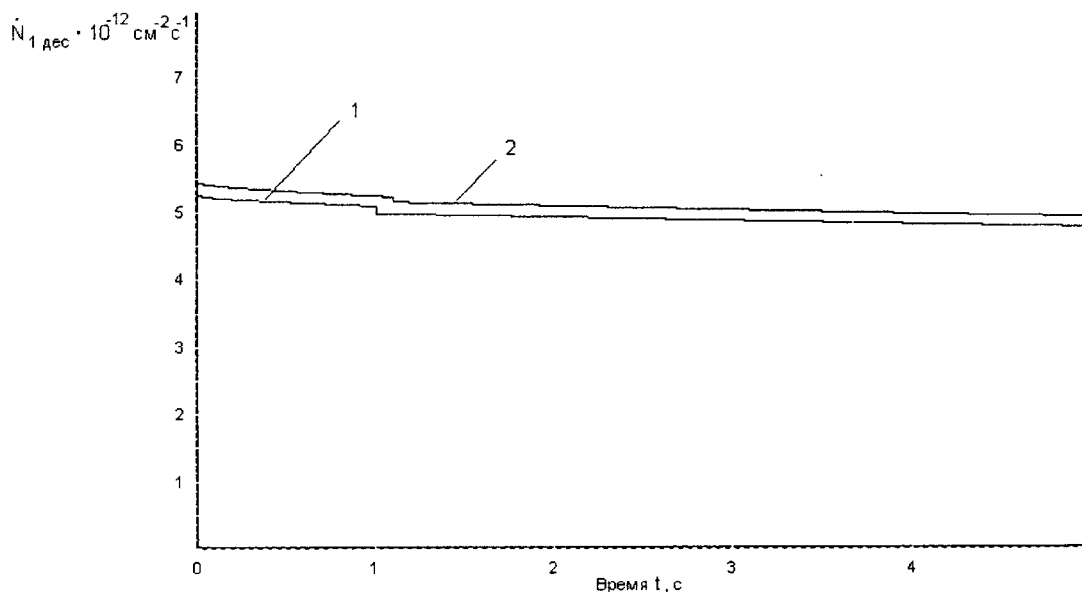


Рис. 3. Зависимость от времени скорости десорбции атомов с поверхности при действии ионного пучка с $E = 50$ эВ. 1 – 50 К; 2 – 250 К. $j_3 = 10^{14}$ см $^{-2}$ с $^{-1}$, $N_1 = N_2 = 5 \cdot 10^{14}$ см $^{-2}$. Включение потока УФ света $\Phi_1 = 10^{14}$ см $^{-2}$ с $^{-1}$ при $t = 1$ с и 1,1 с.

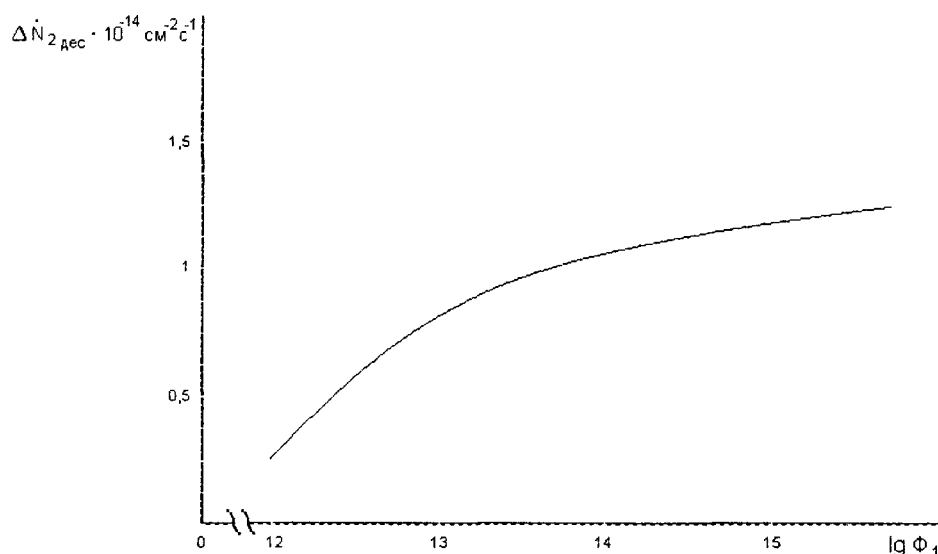


Рис. 4. Зависимость величины изменения скорости десорбции молекул с поверхности при освещении УФ светом от интенсивности УФ света. $T = 50 \text{ K}$, $j_3 = 10^{14} \text{ см}^{-2}\text{с}^{-1}$, $N_1 = N_2 = 5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$.

Модель ИЛ и неравновесной десорбции в представлении многоквантового колебательно-электронного механизма возбуждения адсорбированных частиц и кристалла в актах соударения с ускоренными атомными частицами в области низких энергий $E_{I+} \sim 10^2$ эВ, позволяет непротиворечиво описывать ИЛ и десорбцию и учесть влияние УФ света и тепла на характеристики ионolumинесценции твердого тела с системой электронных ловушек.

РЕЗЮМЕ

Розроблена кінетична модель іонолумінесценції (ІЛ) та атомно-молекулярних процесів у разі взаємодії низькоенергетичних іонів ($E_{I+} \sim 10^2$ еВ) з поверхнею двокомпонентного напівпровідника, на якій можуть знаходитися адсорбовані гази. Проведене комп'ютерне моделювання ІЛ та десорбції для збуджених УФ світлом напівпровідників. Знайдено, що коливально-електронний механізм може описувати ІЛ в області низьких значень енергії іонів, а десорбція атомів та молекул, стимульована іонним ударом, визначається електронними переходами.

SUMMARY

The kinetic model of ionoluminescence (IL) and atomic-molecular processes for a case of low-energy ions ($E_{I+} \sim 10^2$ eV) interaction with a surface of the two-component semiconductor on which one there can be adsorbed gas is developed. The computer simulation of IL and desorption for excited by UV light semiconductors is carried out. It is obtained that the vibration-electronic mechanism can describe an IL in the field of low values of ions energy, and the desorption (induced by ionic shock) of atoms and molecules is determined by electronic transitions.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Плешивцев Н.В., Бажин А.И. Физика воздействия ионных пучков на материалы. М.: Вузовская книга, 1998.- 392 с.
2. Бажин А.И., Гранкин Д.В. // Изв. РАН, Сер. Физич. 2002.- Т. 66. №1.- С. 134-137.
3. Гранкин В.П. // Письма в ЖТФ, 1994.- Т.20, Вып.14.- С.27-31.
4. Тюрин Ю.И. // Поверхность, 1986.- №9.- С.115-125.

Надійшла до редакції 27.03.2002 р.

УДК 539.21

ПРИМЕНЕНИЕ ЭМПИРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ К РАСЧЕТУ КУПОЛА РАССЛОЕНИЯ

Ю. В. Шерстенников

Днепропетровский государственный финансово-экономический институт

ВВЕДЕНИЕ

Для расчетов фазовых диаграмм бинарных и многокомпонентных сплавов [1,2,3] широко используются эмпирические и полуэмпирические модели. Энергия Гиббса, данных моделей, может быть представлена в виде суммы двух слагаемых. Первое является энергией Гиббса образования идеального твердого раствора; оно детально исследуется в статистических теориях сплавов [4]. Второе слагаемое – избыточная энергия Гиббса в общем случае зависит от температуры и состава. Происхождение этого слагаемого мы будем связывать с концентрационной зависимостью потенциалов межатомного взаимодействия. Некоторые константы полуэмпирической теории могут быть рассчитаны теоретически, но большее их число определяется на основе эмпирической информации. Ниже будут рассмотрены модели, для которых избыточная энергия представляет собой полином второй третьей и четвертой степени. Модели рассматриваться в порядке возрастания степеней. Целью работы является исследование возможности применения эмпирических моделей к расчету купола расслоения.

1. МОДЕЛЬ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА.

Рассмотрение начнем с краткого обсуждения модели второго порядка. Свободную энергию Гиббса твердого раствора А — В в расчете на один атом будем вычислять в виде [4]:

$$G(c) = E(c) - TS, \quad (1)$$

где

$$E(c) = \frac{1}{2} z \{ (1-c) V_{AA} + c V_{BB} + 2c(1-c)w \}, \quad (2)$$

$$S = -k_B \{ c \ln c + (1-c) \ln(1-c) \}. \quad (3)$$

Здесь c - концентрация компонента В; $v_{ab}(a, b = A, B)$ - энергии парного межатомного взаимодействия атомов сорта a и b ; z — число ближайших соседей в решетке; $w = v_{AB} - \frac{1}{2}(v_{AA} + v_{BB})$ — энергия упорядочения, которая в рассматриваемом случае положительна; S - энтропия смешения в приближении идеального раствора. Далее считаем, что $k_B = 1$.

Условия равновесия двух фаз приводят, как известно [4], к системе уравнений метода конод:

$$G'_2(c_1) = G'_2(c_2), \quad (4)$$

$$G'_1(c_1) = \frac{G_2(c_2) - G_1(c_1)}{c_2 - c_1}, \quad (5)$$

Здесь $G_1(c)$ и $G_2(c)$ - свободные энергии Гиббса первой и второй фазы соответственно. Будем считать, что фазы, образующиеся при распаде, различаются лишь концентрацией компонентов, т. е. как функции концентрации совпадают: $G_1(c) = G_2(c) = G(c)$. При этом линейная по концентрации часть потенциала $G(c)$ при расчете по формулам (4), (5) оказывается несущественной, и выражение (1) примет вид:

$$G(c) = a_2 c^2 - TS(c), \quad (6)$$

где $a_2 = -zw$. Для потенциала (6) из уравнений (4) и (5) следует, что $c_2 = 1 - c_1$. Тогда для кривой расслоения из (4) и (5) получится уравнение:

$$a_2(1 - 2c) = T \ln \frac{c}{1-c}. \quad (7)$$

Из (7) вытекает хорошо известный результат [4]: купол распада симметричен относительно концентрации $c=0,5$. Теорию, основанную на потенциале (6) будем называть теорией второго порядка, поскольку потенциал (6) содержит полином второго порядка по концентрации (энтропию во внимание не принимаем).

На реальных диаграммах состояния критическая точка сдвинута в сторону более тугоплавкого элемента, имеющего более высокий модуль упругости и меньшую сжимаемость. Для получения

реалистической кривой распада сплава необходимо выйти за рамки модели регулярного твердого раствора. Будем считать, что в окрестности критической точки потенциалы межатомного взаимодействия зависят от концентрации

$$v_{ab} = u_{ab} + \alpha_{ab}(c - c_m) + \beta_{ab}(c - c_m)^2,$$

где c_m — концентрация, соответствующая вершине купола распада (критическая точка бинодали); U_{ab} , α_{ab} , β_{ab} — константы. Вначале считаем коэффициенты β_{ab} равными нулю. Тогда потенциал (1) примет вид, соответствующий теории третьего порядка:

$$G(c) = a_2 c^2 + a_3 c^3 - TS(c). \quad (8)$$

На рис. 1 представлены результаты расчета куполов расслоения для потенциала (8) по системе уравнений (4), (5). Коэффициенты a_2 и a_3 определялись из условий [6]:

$$G''(c_0) = 0, \quad G'''(c_0) = 0, \quad (9)$$

при $T = T_0$. В качестве экспериментальных данных были взяты значения критической температуры T_0 и концентрации c_0 . Для системы $Ti-Mo$ (рис.1а) рассчитанный купол распада практически совпадает с экспериментальным. На нижней температурной границе ($T_1 = 1027$) ветви экспериментального купола проходят через концентрации $c_1 = 0.14$ и $c_2 = 0.296$, а в результате расчета были найдены значения: $c_1 = 0.13965$ и $c_2 = 0.29407$. Таким образом, расхождение между экспериментальными и теоретическими значениями меньше одного процента. Для других систем соответствие с экспериментом хуже. Для более точного расчета купола расслоения необходимо перейти к теории более высокого порядка.

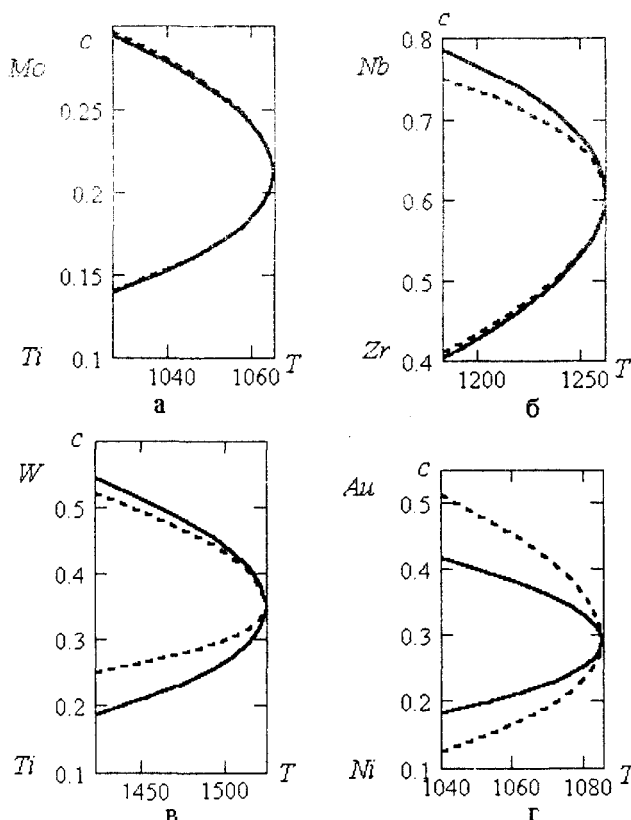


Рис. 1. Линии расслоения; сплошная — теория, точечная — эксперимент [5].

2. МОДЕЛЬ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА.

Теперь считаем $\beta_{ab} \neq 0$, т. е. переходим к теории четвертого порядка. Свободную энергию запишем в виде:

$$G(c) = a_2 c^2 + a_3 c^3 + u c^4 - TS(c). \quad (10)$$

Равенства (9) позволяют выразить a_2 и a_3 через u . Таким образом, в теории появляется один свободный параметр – u . Значения параметра u выбирались таким образом, чтобы на нижней границе T_1 , рассматриваемого температурного интервала, величина $s = |c_1 - c_1^3| + |c_2 - c_2^3|$ принимала минимальное значение. Здесь $c_{1,2}$ – теоретические, а $c_{1,2}^3$ – экспериментальные значения для точек бинодали при $T = T_1$. Результаты расчета представлены в таблице.

Таблица.

Теоретические и экспериментальные значения концентраций для точек бинодали при $T = T_1$

Сплав	T_1	u	c_1	c_2	c_1^3	c_2^3
$Ti - Mo$	1027	0	0,1397	0,294	0,14	0,296
		-213	0,139	0,2953		
$Nb - Zr$	1183	0	0,4029	0,7838	0,41	0,75
		140	0,4100	0,7800		
$Ni - Au$	1040	0	0,1812	0,4155	0,125	0,51
		-1808,6	0,1575	0,5100		
$Ti - W$	1423	0	0,1871	0,543	0,25	0,52
		780	0,1983	0,520		

Теоретические значения c_1 и c_2 приведены для двух значений параметра u . Значение $u = 0$ соответствует потенциалу для модели третьего порядка (8), т. е. рисунку 1. Второе значение, которое будем обозначать u_m , соответствует условию $s \rightarrow \min$. Из таблицы следует, что теория четвертого порядка во всех случаях приводит к лучшему соответствию с экспериментом. Например, для $Ni - Au$ и $Ti - W$ экспериментальные и теоретические значения c_2 совпадают при $T = T_1$. Но это означает, что вся теоретическая ветвь купола расщепления для $c_1 \leq c \leq c_2$ практически совпадает с экспериментальной. Отметим, что u_m принимает как положительные, так и отрицательные значения.

3. КРИТИЧЕСКАЯ ТЕМПЕРАТУРА БИНОДАЛИ

В заключение рассмотрим принципиальную возможность применения фазовых моделей к расчету кривой распада сплава. Для этого необходимо рассчитать зависимость критической температуры от критической концентрации и определить концентрационные интервалы для критической температуры.

Рассмотренные выше потенциалы (8), (10) представляют частный случай. В общем случае, энергия Гиббса твердого бинарного раствора рассчитывается в виде

$$G(c) = c(1-c)q(c) - TS(c), \quad (11)$$

$q(c)$ – коэффициент, вид которого определяется выбранной моделью. Для выхода за пределы модели регулярного твердого раствора коэффициент $q(c)$ может быть выбран в одной из следующих форм [3]:

1) Маргулеса:

$$q(c) = \sum_{k=0}^n A_k (1-c)^k, \quad (12)$$

2) Борелиуса:

$$q(c) = \sum_{k=0}^n B_k c^{(n-k)} (1-c)^k, \quad (13)$$

3) Редлиха и Кистера:

$$q(c) = \sum_{k=0}^n C_k (2c-1)^k, \quad (14)$$

4) Бале и Пельтона:

$$q(c) = \sum_{k=0}^n D_k P_k(c). \quad (15)$$

Величины $P_k(c)$ в (15) являются полиномами Лежандра. Критическая точка расслоения определяется из системы уравнений (9). Коэффициент $q(c)$ в (11) выберем в форме (12) для $n = 1$, т. е.

$$q(c) = V + Uc, \quad (16)$$

где $V = A_0 + A_1$, $U = -A_1$. При этом система (9) имеет решение при заданном значении c (определяющем положение критической точки) лишь для некоторого определенного значения параметра U . На рис. 2 показана критическая температура $t = k_B T / V$ для данного значения c , полученная как решение системы (9). Пунктирной линией на рисунке показано соответствующее значение параметра, $u = U/V$, при котором система (9) имеет решение. На рисунках 2 – 7 по оси абсцисс откладывается значение критической концентрации. Распад может иметь место, в данном случае, лишь в интервале концентраций (0.1505; 0.7384). Границы указанного интервала определяются корнями полинома $9c^2 - 8c + 1$.

На рис. 3 представлены расчеты критической температуры для q в форме (13) для $n=1$. Концентрационный интервал (положительных) температур распада (0.2616; 0.8495) определяется корнями полинома $9c^2 - 10c + 2$. Расчет по формуле (15) при $n = 1$ приводит к зависимости t от C , которая совпадает с изображенной на рис. 3. Хотя значения параметра u , при которых возможен распад, теперь уже будут другими.

Аналогичные расчеты были сделаны по формуле (13) и для случая $n=2$. В этом случае $q(c)$ имеет вид:

$$q(c) = vc^2 + bc(1-c) + u(1-c)^2. \quad (17)$$

Результаты расчета представлены на рис. 4.

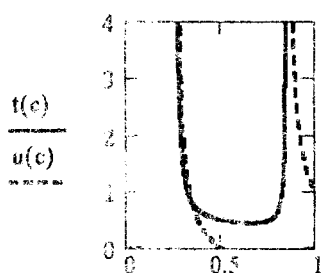


Рис. 2. Критическая температура по (12) для $n=1$.

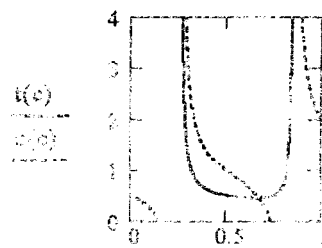


Рис. 3. Критическая температура по (13) для $n=1$.

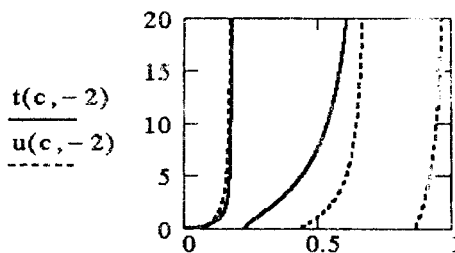
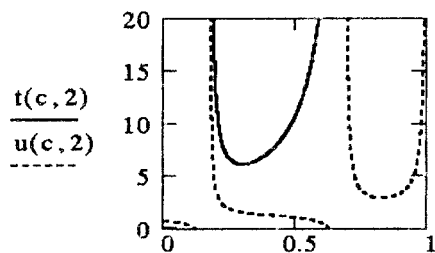
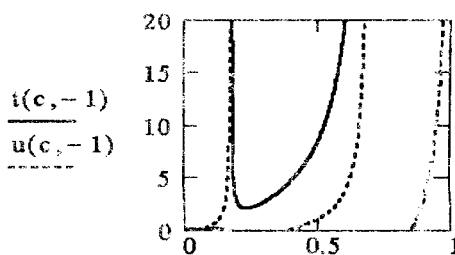
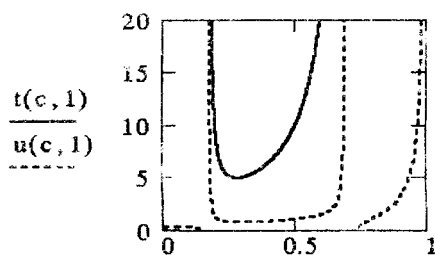


Рис. 4. Критическая температура по (13) для $n=2$.

Параметр ν в (17) выбран равным 1. Расчеты проведены для различных значений параметра b . Значения этого параметра указаны, как аргументы в функциях $t(c, b)$ и $u(c, b)$.

Расчеты по формуле (12) для $n = 2$ представлены на рис. 5. Вторым аргументом в функциях $t(c, b)$ и $u(c, b)$ определяется аналогично тому, как это сделано для рис. 4. Из представленных рисунков видно, что распад сплава может происходить лишь в некоторой концентрационной области, а именно, при тех значениях концентрации, при которых температура распада является положительной величиной не превосходящей температуру плавления.

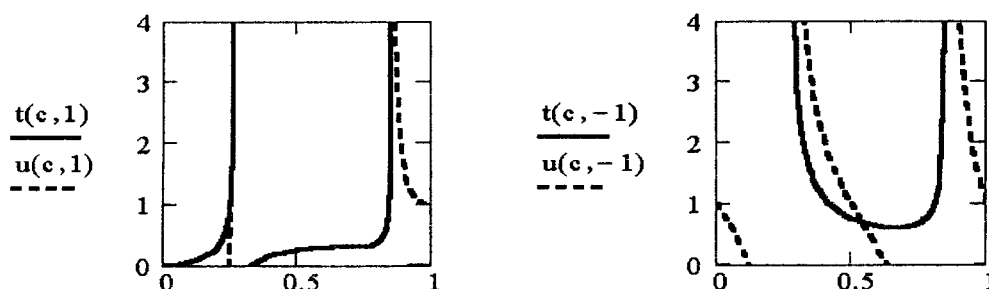


Рис. 5. Критическая температура по (12) для $n=2$.

На рис. 6 показаны результаты расчета по формуле (14) для $n=1$. Причем показана также нефизическая область отрицательных температур расслоения. Такие нефизические области имеют место и на других рисунках.

Проведенные расчеты показывают, что критическая температура для каждой модели может находиться лишь в определенном интервале концентраций. Это означает, что при исследовании фазового расслоения в сплавах необходимо уделять должное внимание выбору эмпирической модели. Это особенно важно тогда, когда выбранная модель применяется для одновременного расчета нескольких линий на диаграмме состояния, поскольку в этом случае накладываемые на модель ограничения могут оказаться несовместными в рассматриваемом интервале концентраций.

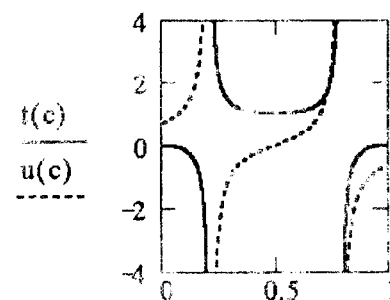


Рис. 6. Критическая температура по (14) для $n=1$.

РЕЗЮМЕ

У рамках емпіричної теорії розрахування купол розшарування для систем: $Ni - Mo$, $Nb - Zr$, $Ni - Au$, $Ti - W$. Досліджено принципову можливість застосування емпіричних моделей для розрахунків купола розшарування.

SUMMARY

Within the framework of the empirical theory the decomposition dome is designed for systems: $Ni - Mo$, $Nb - Zr$, $Ni - Au$, $Ti - W$. The basic opportunity of application of empirical models for accounts of a decomposition dome is investigated.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кауфман Л., Бернштейн Х. Расчет диаграмм состояния с помощью ЭВМ. – Москва: Мир, 1972. – 328 с.
2. Бондар А. А., Великанова Т. Я., Даниленко В. М. и др. Стабильность фаз и фазовые равновесия в сплавах переходных металлов. – Киев: Наук. думка, 1991. – 200 с.
3. Ансара И.// Диаграммы фаз в сплавах. – М.: Мир, 1986. – С. 142.
4. А. А. Смирнов. Молекулярно-кинетическая теория металлов. – М.: Наука, 1966. – 488 с.
5. Барабаш О. М., Коваль Ю. Н. Кристаллическая структура металлов и сплавов. – Киев: Наук. думка, 1986. – 598 с.
6. Шерстенников Ю. В. дослідження критичної точки бінодалі в статистико-термодинамічному підході // УФЖ. – 1998. – 43, № 8. – С. 998-1001.

Надійшла до редакції 30.10.2001 р.

УДК 539.26; 666.233

РЕНТГЕНІВСЬКІ ДОСЛІДЖЕННЯ СТРУКТУРНИХ ХАРАКТЕРИСТИК АЛМАЗНИХ ПЛІВОК, СИНТЕЗОВАНИХ НА (111) Si.

Сельська І.В.*, Ігнатенко П.І.

* Донбаська державна академія будівництва та архітектури, м. Макіївка

Виняткові властивості алмазних плівок дозволяють використовувати їх в оптиці, електроніці і в якості міцних покриттів [1]. Вже на початковому етапі синтезу плівок формується структура [2], що визначає їхні фізичні властивості. Важливу роль в цьому відіграють параметри синтезу тиск, температура, концентрація газу [3]. Правильно підібрані умови синтезу дають можливість керувати процесом росту і здобувати матеріали з заданими властивостями. Відомо, що синтез алмазів проводять як на алмазних, так і чужорідних підкладках (*Si*, *W*, *Mo* і др.), використовуючи практично усі методи тонкоплівочної технології [4].

У даній роботі вивчався вплив умов синтезу на структурні характеристики алмазних плівок, здобутих на площині (111) кремнію. Синтез кристалічних алмазних плівок здійснювали методом хімічної транспортної реакції [5] в системі графіт-водень-алмаз під тиском нижче атмосферного. Активатором служив графітовий стержень, котрий нагрівався до температури 2323 К. Підкладки для синтезу містились на охолодженій підкладкодержачі. Температуру підкладки змінювали від 1073 К до 1273 К через кожні 100 К. В процесі вирощування плівок температуру підкладок підтримували незмінною. В камеру напускали раніше приготувану робочу суміш водню та метану. Алмазні плівки синтезували на монокристалах кремнію на запальовальних алмазних порошках. Підкладки з кремнію було попередньо механічно відполіровано. "Запальованку" здійснювали механічним укріпленням на поверхню підкладки дрібних кристалів одностороннього алмазу з розміром зерна порядку 0.1 мкм.

Структурні характеристики плівок: середній розмір блоків мозаїки $\langle D \rangle$, величина мікродеформацій $\sqrt{\langle E^2 \rangle}$ і густина дислокацій γ визначались рентгенодифрактометричним методом на дифрактометрі ДРОН-4-07 у характеристичному випромінюванні FeK_α . Алмазні плівки разом з кремнієм, на підкладковому розміром $(6 \times 8 \times 1) \cdot 10^{-3}$ м, досліджувались при кімнатній температурі. При аналізі тонкої структури використовувався метод апроксимації профілей рентгеновських інтерференційних ліній [6]. Густина дислокацій визначали за методикою запропонованій у роботі [7].

Розглянемо результати досліджень кристалічних алмазних плівок товщиною 5.8 мкм та 6 мкм, вирощених при температурі підкладки 1073 К та тиску газової суміші 10.7 кПа (склад газової суміші: метану 2% і водню 98% від усього об'єму). Експерименти показали, що здобуті плівки є дрібнодисперсними, але розмір блоків мозаїки й величина густини дислокацій відрізняються від результатів, здобутих у роботах [7,8]. Структурні характеристики плівок різної товщини відрізняються одна від іншої. Із зростанням товщини алмазної плівки спостерігається незначна зміна величини структурних характеристик. Так середній розмір блоків мозаїки $\langle D \rangle$ збільшується від 0.069 мкм до 0.077 мкм, величина мікродеформацій від $0.51 \cdot 10^{-3}$ до $0.67 \cdot 10^{-3}$, а густина дислокацій γ від $4.79 \cdot 10^{14} \text{ м}^{-2}$ до $5.71 \cdot 10^{14} \text{ м}^{-2}$. Така ж закономірність зміцнення структурних характеристик спостерігається й для алмазних плівок, здобутих при тисках 21.3 кПа та 31.9 кПа газової суміші в ростовій камері. З підвищенням товщини алмазних плівок від 5.1 до 9.4 мкм., синтезованих при тиску 21.3 кПа, величини $\langle D \rangle$, $\sqrt{\langle E^2 \rangle}$, γ збільшуються відповідно на 0.01 мкм, $0.19 \cdot 10^{-3}$ та $0.76 \cdot 10^{14} \text{ м}^{-2}$. В плівках товщиною 6 мкм та 9.5 мкм., зрощених при тиску 31.9 кПа, розмір блоків мозаїки збільшується на 0.03 мкм, величина мікродеформацій на $0.26 \cdot 10^{-3}$ та густина дислокацій на $0.02 \cdot 10^{14} \text{ м}^{-2}$.

Тепер розглянемо результати досліджень в кристалічних алмазних плівках, зрощених при температурі підкладки 1173 К (при інших рівних умовах їхнього здобуття). У цьому випадку зміна структурних характеристик із збільшенням товщини алмазу має інший характер, чим для алмазних плівок розглянутих вище.

В алмазних плівках синтезованих при температурі підкладки 1173 К та тиску 10.7 кПа у ростовій камері (концентрація метану і водню у процесі синтезу 2%:98%) також спостерігається зміна структурних характеристик при збільшенні товщини плівок. З ростом товщини алмазу від 6.3 мкм до 9.9 мкм розмір блоків мозаїки збільшується на 0.014 мкм, величина мікродеформацій зростає в 3 рази, а густина дислокацій - в 2.7 рази. Дослідження показали, що алмазні плівки товщиною 6.3 мкм, синтезовані при тиску 21.3 кПа газо-

вої суміші, є великоблоковими ($\langle D \rangle \sim 0.135$ мкм [9]) і розмиття дифракційних ліній зв'язане головним чином з мікродеформаціями. Із збільшенням товщини алмазної плівки до 10.4 мкм розмір блоків мозаїки зменшується і дорівнює 0.114 мкм, а величина $\sqrt{\langle E^2 \rangle} \sim 1.47 \cdot 10^{-3}$ і густина дислокацій $\gamma = 8.5 \cdot 10^{14} \text{ м}^{-2}$. В алмазних плівках, здобутих при тиску 31.9 кПа, із зростанням товщини алмазного покриття від 4.7 мкм до 11.4 мкм спостерігається зменшення розміру блоків мозаїки у 2.5 рази, величина мікродеформацій зростає в 3.5 рази, а густина дислокацій майже на порядок.

В кристалічних алмазних плівках, зрощених при температурі підкладки 1273 К, структурні характеристики із збільшенням товщини алмазу змінюються неоднозначно. Із зростанням товщини плівок від 5.8 мкм до 9.4 мкм (здобутих при тиску 10.7 кПа) величина $\langle D \rangle$ зменшується від 0.079 мкм до 0.069 мкм, а густина дислокацій і мікродеформацій збільшуються відповідно від $6.51 \cdot 10^{14} \text{ м}^{-2}$ до $8.03 \cdot 10^{14} \text{ м}^{-2}$ та від $0.79 \cdot 10^{-3}$ до $0.85 \cdot 10^{-3}$. Плівки товщиною 4.6 мкм, синтезовані під тиском 21.3 кПа, є великоблоковими і дефектна структура зв'язана здебільшого з мікродеформаціями. Із збільшенням товщини плівки до 9.9 мкм розмір блоків мозаїки зменшується і дорівнює 0.096 мкм, а мікродеформації та густина дислокацій відповідно дорівнюють $1.06 \cdot 10^{-3}$ та $7.24 \cdot 10^{14} \text{ м}^{-2}$. Із збільшенням товщини алмазних плівок від 4 мкм до 9 мкм., зрощених при ще більшому тиску (31.9 кПа), величина $\langle D \rangle$ зменшується на 0.02 мкм, але збільшується $\sqrt{\langle E^2 \rangle}$ на $0.14 \cdot 10^{-3}$ та γ в 1.4 рази.

В наступній серії експериментів було досліджено плівки, здобуті при іншому змістові газової суміші під час синтезу: при концентрації метану 4% та водню 96%. При зрощенні плівок були використані температури підкладок: 1073 ; 1173 ; 1273 К та тиску газів: 5.3; 10.7; 21.3; 31.9 кПа.

Для алмазних плівок товщиною 5.2; 4.9 та 3.9 мкм, синтезованих при температурі ростової підкладки 1073 К та тисках 5.3; 10.7; 31.9 кПа спостерігається залежність розміру блоків мозаїки та величини мікродеформації від тиску газової суміші метану і водню в ростовій камері, що використовується при синтезі (особливо в інтервалі 5.3 - 10.7 кПа). З збільшенням тиску розмір блоків мозаїки зростає від 0.046 мкм до 0.082 мкм (мал.1, крива 1), а величина мікродеформації збільшується від $0.48 \cdot 10^{-3}$ до $0.76 \cdot 10^{-3}$ (мал.2, крива 1). Густина дислокацій змінюється немонотонно і максимальна в алмазних плівках, здобутих при тиску 10.7 кПа ($7.18 \cdot 10^{14} \text{ м}^{-2}$) (мал.3, крива).

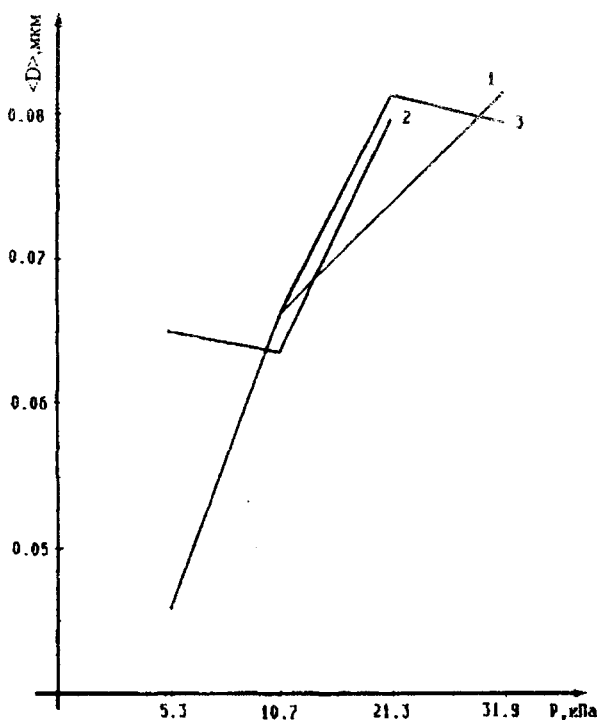


Рис. 1. Залежність розміру блоків мозаїки алмазної плівки від тиску: 1- $T=1073$ К, 2- $T=1173$ К, 3- $T=1273$ К.

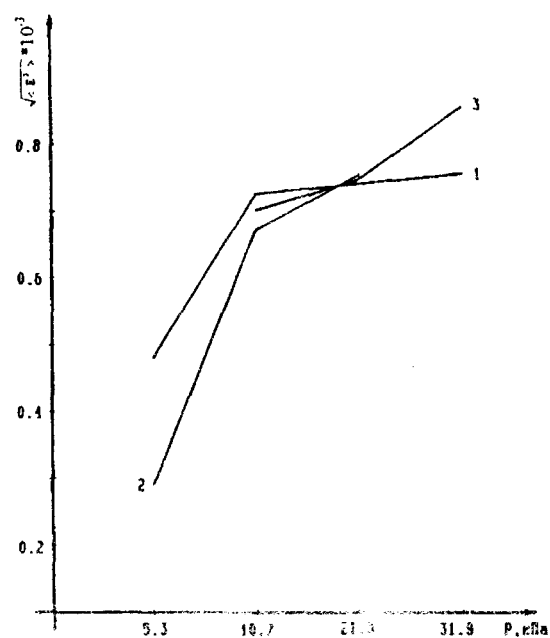


Рис. 2. Залежність величини мікро деформації алмазної плівки від тиску: 1- $T=1073$ К, 2- $T=1173$ К, 3- $T=1273$ К.

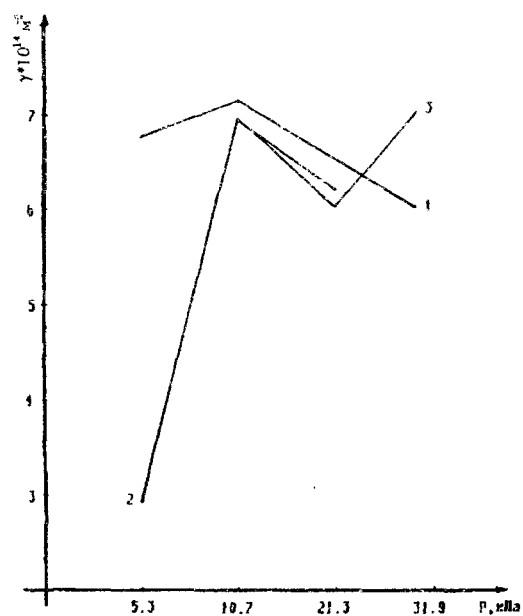


Рис.3. Залежність густини дислокацій алмазної плівки від тиску: 1- $T=1073$ К, 2- $T=1173$ К, 3- $T=1273$ К.

Кристалічні плівки, зрощені при температурі ростової підкладки 1173 K, за структурними характеристиками відрізняються одна від іншої в залежності від тиску, що використовується під час синтезу. Для цих досліджених плівок спостерігається залежність величини мікродеформації від тиску метану та водню (особливо в інтервалі 5.3 кПа-10.7 кПа). Так плівки товщиною 3 мкм., синтезовані при тиску 5.3 кПа та плівки 4.3 мкм, здобуті при тиску 10.7 кПа мають практично однаковий параметр $\langle D \rangle$ (порядку 0.064 мкм), але величина $\sqrt{\langle E^2 \rangle}$ та γ для плівок, здобутих під більшим тиском, зростає приблизно в 2 рази. В плівках товщиною 4.2 мкм (тиск під час синтезу 21.3 кПа) спостерігається збільшення розміру блоків мозаїки до 0.079 мкм (мал.1, крива 2) та мікродеформації до $0.76 \cdot 10^{-3}$ (мал.2, крива 2), а густина дислокацій незначно зменшується на $0.73 \cdot 10^{14} \text{ м}^{-2}$ (мал.3, крива 2). Плівки товщиною 3.5 мкм., зрощені при тиску 31.9 кПа, є крупноблокові, їх дефектна структура звіюється незначно і зв'язана в основному з мікродеформаціями.

За структурними характеристиками плівки алмазу, вирощені при температурі підкладки 1273 K та тиску 5.3 кПа, відрізняються від плівок, здобутих при тисках 10.7, 21.3; 31.9 кПа. Плівки товщиною 4.2 мкм, здобуті при тиску 5.3 кПа, є низькодисперсні ($\langle D \rangle \sim 0.135 \text{ мкм}$ [9]) і на малюнку 1 (крива 3) розмір блоків не відзначений. Для плівок, синтезованих при інших тисках, спостерігається залежність величини мікродеформації від тиску газової суміші. Так, під час збільшення тиску спостерігається невеликий ріст величини $\sqrt{\langle E^2 \rangle}$ в алмазних плівках (відповідно $0.70 \cdot 10^{-3}$; $0.75 \cdot 10^{-3}$; $0.86 \cdot 10^{-3}$) (мал.2, крива 3). Розмір блоків мозаїки для плівок товщиною 4.3 мкм, здобутих при тиску 21.3 кПа, є максимальний (0.081 мкм) в порівнянні з розміром блоків $\langle D \rangle = 0.066 \text{ мкм}$ для плівок товщиною 3.6 мкм (тиск 10.7 кПа) та $\langle D \rangle = 0.079 \text{ мкм}$ для плівок товщиною 7.4 мкм (тиск 31.9 кПа) (мал.1, крива 3). Густина дислокацій γ в плівках, синтезованих при тиску 21.3 кПа, менш приблизно на $1 \cdot 10^{14} \text{ м}^{-2}$, чим густина дислокацій в плівках, здобутих при тисках 10.7 та 31.9 кПа (мал.3, крива 3).

Ріст розмірів блоків мозаїки в процесі наростання алмазних плівок, на наш погляд, може бути пов'язаним або з процесами конкурентного розвитку найбільш сприятливо орієнтованих й швидко зростаючих кристалів, або з процесами рекристалізації у суцільний плівці. Ріст дефектності структури, певно, зумовлено формуванням на міжфазному кордоні "підкладка-плівка" перехідного шару: при віддаленні від підкладки псевдоморфний шар [2] змінюється дефектним перехідним шаром, що містить дислокації невідповідності та упродовженні домішкові атоми водню та вуглецю. Спостережуване знижування розміру блоків з ростом товщини при температурі 1273 K та зростання величини мікродеформації й густини дислокацій в інтервалі тисків від 10.7 кПа до 31.9 кПа, певно, пов'язані з збільшенням пересичення. Останнє, як відомо, впливає на кінетику зародкоутворення і ріст плівки, збільшуючи кількість центрів кристалізації зростаючої фази, та утворюючи тим самим більш дефектну й дрібнодисперсну структуру. При великих тисках (21.3-31.9 кПа) дефектність структури плівки практично досягає насичення. Найбільша швидкість росту плівок, як показано нами, має місце в інтервалі тисків (10 - 21 кПа), в якому й спостерігається найбільш суттєве збільшення дефектності структури вирощуваних плівок.

Аналіз експериментальних даних засвідчує, що значення структурних характеристик штучних кристалічних алмазних плівок, залежить від параметрів синтезу та товщини алмазної плівки. Було встановлено, що в алмазних плівках, синтезованих при температурі 1073 K, тисках 10.7; 21.3; 31.9 кПа та температурі 1173 K, тиску 10.7 кПа (концентрація метану 2%) із збільшенням алмазної плівки розмір блоків мозаїки, густина дислокацій та величина мікродеформації збільшуються. В плівках, зрощених при температурах 1173 K, 1273 K та тисках 10.7; 21.3; 31.9 кПа (метану 2%) з збільшенням товщини алмазу розмір блоків мозаїки зменшується, а величина мікродеформації й густина дислокацій зростають. Плівки, синтезовані при тиску 21.3 кПа і температурі 1173 K, є крупноблокові.

В алмазних плівках, товщиною від 3 до 7.4 мкм, здобутих при концентрації метану 4% і температурах підкладок 1073 K і 1173 K з збільшенням тиску розмір блоків мозаїки зростає, а в плівках вирощених при температурах 1073 K, 1173 K і 1273 K спостерігається вплив тиску газової суміші на величину мікродеформації. При температурах підкладок 1173 K, 1273 K та тисках відповідно 31.9 кПа, 5.3 кПа зростають великоблокові алмазні плівки.

РЕЗЮМЕ

Рентгенодифракційним методом досліджено вплив параметрів синтезу та товщини алмазної плівки, отриманої методом хімічної транспортної реакції, на її структурні характеристики. Встановлено, що в плівках,

выращенных на (III) Si при концентрации метана 2 % с увеличением толщины пленки значения структурных характеристик изменяются. Определено влияние давления газовой смеси на структурные характеристики алмазных пленок. В пленках, выращенных при концентрации метана 4 %, с повышением давления возрастают микродеформации.

SUMMARY

By roentgendiffractional method there was researched the influence of characteristics mixture and thickness of a diamond's film, got by the method of chemical transport reaction, on its structural characteristics. It was established, that in the films, grown on (III) Si with the concentration of methane 2 % with increasing of the film's thickness the meaning of structural characteristics changes. There was determined the influence of the pressure of gas mixture on the structural characteristics of the diamond's fills. In the films, grown with the concentration of methane 4 % with an increase of pressure the microdeformations increase.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ed. Field J.E. The properties of Natural and Synthetic Diamond. London-New York. Academic Press., 1992.-710 p.
2. Иевлев И.М., Трусов Л.И., Холмянский В.А. Структурные превращения в тонких пленках. М.:Металлургия.1982.248 с.
3. Meilunas R., Wong M.S., Sheng K.C., Chang R.P.H., Van Duyne R.P. Early stages of plasma synthesis of diamond films// Appl.Phys.Lett.1989.V.5.N 22.p.2204-2206.
4. Новиков А.А., Шубин А.В. Анализ вакуумных методов получения алмазоподобных пленок.// Труды Украинского вакуумного общества. Харьков.1997.Т.3.с.76-83.
5. Спицын Б.В. Кристаллизация алмаза методом химической транспортной реакции.// Техника средств связи. Серия: Технология производства и оборудование. 1991. Вып. 4 с.71-76.
6. Иверонова В.И., Ревкевич Г.П. Теория рассеяния рентгеновских лучей. М.: Из-во Моск. ун-та,1978.278 с.
7. Шульженко А.А., Товстооган В.Н., Шишкин В.А. и др. Физико-химические свойства и субструктура поликристаллических алмазов.// Кн.: "Влияние высоких давлений на структуру и свойства сверхтвердых материалов". Киев. ГИИМ УССР.1985.с.8-12.
8. Солохвалов Н.В., Стрельницкий В.Е., Козьма А.А., Пивовар В.И., Колупаева И.И., Колупаева В.И. Структура, микроструктурное состояние и физико-химические свойства алмазных покрытий, полученных методом химического осаждения из газовой фазы.// Труды Украинского вакуумного общества.Харьков.1997.Т.3.с.106-109.
9. Шулженко П.И., Иванченко Н.П. Рентгенография реальных кристаллов. Донецк: Из-во Донецкого государственного ун-та.2000.328 с.

Надійшла до редакції 15.02.2002 р.

УДК 539.292

ВЛИЯНИЕ НЕУПРУГИХ СТОЛКНОВЕНИЙ НА ЭЛЕКТРОННЫЙ ТРАНСПОРТ
В ГЕТЕРОСТРУКТУРАХ НА ОСНОВЕ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ СВЕРХПРОВОДНИКОВ

Белоголовский М.А., Хара Д.А., Ларкин С.Ю.*
 Донецкий физико-технический институт НАН Украины
 *Научно-производственный концерн «Наука», г. Киев

В середине 90-х годов на стыке квантовой механики, физики твердого тела и теории информации возникло новое направление физики - квантовая информация, которая, в частности, включает в себя вопросы функционирования и практической реализации квантовых компьютеров. Бистабильной транзисторной схеме, на которой построены все нынешние классические компьютеры, в квантовом мире можно сопоставить двухуровневую систему, которую обычно именуют квантовым битом, или кубитом. Его состояние представляет собой суперпозицию двух ортогональных базовых состояний $|0\rangle$ и $|1\rangle$ с комплексными коэффициентами a и b , которые удовлетворяют условию $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Физическая реализация кубита фактически означает выбор тех или иных базовых состояний. Одним из наиболее перспективных направлений в этом плане является создание двухуровневых систем на основе сверхпроводниковых гетеропереходов [1]. Среди существующих подходов к решению этой задачи отметим те из них, которые используют необычные свойства контактов с высокотемпературными сверхпроводящими (ВТСП) металлооксидными. В настоящее время достаточно надежно установлен тот факт, что в отличие от традиционных сверхпроводников, в которых реализуется так называемая s -волновая симметрия параметра порядка Δ , в купратных соединениях угловая зависимость Δ имеет вид d -волны: $\Delta(\mathbf{k}) = \Delta_d \cos(2\theta_k)$, где угол θ_k отсчитывается от направления, соответствующего максимальному значению параметра Δ [2]. Легко видеть, что величина $\Delta(\mathbf{k})$ не только резко анизотропна, но и меняет свой знак при $\theta_k = \pm 45^\circ, \pm 135^\circ$. Два состояния, отвечающие значениям параметра порядка противоположного знака, и являются в данном случае двумя базисными состояниями $|0\rangle$ и $|1\rangle$. Их интерференция приводит, в частности, к появлению гигантского пика при нуле напряжений в зависимости дифференциальной проводимости контакта нормальный металл - ВТСП от подаваемого напряжения смещения V . Предсказанная теоретически [2] амплитуда данного пика должна, по крайней мере, в несколько раз превосходить проводимость того же контакта в нормальном состоянии. Однако в большинстве экспериментов по туннелированию в ВТСП материалы указанный максимум, хотя и проявляется в измеренных кривых, но его величина существенно меньше предсказанной [3]. Последнее наблюдение имеет принципиальное значение для создания соответствующего кубита, поскольку может породить сомнения в реализуемости квантовых суперпозиций в контактах с участием ВТСП соединений. В настоящей работе развита теория электронного транспорта в подобных структурах, учитывающая эффекты сдвига фазы и объясняющая явление подавления пика проводимости при нуле напряжений как результат неупругого взаимодействия туннелирующего электрона с возбуждениями Бозе-типа в приборной области.

Предложим, прежде всего, простую физическую интерпретацию указанного пика в проводимости контакта и влияния на него неупругих столкновений. При этом ограничимся случаем идеального туннельного контакта, когда вероятность туннелирования электрона сквозь барьер крайне мала, и введем вспомогательную нормальную (N) область между барьером (I) и сверхпроводником (S), толщину которой впоследствии устремим к нулю. Кроме того, ограничимся случаем планарной гетероструктуры с параллельными нормальными и сверхпроводящими слоями и осью x , перпендикулярной их плоскостям. При этом угловая зависимость параметра порядка преобразуется к виду $\Delta(\mathbf{k}) = \Delta_d \cos(2(\theta_k - \gamma))$, где γ задает угол между осью x и направлением максимума $\Delta(\mathbf{k})$.

Электрон (e), протуннелировавший в N-область из нормального инжектора (n), отразится от NS-границы в виде дырки (так называемое андреевское отражение), причем амплитуда вероятности данного

процесса согласно [4] равна $r^{eh}(\mathbf{k}) = a(\mathbf{k}) \exp(+i\varphi(\mathbf{k}))$, где $a(\mathbf{k}) = \frac{\varepsilon \text{sign}(\varepsilon) \sqrt{\varepsilon^2 - |\Delta(\mathbf{k})|^2}}{|\Delta(\mathbf{k})|}$, параметр

порядка определяется соотношением $\Delta(\mathbf{k}) = |\Delta(\mathbf{k})| \exp(i\varphi(\mathbf{k}))$. Далее эта дырка (h) отражается от барьера и налетает на NS-границу с импульсом $\mathbf{k}_h''$ (рис. 1), рассеиваясь в электрон с амплитудой вероятности $r^{he}(\mathbf{k}') = a(\mathbf{k}') \exp(-i\varphi(\mathbf{k}'))$. В результате этого появляется связанное состояние, энергию которого можно определить из условия равенства набегу фазы числу 2π . При $\varepsilon < |\Delta(\mathbf{k})|$ имеем $a(\mathbf{k}) = \arccos(\varepsilon/|\Delta(\mathbf{k})|)$ и, значит, набег фазы равен $\arccos(\varepsilon/|\Delta(\mathbf{k})|) + \arccos(\varepsilon/|\Delta(\mathbf{k}')|) + (\varphi(\mathbf{k}) - \varphi(\mathbf{k}'))$. При ориентации кристалла, соответствующей, например, $\gamma = 45^\circ$ $\varphi(\mathbf{k}) - \varphi(\mathbf{k}') = \pi$, $|\Delta(\mathbf{k})| = |\Delta(\mathbf{k}')|$ и тогда связанное состояние возникает при $\varepsilon = 0$ для всех волновых векторов $\mathbf{k}$. Именно это обстоятельство и приводит к гигантскому пику проводимости при нулевом напряжении, предсказываемому теорией [2]. Подобное рассуждение предполагает сохранение фазы электрона при всех процессах рассеяния. Предположим, однако, что, попадая в нормальную прослойку, на ее границе с изолирующим слоем электрон теряет информацию о своей фазе. Тогда квантовый транспорт сводится, по сути, к двум последовательным процессам – туннелированию сквозь барьер и последующим многократным андреевским отражениям от NS-границы. В этом случае сопротивление всей структуры представляет собой сумму двух соответствующих сопротивлений. При напряжениях, соответствующих энергии связанного состояния, оно определяется просто сопротивлением туннельного барьера, вследствие чего и возникает подавленное значение проводимости σ_0 при $V = 0$. Таким образом, наличие эффектов декогеренции при электронном туннелировании в ВТСП-материалы оказывается достаточным для того, чтобы объяснить рассогласование в величине σ_0 между теорией и экспериментом.

Перейдем теперь к более детальному анализу влияния сбоя фазы на транспорт в структурах с d -волновым сверхпроводником, основанному на методе расчета, который был развит ранее в работе [5] применительно к обычным материалам с s -волновой симметрией энергетической щели. В дальнейшем ограничимся случаем нулевой температуры. Для описания эффектов декогеренции введем параметр ζ , определяющий долю тех электронов, в которых происходит сбой фазы при прохождении через промежуточный N-слой. Если при $\zeta = 0$ электрон проходит через гетероструктуру когерентным образом, то при $\zeta = 1$ он теряет всю информацию о своем предыдущем квантовомеханическом состоянии. При этом формально процесс разрушения фазы описывается введением двух фиктивных каналов, соединяющих узкоскопическую прослойку с резервуаром, «спин-спин» юниты и т.д. (см. рис. 1 и [5]). Для характеристики свойств диэлектрической прослойки воспользуемся безразмерной величиной $Z = \int V(x) dx / \hbar v_F$, которая была введена впервые в работе [6]; здесь $V(x)$ – профили потенциального барьера, v_F – скорость Ферми носителей заряда в металлических слоях. Рассмотрим вначале случай полного отсутствия диэлектрического барьера между двумя металлами, т.е. $Z = 0$.

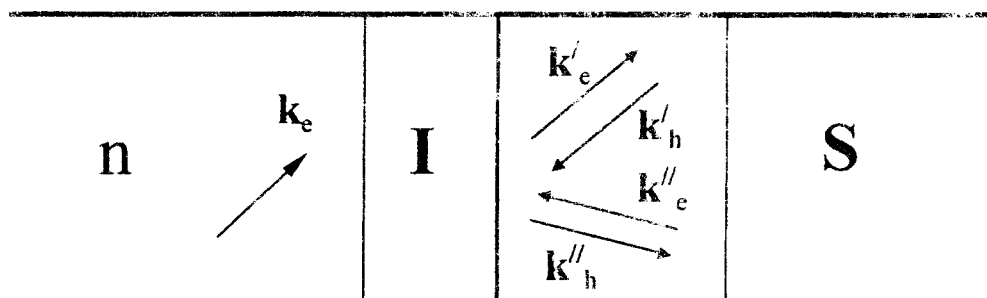


Рис. 1. Схема, иллюстрирующая возникновение связанных состояний на поверхности сверхпроводника с d -волновой симметрией параметра порядка.

В качестве примера на рис. 2 представлены зависимости нормированной дифференциальной проводимости $\sigma(V) = dI(V)/dV$ от напряжения V для сверхпроводника, ориентированного таким образом, что направление максимума параметра порядка совпадает с нормалью к переходу ($\gamma = 0^\circ$). Для сравнения на вставку к рис. 2 приведены аналогичные кривые для традиционного сверхпроводника с s -волновой симметрией. Как видно из рис. 2, по мере нарастания неупругих эффектов (кривые 2 и 3, отвечающие $\zeta = 0.5$ и $\zeta = 1$) наблюдается подавление кривой $dI(V)/dV$ в области малых напряжений

вследствие включения последовательно дополнительного сопротивления, связанного с границей раздела между нормальным инжектором и мезоскопической прослойкой. Подобный же эффект наблюдается и для s -волнового сверхпроводника, причем качественно зависимости проводимости от напряжения в обоих случаях подобны. Более того, значения нормированной проводимости при нулевом напряжении очень близки друг к другу для двух типов симметрии $\Delta(\mathbf{k})$.

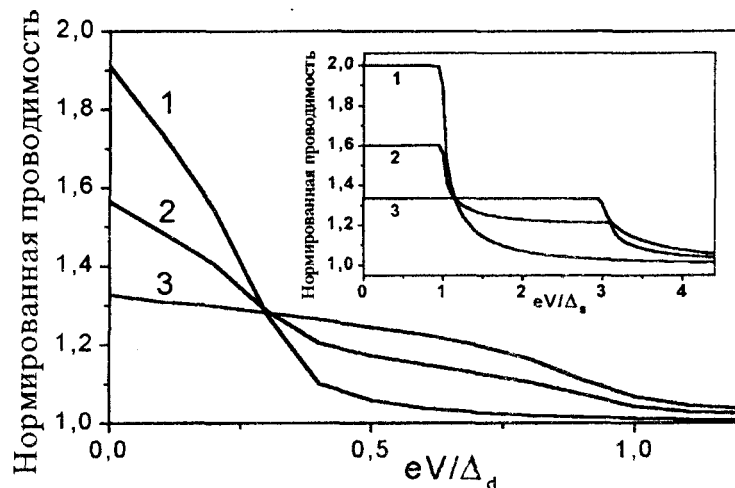


Рис. 2. Нормированная дифференциальная проводимость непосредственного контакта нормального инжектора с d -волновым сверхпроводником, нормаль к которому совпадает с направлением максимума энергетической щели, при различных значениях параметра декогеренции ζ (кривая 1 – $\zeta=0$; 2 – $\zeta=0.5$; 3 – $\zeta=1$). На вставке приведены аналогичные характеристики для обычного сверхпроводника с s -волновой симметрией параметра порядка.

Однако подобный вывод справедлив только при отсутствии потенциального барьера, поскольку при конечных Z кривые $dI(V)/dV$ радикально отличаются (рис. 3). Рассмотрим далее в качестве примера $\gamma = 45^\circ$. В случае d -симметрии в характеристике, отвечающей фазово-когерентному транспор-

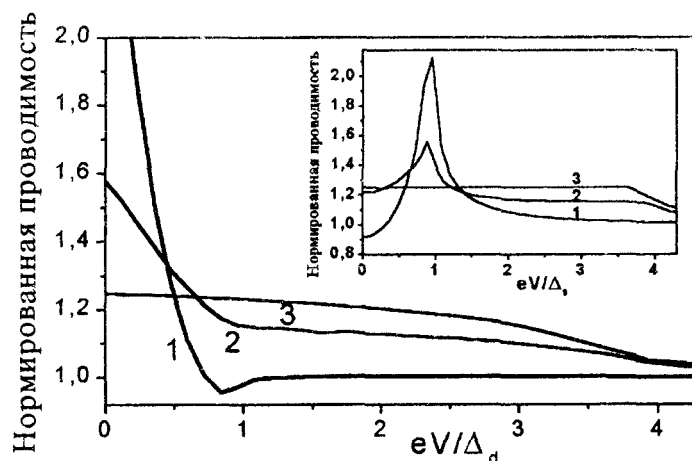


Рис. 3. Нормированная дифференциальная проводимость туннельной структуры, образованной нормальным инжектором, слоем изолятора с эффективной прозрачностью $Z=0.5$ и d -волновым сверхпроводником, нормаль к которому образует угол 45° с направлением максимума энергетической щели, при различных значениях параметра декогеренции ζ (кривая 1 – $\zeta=0$; 2 – $\zeta=0.5$; 3 – $\zeta=1$). На вставке приведены аналогичные характеристики для обычного сверхпроводника с s -волновой симметрией параметра порядка.

ту, возникает острый максимум при $V=0$ (кривая 1), который по мере нарастания эффективности неупругих взаимодействий превращается в зависимость, подобную той, которая реализуется и при

отсутствии всякого барьера (ср. кривые 3 на рис. 2 и 3). При туннелировании в s -волновой сверхпроводник спектр проводимости имеет пик в районе энергетической щели (кривая 1 на вставке к рис. 3). Однако с увеличением параметра ζ происходит деформация характеристики (кривые 2 и 3 на вставке к рис. 3), которая при $\zeta=1$ приобретает форму, подобную кривой 3 на рис. 2 для последовательного туннелирования в сверхпроводник d -типа.

Из полученных результатов ясно, что в любом случае наличие неупругого рассеяния, «стирающего» (хотя бы частично) память о квантовомеханической фазе электрона, должно приводить к подавлению пика при нулевом напряжении смещения в d -волновом сверхпроводнике. Подобный эффект типичен для высокотемпературных сверхпроводящих металлооксидов [3]. Нам представляется, что он является следствием процессов декогеренции в приповерхностном слое купратов, в котором из-за сравнительно малых значений энергии активации кислородных атомов возникает обедненное кислородом состояние, характеризующееся довольно сильными антиферромагнитными флуктуациями [7,8].

В заключение выражаем искреннюю признательность В.М.Гохфельду (Донецкий ФТИ НАНУ) и П.Зайделю (P.Seidel, Institut für Festkörperphysik, Friedrich-Schiller-Universität, Jena, Germany) за полезные обсуждения.

РЕЗЮМЕ

Розраховані спектри провідності гетероструктур, утворених нормальним інжектором та високотемпературним надпровідником з d -хвильовою симетрією параметра порядку. Досліджено вплив ефектів декогеренції на транспортні характеристики подібних систем. Заглушення піку диференціальної провідності при нульовій напрузі, що спостерігається експериментально, інтерпретовано як ефект непружної взаємодії електронів із бозонними збудженнями у перехідній області між двома електродами.

SAMMARY

Conductance spectra of heterostructures between a normal injector and a high-temperature superconductor with a d -wave symmetrical order parameter have been calculated. The influence of decoherence effects on transport characteristics of such systems has been studied. An experimentally observed suppression of the differential conductance peak at zero voltage is interpreted as an effect of an electron inelastic interaction with bosonic excitations in the intermediate region between two electrodes.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Фейсбергман М.В. Квантовый бит на основе джозефсоновского контакта обычного и высокотемпературного сверхпроводников (теория)// УФН. - 1999. - 169, № 8. - С. 917-920.
2. Kashiway S., Tanaka Y., Terada N., Koyanagi M., Ueno S., Aiff L., Takashima H., Tanuma Y., Kishigaki K. Tunneling spectroscopy and pairing symmetry of the high- T_c superconductors// J. Phys. Chem. Solids. - 1998. - 59. - P. 10-12. - P. 2034-2039.
3. Cucolo A.M. Zero bias conductance peaks in high- T_c superconductors: clues and ambiguities of two mutually excluding models// Physica C. - 1998. - 305. - P. 85-94.
4. Belogolovskii M., Grajcar M., Kúš P., Plecenik A., Beaka Š., Seidel P. Phase-coherent charge transport in superconducting heterocontacts// Phys. Rev. B. - 1999. - 59, N 14. - P. 9617-9626.
5. Белоголовский М.А., Бутко В.Г., Ларкин С.Ю. Квантовый транспорт в неоднородных сверхпроводниковых структурах// ФТВД. - 2001. - 11, № 4 (спецвыпуск) - С. 30-35.
6. Blonder G.E., Tinkham M., Klapwijk T.M. Transition from metallic to tunneling regimes in superconducting micro-constrictions: excess current, charge imbalance, and supercurrent conversion// Phys. Rev. B. - 1982. - 25, N 7. - P. 4515-4532.
7. Plecenik A., Grajcar M., Seidel P., Takács S., Matthes A., Zuzcak M., Beaka Š. Influence of bias voltage history on conductance properties of YBaCuO/normal metal junctions// Physica C. - 1998. - 301. - P. 234-242.
8. Naito M., Yamamoto H., Sato H. Intrinsic problem of cuprate surface and interface: why good tunnel junctions are difficult to fabricate// Physica C. - 2000. - 335, N 1-4. - P. 201-206.

Надійшла до редакції 25.04.2002 р.

УДК 539.67:539.376: 669.293

ВНУТРІШНЄ ТЕРТЯ ДЕГАЗОВАНИХ СПЛАВІВ НІОБІЙ-ВОЛЬФРАМ

В.Є. Бахрушин, О.Ю. Чиріков*

Гуманітарний університет "Запорізький інститут державного і муніципального управління",

* Запорізький державний університет

Вступ

Завдяки вдалому поєднанню високих механічних і електричних властивостей, корозійної стійкості та надпровідності ніобій і сплави на його основі широко використовуються як конструкційні матеріали у приладобудуванні, хімічному машинобудуванні та інших галузях сучасної техніки. Особливе місце серед них займають сплави впровадження, у яких спостерігається істотне зміцнення за рахунок блокування руху дислокацій домішками впровадження або дрібнодисперсних виділень оксидів, нітридів або карбідів. Виготовлення таких сплавів звичайно включає стадії дегазації і послідовного контрольованого введення заданої домішки, що здійснюються при температурах вище 1800 - 2000 К і супроводжуються суттєвою зміною структури сплаву і призводять до зміни поведінки домішок і взаємодіючих з ними дефектів. Тому при дослідженні механізмів формування фізичних властивостей сплавів у впровадження при високотемпературних обробках використовується метод внутрішнього тертя, що виявляє високу чутливість до характеру оточення домішкового атома впровадження в решітці ОЦК металу. Однією з проблем, які виникають при застосуванні цього методу є те, що в даний час часто неможливо довести відповідність релаксаційних процесів, які спостерігаються, конкретним теоретичним моделям. Проте, одержувана інформація виявляється корисною для розуміння процесів, що відбуваються в сплавах при різного роду обробках.

Метою цієї роботи було дослідження впливу високотемпературної вакуумної дегазації на релаксаційні спектри внутрішнього тертя сплавів ніобій-вольфрам.

Матеріали і методика експерименту.

Сплави для дослідження готували електронно-променевим витопленням з послідовною прокаткою злитків у лист до товщини 0,1 мм. За даними хімічного аналізу концентрації домішок у них складало (% по масі): С - 0,01; N - 0,005; O - 0,008; H - 0,001; Mo - 0,006; Fe - 0,005; Ta - 0,008; Ti - 0,005; Si - 0,005. Концентрація вольфраму у сплавах складала 2 - 12 ат. %.

Дегазацію зразків здійснювали на установці [1] протягом 5 - 180 хвилин у вакуумі не гірше $2 \cdot 10^{-3}$ Па при температурах 1970 - 2270 К. Похибка визначення температури не перевищувала 20 К. Час нагріву зразка до заданої температури не перевищував 1 хв. Після дегазації зразки охолоджували відключенням струму. При цьому середня швидкість їхнього охолодження до температури зникнення світіння складала біля 500 К/с.

Виміри внутрішнього тертя здійснювали на установці [2] методами змушених і вільних коливань вертикального консольно закріпленого зразка при частоті 30 - 50 Гц. Температуру вимірювали хромель-алюмелевою термопарою з помилкою ± 1 К. Помилка виміру висот максимумів внутрішнього тертя не перевищувала 15 %. Усі виміри здійснювали у вакуумі не гірше $1 \cdot 10^{-2}$ Па. Зміна концентрацій кисню й азоту в процесі виміру внутрішнього тертя не перевищувала 0,01 ат. %.

Металографічне дослідження зразків здійснювалося на оптичному мікроскопі НЕОРНОТ-2 і растровому електронному мікроскопі JSM-35. Структура була добре виявлена вакуум-травленням у процесі дегазації. На поверхні зразків є велика кількість огранованих ямок. Крім того спостерігається істотне зменшення густини зразків, що може бути викликано утворенням пор. Відповідно до [3] вони утворюються в процесі дегазації за рахунок сублімації ніобію і його летучих оксидів. У нашому випадку протікання сублімації підтверджувалося утворенням нальоту на стінках камери, де здійснювалася дегазація. **Результати й обговорення.**

У цілому характер зміни релаксаційних спектрів внутрішнього тертя при дегазації сплавів ніобій-вольфрам подібний до того, який спостерігався нами при вивченні дегазації чистого ніобію [4]. На початковому етапі дегазації зразків (перші 10 - 15 хв) спостерігається (рис.1) різке зростання концентрації атомів впровадження (кисню й азоту) у твердому розчині. Про це свідчить зростання пропорційних концентраціям висот відповідних сносківських релаксаційних піків (кисневий пік в області 500 - 530 К і азотний пік в області 650 - 680 К). Коефіцієнт пропорційності складає для різних домішок 0,02 - 0,1 ат. %⁻¹ і істотно залежить від умов обробки, тому при аналізі відносних змін концентрації в дегазованих зразках більш надійні результати дає зіставлення висот відповідних максимумів внутрішнього тертя.

На рис. 2, 3 показані залежності максимальних висот сносківських піків в області кисневої релаксації від температури та часу дегазації для чистого ніобію та сплавів Nb - 6 ат. % W. Незважаючи на деякі розбіжності між релаксаційними спектрами чистого ніобію і ніобію, що легований вольфрамом, загаль-

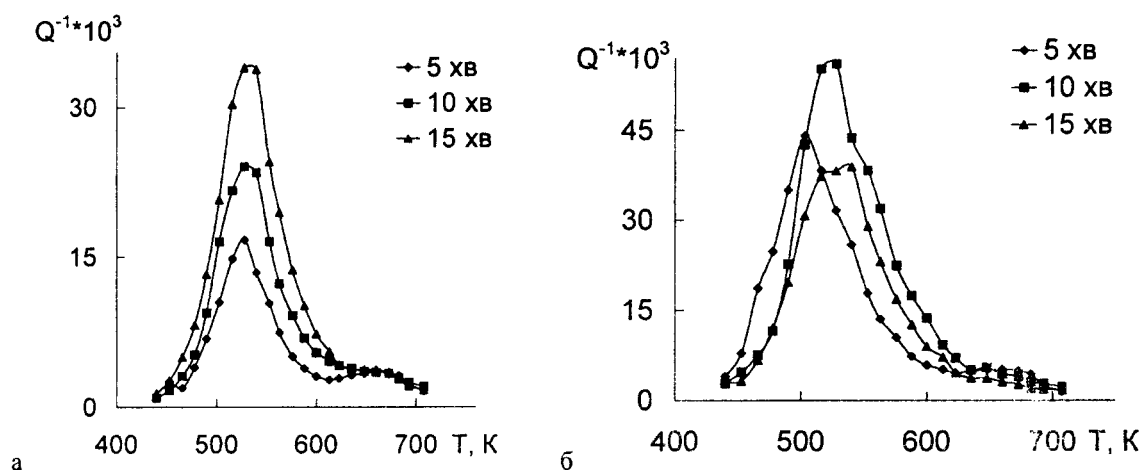


Рис. 1. Вплив температури і часу дегазації на релаксаційні спектри внутрішнього тертя сплаву Nb – 6 ат. % W. Температура дегазації: 1970 K (а), 2170 K (б).

ний характер залежностей, що спостерігаються на рис. 1-3 є однаковим. Він свідчить про те, що при відносно низьких температурах і тривалості дегазації збільшення цих параметрів веде до збільшення концентрації кисню, який знаходиться у твердому розчині. Це може бути обумовлене розчиненням виділень оксидної фази, що утримувалися в зразку. При подальшому збільшенні температури або тривалості дегазації спостерігається зменшення концентрації кисню у розчині, що, очевидно, пов'язане з сублимацією кисню із зразка.

Таким чином, результати, що одержані у даній роботі, а також у роботі [4] дозволяють запропонувати наступний механізм зміни стану домішок впровадження у ніобій та сплавах на його основі під час високотемпературної вакуумної дегазації. Дегазація складається з двох процесів, що відбуваються паралельно. Першим процесом є вплив на твердого розчину атомів домішок впровадження, що злиходилися до дегазації в сплавах в інших станах, у першу чергу, були зв'язані з утворенням фаз впровадження. Іншим процесом є сублимація домішок впровадження з поверхні зразків, яка веде до зменшення концентрації домішок, що розчинені у ніобії та його сплавах. Як це було показано раніше нами та іншими авторами [3, 5-6] сублимація домішок впровадження із сплаву ніобію відбувається переважно у вигляді комплексів їх атомів з атомами ніобію та легувальних домішок. Вплив вольфраму на процес дегазації сплавів ніобію може бути причиною прискорення сублимації кисню при високих температурах дегазації, що викликає зменшення максимальної висоти кисневого релаксаційного піку (рис. 3), а також підвищення поруватості дегазованих сплавів, яке спостерігалось нами раніше [7].

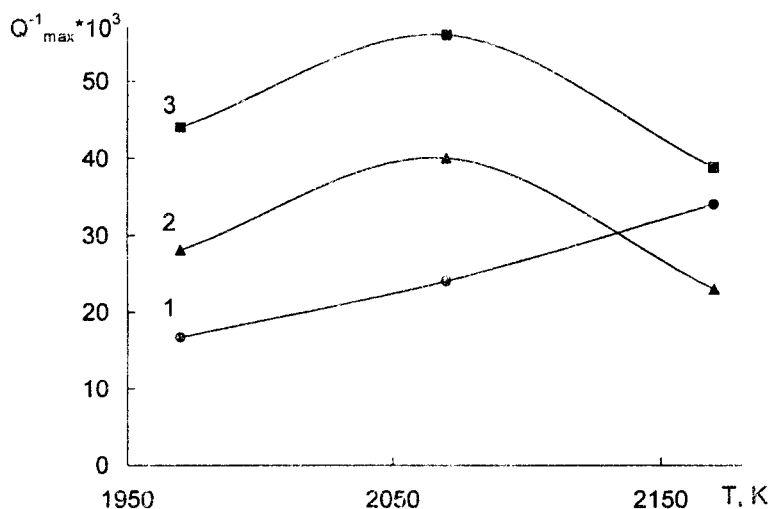


Рис. 2. Вплив температури і часу дегазації на максимальну висоту кисневого піку сплаву Nb – 6 ат. % W.

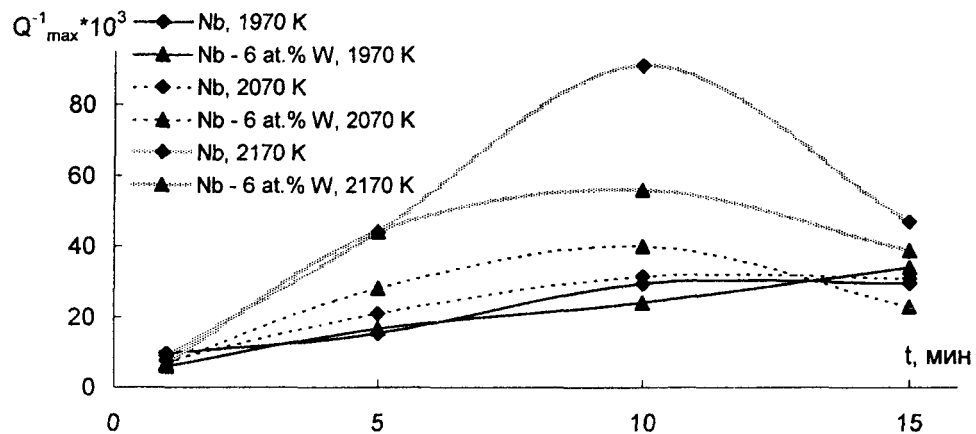


Рис. 3. Порівняння впливу температури і часу дегазації на максимальну висоту кисневого піку Снука чистого ніобію та сплавів Nb – 6 ат.% W.

Подяка.

Автори вдячні О.В. Новикову за обговорення результатів і допомогу під час проведення експериментів.

РЕЗЮМЕ

Исследовано влияние высокотемпературной дегазации на релаксационные спектры внутреннего трения сплавов ниобий - вольфрам. Показано, что на начальном этапе происходит повышение концентрации кислорода в твердом растворе, за счет растворения содержащихся в сплаве выделений оксидов. На следующем этапе дегазации концентрации кислорода в твердом растворе уменьшается в результате его сублимации.

SUMMARY

The influence of a high-temperature degassing on niobium-tungsten alloys internal friction relaxation spectra is investigated. It is shown that at initial stage there is an increase of oxygen atom concentrations in solid solution, due to the dissolution of oxide precipitates, which was contained in the alloy. At second stage oxygen concentration in solid solution decreased due to oxygen sublimation.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Мозжухин Е.И., Новиков А.В., Варенков А.Н. Высокотемпературная установка для изучения ползучести и равновесия между азотом и сплавами ниобия // Известия вузов. Черная металлургия. - 1981. - № 5. - С. 172 – 173.
2. Установка для изучения температурной и амплитудной зависимости внутреннего трения методом вынужденных колебаний консольного образца/ Елютин В.П., Мозжухин Е.И., Пигузов Ю.В. и др. // Заводская лаборатория. - 1969. - Т. 35. - № 10. - С. 1261 – 1262.
3. Влияние высокотемпературного высоковакуумного отжига на структуру и свойства слитков ниобия высокой чистоты/ Елютин А.В., Шишков В.В., Вороненко Л.И. и др. // Научные труды ГИРЕДМЕТ. - М., 1982. - Т. 114. - С. 3 – 7.
4. Бахрушин В.С., Чиріков О.Ю. Вплив високотемпературної вакуумної дегазації на внутрішнє тертя сплавів ніобію // Вісник Запорізького державного університету. Фізико-математичні науки, 2000. - № 2. - С. 149 - 152.
5. Бахрушин В.С., Чиріков А.Ю. Внутреннее трение сплавов ниобия после высокотемпературной вакуумной дегазации // Труды научно-практического симпозиума "Оборудование и технологии термической обработки металлов и сплавов в машиностроении". Харьков: ННЦ ХФТИ, 2000. - С. 258-262.
6. Исследование структуры и свойств монокристаллов ниобия высокой чистоты / Елютин А.В., Шишков В.В., Вороненко Л.И. и др. // Процессы цветной металлургии при низких температурах. - М.: Металлургия, 1983. - С. 177-181.
7. Бахрушин В.С., Павлов Ю.А. Влияние примесей замещения на величину модуля нормальной упругости ниобия // Известия вузов. Черная металлургия, 1985. - № 11. - С. 142.

Надійшла до редакції 27.02.2002 р.

УДК 621.38

ДЕФЕКТНАЯ СТРУКТУРА, ОПТИЧЕСКИЕ И РАДИАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА
ТВЕРДЫХ РАСТВОРОВ $ZnS - CdS$

А.Н. Сунцов, А.Г. Милославский, А.Г. Петренко

Твердые растворы на основе соединений A_2B_6 являются основой многих промышленных люминофоров для телевидения, детекторов различных излучений и остаются перспективными материалами для опто- и акустоэлектроники. Они служат и основой для развития теории разупорядоченности нестехиометрических соединений.

Образцы $Zn_xCd_{1-x}S$ были изготовлены в НИИ люминофоров (г. Ставрополь) по стандартной технологии и по данным рентгенографических исследований представляли из себя твердые растворы гексагональной сингонии (вюрцит). В пользу этого вывода свидетельствуют удовлетворяющая закону Вегарда линейная зависимость параметров a и c кристаллической решетки образцов от состава x .

$$\begin{aligned} c &= 0,62 + 0,05x, \\ a &= 0,383 + 0,031x \text{ (нм)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Методика исследований оптических свойств образцов изложена в работе [1].

КРИСТАЛЛИЧЕСКАЯ И ДЕФЕКТНАЯ СТРУКТУРЫ

Сульфид цинка и кадмия могут кристаллизоваться в виде сфалерита и вюрцита [2-5]. Обе структуры родственны и являются плотнейшими упаковками атомов серы, в которых половина тетраэдрических пустот заполнена атомами металла. Существует предположение, что перестройка кубической структуры ZnS в гексагональную связана с образованием собственных точечных дефектов, наличием примесей или образованием дефектов упаковки, упорядочение которых приводит к гексагональной структуре. Лучшие объяснения дают вид для работы с мартенситным типом превращения сфалерит-вюрцит [3]. Кристаллография ZnS и CdS осложнена не только тем, что они могут кристаллизоваться в виде сфалерита и вюрцита. Кроме этого могут образоваться различные полиморфные полиморфы, являющимися производными структурами сфалерита и вюрцита. Полиморфы также характеризуются тетраэдрическим расположением атомов. Полиморфы проявляют, как обычно для ZnS .

Близость свойств полиморфов объясняется тем, что структурные различия их определяются только разным порядком [2,3,5]. Кубическая модификация (C) и гексагональная (H) могут быть предельными соответственно трехслойной и двухслойной последовательностями. Символика $3C$ и $2H$ отражает период повторения. Наблюдается и иная последовательность в расположении плотно упакованных слоев с большими периодами повторения [5].

Полиморфы являются промежуточными структурными состояниями при фазовом переходе сфалерит-вюрцит. Область их относительной устойчивости приходится на промежуточные температуры (1303-1073 К). В работе [3] отмечается, что говоря о кристаллах с дефектами упаковки и полиморфных формах, мы подразумеваем отсутствие периодичности в чередовании слоев в первом случае и её наличие во втором. Но понятие "степень гексагональности" относится к обоим случаям в равной степени.

Нами была оценена доля гексагональности α с учетом отношения $a/c = 1,633$ для идеальной гексагональной решетки с использованием собственных и литературных данных [1-5]. Для ZnS величина α оказалась равной 0,998; 0,4998; 0,331 и 0,2499 для полиморфов $2H$; $4H$; $6H$ и $8H$ соответственно. Нами установлено, что график зависимости доли гексагональности α от периода повторяемости полиморфных форм вюрцитной фазы ZnS описывается четкой гиперболической зависимостью

$$\alpha \cdot H = const, \quad (2)$$

где $const = (1,995 \pm 0,005) \approx 2$ (относительная ошибка 0,23 %).

Твердые растворы $ZnS - ZnSe$ аналогичным образом меняют величину E_g и параметры кристаллических решеток. В растворе $ZnS - CdS$ происходит легирование по катионной подрешетке, а в $ZnS - ZnSe$ по анионной. Степень гексагональности α изменяется у $ZnSe$ аналогично: 1; 0,5; 0,333 и 0,25 для полиморфов $2H$; $4H$; $6H$ и $8H$ соответственно. Зависимость (2) выполняется с большой точностью $const = 1,9995 \pm 0,0008 \approx 2$ (относительная ошибка равна 0,04 %). Очевидно, зависимость доли гексагональности α от периода повторяемости (2) полиморфных форм вюрцитных фаз ZnS , $ZnSe$ являются общей закономерностью подобных систем. Технология приготовления люминофоров на основе ZnS и CdS такова, что они имеют преимущественный n – тип проводимости. Основными точечными

дефектами кристаллической структуры могут быть анионные, катионные вакансии и междоузельные катионы [3 -5]. Подробное изучение нами технологии приготовления сульфидных люминофоров в НПО Люминофор (г. Ставрополь) показало, что кислород является всегда присутствующей примесью [1,6]. Параметры решетки при этом уменьшаются. В работе [2] предполагается, что этот эффект связан с меньшим радиусом атомов кислорода.

Мы считаем, что в этом случае играет роль не только размеры примесных атомов. Согласно развиваемой нами модели нестехиометрических ионных соединений, легированных на анионной подрешетке, примесь O_S является акцептором вследствие своей большей электроотрицательности. Это подтверждается фактом падения электропроводности ZnS при легировании его кислородом [6]. Так как O_S является основной сопутствующей примесью при изготовлении сульфидных люминофоров, то эта проблема является чрезвычайно актуальной [3]. Наши расчеты [6] показывают, что наличие примеси O_S приводит к значительному падению концентрации электронов проводимости, вакансий металла и увеличению концентрации вакансий серы. Это приводит к изменению всего спектра люминесценции люминофора. Этот факт не учитывается исследователями несмотря на то, что в литературе имеются надежные сведения о влиянии O_S на уменьшение ширины запрещенной зоны ZnS [3]. Наши образцы содержали возможно меньшую концентрацию примесей кислорода и хлора. В пользу этого свидетельствуют более высокие значения ширины запрещенной зоны E_g , хотя все результаты достаточно хорошо согласуются между собой.

Кислород, как описано в работе [5], стабилизирует вюрцитную фазу. Можно предположить, что эта стабилизация может быть связана с ростом (падением) концентрации вакансий серы (вакансий металла).

По данным [5] Ag и Cu катализируют превращение гексагональной структуры в кубическую, но примесь Ag_{Zn} и Cu_{Zn} являются акцепторами [7]. Следовательно, мы должны были бы ожидать такой же эффект, как и при легировании кислородом O_S . Причина влияния меди и серебра, вероятно, кроется в другом. Технология приготовления люминофоров типа $ZnS<Ag>$ и $ZnS<Cu>$ происходит в присутствии хлора. Примесь Cl_S приводит также к росту (падению) концентрации вакансий серы (вакансий металла). В этом случае состав образцов следует записать в виде $ZnS<Cl>$, $ZnS<Ag, Cl>$ и $ZnS<Cu, Cl>$. В структуре двух последних образцов все дефекты аналогичны дефектам $ZnS<Cl>$, кроме комплексов $(Cu_{Zn}^- Cl_S^+)$ и $(Ag_{Zn}^- Cu_S^+)$ [1]. Очевидно, они и катализируют переход гексагональной структуры в кубическую.

ШИРИНА ЗАПРЕЩЕННОЙ ЗОНЫ ТВЕРДЫХ РАСТВОРОВ

В твердых растворах на основе A_2B_6 зависимость характерных энергий от состава x описывается следующим выражением [2]:

$$E_g(x) = E_g^A + (E_g^B - E_g^A)x - c(1-x). \quad (3)$$

Здесь c – параметр нелинейности содержащий вклад смешивания зоны проводимости и валентной зоны под действием флуктуационного микропотенциала в положение ширины запрещенной зоны.

Наши исследования показали, что зависимость E_g^{-1} от x строго линейна

$$E_g^{-1} = 0,25 + 0,136x. \quad (4)$$

Из экспериментальных результатов (4) и зависимости (3) получаем линейную зависимость параметра c от x .

$$c = kx. \quad (5)$$

Здесь $k = 0,66...$ Литературные данные [5,6] более грубы и не дают зависимости c от x , но качественно согласуются с нашими результатами. Теоретические расчеты дают значения 0,44, а экспериментальные значения лежат в пределах 0,31 – 0,88 (среднее значение 0,6).

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОННОЙ ПЛОТНОСТИ В $Zn_xCd_{1-x}S$

В настоящее время реальное распределение электронной плотности в твердых телах часто характеризуют эффективным зарядом иона, который определяется из измерений каких – либо физических характеристик кристалла (оптических, электрических,...) с помощью формул, которые ионам приписываются такие эффективные заряды, которые приводят к совпадению рассчитанных и измеренных значений. Небольшие расхождения различных методов свидетельствуют о том, что экспериментальные величины эффективных зарядов ионов в кристалле близких значению «истинного» заряда ионов, определяемого вероятностью нахождения электрона около данного атома. Анализ

литературных данных [5,9] и наших расчетов позволил получить зависимость отношения эффективных зарядов ионов к номинальным z^*/z в соединениях A_2B_6 в виде:

$$\left(\frac{z^*}{z}\right)^2 = b + kx. \quad (6)$$

Для соединений ZnB_6 $k = 0,133$; $b = 0,25$, а для CdB_6 $k = 0,117$; $b = 0,37$.

Истинные заряды ионов z^* в реальных кристаллах близки к номинальным (равным валентности) лишь для галогенидов [5,9]. Для окислов и сульфидов z^* почти в 2 раза меньше номинальных ($z = 2$). Для ZnO и ZnS , например, z^* соответственно равен $-1,06$ и $-0,86$, что подтверждается рентгеноспектральными исследованиями. Оценка с помощью уравнения Шредингера глубины потенциальной ямы для электрона, локализованного в кристалле на ионе кислорода, показала, что она быстро падает с ростом абсолютного значения z^* и при $z^* \approx -1,2$ обращается в нуль [9].

Вероятность освобождения электрона из ловушки пропорциональна фактору Больцмана

$$\omega = \omega_0 \exp\left(-\frac{E}{kT}\right), \quad (7)$$

где E – энергетическая глубина ловушки; частотный фактор ω_0 имеет вид

$$\omega_0 = \delta \left(\frac{kT}{h}\right) \cdot \left(\frac{Q_2}{Q_1}\right). \quad (8)$$

Величина $\frac{kT}{h} = \mathcal{J}$ – частота тепловых колебаний или число попыток электрона к освобождению из ловушки; δ – трансмиссионный коэффициент, учитывающий тот факт, что не каждая такая попытка заканчивается успешно; Q_1 и Q_2 – так называемые суммы состояний, вычисляемые с помощью сведений о микроструктуре и свойствах центра в основном и возбужденном состояниях.

Если $\delta \approx 1$ и $\frac{Q_2}{Q_1} \approx 1$, то ω_0 равен частоте тепловых колебаний (при комнатной температуре 10^{12} c^{-1}). При туннельных переходах $\delta \ll 1$ и ω_0 падает до $10^9 - 10^{10} \text{ c}^{-1}$. Оценим ω_0 для ZnS и CdS с помощью выражения [9]

$$\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty = \left(\frac{\varepsilon_\infty + 2}{3}\right)^2 \cdot \frac{4\pi(z^*e)^2}{vm\omega_0^2}. \quad (9)$$

$$\omega_0 = \left(\frac{2}{3}\right) \pi^{\frac{1}{2}} (\varepsilon_\infty + 2) z^* e [mv(\varepsilon_\infty - \varepsilon_0)]^{\frac{1}{2}}. \quad (10)$$

Здесь ε_0 и ε_∞ – статическая и высокочастотная диэлектрические проницаемости; m – приведенная масса пары ионов A и B ; v – объём, отнесённый к формульной единице AB .

Для ZnS $\varepsilon_0 = 8,3$; $\varepsilon_\infty = 5,07$; $z^* = 0,86$; $m = 21,51 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$; $v = 39,7 \cdot 10^{-30} \text{ м}^3$ [8].

Тогда $\omega_0 = 2\pi\mathcal{J} = 0,3 \cdot 10^9 \text{ c}^{-1}$; $\mathcal{J} = 3 \cdot 10^{11} \text{ c}^{-1}$. Таким образом, для ZnS и CdS $\mathcal{J} \approx 10^{11}$. Сравним эти результаты с результатами исследований перестройки фононного спектра при изменении компонентного состава $Zn_xCd_{1-x}S$. Величина $\omega_{LO} = 307 - 352 \text{ см}^{-1}$ [4], что соответствует $\mathcal{J} = (0,92 - 1,05) \cdot 10^{13} \text{ c}^{-1}$. Как видно из формулы (8), имеет место случай $\delta \ll 1$ (наличие значительного туннельного эффекта проникновения локализованных электронов из ловушек). Это хорошо согласуется с литературными данными по исследованию распределения электронной плотности ZnS и CdS .

ФОТОЛЮМИНЕСЦЕНЦИЯ $Zn_xCd_{1-x}S$

Спектр люминесценции твердых растворов при возбуждении светом с $\lambda = 350 \text{ нм}$ в исследуемом диапазоне длин волн может быть представлен как суперпозиция 6 полос, максимумы которых смещаются пропорционально уменьшению ширины запрещенной зоны. Для $x = 1$ максимумы этих шести полос находятся вблизи 400, 435, 460, 520, 600 и 620 нм соответственно. Полосы №5 и №6 являются

внутрицентровыми, а остальные - рекомбинационные. Доминирующей полосой является полоса с $\lambda_m = 520$ нм. Возникновение этих шести полос описывается следующими уравнениями:



Здесь V_S^x , V_S^{2+} , V_S^+ и V_{Zn}^x , V_{Zn}^{2-} , V_{Zn}^- - вакансии серы и цинка с различной степенью ионизации; h_1 и h_2 - легкие и тяжелые электронные дырки в валентной зоне.

РАДИАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА $Zn_xCd_{1-x}S$

Проведенные ранее исследования деградации оптических свойств катодолуминофоров [6] показали, что деградация люминофоров в кинескопах происходит главным образом из-за бомбардировки их ионами остаточных газов. Сравнения спектров люминофоров при ионoluminesценции (ИЛ) и катодoluminesценции (КЛ) показали их большую идентичность. Только сроки деградации люминофоров при ИЛ значительно меньше, чем при КЛ (несколько минут вместо сотен часов испытаний). При этом разброс экспериментальных значений при методе ИЛ значительно меньше. Обычно при ИЛ наблюдается резкое уменьшение светоотдачи образца в результате его разрушения потоком ионов больших энергий (0,3 – 4 МэВ). Главную же роль у люминофоров играют центры свечения расположенные на поверхности или вблизи её. Поэтому, чтобы учесть вклад поверхности нужно выбирать более «мягкий» способ возбуждения. Таковым возбуждением может быть бомбардировка ионами He^+ низких и средних энергий (3 – 5 кэВ). Плотность тока пучка ионов 10^{-6} мкА/см². В качестве ионного источника используется дуоплазматрон. Для получения воспроизводимых результатов применяется безмаслянная откачка. Образцы устанавливаются в вакуумной камере по 1–6 штук на держателе, который позволяет сменять образцы для сравнения спектров в одинаковых условиях. При регистрации спектров для уменьшения уровня шумов фотоумножитель охлаждается жидким азотом до температуры – 20⁰С. Концентрация центров свечения при ионной бомбардировке падает по экспоненциальному закону. Интенсивность свечения I основной полосы катодoluminesценции (при λ_{max}) описывается зависимостью

$$I = I_0 \exp(-\alpha t). \quad (12)$$

Здесь I_0 интенсивность свечения в начальный момент (при $t = 0$).

Из зависимости (12) следует, что график зависимости логарифма относительной интенсивности $\ln\left(\frac{I}{I_0}\right)$ от времени облучения ионами представляет из себя прямую линию. Тангенс угла наклона прямой ($-\alpha$) характеризует радиационную стойкость люминофора при ионной бомбардировке. Чем больше тангенс угла прямой, тем быстрее старится люминофор.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Установлено, что график зависимости доли гексагональности от периода повторяемости политипных форм вюрцитной фазы ZnS описывается гиперболической зависимостью.
2. Получена линейная зависимость Eg^{-1} от параметра x в $Zn_xCd_{1-x}S$.
3. Для отношения эффективных зарядов ионов к номинальным $\frac{z^*}{z}$ установлена линейная зависимость $\sqrt{\frac{z^*}{z}}$ от x в A_2B_6 .
4. Предложены механизмы возникновения шести полос фотoluminesценции $Zn_xCd_{1-x}S$.

РЕЗЮМЕ

Розглянуто механізм виникнення шести смуг фотолюмінісценції $Zn_xCd_{1-x}S$. Встановлена гіперболічна залежність долі гексагональності від періоду повторюваності політропних форм ZnS .

SUMMARY

The gear of origin of six bands of photoluminescence $Zn_xCd_{1-x}S$ is surveyed. The hyperbolic relation of a long hexagonality from phase of recurrence polyforms ZnS is established.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ

1. Милославский А.Г., Сунцов А.Н. Дефектная структура и центры свечения цинксulfидных люминофоров // Физики и техника высоких давлений // 1997. - Т.7. - №2, - С.94 – 103.
2. Гавриленко В.И., Грехов А.М., Корбутяк Д.В., Литовченко В.Г. Оптические свойства полупроводников. – Киев: Наукова думка, 1987. – 608 с.
3. Морозова Н.К., Кузнецов В.А. Сульфид цинка. – М.: Наука, 1987. – 200 с.
4. Георгобиани А.Н., Шейнкман М.К. Физика соединений A^2B^6 . – М.: Наука, 1986. – 320 с.
5. Авен М., Пренер Д.С. Физика и химия соединений A^2B^6 . – М.: Мир, 1970. – 624 с.
6. Милославский А.Г., Сунцов А.Н., Малиненко Е.М., Подлучиний В.В., Пивнева С.П., Савченко А.С. Расчет дефектной структуры $ZnS<A>$. // Тр. ВНИИ Люминофоров. - Ставрополь, 1990. - № 3. – С.16-19.
7. Крeгер Ф. Химия несовершенных кристаллов. - М.: Мир, 1969. – 654 с.
8. Морозова Н.К., Кузнецов В.А., Рыжиков В.Д., Галстян В.Г., Костомаров Д.В. Селенид цинка. Получение и оптические свойства. – М.: Наука, 1992. – 96 с.
9. Боцанов С.С. Электроотрицательность элементов и химическая связь. – Новосибирск: СОАН СССР, 1962.– 196с.

Надійшла до редакції 25.04.2002 р.

УДК:621.382.34

ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ CVD-АЛМАЗА

В.А.Сорока, В.И. Тимченко, Н.И. Носанов

Донбасская Академия строительства и архитектуры, г. Макеевка

Введение

Широкое применение МДП-структур в полупроводниковых дискретных приборах вызывает необходимость исследования физических свойств новых перспективных материалов. В последние годы много внимания и усилий было направлено на изучение алмаза как одного из наиболее перспективных материалов для электронных и оптоэлектронных приборов, работающих в условиях повышенной температуры с высоким коэффициентом теплопроводности и при высокой подвижности носителей. Ведутся разработки по изготовлению различных электронных устройств типа диодов Шоттки [1, 2] и полевых транзисторов [3], в основе которых лежат успехи синтеза тонких алмазных пленок, полученных химическим осаждением из газовой смеси (CVD-метод) [4].

Для изготовления таких электронных устройств имеет большое значение понимание механизмов электропроводности в CVD поликристаллических алмазных пленках. Например, было показано, что не легированные CVD алмазные пленки имеют довольно высокую электропроводность (10^6 сим см^{-1}) сразу после осаждения, но удельная проводимость существенно уменьшается после отжига [5]. Там же сообщалось, что обработка в водороде отожженных алмазных пленок ведет к изменению проводимости. Подобное воздействие обнаружено и для природного алмаза [6].

Экспериментальная методика

При изучении электрофизических характеристик использовались алмазные поликристаллические пленки, полученные осаждением из газовой смеси метан-водород (CVD-метод) на подложки, изготовленные из монокристаллического кремния р-типа и вольфрама. Выбор материала подложек был обусловлен задачей получения качественных CVD-методом алмазных пленок. Толщина выбранных пленок составляла от 5 до ~40 нм. По окончании процесса осаждения алмаза образцы, закрепленные на пробном теплоотводе, быстро остывали в атмосфере водорода. После охлаждения до комнатной температуры образцы очищались ультразвуковой мойкой в дисциплированной воде и кипящем ЧДА. В работе изучались процессы переноса заряда в АПП на ростовых подложках и без них (свободные пленки) при нормальных условиях в темноте. О методике отделения пленки от подложки и получения образцов тонких АП, пригодных для исследований сообщалось ранее [7].

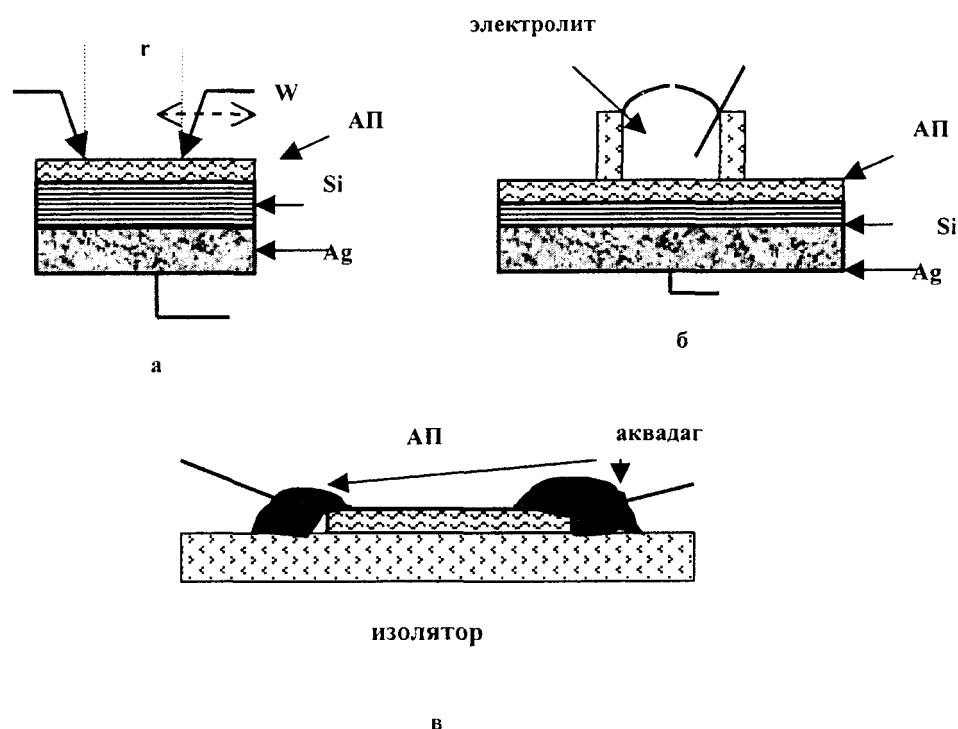
Электрический контакт с алмазной пленкой создавался вольфрамовыми зондами, аквадагом (водная суспензия мелкодисперсного графита) и электролитом (рис.1). Таким образом, мы могли изучать электрофизические свойства свободных от подложки пленок, а также пленок находящихся на ростовой подложке.

Полученные для исследования образцы могут быть условно разделены на две основные группы, которые относятся к МДП (рис. 1а, б) и МДМ – структурам (рис 1 в). Причем, образцы имели как одинаковые, так и различные по природе и размерам контакты.

Для создания в АП электрического поля использовались стабилизированные источники тока с низким внутренним сопротивлением Б5-44 и ВС-22. Величина приложенного к пленке напряжения измерялась вольтметром В7-21а с точностью $\pm 0.3\%$. Напряженность электрического поля по абсолютной величине изменялась от 0 до почти $\pm 5 \cdot 10^3$ В/см. Ток определялся по показаниям электрометрических усилителей У5-6 или В7-30 после достижения установившихся значений. Для получения воспроизводимых результатов образцы и проводники, подводящие к ним напряжение, были защищены от влияния внешних переменных электрических полей, воздействия освещения и факторов, способных повлиять на температуру в измерительной камере.

Результаты и их обсуждение

В работе исследовался характер изменения тока при различных величинах напряжения приложенного вдоль и поперек поверхности алмазной поликристаллической пленки. Для зарядов, перемещающихся вдоль и поперек поверхности алмазной поликристаллической пленки. Для зарядов, перемещающихся вдоль поверхности полученные характеристики симметричны при изменении полярности создаваемого в пленке поля, что подтверждает однородность контактов. На рис.2а показана вольт-амперная зависимость «свободной» пленки с контактами из аквадага, расположенными на расстоянии 1.5мм друг от друга, а на рис.2б приведена ВАХ пленки на кремниевой подложке с вольфрамовыми зондами при подключении их на расстоянии 0.28мм.



а) – подключение вольфрамовых зондов, б) – получение электролитного контакта, в) – формирование контакта аквадаг-пленка.

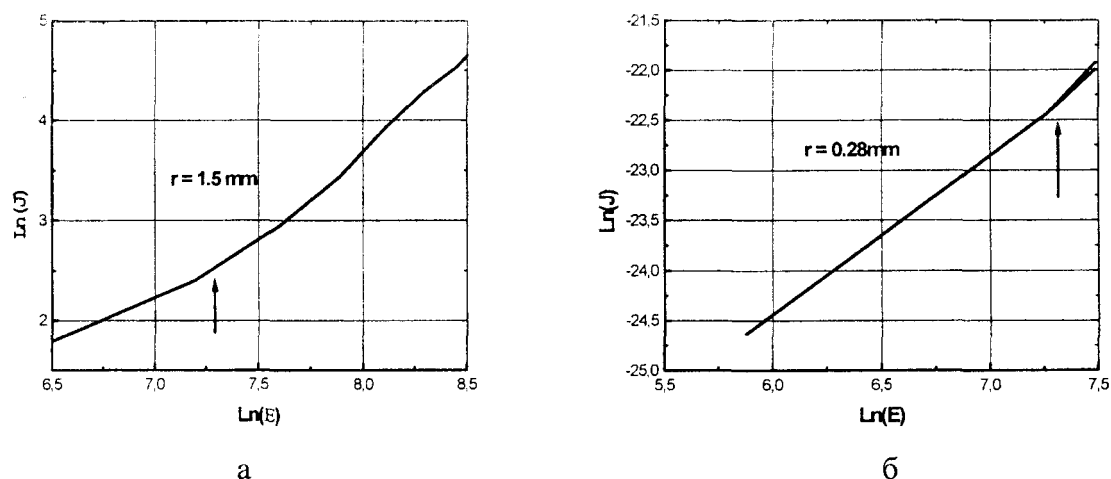


Рис.2. Вольт-амперные зависимости для алмазной пленки, полученные при измерениях вдоль поверхности на контактах из аквадага - а) и вольфрама – б).

Как видно из рисунков при напряженности электрического поля менее 1500в/см (на рисунках отмечена стрелками) вольт-амперная зависимость является почти линейной. При больших величинах поля зависимость $J=f(U)$ становится квадратичной. Поскольку в обоих случаях контакты к алмазным пленкам были однородными, вероятно, область квадратичной зависимости обусловлена влиянием объемного заряда. Этот заряд образуется при монополярной инжекции носителей, которые захватываются ловушками. Положение области обусловлено параметрами ловушек и концентрацией свободных носителей в услови-

ях теплового равновесия [8]. Концентрация ловушек в таких алмазных пленках определена свыше 10^{15} см^{-3} [9].

При изменении направления электрического поля относительно пленки с ростовой подложкой характер вольт-амперных зависимостей становится другим. В приведенном случае одним контактом служила ростовая подложка из кремния, а второй контакт создавался вольфрамовым зондом (а) или электролитом (б). На рис.3а приведены вольт-амперные характеристики системы кремний - алмазная пленка-вольфрам для двух различных направлений приложенного поля. Величина тока и наклон ВАХ определяются не только величиной приложенного напряжения, но и полярностью. При положительном потенциале на зонде ВАХ указывает на более высокое значение общего сопротивления исследуемой системы. Аналогичный вид имеет вольт-амперная зависимость для алмазной пленки, находящейся в контакте с электролитом (рис.3б).

В рассматриваемой системе ток при увеличении напряжения растет нелинейно. Причем, при отрицательном потенциале на подложках эта нелинейность выражена сильнее. При замене вольфрамового контакта на электролит (рис.3б) плотность тока сохраняется. Удельное сопротивление алмазной пленки, определенное из этих измерений, составило $\rho = 4 \cdot 10^9 \text{ ом см}$, которое близко по порядку величины полученному в работе [5] для CVD - алмаза после отжига при $T=570\text{K}$.

Нелинейность ВАХ при положительном потенциале на алмазной пленке, вероятно, обусловлена образованием барьера в области контакта подложки с пленкой.

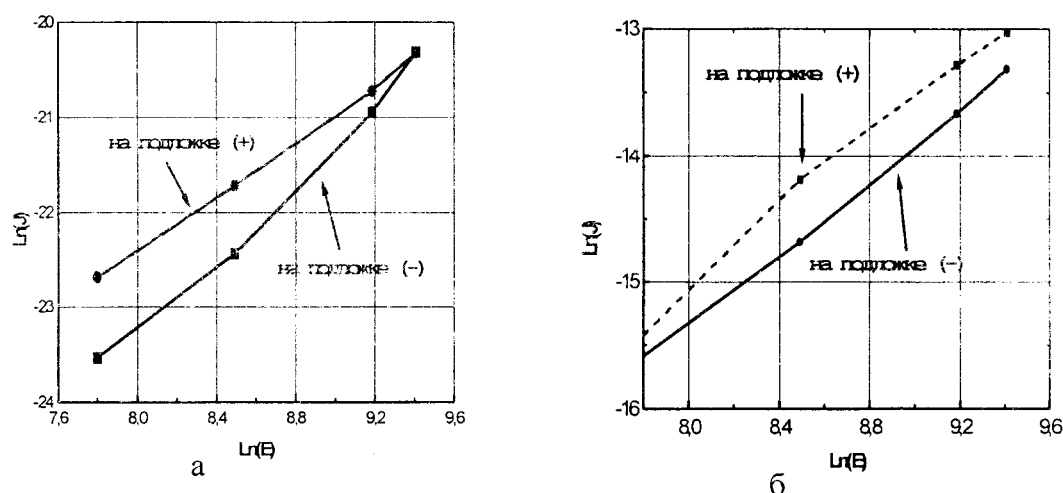


Рис.3. ВАХ алмазной пленки на ростовой подложке, полученные при измерениях вдоль направления роста на контактах из вольфрама - а) и электролита - б).

Вольт-амперные зависимости для двух вольфрамовых контактов (рис.1а) симметричны при изменении направления электрического поля. Величина тока в пленке ($J = U / R$) растет при повышении приложенного напряжения и уменьшении расстояния r между контактами. Рассчитанная из проведенных измерений величина сопротивления для трех приложенных напряжений также зависит от расстояния между вольфрамовыми зондами как показано на рис.4. Немонотонность $R(r)$ проявляется во всех случаях, но заметнее при меньших напряженностях поля.

Такой характер изменения сопротивления может быть обусловлен шунтирующим влиянием ростовой подложки из кремния. Подразумевая при этом, что процесс электропереноса осуществляется как вдоль поверхности пленки, так и поперек её для полного электрического сопротивления можно записать:

$$R(r) = \frac{a \cdot r \cdot (2 \cdot b \cdot h + c \cdot r)}{(a + c) \cdot r + 2 \cdot b \cdot h} \quad (1)$$

где постоянные a и c характеризуют сопротивление вдоль поверхности алмазной пленки и подложки соответственно, величина $2b$ определяет поперечное сопротивление пленки. Как следует из (1) величины сопротивлений, вычисленные в направлениях вдоль и перпендикулярно поверхности пленки соизмеримы. Но поскольку толщина h исследованных пленок была почти на порядок меньше r , перенос заряда вдоль поверхности пленки преобладает.

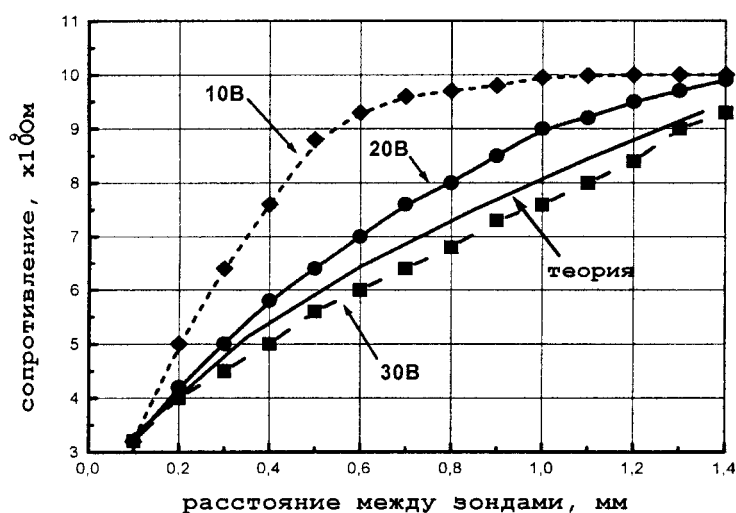


Рис.4. Зависимость сопротивления в алмазной пленке от расстояния между зондами при напряжении 10, 20 и 30 В.

О возможных механизмах переноса заряда в таких CVD-алмазах сообщалось ранее [10, 11]. В этих работах отмечался вклад границ раздела зерен, которые представляются слоями аморфного углерода. В ряде работ, например [12], отмечается, что CVD-алмазы состоят из зерен преимущественно ориентированных в направлении (111), но о структуре межзеренных границ известно мало. Показано [13], что на начальных стадиях гомоэпитаксиального осаждения АП образуется монокристаллический слой. Позже с ростом толщины АП сначала возникают слабо разориентированные кристаллиты. Затем степень разориентации увеличивается и кристаллиты располагаются произвольным образом.

Из представленных результатов следует, что электропроводность исследованных нами алмазных пленок анизотропная. Вероятно, для процессов стационарного электропереноса в таких АП роль границ раздела зерен высока. Формирование кристаллитов и межзеренных границ обусловлено технологическими условиями получения пленок, в первую очередь скоростью роста.

Вместе с тем, граница раздела между кремниевой ростовой подложкой и алмазной поликристаллической пленкой при уже существующем уровне синтеза приводит к формированию барьера (типа барьера Шоттки). Этот барьер приводит к нелинейности ВАХ и позволяет ожидать проявлений фотоэлектрических эффектов.

Заключение

Гомоэпитаксиальное осаждение CVD – алмаза приводит к образованию неоднородной кристаллической структуры, формирующей несколько каналов переноса заряда. При планарной технологии формирования контактов к пленкам становится существенным вклад поверхностной составляющей проводимости. В области напряженности электрического поля свыше 1.5 кВ/см преобладает квадратичная вольт-амперная зависимость, обусловленная захватом ловушками инжектированных из контактов носителей.

Граница раздела алмазной пленки и полупроводниковой подложки образует барьер, который приводит к нелинейности ВАХ и, вероятно, может стимулировать фотоэффекты.

РЕЗЮМЕ

Проведено исследование электропроводности CVD - алмазной пленки. Установлена область квадратичной ВАХ, которая связана с влиянием ловушек. Для пленок, выращенных на кремниевой подложке, обнаружено образование барьера, который приводит к нелинейности электропереноса. Высказано предположение об использовании таких пленок в фотовольтаике.

SUMMARY

The examination of an electrical conductivity CVD - diamond film is carried out. The field a quadratic current-voltage characteristic sets which is bound to influence of traps. For the films which have been brought up on a silicon sub-

strate, the formation of a barrier is revealed which gives in nonlinearity of an electromigration. The guess of use of such films in photovoltaic is expressed.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- 1 M. C. Hicks, C. R. Wronski, S. A. Grot, G. Sh. Gildenblat, A. R. Badzian, T. Badzian and M. Messier, *J. Appl. Phys.*, 65 (1989) 2139.
- 2 Y. Mori, H. Kawarada and A. Hiraki, *Appl Phys. Lett.*, 58 (1991) 940.
3. H. Shiomi, Y. Nishibayashi and N. Fujimri *Jpn. J. Appl Phys*, 28 (1989) L21563.
- 4 Дерягин Б.В., Буйлов Л.Л., Спицын Б.В. и др. Синтез алмазных кристаллов на неалмазных подложках. Докл. АН СССР, 1976, т. 231, №2, 335.
5. Sugino T., Muto Y., Shirafuji J., *Diamond and Rel. Mat.* 2, 1993, 797-802.
6. M. I. Landstrass, K. V. Ravi, *Appl Phys. Lett.*, 56, (1990) 1454
7. Н.Д. Самсоненко, В.В. Токий, В.И. Тимченко, В.А. Сорока, Влияние остаточных напряжений на фотопроводимость алмазных пленок, Сб. мат. 8 сем. «Влияние высоких давлений на вещество», Киев, 1993
8. Lampert L.M., Volume – Controlled Current Injection in Insulators, *Rep. Progr. Phys.*, 27, 329, 1964
9. V.V. Tokiy, V.I. Timchenko, F.G. Barykhtar, Dielectric-relaxation current (DRC) in insulating diamond films, *Prjс. of 4 Int. Sump. on diamond film and Related mat.*, Kharkov, 1999, p. 124-126.
10. Соколина Г.А., Буйлов Л.Л., Теремецкая И.Г. и др., Влияние состава ростовой газовой фазы на электрические свойства алмазных пленок, Труды I междунар. сем. по алмазным пленкам, М. 1991, 144-147.
11. Wong S.P., Peng S., *Mat. Res. Soc. Symp. Proc.* 1990, vol. 162, p. 383.
12. В.В. Токий, В.И. Тимченко, С.В. Горбань ЭПР-диагностика алмазных пленок при низких температурах, Труды Украинского вакуумного общества, т. 3, Харьков, 1997, с. 112-115
13. Н.Д. Самсоненко, В.В. Токий, Структура границ и свойства кристаллических алмазных пленок, Труды I междунар. сем. по алмазным пленкам, М. 1991, 138-143.

Надійшла до редакції 19.03.2002 р.

О ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ОЦЕНКЕ УПРОЧНЕНИЯ ЛИСТОВОЙ СТАЛИ

В.Е. Ольшанецкий, И.Ю. Нагорная*

Запорожский национальный технический университет,

* Запорожский государственный университет

Упрочнению кристаллов и поликристаллических тел посвящен ряд статей и монографий [1-3]. Как правило, для металлов с ОЦК решеткой отмечается превалирование линейной функциональной связи между упрочнением и плотностью дислокаций. В то же время литературные сведения по стохастическому анализу распределения плотности дислокаций и упрочнения к настоящему времени авторам неизвестны. Большой интерес представляет так называемое деформационное упрочнение, которое связано со степенью повышения приложенного напряжения для поддержания процесса пластического деформирования. Это главным образом касается такой пластической операции как штамповка листовых сталей [4]. В данной работе на основе вероятностного анализа сделана попытка установления связей между микроскопическими свойствами (дефектами кристаллического строения) и коэффициентом деформационного упрочнения листовой стали.

Ключевым моментом при построении указанной связи было использование метода преобразования случайной величины [9]. В результате был найден закон распределения плотности дислокаций и на его основе построено распределение коэффициента деформационного упрочнения.

Рассмотрим отдельный кристаллит стали и выберем в нем - систему координат $XOYZ$. При этом в плоскости XOZ расположена совокупность прямолинейных параллельных дислокаций с векторами Бюргерса, направленными вдоль оси X . Пусть длина свободного пробега дислокаций равна L . Если к данному кристаллиту приложено внешнее напряжение $P(x,y)$, то каждая дислокация будет находиться под действием силы [1]

$$F = b[\sigma_{xy}(x) - \tau(x)] \quad (1)$$

где σ_{xy} - полное напряжение, создаваемое в точке X всеми дислокациями, $\tau(x) = P(x,0)$, b - вектор Бюргерса.

Известно [1], что если дислокация находится в точке X' , то в точке X указанная дислокация создает напряжение (2)

$$\sigma = \frac{D}{x - x'} b, \quad D = \frac{G}{2\pi(1-\nu)} \quad (2)$$

где G - модуль сдвига, ν - коэффициент Пуассона.

Тогда, полное напряжение, создаваемое в точке X всеми дислокациями, запишется в виде интеграла

$$\sigma = -D \int_{-L}^L \frac{\rho(\zeta)}{\zeta - x} d\zeta \quad (3)$$

Несобственный интеграл (3) здесь принимается в смысле главного значения Коши. Для момента начала скольжения из (1) и (3) можно получить условие:

$$\frac{\tau}{D} = \int_{-L}^L \frac{\rho(\zeta)}{\zeta - x} dx \quad (4)$$

Решение интегрального уравнения (4) методами теории функции комплексного переменного [1] дает линейную зависимость между плотностью дислокаций ρ и пределом текучести τ

$$\rho(\tau) = \frac{1}{\pi L \sqrt{1 - \alpha^2}} \left(\frac{\alpha L}{D} \tau + B \right) \quad (5)$$

где B - сумма векторов Бюргерса всех дислокаций, α - параметр, значение которого приближается к 1, если имеет место концентрация дислокаций у концов отрезка $[-L, L]$.

Условием появления пластических деформаций в поликристаллическом объекте являются пластические сдвиги в составляющих этот объект кристаллов. Согласно [7], по крайней мере половина всех кристаллов должна находиться в пластическом состоянии (т.е. с активированными источниками Франка-Рида). Эксперименты показывают [8], что в случае поликристаллического состояния металла превыше-

ние макроскопического предела текучести над микроскопическим соответствует коэффициенту превышения $k=1,07=1,36$ (для железа он равен 1,35).

Введем в рассмотрение случайную величину T – предел текучести отдельного кристаллита, возможные значения которой τ и закон распределения находим экспериментально. В качестве объекта исследования была выбрана листовая нержавеющая сталь 03X18ТБч, которую подвергали термомеханической обработке в режиме: горячая прокатка, затем холодная прокатка со степенью обжатия 20% с последующими отжигом (920°C) и холодной прокаткой до конечной толщины. После прокатки проводили рекристаллизационный отжиг 950°C. Из обработанного таким образом листа было вырезано 80 образцов, для которых испытания на растяжение выполнили на разрывной машине «Эйвери».

Далее на основе полученных результатов измерения с помощью критерия Пирсона [9] было установлено, что случайная величина T подчиняется нормальному распределению

$$f(t) = \frac{1}{S_\tau \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\tau - \bar{\tau}}{S_\tau} \right)^2 \right] \quad (6)$$

где $\bar{\tau} = 264 \text{ МПа}$, $S_\tau = 19 \text{ МПа}$.

Для нахождения закона распределения случайной величины R , возможные значения которой суть плотность дислокаций ρ используем метод преобразования функции одного случайного аргумента [9], принимая за основу дифференциальную функцию (6) и функциональную зависимость (5). Схематический график этой зависимости изображается отрезком прямой (рис. 1) на участке $[a, b]$, где $a=224 \text{ МПа}$ и $b=313 \text{ МПа}$.

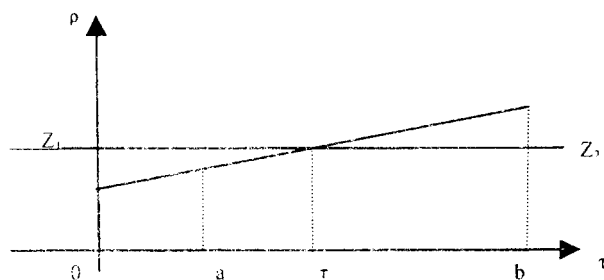


Рис. 1. Зависимость плотности дислокаций от предела текучести

Когда, случайная величина T принимает различные значения, то случайная точка (T, R) перемещается только по прямой (5). Проведем прямую $Z_1 Z_2$ параллельно оси τ на расстоянии ρ . Чтобы выполнялось условие $R < \rho$, точка (T, R) должна лежать ниже прямой $Z_1 Z_2$, т.е. T должно попасть в интервал (a, τ) . Введем функцию распределения $Q(\rho)$ для случайной величины R , определяемую выражением

$$Q(\rho) = \int_a^{\tau(\rho)} f(\tau) d\tau, \text{ где } \tau(\rho) \text{ находится из (5)}$$

$$\tau = \frac{D\pi\sqrt{1-\alpha}}{\alpha} \left(\rho - \frac{B}{\pi L\sqrt{1-\alpha^2}} \right) \quad (7)$$

Дифференцируя функцию распределения (8) по ρ , получим плотность распределения $q(\rho) = f[\tau(\rho)] \frac{d\tau}{d\rho}$. Окончательно, с учетом соотношений (6) и (7), найдем искомый закон распределения плотности дислокаций в рассматриваемом материале

$$q(\rho) = \frac{1}{S_\rho \sqrt{2\pi}} \left(\exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\rho - m_\rho}{S_\rho} \right)^2 \right] \right) \quad (8)$$

$$\text{где } S_\rho = \frac{S_\tau \alpha}{D\pi\sqrt{1-\alpha^2}}; \quad m_\rho = \frac{\beta}{\pi L\sqrt{1-\alpha^2}} + \frac{\bar{\tau}\alpha}{D\pi\sqrt{1-\alpha^2}}$$

В свою очередь закон распределения коэффициента деформационного упрочнения n можно получить используя дифференциальную функцию распределения дислокаций (8). Введем случайную величину N , возможные значения которой есть значения коэффициента упрочнения. Скольжение в процессе пластического деформирования начинаются в произвольных участках любого кристаллита, в котором имеются активированные источники Франка-Рида. К тому моменту, когда плотность дислокаций достигнет значения ρ , произойдет пластическая деформация σ [5]: $\delta = \rho b L$.

С другой стороны, известна следующая зависимость между σ и коэффициентом n [8]: $n = \ln(1 + \delta)$, или приближенно $n \approx \delta$. Поэтому функциональную зависимость $\rho(n)$ запишем в виде

$$\rho = n / (bL) \quad (9)$$

Применим к соотношению (8), (9) вышеуказанную процедуру метода преобразования случайной величины. В результате для случайной величины N получим нормальное распределение, для которого математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение равны

$$m = \frac{\bar{\tau} b L \alpha}{\pi \sqrt{1 - \alpha^2} D} + \frac{b^2}{\pi A}, \quad \sigma = \frac{S \tau \alpha b L}{\pi D \sqrt{1 - \alpha^2}} \quad (10)$$

Поскольку величины b и L можно задать только приближенно, а параметр α является вообще неопределенным, выполним нормировку результатов [10] с помощью критерия Удквиста [10] как меры

деформационного упрочнения $n = \int_I d\varepsilon_i$ где ε_i - интенсивность пластической деформации, а интегриро-

вание проведем по пути деформирования. Предположим, что величина криволинейного интеграла равна среднему значению относительного равномерного удлинения $\delta = 0,2$ [8]. После нормировки параметры распределения запишутся в виде:

$$m = 37 \frac{\bar{\tau}}{G}, \quad S = 37 \frac{S \tau}{G} \quad (11)$$

При этом модуль сдвига G ввиду текстурированности листа будет иметь существенную анизотропию и, согласно [11], эта анизотропия вычисляется по формуле

$$G(\varphi) = \left[\frac{1}{G_{100}} + C \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_1^2 \alpha_3^2) P(\omega) d\omega \right]^{-1} \quad (12)$$

Здесь $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ - направляющие косинусы выбранного направления по отношению к кубическим осям, φ - угол, который это направление образует с направлением прокатки, C - постоянная, $P(\omega)$ - биттеровская функция, описывающая распределение ориентировки зерен в зависимости от угла ω между кубической осью кристалла и направлением прокатки.

Рассмотрим случай ребровой текстуры, которая часто имеет место при прокатке [11]. При такой текстуре первая из кубических осей кристалла ориентирована вдоль направления прокатки, а две других - под углом 45° к поверхности листа. Соответственно направляющие косинусы равны:

$$\alpha_1 = \cos(\omega - \varphi), \quad \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\omega - \varphi), \quad \alpha_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\omega - \varphi).$$

В соотношении (12) направление $[100]$ выбрано базисным. И поскольку $\varphi = 90^\circ$ и $\omega = 0$, то имеем:

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \alpha_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Для вычисления C , зададимся модулем сдвига G в двух плоскостях скольжения. Согласно рекомендациям [8], примем в направлениях $[100]$ и $[110]$ следующие значения модуля: $G_{100} = 34$, $G_{110} = 57$ ГПа; тогда $C = 0,047 \cdot 10^{-9}$.

Анизотропию модуля G рассчитываем по (12) и аппроксимируем эмпирическим соотношением $G(\varphi) = (48,8 + 11,2 \sin \varphi)$ ГПа.

С учетом анизотропии $G(\varphi)$ на основании отношений (11) были найдены трехсигмовые интервалы коэффициенты деформационного упрочнения n . Соответствующая полоса значений n представлена на рис. 2.

Согласно [4], коэффициент упрочнения n иногда применяют в качестве показателя штампуемости. Поэтому полученные результаты можно использовать в качестве предварительной оценки штампуемости рассматриваемой листовой стали.

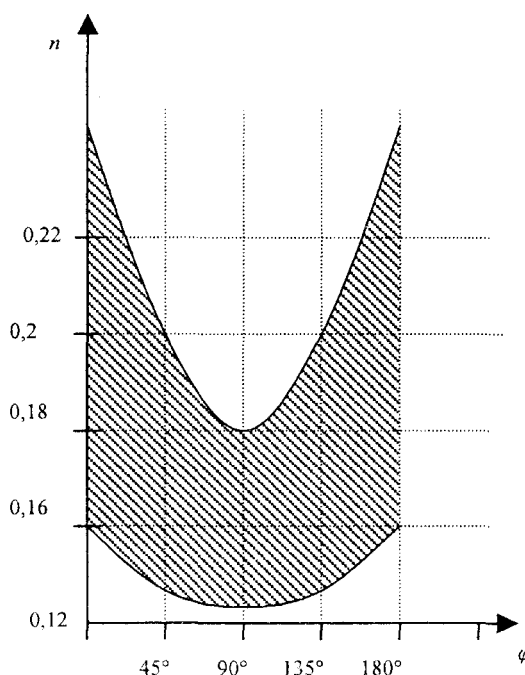


Рис 2. Полоса значений коэффициента упрочнения n

Таким образом на основе закона распределения плотности дислокации, с использованием метода преобразования случайной величины построена дифференциальная функция распределения для коэффициента деформационного упрочнения листовой стали с ОЦК структурой. Использованный подход позволяет учесть и анизотропию упрочнения, связанную с текстурированностью листового материала.

РЕЗЮМЕ

На базі закону розподілу густини дислокацій в кристаліті досліджена анізотропія коефіцієнта зміцнення в текстурованому листі корозійностійкої сталі. Побудовані технологічні інтервали коефіцієнта зміцнення.

SUMMARY

On the basis of the law of distribution of dislocations in a crystallite anisotropy of a hardening coefficient for a textured steel sheet has been studied. Technological intervals of the coefficient have been found.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.Н. Теория упругости М.: Наука, -1965, 203 с
2. Смирнов Б.И. Дислокационная структура и упрочнение металлов М.: Наука 1965, 185 с
3. Моисеев Б.Е. Эффективный показатель деформационного упрочнения металлов, Металлофизика и новейшие технологии, -2001, - №3
4. Гайдук В.В., Востриков А.А., Ариулс Г.О. Новый показатель штампуемости металла автолиста. Сталь, -1982, №1, -с 67-71
5. Коттрелл А.Х. Дислокации и пластическое течение в металлах. Металлургиздат, М., 1958-267 с.
6. Михель К.Х., Моцек Х.М., Шмидт В., Мольдерс Х. Упрочнение тонкого листа из нержавеющей стали. Черные металлы. 1976 №1, с. 13 - 19.
7. Богачев И.Н., Вайнштейн А. А., Волков С.Д. Введение в статистическое материаловедение М. : Металлургия, 1986.-216 с.
8. Микляев П.Г. Фридман Я.Е. Анизотропия механических свойств металлов М.: Металлургия, 1986.- 224с
9. Герасимович А.И. Математическая статистика. Мн., Высшая школа 1983,-279 с.
10. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М., Машиностроение, 1975.-400 с.
11. Кудрявцев И. П. Текстуры в металлах и сплавах.- М.: Металлургия, 1965.- 291 с.

Надійшла до редакції 29.05.2002 р.

УДК 669.15

ANALYSIS OF KINETICS OF THE HYDROGEN INDUCED REVERSE PHASE TRANSFORMATION IN $Nd_2Fe_{14}B$ HARD MAGNETIC ALLOY

Sergey B. Rybalka
Donetsk National Technical University

1. Introduction

Studies of phase transformation have always been one of the main standpoint areas of solid state physics, metal science, theoretical and practical materials science [1,2].

Recently developed HDDR-process (Hydrogenation-Decomposition-Desorption-Recombination) is based on direct and reverse hydrogen induced phase transformation in hard magnetic alloy of $Nd_2Fe_{14}B$ type [3]. This process allows to produce permanent magnets from these alloys with improved magnetic characteristics after HDDR-treatment.

In paper [4] the isothermal kinetic diagram of the hydrogen induced reverse phase transformation in $Nd_2Fe_{14}B$ alloy was obtained experimentally. However, to the present moment the theory describing such phase transformation doesn't exist. The aim of the present paper is to describe above mentioned isothermal kinetic diagram theoretically using the Kolmogorov-Lyubov-Aleksandrov kinetic theory of phase transformations.

2. Results and discussion

In hydrogen atmosphere (~ 0.1 MPa) and at temperatures of 600-900°C in $Nd_2Fe_{14}B$ alloy hydrogen induced direct phase transformation (decomposition) occurs by the following structural scheme [3]



Hydrogen induced reverse phase transformation (recombination) in $Nd_2Fe_{14}B$ alloy occurs at hydrogen evacuation in vacuum ($\sim 10^{-2}$ Torr) by the following structural scheme [3]



In paper [4] the isothermal kinetic diagram for hydrogen induced reverse phase transformation in $Nd_2Fe_{14}B$ alloy has been obtained by magnetometer measurements. This diagram is shown in Figure 1.

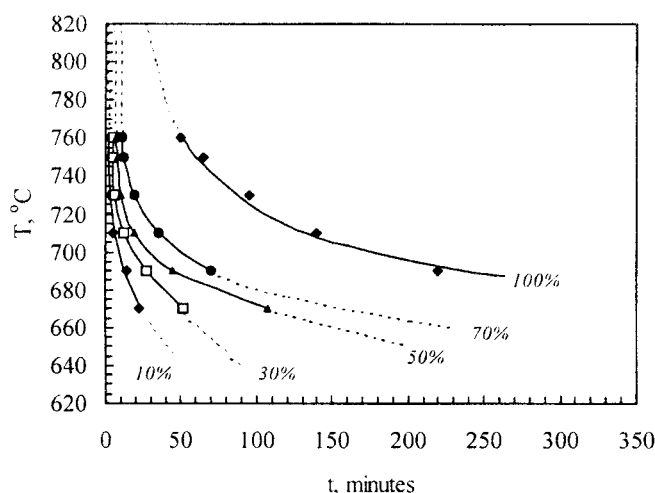


Figure 1. Isothermal kinetic diagram for hydrogen induced reverse phase transformation in $Nd_2Fe_{14}B$ (after Ref. [4]).

As can be seen from scheme (2) there is a reason to believe that diffusion of hydrogen from NdH_2 hydride and then diffusion of Fe and B atoms to Nd atoms results in nucleation and growth of $Nd_2Fe_{14}B$ phase.

Earlier on a base of kinetic investigations [4,5] and electron microscopy and X-ray diffraction studies [6] during reverse phase transformation in $Nd_2Fe_{14}B$ type alloys it was showed that transformations of this type is a

diffusive phase transformation in solid state and that the reverse transformation process proceeds by the nucleation and growth mechanism. In works [4-6] it was showed that the reverse phase transformation is controlled by diffusion of *Fe* atoms.

As well known from the Kolmogorov's kinetic theory of phase transformation in solid state [7-9], the volume of the transformed area ξ in dependence on transformation time t and temperature T can be written as

$$\xi = 1 - \exp \left[- \int_0^t I(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau \right], \quad (3)$$

where $I(t)$ is the nucleation rate of centres of new phases at time t , $\varphi(t)$ is the volume of this centre at time t , τ is the nucleation moment of centre of a new phase. For the isothermal conditions it is believed that $I(t) = I = \text{const}$.

Further, volume $\varphi(t)$ of a spherical centre of $Nd_2Fe_{14}B$ phase at time t may be written as

$$\varphi(t) = \frac{4}{3} \pi \rho^3(t), \quad (4)$$

where $\rho(t)$ is the radius of this centre at time t .

The radius $\rho(t)$ of $Nd_2Fe_{14}B$ phase at time t according to Lyubov-Aleksandrov theory [8-10] may be written as

$$\rho(t) = 2\beta(\xi) \sqrt{Dt}, \quad (5)$$

where $D = D_0 e^{-\frac{Q}{RT}}$ is the diffusion coefficient of *Fe* atoms in α -*Fe* matrix in our case, $\beta(\xi)$ is the parameter depending on concentration and degree of transformation ξ , $D_0 = 14 \text{ cm}^2/\text{s}$ is the diffusion constant, Q is the activation energy of diffusion, T is the temperature, $R = 8.31 \text{ J (mol K)}^{-1}$ is gas constant.

The nucleation rate of a new phase in solids according to the Turnbull-Fisher theory [8-11] may be written as

$$I = \gamma \frac{RT}{h} e^{-\frac{W+U}{RT}}, \quad (6)$$

where W is the free energy of critical nucleus of $Nd_2Fe_{14}B$ formation, U is the activation energy, h is the Planck's constant, $\gamma = 10^6 \text{ mol/m}^3$.

Substitution of equations (4), (5) and (6) into (3) for $t \geq \tau$ results in the equation

$$\xi = 1 - \exp \left[- \frac{8^2 \pi \gamma R T}{15 h} \beta^3(\xi) D_0^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{W+U+\frac{3}{2}Q}{RT}} \frac{5}{t^{\frac{5}{2}}} \right]. \quad (7)$$

From (7) for dependence of transformation time t_ξ , which is necessary for the achievement of some degree of transformation ξ from temperature T , it is possible to obtain

$$t_\xi = a \cdot [-\ln(1 - \xi)]^{\frac{2}{5}} \left[\frac{1}{T} \right]^{\frac{2}{5}} \cdot e^{\frac{2(W+U) + \frac{3}{5}Q}{RT}}, \quad (8)$$

$$\text{where } a = \left(\frac{15h}{8^2 \pi \gamma R \beta^3(\xi) D_o \frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{5}}.$$

For the further analysis it is necessary to determine all unknown parameters in equation (8). With this aim experimental data from Fig. 1 were replotted in co-ordinates $\ln t_\xi$ versus $1/T$ (Figure 2).

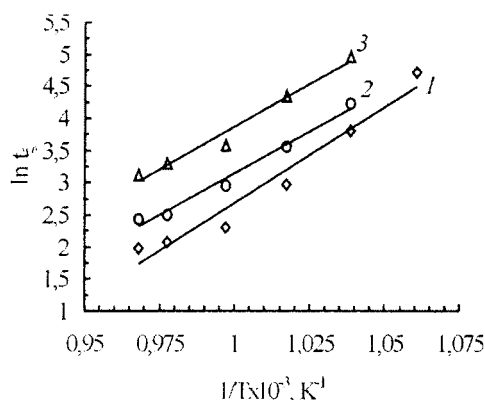


Figure 2. $\ln t_\xi$ vs $1/T$ dependence for hydrogen induced reverse phase transformation in $Nd_2Fe_{14}B$ for degrees of transformation: 1-0.5; 2-0.7; 3-0.9.

So, the slopes of the straight lines give us the values of the effective activation energies for hydrogen induced reverse phase transformation. In our case the effective activation energy of this process

$$Q_{eff} = \frac{2}{5}(W + U) + \frac{3}{5}Q. \text{ Values of activation energy equal to } Q_{eff} = 216 - 248 \text{ kJ/mol. These values have}$$

good agreement with an activation energy of a diffusion of Fe atoms in α -Fe matrix ($Q_{\alpha-Fe} = 259.54 \text{ kJ/mol}$ [12]). Therefore, it is really possible to consider that evolution process of reverse phase transformation is controlled by diffusion of Fe atoms. Then it is believed that activation energy U is an approximately equal to dissociation energy of NdH_2 hydride $E_{dis} = -81.4 \text{ kJ/mol}$ [13]. Determined by this means parameters in the equation (8) are showed in the Table 1.

On the base of equation (8) and data from Table 1 the equations describing the kinetics of reverse hydrogen induced phase transformation in $Nd_2Fe_{14}B$ alloy for degrees of transformation 0.5, 0.7 and 0.9 were calculated

$$t_{0.5} = 2.93 \cdot 10^{-11} \cdot 0.8636 \cdot \left(\frac{1}{T} \right)^{0.4} \cdot e^{\frac{29939}{T}}, \quad (9)$$

$$t_{0.7} = 1.90 \cdot 10^{-9} \cdot 1.077 \cdot \left(\frac{1}{T} \right)^{0.4} \cdot e^{\frac{26067}{T}}, \quad (10)$$

$$t_{0.9} = 1.46 \cdot 10^{-9} \cdot 1.396 \cdot \left(\frac{1}{T} \right)^{0.4} \cdot e^{\frac{26671}{T}}. \quad (11)$$

Table 1. Estimated values of the parameters in Equation (8) for reverse hydrogen induced phase transformation in $Nd_2Fe_{14}B$ alloy for degrees of transformation 0.5, 0.7 and 0.9, respectively.

	$Q_{eff},$ kJ/mol	$U,$ kJ/mol	$W,$ kJ/mol	$A(\xi)$
0.5	248.8	-81.4	314.1	0.02274
0.7	216.6	-81.4	233.6	3.263×10^{-3}
0.9	221.6	-81.4	246.1	4.064×10^{-3}

Further, the isothermal kinetic diagram of reverse hydrogen induced phase transformation in $Nd_2Fe_{14}B$ alloy was plotted by the equations (9)–(11). This diagram is shown in Figure 3.

As can be seen from this figure the calculated curves have well approximates data from paper [4].

As seen from Fig. 3 proposed model predicts an acceleration of reverse phase transformation evolution at temperature increase. Really, as follows from paper [14], where recombination process was studied in $Nd_{32}Dy_{1.5}Fe_{65}Nb_{0.5}B_{1.0}$ at isothermal temperatures from 765 up to 860°C by in-situ powder neutron diffraction, increase of the isothermal temperature results in acceleration process of reverse phase transformation.

Therefore, proposed model describing the kinetics of hydrogen induced diffusive reverse phase transformations in $Nd_2Fe_{14}B$ alloy can be considered as a first step for the further development of this model for description of such transformations in $Nd_2Fe_{14}B$ type alloys.

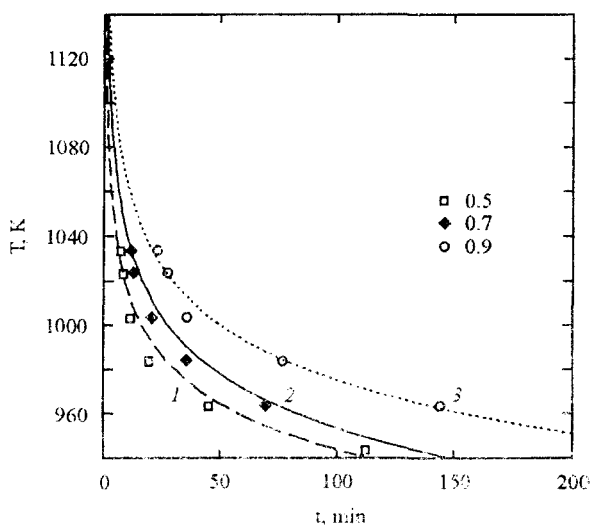


Figure 3. Calculated isothermal kinetic diagram of hydrogen induced reverse phase transformation in $Nd_2Fe_{14}B$ alloy for degrees of transformation: 1-0.5; 2-0.7; 3-0.9. Points are experimental data (from Ref. [4]).

3. Conclusions

Thus, the isothermal kinetic diagram of hydrogen induced reverse phase transformation in $Nd_2Fe_{14}B$ type alloy can be well described by the equation of form (8). Also is shown, that the kinetics of reverse phase transformation is controlled by a diffusion of Fe atoms.

РЕЗЮМЕ

Вивчена кінетика ініційованого воднем зворотнього фазового перетворення в магнітожорсткому сплаві $Nd_2Fe_{14}B$ в ізотермічних умовах. На підставі теорії Колмогорова-Любова-Александрова розрахована ізотермічна кінетична діаграма цього перетворення. Доведено, що кінетика ініційованого воднем зворотнього фазового перетворення контролюється дифузією атомів Fe.

SUMMARY

Kinetics of the hydrogen induced reverse phase transformation in $Nd_2Fe_{14}B$ alloy at isothermal conditions has been described. The isothermal kinetic diagram of this transformation in $Nd_2Fe_{14}B$ alloy has been calculated on base of the Kolmogorov-Lyubov-Aleksandrov theory. It is shown that kinetics of a reverse phase transformation is controlled by diffusion of Fe atoms.

REFERENCES

1. Khachaturyan A.G. Theory of phase transformations and structure of hard solution.- Moscow: Nauka.- 1974 (in Russian).
2. Popova L.E., Popov A.A. Diagrams of austenite transformations in steels and β -solution in titanium alloys.- Moscow: Metallurgiya.- 1991 (in Russian).
3. Takeshita T. Some applications of Hydrogenation-Decomposition-Desorption-Recombination (HDDR) and Hydrogen-Decreepitiation (HD) in metals processing // J. Alloys Comp.- 1995, V. 291.-P. 51.

4. Goltsov V.A. et al. Kinetics and some general features of hydrogen-induced diffusive phase transformations in $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$ type alloys / Progress in Hydrogen Treatment of Materials, Goltsov V.A., Ed., Donetsk: Coral Gables.- 2001.-P. 367-390.
5. Goltsov V.A., Rybalka S.B. et al. Kinetics of hydrogen-induced forward and reverse diffusional phase transformations in an $\text{R}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$ hard magnetic alloy // The Physics of Metals and Metallography.- 1999, V. 87, N 6.- P. 543.
6. Gutfliesch O., Matzinger M., Fidler J., Harris I.R. Characterisation of solid-HDDR processed $\text{Nd}_{16}\text{Fe}_{76}\text{B}_8$ alloys by means of electron microscopy // J. Magn. Magn. Mat.- 1995, V. 147.- P. 320.
7. Kolmogorov A.N. To the statistical theory of a crystallization of metals // Izv. Akad. Nauk USSR, Ser. Matem.- 1937, N 3.- P. 355.
8. Lyubov B.Ya. The kinetic theory of phase transformations.- Moscow: Metallurgiya.- 1969 (in Russian).
9. Aleksandrov L.N. The formation kinetics and structure of hard solutions.- Novosibirsk.: Nauka.- 1972 (in Russian).
10. Christian J.W. The theory of transformation in metals and alloys, Part 1, 2nd.- Pergamon Press: Oxford.- 1975.
11. Turnbull D., Fisher J.C. Rate of nucleation in condensed systems // J. Chem. Phys.- 1949, V. 17, N 1.- P. 71.
12. Gertsriken S.D., Dekhtyar I.Ya. Diffusion in metals and alloys in solid phase.- Moscow: GIFML.- 1960 (in Russian).
13. Antonova M.M. Properties of metals hydrides.- Kiev: Naukova dumka.- 1975 (in Russian).
14. Liesert S., Fruchart D. et al. The hydrogenation-disproportionation-desorption-recombination process of $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$ studied by in-situ neutron diffraction and thermomagnetic measurements // J. Alloys Comp.- 1997, V. 253-254.- P. 140.

Надійшла до редакції 28.01.2002 р.

Х І М І Я

УДК 541.13

ЕМКОСТЬ ДВОЙНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СЛОЯ
УГОЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НА ГРАНИЦЕ
С ВОДНЫМИ РАСТВОРАМИ СМАЧИВАТЕЛЕЙ

Н.Б. Узденников, Ю.Н. Зубкова

Адсорбция смачивателей на угольной поверхности приводит к образованию двойного электрического слоя (ДЭС) на границе водный раствор-уголь. Природа поверхностно-активных веществ и электролитов, входящих в состав смачивателей, их концентрация влияют на строение ДЭС и, следовательно, на его основные параметры - электрокинетический потенциал, толщину, емкость. Анализ изменений этих параметров позволяет понять механизм адсорбционных явлений, происходящих при смачивании угольной поверхности [1,2]. Адсорбция органических ПАВ на угольной поверхности вызывает изменение диэлектрической проницаемости ДЭС, увеличение его толщины, все эти изменения заметны лишь вблизи потенциала нулевого заряда поверхности [3]. В связи с этим определение емкости ДЭС с помощью потенциодинамического метода позволяет оценить по сдвигу точки нулевого заряда ориентацию больших органических молекул ПАВ в ДЭС вблизи угольной поверхности.

Авторами разработаны для целей пылеподавления ряд композиций смачивания [4-6] на основе неионогенного ПАВ - диэтаноламида синтетических жирных кислот фракции $C_{10}-C_{13}$ и электролитов - KCl , $CaCl_2$ и др.

Определение емкости двойного слоя антрацитов велось расчетным путем [3] из кривых заряжения, полученных потенциодинамическим методом с помощью полярографа RADELKIS OH-102. В измерительной электрохимической ячейке в качестве вспомогательного электрода (его площадь в 10^4 раза превышала площадь исследуемого электрода) использовали плоский графит. Площадь исследуемого антрацитного электрода составляла $\sim 1 \text{ мм}^2$. Характеристика угольного материала: антрацит, шласт №2 (шахта №2 «Рассыпнянская» г/у «Комсомольское» ПО «Торс-антрацит»), зольность A^c - 10,6%, содержание серы - 1,8%, летучих - 1,2%.

При постоянной концентрации фонового электролита - хлористого калия - 0,1 Н концентрация поверхностно-активного вещества изменялась от 10^{-4} г/л до 0,1 г/л, то есть в пределах образования как монослоев, так и надмицеллярных структур [2]. Устройство ячейки позволяло не учитывать в расчетах емкость системы анод-катод [3]. Дифференциальная емкость рассчитывалась из кривых заряжения ДЭС по формуле

$$C = \frac{i}{\omega - R \cdot \frac{di}{dt}},$$

где i - величина тока, а точнее, плотность тока, а/м^2 ;

$\omega - \frac{d\varphi}{dt}$ - изменение напряжения во времени, в/с (задается прибором);

R - сопротивление электродной системы, см;

$\frac{di}{dt}$ - изменение тока во времени, а/с (измеряется).

Типичный вид кривых заряжения ДЭС антрацитового электрода приведен на рис. 1, 2 (при различной концентрации ПАВ).

Сопротивление системы антрацит-графит с раствором, содержащим различное количество ПАВ в фоновом электролите (0,1Н KCl), изменяется непропорционально при увеличении концентрации неионогенного органического соединения: при 10^{-4} г/л - 870 см, 10^{-3} - 840 см, 10^{-2} - 930 см, 10^{-1} - 940 см, что может быть связано с процессами мицеллообразования в растворе смачивателя (см. таблицу).

Таблица

Значения R для ячейки антрацит-графит в системе ДЭА - KCl ($CaCl_2$)

№ п/п	Концентрация ДЭА, г	Фоновый р-р KCl – 0,1Н	Фоновый р-р $CaCl_2$ – 0,1Н	Фоновый р-р $CaCl_2$ – 0,01Н
1	0	850	970	2500
2	10^{-4}	870	1060	2100
3	10^{-3}	840	880	1850
4	10^{-2}	930	750	1980
5	10^{-1}	940	1080	2150
6	$5 \cdot 10^{-1}$	1050	1250	–
7	1	920	1350	–
8	2	800	–	–

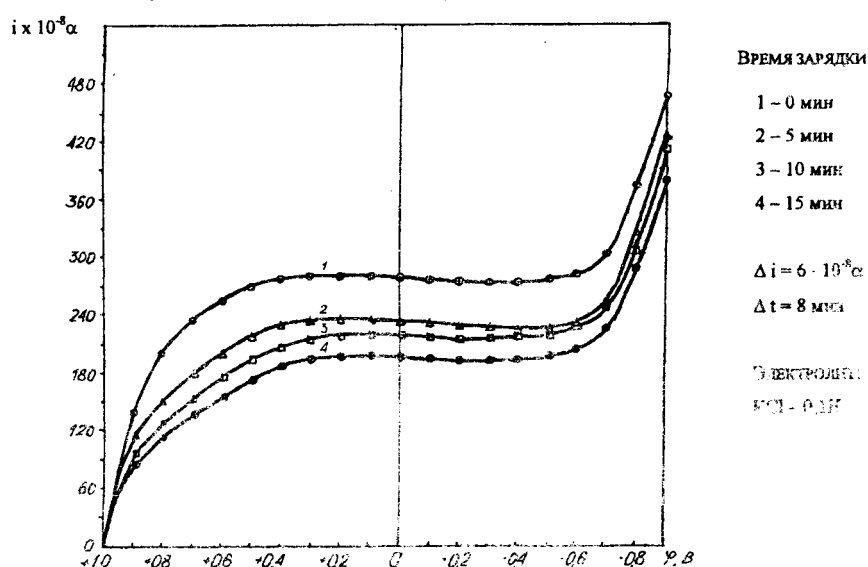


Рис. 1. Потенциодинамические кривые в системе антрацит – графит – раствор смачивателя (10^{-4} г/л) при изменении времени зарядки

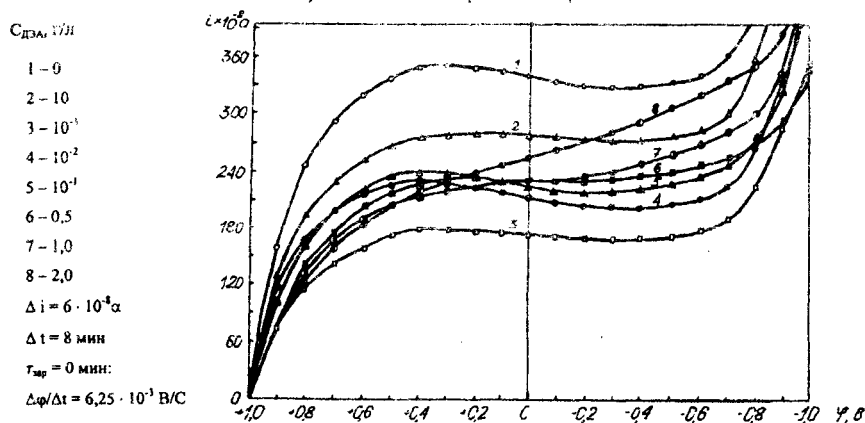


Рис. 2. Потенциодинамические кривые в системе антрацит – графит – раствор смачивателя при изменении концентрации ПАВ (электролит - 0,1н KCl)

Расчетные величины емкости ДЭС приведены в виде зависимости от потенциала относительно нормального водородного электрода (рис.3). Согласно Дамаскину [3] минимум на зависимостях в разбавленных растворах соответствует потенциалу нулевого заряда; с увеличением концентрации он становится менее выраженным. Именно при потенциале нулевого заряда (ПНЗ) наблюдается максимальная адсорбция органического компонента – а при удалении от ПНЗ – имеет место определенная десорбция ПАВ. При повышении концентрации ДЭА с 10^{-4} до 10^{-1} г/л происходит сдвиг ПНЗ в катодную (отрица-

тельную) область. Можно предположить, что до этой концентрации идет почти параллельная ориентация молекул ПАВ, несущих на себе повышенную электронную плотность на атоме азота.

Повышение величины емкости ДЭС до $0,8 \cdot 10^{-2}$ Ф/м² связано с увеличением количества молекул ДЭА в адсорбционном слое.

КОНЦЕНТРАЦИЯ ДЭА:

- 1 – 0,5 г/л
- 2 – 10^{-1} г/л
- 3 – 10^{-2} г/л
- 4 – 10^{-3} г/л
- 5 – 10^{-4} г/л

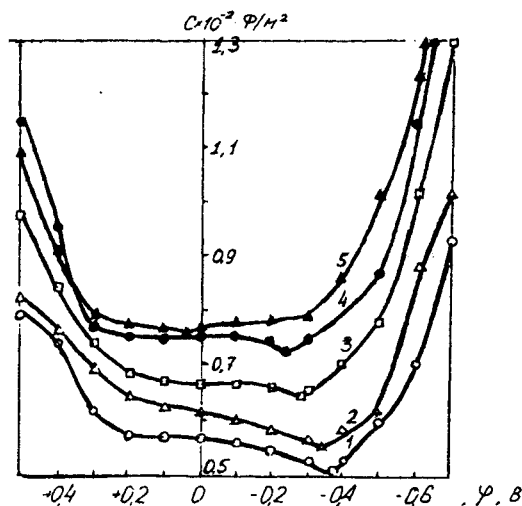


Рис. 3. Дифференциальная емкость ДЭС в системе антрацит – графит – раствор смачивателя при изменении концентрации пав

ВЫВОДЫ

1. Изменение концентрации неионогенного ПАВ в составе одного раствора смачивателя влияет на дифференциальную емкость ДЭС антрацита.
2. Характер изменения емкости ДЭС позволяет предположить полислойную адсорбцию параллельных молекул ПАВ при его концентрации до 0,1 г/л в водном растворе.

РЕЗЮМЕ

Определена емкость двойного электрического слоя (ДЭС) поверхности антрацита расчетным путем из кривых заряжения, полученных потенциодинамическим методом с помощью полярографа Radelkis OH-102. Показано, что концентрация неионогенного ПАВ - диэтаноламидов синтетических жирных кислот фракции $C_{10} - C_{13}$ - в составе водного раствора смачивателя влияет на дифференциальную емкость ДЭС антрацита. Характер изменения емкости ДЭС позволяет предположить полислойную адсорбцию параллельных молекул ПАВ при его концентрации до 0,1 г/л в водном растворе.

SUMMARY

The capacity of the double electric layer (DEL) near surface of anthracite by digital method from charging curves, given by potentiodynamic method with use the polarograph Radelkis OH-102 was defined. It show that the concentration nonionic surfactant in the water solution of wetting agent influence for the differential capacity. The character of the capacity changing allowed to propose polylying adsorption on parallel molecules of surfactant (below concentration 0,1 g/l in water solution).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Зубкова Ю.Н., Узденников Н.Б. Электрокинетические характеристики ископаемых кеглей в растворах смачивателей / Химия твердого топлива, 1984.-№5.- С.55-60.
2. Узденников Н.Б., Зубкова Ю.Н. Электрокинетические характеристики антрацитовых частиц при адсорбции растворов ПАВ и электролитов на их поверхности / Химия твердого топлива, 1992. - №6. - С. 120-124.
3. Дамаскин Б.Б., Петрий О.А. Введение в электрохимическую кинетику. / Учебн. пособие для вузов, под ред. А.Н.Фрумкина. - М.: «Высшая школа», 1975.-416 с.
4. Авт. свидет. 1.168.735. Состав для смачивания угольной пыли, МКИ Е 21 Г 5/06/ Зубкова Ю.Н., Узденников Н.Б. и др.; заявл. 16.02.1984, оп. 23.07.85. Бюл. №27.
5. Авт. свидет. 1.116.180. Состав для смачивания угольной пыли, МКИ Е 21 Г 5/06/ Зубкова Ю.Н., Узденников Н.Б. и др.; заявл. 13.06.1983, оп. 30.09.1984. Бюл. №36.
6. Патент Украины 14 647. Патронований змочувач вугільної поверхні, МКІ Е 21 Г 5/06, заявл. 11.04.1995, опубл. 20.01.1997.

Надійшла до редакції 25.12.2000 р.

УДК 541.183.5

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УГЛЕРОДСОДЕРЖАЩИХ СОРБЕНТОВ С АЛИФАТИЧЕСКИМИ СПИРТАМИ.

М.В. Гнеденко

Углеродсодержащие сорбенты обладают универсальностью адсорбционных свойств, что позволяет успешно использовать их для извлечения многих веществ из парогазовой фазы и из растворов [1]. Примером углеродсодержащего сорбента является ископаемый уголь гумусового происхождения – бурый уголь (БУ) Александрийского месторождения, а также остаточный бурый уголь (ОБУ), являющийся отходом при производстве стимулятора роста растений – гумата аммония [2].

Бурый уголь содержит кислородсодержащие функциональные группы (от 6 до 9 мг-экв/г только кислых групп), что делает его гидрофильным [3]. Остаточные бурые угли после 3-х кратной экстракции (ОБУ-1, ОБУ-2, ОБУ-3) состоят из мелкодисперсных частиц, имеющих развитую удельную поверхность.

Таблица 1. Сравнительная характеристика исходного и остаточных бурых углей.

	БУ	ОБУ-1	ОБУ-2	ОБУ-3
Дисперсность, мкм	0-100	0-40	0-10	0-4
Зольность, %	15,0	26,9	43,7	68,2
Содержание гуминовых веществ, %	70,0	51,1	39,1	22,2

Как видно из данных таблицы, в процессе технологической переработки бурого угля происходит рост степени дисперсности, уменьшение органической и увеличение неорганической составляющих. В процессе диспергирования разрушается исходная пористость, но возникающие дисперсные частицы за счет сил притяжения образуют новые структуры: чем мельче частицы, тем меньше диаметр пор искусственных агломератов [4].

Целью настоящей работы было изучение влияния изменений физической структуры и химических свойств, происходящих в буром угле в процессе переработки, на сорбционные свойства получаемых твердых отходов, а также изучение изменения физико-химических свойств поверхности сорбентов (лиофильно-лиофобных). С этой целью в качестве адсорбатов были взяты алифатические спирты, для которых увеличение углеводородного радикала влияет на изменение лиофильно-лиофобного баланса.

Сорбцию проводили в статических условиях из парогазовой фазы при 20°C и нормальном давлении. В таблице 2 представлены результаты по определению изменений сорбционных объемов исследуемых сорбентов.

Таблица 2. Сорбционные объемы бурого и остаточных бурых углей, см³/г.

СОРБАТ	БУ	ОБУ-1	ОБУ-2	ОБУ-3
Пропиловый спирт	0,4197	0,3608	0,2669	0,3096
Бутиловый спирт	0,3290	0,2936	0,1996	0,2313
Изобутиловый спирт	0,2065	0,1696	0,1206	0,1603
Гексиловый спирт	0,1043	0,0772	0,0893	0,0999

Как видно из таблицы, уменьшение сорбционных объемов от исходного бурого угля до ОБУ-2 свидетельствует о разрушении исходной пористой структуры, имеющей максимальный объем пор. Некоторое возрастание сорбционного объема у ОБУ-3 можно объяснить формированием новой пористой структуры и увеличением дисперсности частиц (табл. 1). На процесс сорбции явно влияют лиофобно-лиофильные свойства адсорбатов. Это особенно наглядно видно из сравнения адсорбции бутилового и изобутилового спиртов. Изобутиловый спирт имеет меньшую температуру кипения и большую летучесть, чем бутиловый спирт, что влияет на концентрацию их молекул в парогазовой фазе и на парциальные давления, но его адсорбция меньше. Так как геометрическими параметрами (стерическим фактором) этих гомологов можно пренебречь, то возможно только одно объяснение: в изобутаноле полярная группа более изолирована (дипольный момент меньше, чем у бутанола: 1,63 против 1,66 [5]), следовательно увеличен лиофобный параметр. Именно, это влияет на уменьшение адсорбции. Подтверждением этому служит и весь гомологический ряд спиртов, в котором лиофобные параметры возрастают (табл. 2).

Сорбционные кривые, представленные на рисунках 1 и 2, имеют Ленгмюровский характер, что говорит об одинаковом механизме сорбции. Как видно, характер сорбции не зависит от соотношения

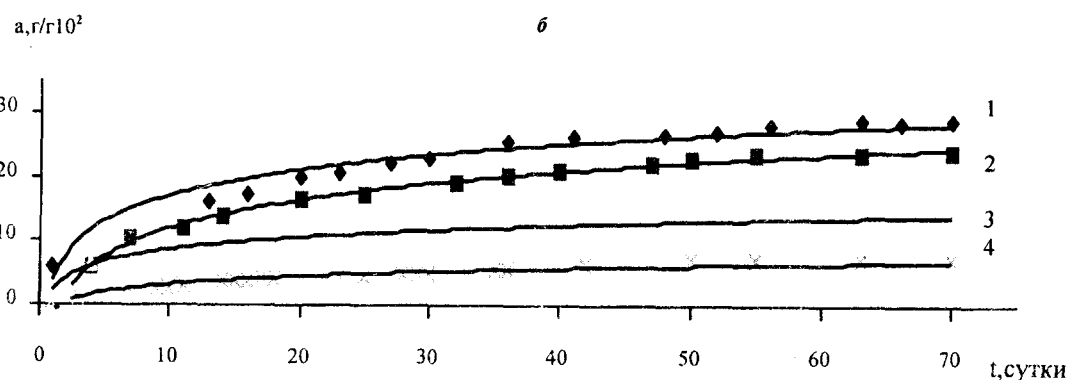
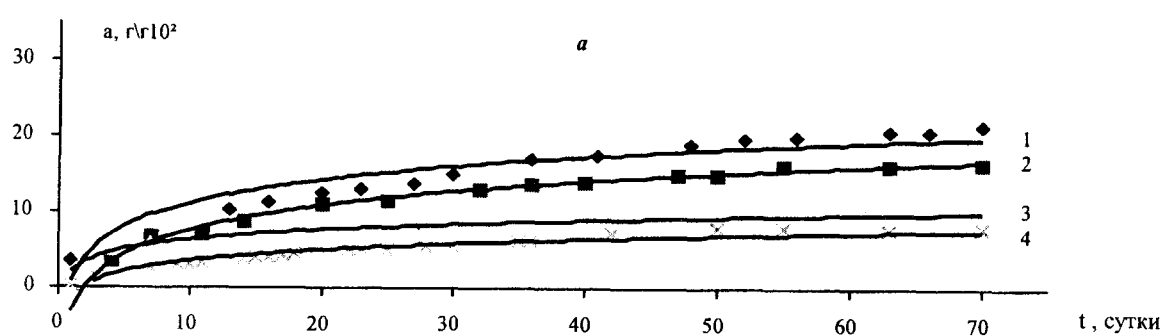


Рис. 1. Сорбция пропилового (1), бутилового (2), изобутилового (3) и гексилового (4) спиртов из парогазовой фазы различными углями: а – БУ; б – ОБУ-1.

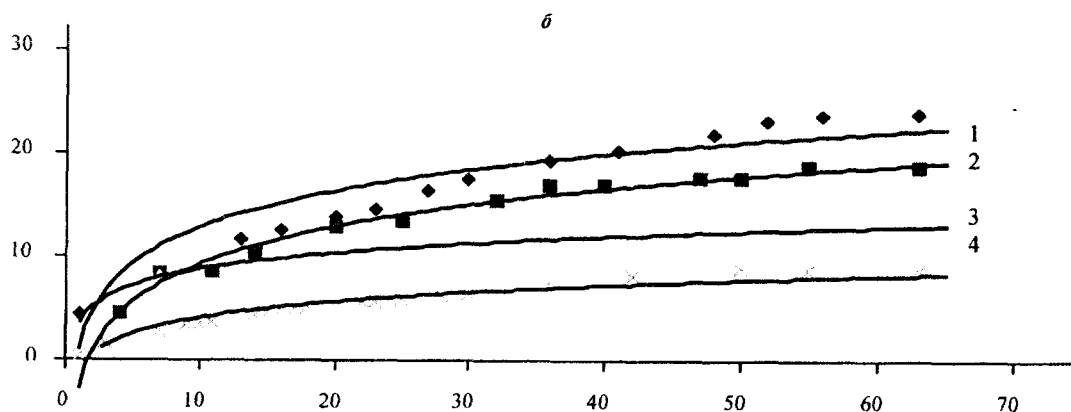
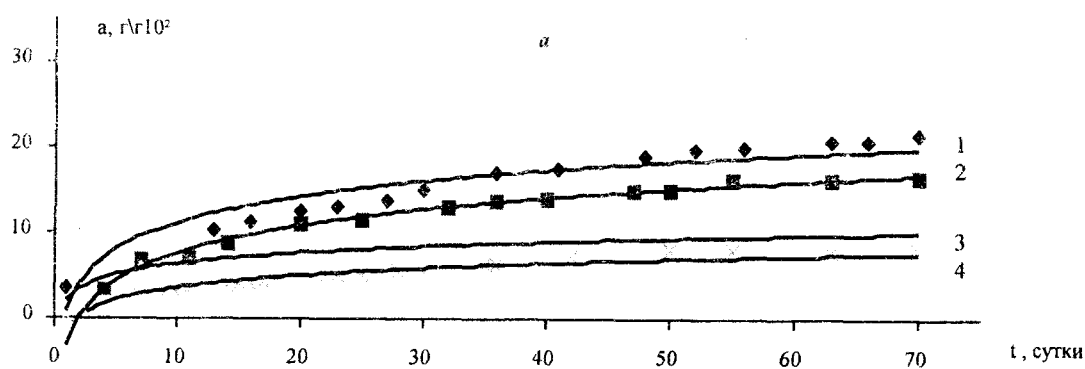


Рисунок 2. Сорбция пропилового (1), бутилового (2), изобутилового (3) и гексилового (4) спиртов из парогазовой фазы различными углями: а – ОБУ-2; б – ОБУ-3.

органической и неорганической составляющих в бурых и остаточных бурых углях, хотя в процессе переработки угля происходит значительное изменение этого соотношения (табл.1).

Сорбционные кривые, представленные на рисунках 1, 2, имеют Ленгмюровский характер, что говорит об одинаковом механизме сорбции. Как видно, характер сорбции не зависит от соотношения органической и неорганической составляющих в бурых и остаточных бурых углях, хотя в процессе переработки угля происходит значительное изменение этого соотношения (табл.1).

Таким образом, можно сделать следующие выводы:

1. На характер сорбции в первую очередь влияют физические структурные изменения угля в процессе его выщелачивания и диспергирования при получении гуммата аммония.
2. В результате физических структурных и качественных (органоминеральных) изменений в углях механизм сорбции остается постоянным, о чем свидетельствуют Ленгмюровские кривые сорбции.
3. Процессы сорбции зависят от лиофильно-лиофобного баланса в системе адсорбент-адсорбат: увеличение лиофобности адсорбатов приводит к уменьшению их сорбции.

РЕЗЮМЕ

Робота присвячена питанням використання залишкового вугілля в якості вуглецевмістовних сорбентів. Досліджено сорбційну здатність бурого вугілля та залишкового бурого вугілля відносно до аліфатичних спиртів.

SUMMARY

This report is devoted to the questions about using of residual coals as the carboncontented sorbents. Adsorptional abilities of the adsorbents from the brown coal for the aliphatic alcohols were research.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гоба В.Е., Тарковская И. А., Томашевская А.Н. и др. Химическая природа поверхности различных ископаемых углей и возможность их применения в качестве сорбентов // Химия и технология воды. – 1991. – №4. – С.307-309.
2. Патент России № 2015951. Способ получения безбалластного гуммата аммония / Бутюгин А.В., Иванов А.С., Зубкова Ю.Н. Опубл. 15.07.94., БИ №13.
3. Кухаренко Т.А. Химия и генезис ископаемых углей. – М.: ГНТ изд-во лит-ры по горному делу, 1960. – 328 с.
4. Грег С., Синг К. Адсорбция, удельная поверхность, пористость. – М: Мир, 1984. – 306 с.
5. Рабинович В.А., Халин З.Я. Краткий химический справочник. – Л.: Химия, 1978. – 392 с.

Надійшла до редакції 02.12.2000 р.

УДК 542.61

ЭКСТРАКЦИОННОЕ ОТДЕЛЕНИЕ РОДАНИДНЫХ КОМПЛЕКСОВ ПАЛЛАДИЯ (II) ОТ ПЛАТИНЫ, ЦИРКОНИЯ, МОЛИБДЕНА И ДРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ДВУХФАЗНЫХ ВОДНЫХ СИСТЕМАХ

Т.Н. Симонова, Е.С. Гонтарь, А.Н. Рокурн., А.Л. Кострикова

Экстракция роданидных комплексов палладия (II) различными экстрагентами отличается избирательностью [1]. Опасность экстрагентов можно снизить использованием водорастворимых органических растворителей (спиртов, кетонов и др.) в присутствии высаливателей [2]. Установлена возможность экстракционного извлечения роданидных комплексов палладия (II) в расслаивающихся водно-спиртовых системах [3].

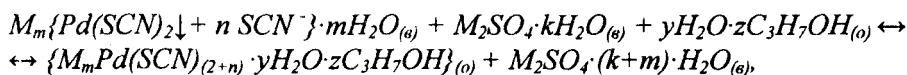
В настоящей работе изучен механизм экстракции роданидных комплексов палладия (II), условия отделения и определения его в водно-спиртовых системах методами спектрофотометрии и атомной абсорбции.

Использовали этиловый спирт ректификованный, изопропиловый спирт, неорганические соли квалификации ч.д.а., х.ч., о.с.ч. Стандартные растворы палладия, циркония, молибдена готовили из металлов о.с.ч. и солей х.ч. Экстракцию проводили при температуре $20 \pm 2^\circ\text{C}$ встряхиванием определенных объемов водной и органической фаз в течение 2 минут, что достаточно для достижения равновесия. Соотношение водной и органической фаз составляло 3:1. В качестве высаливателей применяли 2 и 3 моль/дм³ растворы аммония сернокислого и натрия азотнокислого, 10 моль/дм³ растворы аммония и калия роданистого. Содержание палладия в водной и органической фазах контролировали фотометрическим, атомно-абсорбционным методами, сульфат-, роданид-ионы определяли титриметрическими методами, воду – газохроматографически. Фотометрическое определение проводили на колориметре концентрационном КФК-3. Атомное поглощение палладия измеряли на атомно-абсорбционном спектрометре “Сатурн-2” по резонансной линии 247,6 нм. Для атомизации использовали воздушно-ацетиленовое пламя. Спектры поглощения записывали на спектрофотометре СФ-46.

Гомогенные водно-органические растворы при введении в них электролитов аммония сернокислого, натрия азотнокислого и др. переходят в гетерогенную систему, состоящую из двух жидких фаз – верхней, преимущественно органической и нижней, водно-солевой фазы. Роданидный комплекс палладия (II) экстрагируется этиловым, изопропиловым спиртом, полиэтиленгликолем (ПЭГ-115) на 95-100 %. Высокая экстракционная способность исследованных экстрагентов сопоставима с экстракционной способностью наиболее эффективных экстрагентов трибутилфосфата, метилизобутилкетона, обусловленная условиями гидратации комплексов в равновесных фазах системы. Экстракты на основе полиэтиленгликоля из-за большой вязкости по сравнению со спиртами менее пригодны для атомно-абсорбционного определения палладия. Наиболее быстрое и четкое разделение фаз наблюдается для изопропилового спирта, который был выбран для дальнейших исследований.

Практически полное извлечение роданидных комплексов палладия наблюдается в широком интервале кислотности: от $1 - 2$ моль/дм³ H_2SO_4 и до $\text{pH} < 4$. При $\text{pH} > 5$ экстракция не происходит в связи с уменьшением концентрации ониевого катиона для образования экстрагируемого соединения. Высокая устойчивость роданидного комплекса палладия (II) в водной фазе обуславливает его практически полное извлечение при низких концентрациях роданид-ионов (10^{-4} - 10^{-3} моль/дм³). В отсутствие роданид-ионов палладий (II) не экстрагируется. Характер зависимости (рис. 1) несколько отличается от наблюдаемого в обычных экстракционных системах в области высоких концентраций роданид-ионов, где в кислой среде наблюдается конкурирующая экстракция роданистоводородной кислоты. Палладий (II) экстрагируется из концентрированных растворов роданид-ионов (10 М). Роданид-ион действует как высаливатель, и это приводит к сохранению высокого значения коэффициента распределения палладия из концентрированных растворов роданидов. Изучение распределения роданид- и сульфат- ионов в системе показало, что содержание в органической фазе роданид- и сульфат- ионов составляет 0,50 и 0,80 моль/дм³ соответственно, а воды – 27% об.

Экстракция палладия (II) изопропиловым спиртом в общем виде описывается уравнением:



где $M - NH_4^+, H_3O_2^+$

Количество роданид-ионов и молекул спирта, входящее в состав экстрагируемого соединения, определяли методом сдвига равновесий. Тангенс угла наклона билогарифмической зависимости коэффициента распределения палладия от концентрации роданид-ионов равен двум, а от спирта – трем. Зависимость степени извлечения палладия (II) от концентрации спирта изучали из толуольно-спиртовых смесей. Толуол не экстрагирует роданидный комплекс палладия (II).

В спектрах поглощения экстракта наблюдается максимум поглощения при $\lambda=355\text{нм}$, который совпадает с максимумом поглощения координационно насыщенного комплекса $\text{Pd}(\text{SCN})_4^{2-}$ в водной фазе (рис. 2).

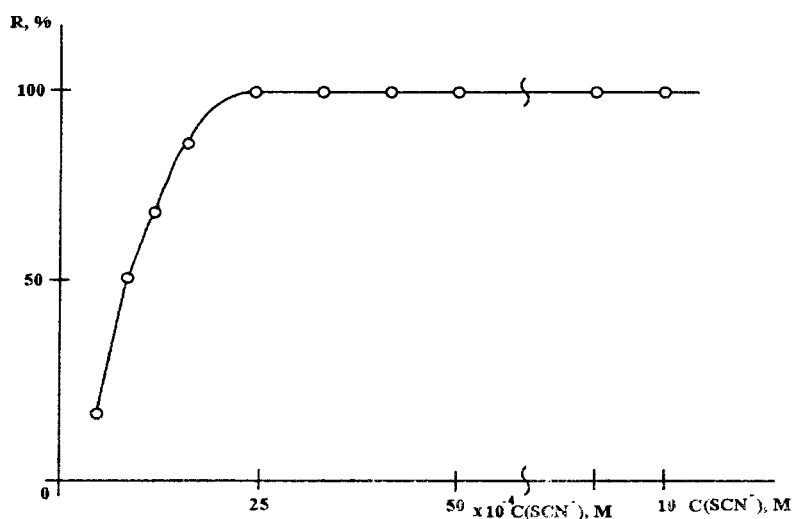


Рис. 1. Зависимость степени извлечения роданидного комплекса палладия (II) от концентрации роданид-ионов.

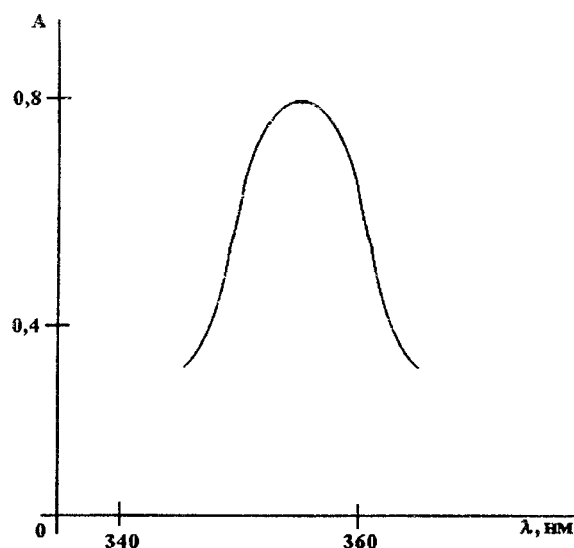


Рис. 2. Спектр поглощения роданидного комплекса палладия (II) в органической фазе.

$$C_{\text{Pd(II)}} = 10^{-4}, C_{\text{NH}_4\text{SCN}} = 10^{-3} \text{ моль/дм}^3.$$

Гидратно-сольватный механизм экстракции изучен методом ИК-спектроскопии. ИК-спектры экстрактов и чистого изопропанола регистрировали в области $4000 - 600 \text{ см}^{-1}$ в кюветах с окошками из бромида калия (раздавленная капля). По сравнению со спектром чистого изопропанола наблюдается существенное уширение полос в области 3200 см^{-1} , $1600 - 1400 \text{ см}^{-1}$, обусловленное образованием водородной связи иона оксония с ОН-группами изопропанола. Это свидетельствует об экстракции изопропанолом ассоциата палладия. Состав экстрагируемого ассоциата можно представить следующей формулой: $M_2[\text{Pd}(\text{SCN})_4 \cdot 3\text{C}_3\text{H}_7\text{OH} \cdot m\text{H}_2\text{O}]$, где $M - \text{NH}_4^+, \text{H}_3\text{O}_2^+$.

При постоянной ионной силе, концентрации ионов водорода, изопропилового спирта и переменной концентрации роданид-ионов с учетом состава экстрагируемого соединения рассчитали константу экстракции по уравнению: $\lg K_{ex} = \lg D - 2 \lg [SCN^-]$ (табл. 1). Близость рассчитанных констант экстракции подтверждает правильность предложенного механизма экстракции роданидного комплекса палладия (II) изопропиловым спиртом.

Таблица 1. Данные для расчета константы экстракции роданидных комплексов палладия (II) изопропиловым спиртом $C(Pd(II)) = 3,5 \cdot 10^{-4}$ моль/дм³

$C(NH_4SCN)$, моль/дм ³ · 10 ⁴	D	$\lg K_{ex}$
5,3	0,85	6,5
7,0	1,8	6,7
11	6,3	6,7
13	10	6,8
16	20	6,9

$$\lg K_{ex\text{ ср}} = 6,7 \pm 0,2$$

Для отделения роданидных комплексов палладия (II) от других элементов нами использованы различия в составе образующихся комплексных соединений, их устойчивости и способности к сольватации молекулами экстрагента в двухфазных водных системах. Высокая прочность роданидного комплекса палладия (II) позволяет отделять его от молибдена (V), циркония (IV) в области малых концентраций роданид-ионов $10^{-3} - 10^{-1}$ моль/дм³. В этой области концентраций роданид-ионов указанные элементы не экстрагируются изопропанолом из концентрированных нитратных растворов. Природа высаливателя влияет на экстракционное поведение в связи с образованием разнорядных ацидокомплексов металлов. Так, из концентрированных сульфатных растворов в области максимального извлечения палладия (II) практически не экстрагируется скандий (III), церий (III), цирконий (IV), гафний (IV) и др. в связи с образованием высокозарядных ацидокомплексов $[Sc(SO_4)_3]^{3-}$, $[Ce(SO_4)_3]^{3-}$, $[Zr(SO_4)]^{4-}$, $[Hf(SO_4)]^{4-}$. Следует отметить, что из концентрированных нитратных растворов скандий (III), цирконий (IV) и др. экстрагируются в виде роданидных комплексов. Ионы металлов, образующие менее устойчивые роданидные комплексы, Pt^{2+} , Ni^{2+} и др. в этих условиях не экстрагируются. При соотношении 1:2 платина (II) и никель (II) не мешают экстракционно-фотометрическому определению палладия (II). Мешающее влияние макроколичеств Fe^{3+} устраняется восстановлением его до Fe^{2+} аскорбиновой кислотой и маскированием фторидами в форме не экстрагируемого изопропанолом высокозарядного ацидокомплекса FeF_6^{3-} . Мешающее влияние макроколичеств меди (II) устраняли тиомочевинной.

Экстракция роданидных комплексов палладия положена в основу определения его в экстракте атомно-абсорбционным и фотометрическим методами.

Введение в пламя спиртовых экстрактов палладия улучшает чувствительность атомно-абсорбционного его определения. Предварительно изучено влияние спирта на атомную абсорбцию палладия в условиях его извлечения в водно-спиртовых расслаивающихся системах (табл. 2). Наиболее стабильное пламя наблюдается в случае применения изопропилового спирта, который был выбран в качестве экстрагента.

Разработана методика экстракционно-атомно-абсорбционного определения микропримесей палладия. Интервал определяемых концентраций палладия в экстракте составляет 0,1-5 мкг/см³. Предел обнаружения палладия снижается за счет абсолютного концентрирования ($V_0:V_5=5:1$) и удаления матрицы железа, меди и др. в экстракционном варианте. Интервал определяемых концентраций палладия экстракционно-фотометрическим методом составляет 1-5 мкг/см³.

Таблица 2. Влияние растворителей на атомную абсорбцию палладия

Растворитель	A/A_0^*	
	В стехиометрическом пламени	В окислительном пламени
Вода	1	1
Этиловый спирт-вода (7:3)	2,3	9,0
Изопропиловый спирт-вода (7:3)	2,0	8,0
Органический экстракт палладия в изопропиловом спирте	2,0	8,0

* A/A_0 – отношение поглощательной способности палладия в органическом растворителе (A) к поглощательной способности палладия в водном растворе (A_0).

Разработаны методики экстракционно-фотометрического и экстракционно-атомно-абсорбционного определения палладия в отходах катализатора и растворах. Правильность методик ана-

лиза доказана методом добавок и сравнением с другим методом. Относительное стандартное отклонение составляет 0,03-0,05.

Предложенные методики отличаются избирательностью, экспрессностью (продолжительность определения – 20 мин.) и исключают использование дорогостоящих и токсичных экстрагентов.

РЕЗЮМЕ

Запропоновано метод екстракційного вилучення та відділення роданідних комплексів паладію від високозарядних комплексів молібдену, цирконію, платини в водно-спиртових системах, що розшаровуються. Методами хімічного аналізу, ІЧ-спектроскопії, зсуву рівноваг встановлено склад сполук паладію, що екстрагуються. Розроблені прискорені методики екстракційно-атомно-абсорбційного та екстракційно-фотометричного визначення паладію в розчинах та відходах каталізаторів.

SUMMARY

Method of extractive removal and separation of palladium (II) rhodanide complexes from highly-charged complexes of molybdenum, zirconium and platinum in stratified water-alcohol systems has been proposed. Composition of the extractable compound has been determined with the help of IR-spectroscopy, chemical analysis and equilibrium shift methods. Express methods of extraction atomic absorption and extraction photometric determination of palladium in the solutions and wastes of catalysts have been elaborated.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Аналитическая химия платиновых металлов / Гинзбург С.И., Езерская Н.А., Прокофьева И.В., Федоренко Н.В. - М.: Наука, 1972. – 616с.
2. Шевчук И.А., Махно А.Я. Закономерности экстракции анионов в системе вода - неорганическая соль - полярный органический растворитель // Укр.хим.журн. – 1989.- Т. 55. – № 4. – С.398.
3. Шевчук И.А., Пахно В.В., Симонова Т.Н. Разделение и концентрирование металлов в водно-спиртовых системах с низко- и высокозарядными ацидокомплексами // Вестник Донецкого университета. – 1998. - № 1. – С.120.

Надійшла до редакції 24.12 2001 р.

УДК 543

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАКРО- И МИКРОЭЛЕМЕНТОВ В ВОЛОСАХ ЧЕЛОВЕКА

И.А. Шевчук, А.С. Алемасова, А.Н. Рокун, Л.А. Шевченко, Е.М. Глушкова
В.В. Рафалюк, Н.Д. Шабанова, С.Н. Романов

Воздействие на население повышенных концентраций загрязняющих веществ, в том числе химических элементов, сопровождается накоплением их в организме человека. Микроэлементный состав биосубстратов (кровь, моча, волосы, ногти, зубы) отражает суммарное поступление загрязняющих веществ из воздуха производственных и жилых помещений, атмосферного воздуха, воды и продуктов питания, а также природные колебания геохимической обстановки. Для многих элементов на воздействие повышенных концентраций в первую очередь реагирует состав волос. Это характерно для таких распространенных токсикантов, как свинец, мышьяк, фтор [1]. Волосы являются легкодоступным биоскопическим материалом, который может храниться в течение длительного срока, одновременно является метаболически активным и в определенной мере отражает изменения, происходящие в организме на клеточном уровне. Волосы – вторая после костного мозга метаболически активная биологическая среда организма [2]. Волосы обладают преимуществом по сравнению с другими биосубстратами: сбор их прост, безболезнен и пригоден для массовых исследований.

Результаты исследований микроэлементного состава волос оцениваются путем сопоставления с физиологическими, допустимыми или критическими уровнями.

Физиологический уровень соответствует естественному содержанию микроэлемента у человека, не имеющего с ним профессионального контакта [1]. Допустимым уровнем накопления считается такое количество вещества в организме, которое при постоянном его содержании не вызывает изменений состояния здоровья человека, обнаруживаемых современными методами исследования [1]. Практически допустимый уровень соответствует верхней границе физиологического содержания. Критический уровень – это такое содержание химического элемента в организме, при котором появляются ранние биохимические изменения, для большинства химических элементов критический уровень выше допустимого в 1,5-3 раза.

В качестве физиологических концентраций микроэлементов в биосубстратах приняты результаты обследования населения, не имеющего профессиональных вредностей и проживающих в городах на территориях с минимальным уровнем загрязнения атмосферного воздуха. В работе [1] проведено сравнение микроэлементного состава волос жителей фоновых районов городов, расположенных в различных природных регионах (Нечерноземный район России, долинный регион Закавказья, горный и долинный Крым) (см. таблицу). Проведено сравнение микроэлементного состава волос женщин в возрасте 20-40 лет, проживающих в этих регионах, на примере 4 микроэлементов, из которых *Pb* и *Cd* – высокотоксичны, а *Cu* и *Zn* относятся к биоэлементам. Из таблицы видно, что средние концентрации как токсичных, так и биоэлементов в волосах жителей различаются между собой не более чем в 2 раза.

Таблица
Содержание (в мкг/г) некоторых элементов в волосах жителей "фоновых" районов городов в различных регионах [1]

Регион	Число проб	<i>Pb</i>	<i>Cd</i>	<i>Cu</i>	<i>Zn</i>
Нечерноземный	38	2,97±0,46	0,26±0,46	14,3±0,7	195,3±10,0
Центрально-черноземный	24	3,07±0,6	0,27±0,05	13,3±1,8	198,6±8,3
Закавказский долинный	29	1,83±0,22	0,34±0,11	12,3±1,04	166,0±11,1
Крым горно-долинный	14	3,3±0,5	0,30±0,03	26,3±3,9	212,0±10,0
Среднее значение по регионам	105	2,7±0,5	0,29±0,07	15,1±1,85	190,2±12,0

Близость микроэлементного состава волос лиц, проживающих в малозагрязненных частях городов, свидетельствует об относительной стабильности микроэлементного статуса организма человека, находящегося в сходных условиях городской среды и защищенного от влияния природных колебаний геохимической обстановки.

При анализе волос используют различные аналитические методы. В работе [1] проанализировано более 1000 образцов волос людей различного возраста, пола и профессий. *Pb*, *Cd*, *Zn* и *Cu* определяли атомно-абсорбционным методом, 22 элемента (*Hg*, *V*, *Cr*, *Co* и др.) – нейтронно-активационным. В работе [3] в качестве метода исследования была выбрана инверсионная вольтамперометрия, которая позволяет обнаруживать концентрации тяжелых металлов (*Cd*, *Pb*, *Cu*) на уровне мкг/л. В статье [4]

приведена методика количественного спектрального анализа волос (всего определено 24 элемента). В наших исследованиях для определения элементов был использован атомно-абсорбционный метод анализа с электротермической и пламенной атомизацией. Для измерения концентрации элементов в растворах, полученных после кислотного вскрытия навесок волос, использовали спектрометр Сатурн-3. Содержание калия определяли в режиме пламенной фотометрии. Температурно-временные условия нагрева графитовой печи оптимизировали на стадиях сушки, озоления, атомизации, высокотемпературной очистки для каждого элемента с целью достижения максимальной чувствительности определения. Расход инертного газа во внутренней полости печи варьировался в каждом конкретном случае для достижения линейности градуировочного графика. В работе использовали графитовые печи с пиролитическим покрытием, измерения проводили с дейтериевым корректором неселективного поглощения. Сигнал регистрировали в единицах интегральной интенсивности с помощью ЭВМ. В отдельных пробах волос, переданных на анализ специалистами-медиками, мы определяли содержание цинка, магния, железа, меди, кальция, калия, кадмия, свинца, алюминия, марганца, хрома. При $n=6$ и $P=0.95$ относительное стандартное отклонение составляло 0,05 для цинка и 0,26 для хрома. Относительное стандартное отклонение для других элементов находилось в этих пределах.

Таким образом, изучены условия вскрытия пробы и определения макро- и микроэлементов атомно-абсорбционным методом на спектрометре Сатурн-3 в волосах людей при некоторых заболеваниях. Полученные данные анализа переданы специалистам-медикам для выявления возможности использования их в диагностических и лечебных целях. Проведено обобщение литературных и наших экспериментальных данных анализа волос человека по разным регионам и группам больных и здоровых людей, что позволяет делать выводы о влиянии экологической обстановки на содержание отдельных элементов в волосах человека. Это особенно важно с учетом того, что волосы сохраняют информацию о составе в течение длительного времени.

РЕЗЮМЕ

Вивчені умови визначення макро- і мікроелементів атомно-абсорбційним методом на спектрометрі Сатурн-3 в волосі людей при деяких захворюваннях. Оптимізовані умови нагріву графітової печі на стадіях сушки, озоління, атомізації, високотемпературного очищення для кожного елемента з метою досягнення максимальної чутливості визначення. Проведено узагальнення літературних та власних експериментальних даних аналізу волос людини по різних регіонах і групам хворих та здорових людей. Ці дослідження дають змогу зробити певні висновки про вплив екологічної обстановки на вміст окремих елементів у волосі людини.

SUMMARY

The conditions of macro- and microelements' atomic absorption determination with spectrometer Saturn-3 in human hair with some diseases were studied. Graphite furnace temperature programmes are improved for drying, pyrolysis, atomization, cleaning steps for each element with the aim of reaching maximum sensitivity of the methods. Literature and own experimental data of human hair analysis in different regions of healthy and sick people have been generalized. Investigations allow to do conclusions about environmental influence on contents of some elements in human hair.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ревич Б.А. Химические элементы в волосах человека как индикатор воздействия загрязнения производственной и окружающей среды // Гигиена и санитария. – 1990. – №3. – С.55-59.
2. Юдина Т.В., Гильденскиольд Р.С., Егорова М.В. Определение тяжелых металлов в волосах // Гигиена и санитария. – 1988. – №2. – С.50-52.
3. Олихова С.В., Табачников М.М., Геворгян А.М., Жошкун Э., Киреев Г.В. Содержание кадмия, свинца и меди в организме жителей Ташкента и Ташкентской области // Гигиена и санитария. – 2000. – №3. – С.11-12.
4. Павлов Ю.В., Агаджанян Н.А., Алисиевич В.И., Чеховских М.М. О сравнительном изучении макро- и микроэлементного состава волос головы у жителей различных регионов // Физиология человека. – 1989. – Т.15, №1. – С.154-161.

Надійшла до редакції 25.11.2001 р.

УДК 546.831'821'815''711:537.226.227.33

МОДИФИЦИРОВАНИЕ ПИРОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ КЕРАМИКИ ЦТС ОКСИДОМ МАРГАНЦА

Е.И. Гетьман, Л.В. Пасечник

Добавку марганца, широко применяемую для модифицирования пьезокерамики цирконата-титаната свинца (ЦТС), многие относят к так называемым стабилизаторам [1,2], оказывающим действие на свойства материала (аналогичное действию сегнетожестких добавок, замедляющих рост зерен керамики [3]), но не входящих в кристаллическую решетку, хотя на этот счет существуют различные мнения. В отличие от авторов [4], относящих марганец к акцепторным (т.е. "сегнетожестким") добавкам, авторы [5], изучая влияние различных модификаторов на свойства $PbTi_{0,47}Zr_{0,53}O_3$, отмечают, что добавка марганца проявляет четко выраженные донорные и "сегнетомягкие" свойства, приближающие ее к таким как Nb , Bi , La . Однако, в отличие от прочих сегнетомягких добавок, марганец несколько уменьшает диэлектрическую проницаемость (ϵ) и тангенс угла диэлектрических потерь ($tg \delta$). Эта особенность делает марганец весьма ценным модификатором при получении пироэлектрической керамики. Однако, исследование модифицирования марганцем твердых растворов с низким содержанием титана [6-8] были направлены в основном на создание электромеханических преобразователей и не касались пироэлектрических свойств.

В данной работе представлены результаты исследований влияния оксида марганца на свойства керамики ЦТС состава $Pb(Ti_{0,1}Zr_{0,9})O_3$, применяемого при разработке пироэлектрических материалов.

Оксид марганца Mn_2O_3 вводили в ЦТС сверх стехиометрии в количестве $x = 0; 0,001; 0,0025; 0,005; 0,01; 0,02; 0,04; 0,06; 0,08; 0,10$ (x - мольная доля добавки). При спекании использовали засыпку, соответствующую основному составу ЦТС. Образцы синтезировали из промышленных оксидов PbO "ос.ч." и TiO_2 "ч.д.а.". Оксид циркония получали прокаливанием гидроксида циркония при $800^\circ C$. Оксид марганца Mn_2O_3 получали термическим разложением карбоната марганца. Синтезировали шихту в две стадии: по 4 ч. при 800 и $850^\circ C$ с промежуточной гомогенизацией. Спекали 2 ч. при $1200^\circ C$. Подготовку и исследование образцов осуществляли по методике, описанной в [9]. Энергию активации примесной проводимости (ΔE) рассчитывали по данным температурной зависимости удельного электросопротивления (ρ). Величину пироэлектрической э.д.с. (V) измеряли динамическим методом [10]. Частота модуляции теплового потока равнялась 30 Гц. Рентгенофазовый анализ (РФА) проводили на дифрактометрах УРС-50-ИМ и ДРОН-2 с использованием $Si K\alpha$ излучения.

Методом РФА во всем интервале концентраций не обнаружено присутствия второй фазы. Модифицированная керамика имеет ромбоэдрическую структуру, и ее рентгенограмма почти не отличается от рентгенограммы $Pb(Ti_{0,1}Zr_{0,9})O_3$. Уменьшение параметра субъединицы a при повышении концентрации добавки до $x=0,04$ (рис.1, б), указывает на то, что марганец входит в структуру твердого раствора. Об этом также свидетельствует монотонное понижение температуры Кюри в указанном интервале концентраций добавки на $20^\circ C$ (рис.1, а).

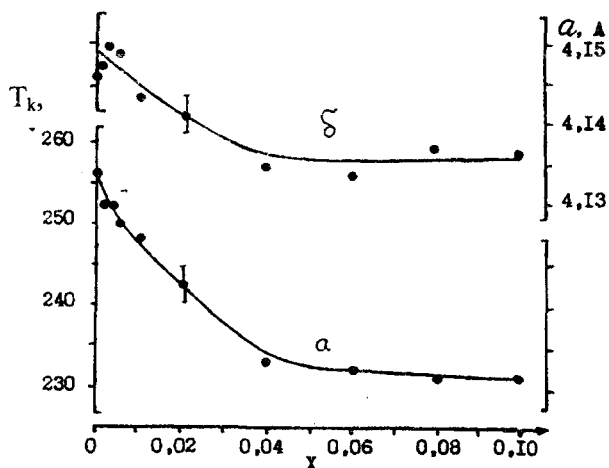


Рис. 1. Зависимость температуры Кюри T_K (а) и параметра a субъединицы (б) керамики $Pb(Zr_{0,9}Ti_{0,1})O_3$, модифицированной Mn_2O_3 от концентрации добавки (x - мольная доля добавки).

Гравиметрический анализ изменения массы образцов после спекания показал, что в образцах, содержащих до 0,01 моля Mn_2O_3 , наблюдается незначительное уменьшение массы (0,33%). При дальнейшем повышении содержания оксида марганца убыль массы растет от 0,5% (при $x=0,01$) до 1,75% ($x=0,1$). Добавка марганца слабо влияет на плотность керамики. Плотность, определенная методом гидростатического взвешивания, после шлифования образцов несколько понижается. По-видимому, поверхностные слои керамики имеют меньшую пористость. Некоторое повышение плотности образцов, содержащих 0,005 моля Mn_2O_3 , вероятно связано с уменьшением открытой пористости керамики.

При введении до 0,005 моля Mn_2O_3 несколько уменьшаются диэлектрические потери (рис.2, б). При более высоком содержании марганца диэлектрические потери начинают возрастать, достигая максимума в образцах, содержащих 0,06 моля Mn_2O_3 ($tg\delta = 0,05-0,06$), а затем снижаются. Такое же аномальное повышение потерь наблюдалось в зоне тетрагонально-ромбоэдрического фазового перехода в образцах ЦТС, содержащих от 0,005 до 0,02 молей оксида марганца [11]. Вероятно, в нашем случае высокие диэлектрические потери при повышении концентрации оксида марганца можно объяснить теми же причинами, что и в работе [11], то есть локальной проводимостью вблизи границ зерен, обусловленной кислородными вакансиями, связанными с примесными центрами марганца.

Диэлектрическая проницаемость снижается почти вдвое при введении до 0,01 моля Mn_2O_3 (рис.2,а). При $x=0,02$ ϵ немного повышается и дальнейшее увеличение концентрации марганца в ЦТС практически не влияет на ϵ . Диэлектрическая проницаемость после поляризации образцов (ϵ_n) немного снижается (рис.2, а).

На графической зависимости пироэлектрической э.д.с. (V) от количества добавки оксида марганца (рис.2, в) наблюдается резкий максимум при $x=0,0025$ Mn_2O_3 . Повышение концентрации до $x=0,02$ приводит к снижению пироактивности почти до исходного состояния и еще ниже пиро-э.д.с. в образцах, содержащих 0,04-0,06 моля Mn_2O_3 . Сравнивая величины пиро-э.д.с. и диэлектрических потерь, можно заметить, что самую низкую пироактивность имеют образцы с высокими диэлектрическими потерями.

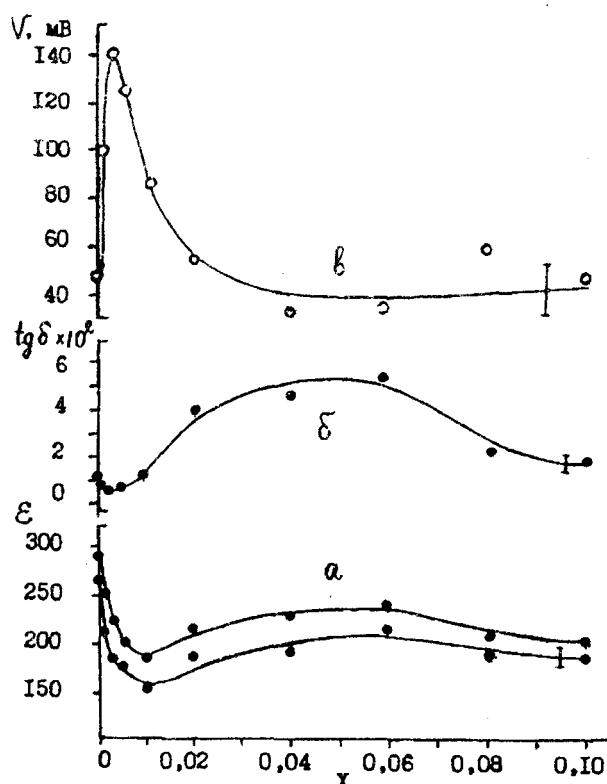


Рис. 2. Зависимость электрофизических свойств керамики $Pb(Zr_{0.9}Ti_{0.1})O_3$, модифицированной Mn_2O_3 от концентрации добавки: а – диэлектрическая проницаемость до (ϵ) и после поляризации (ϵ_n); б – диэлектрические потери; в – пироэлектрическая э.д.с. (x – мольная доля добавки).

Исследования электросопротивления керамики $Pb(Ti_{0.1}Zr_{0.9})O_3$ в зависимости от концентрации оксида марганца показали, что 0,001 моля Mn_2O_3 на порядок повышает сопротивление при 150°C (рис.3,а). При этом существенно возрастает энергия активации примесной проводимости (рис.3, б).

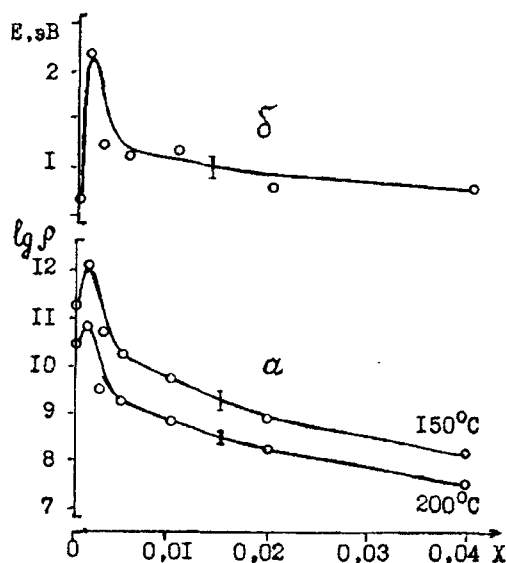


Рис. 3. Влияние концентрации добавки Mn_2O_3 на логарифм удельного электросопротивления (а) и энергию активации (б) $Pb(Zr_{0.9}Ti_{0.1})O_3$ (x – мольная доля добавки).

Наибольшие изменения свойств цирконата-титаната свинца, модифицированного марганцем, наблюдаются в интервале концентраций 0,001- 0,01 моля Mn_2O_3 . И хотя по данным рентгенографического анализа и изменению температуры фазового перехода можно заключить, что в структуру ЦТС входит до 0,04 моля Mn_2O_3 , однако очевидно, что характер вхождения марганца до $x=0,01$ и в интервале $x = 0,01 - 0,04$ различен и эта особенность отражается на свойствах модифицированного марганцем цирконата-титаната свинца. Оптимальными пьезоэлектрическими свойствами обладает керамика, модифицированная 0,0025 моля Mn_2O_3 .

РЕЗЮМЕ

Досліджено вплив марганцю на властивості $Pb(Zr_{0.9}Ti_{0.1})O_3$. Встановлено, що 0,04 моля Mn_2O_3 входить до структури твердого розчину. Найсуттєвіші зміни властивостей спостерігаються в інтервалі концентрацій 0,001-0,01 моля Mn_2O_3 . Відзначено різний характер входу марганцю до структури ЦТС в залежності від концентрації, що відбивається на діелектричних та пієоелектричних властивостях кераміки.

SUMMARY

The influence of doping Mn on the properties of $Pb(Zr_{0.9}Ti_{0.1})O_3$ have been investigated. It has been establish, that 0,04 mol Mn_2O_3 enters into structure of solid solution. The most changing of properties are observed in the interval of concentrations 0,001-0,01 mol Mn_2O_3 . Canceling different nature of entering a manganese in structure PZT depending on concentrations, that reflected on dielectric and pyroelectric characteristics of modified ceramics.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Hardtl K.H. Physics of ferroelectric ceramics used in electronic devices. // *Ferroelectrics*. - 1976. - V.12. - P.9 -19.
2. Thimann H. Stabilization effects in piezoelectric lead titanate zirconate ceramics. // *Ferroelectrics*. - 1972. - V.4. - P.141-146.
3. Климов В.В., Дидковская О.С., Савенкова Г.Е., Веневцев Ю.Н. Пьезокерамика раз личного назначения. // *Неорган. матер.* - 1995. - Т.31, № 3. - С.419-422.
4. Яффе Б., Кук У., Яффе Г. Пьезоэлектрическая керамика. - М.: Мир. - 1974. - 288 с.
5. Приседский В.В., Климов В.В., Клевова Л.Г. Исследование природы влияния модификаторов на свойства пьезокерамических материалов на основе цирконата-титаната свинца. // В сб.: Матер. IV межотр. конф. по методам получения и анализа ферритовых, сегнето-, пьезоэлектрических материалов и сырья для них. - М.: Изд. МДНТП - 1973. - С.72-92.
5. Малютин Б.И., Ионов С.Г., Поландов И.Н. и др. Исследование фазовых Р-Т-диаграмм сегнетоэлектрической керамики $Pb(Ti,Zr)O_3$ с малым содержанием Ті и добавками Мп. // *Вестн. Моск. ун-та. Сер.2. Химия.* - 1981. - Т.22, N1. - С.92-96.

6. Селикова Н.И., Звоник В.А., Шапоренко С.Э. и др. Исследование твердых растворов системы $Pb(Zr,Ti)O_3$ с малым содержанием титана и модифицирующими добавками. // В сб.: Химия и технология материалов для электронной техники. - М.: НИИТЭХИМ. - 1990. - С.22-27.
7. Поландов И.Н., Малютин Б.И., Ищук В.М. Влияние модифицирующих добавок на диэлектрические свойства керамики ЦТС с малым содержанием титана. // Вестн. Моск. ун-та. Сер.2.- 1986. - Т.27, N3.- С.317-321.
8. Гетьман Е.И., Пасечник Л.В., Леон Л.А., Удодов И.А. Электрофизические свойства цирконата-титаната свинца. // Изв. АН СССР. Неорган. материалы. - 1986.-Т.2, №7.- С.1142.
- 10 Кременчукский Л.С. Сегнетоэлектрические приемники излучения.- Киев: Наукова думка.-1971.- С.196.
- 11 Wersing W. Anomalous dielectric losses in manganese doped lead-titanate-zirconate ceramics. // Ferroelectrics. - 1978. - V.22.- P.813-815.

Надійшла до редакції 10.01. 2001 р.

УДК 547:547.811+547.455; 678.028

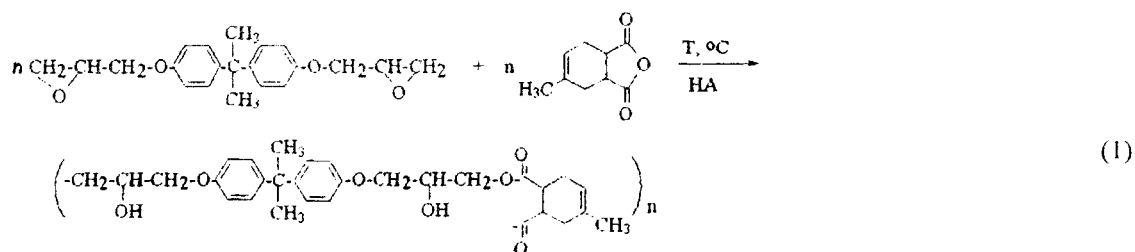
ЗАКОНОМЕРНОСТИ АНГИДРИДНОГО ОТВЕРЖДЕНИЯ ЭПОКСИДНОЙ СМОЛЫ ЭД-20 В ПРИСУТСТВИИ КОМПЛЕКСОВ ТРИФТОРИДА БОРА С АМИНАМИ

Е.И. Швед, И.М.Серебряков, М.А. Синельникова

Развитие новых поколений радиотехники, опто- и радиоэлектроники невозможно без создания качественно новых материалов, выдерживающих, например, условия экстремальной эксплуатации. Одними из таких материалов являются эпоксидные смолы (ЭС). Качество используемых эпоксидных смол и область их применения зависят, кроме других факторов, от температуры их отверждения. Поэтому, актуальной является проблема поиска эпоксидных композиций холодного отверждения (60-100°C). Известно несколько способов отверждения эпоксидных смол: аминами [1], ангидридами [2,3], другими сшивающими агентами [4], а также путем каталитической полимеризации без сшивающих агентов [1]. Образующиеся при этом полимеры существенно отличаются по свойствам. Полимеры, полученные путем ангидридного отверждения эпоксидных смол, характеризуются повышенной термостойкостью, лучшими физическими и электрическими свойствами, при температурах выше температуры размягчения имеют более высокую радиационную стойкость [5]. Ангидридные отвердители обладают низкой реакционной способностью. Для ускорения процесса отверждения в систему вводят катализаторы, большей частью основного характера [5], а также кислоты Льюиса. Однако аминные ускорители мало реакционноспособны, имеют достаточно большое время желатинизации композиции, вместе с тем их использование позволяет снизить температуру отверждения. Для ускорения аминного отверждения ЭС довольно часто применяют комплексы трехфтористого бора с аминами [6].

Ранее [7] нами была показана возможность использования подобных комплексов для ангидридного отверждения, что позволяет широко варьировать время реакции и жизнеспособность эпоксидных композиций при различных температурах. Для получения количественных закономерностей процесса ангидридного отверждения ЭС в присутствии комплексов BP_3 с аминами представлялось необходимым изучить, в первую очередь, влияние структуры амина в комплексе, а также температуры.

В качестве объекта исследования выбраны эпоксидное соединение ЭД-20 - диглицидиловый эфир 4,4'-бис-(4-оксифенил)пропана и изометилтетрагидрофталевый ангидрид (ИМТГА). Взаимодействие между этими компонентами осуществляется согласно схеме:



где HA - протонсодержащие добавки: спирты, амины и т.д.

В соответствии со схемой (1), исходные компоненты взяты в мольных соотношениях 1:1. Однако, комплексы трехфтористого бора с аминами плохо растворяются в большинстве органических растворителей, в данном случае в ЭС. Для повышения растворимости комплексов в изучаемую систему введен триэтиленгликоль (ТЭГ), который одновременно является и пластификатором. Для оценки влияния температуры на каталитическую активность комплексов в реакции (1) исследования проведены при 30-120 °С в зависимости от природы амина. С учетом затвердевания реакционной массы по ходу исследуемого процесса расчет констант скорости путем отбора проб затруднен. Поэтому, используя свойство инвариантности реакций 1 и 2 порядка, удобно вместо наблюдаемой константы скорости использовать величину, линейно связанную с ней и легко определяемую экспериментально. Так, в ряде работ [6,7] такой величиной было выбрано время желатинизации. Для определения зависимости между временем желатинизации и наблюдаемой константой скорости исследована величина выхода продукта полимеризации в точке желатинизации (табл.1).

Данные, приведенные в табл.1, показывают, что степень конверсии эпоксидных групп в точке желатинизации в первом приближении не зависит от структуры катализатора и температуры и для исследуемой системы составляет 55-68%. Это позволяет использовать линейную зависимость между константой скорости и величиной $1/t_g$ для сравнения эффективности ускорителей и параметров реакции (1):

$$k = \text{const}/t_g$$

Таблиця 1.

Зависимость времени желатинизации (t_g) эпоксидной композиции от степени конверсии мономера при варьировании структуры ускорителя и температуры отверждения

Амин	$T, ^\circ\text{C}$	t_g , мин	Выход, %
$\text{C}_6\text{N}_5\text{NH}_2$	50	27	61
	60	10	63
4- $\text{NO}_2\text{C}_6\text{H}_4\text{NH}_2$	30	21	55
$\text{C}_6\text{H}_5\text{CH}_2\text{NH}_2$	90	21	68
4- $\text{CH}_3\text{OC}_6\text{H}_4\text{N}(\text{CH}_3)_2$	120	55	65

Экспериментальные данные по времени желатинизации в зависимости от температуры и структуры ускорителя приведены в табл. 2.

Таблиця 2.

Зависимость времени желатинизации эпоксидной композиции (ЭД-20:ИМГФА:ТЭГ) от структуры ускорителя (0,24 М) при различных температурах

Амин • BF_3	$T, ^\circ\text{C}$	$t_{\text{ж}}$ мин	$\eta_{\text{ж}}, [\text{g/l}]$
$\text{C}_6\text{P}_5\text{TP}_2$	50	27	4,58
	60	10	
	70	4	
4- $\text{NO}_2\text{C}_6\text{H}_4\text{NH}_2$	30	21	1,02
	40	4	
	50	1,7	
4- $\text{ClC}_6\text{H}_4\text{NH}_2$	40	49	3,98
	50	18	
	60	8	
4- $\text{NH}_2\text{C}_6\text{H}_4\text{NH}_2$	70	42	4,52
	80	27	
	90	13	
$\text{C}_6\text{H}_5\text{NHC}_6\text{H}_5$	70	35	4,85
	85	18	
	100	3,5	
$\text{C}_6\text{H}_5\text{N}(\text{CH}_3)_2$	70	180	5,15
	100	70	
	120	50	
3- $\text{NO}_2\text{C}_6\text{H}_4\text{N}(\text{CH}_3)_2$	30	12	3,07
	40	6	
	50	2	
4- $\text{BrC}_6\text{H}_4\text{N}(\text{CH}_3)_2$	70	210	4,48
	100	55	
	120	35	
4- $\text{CH}_3\text{OC}_6\text{H}_4\text{N}(\text{CH}_3)_2$	70	270	5,94
	100	85	
	120	55	
$\text{C}_6\text{H}_5\text{CH}_2\text{NH}_2$	70	75	9,02
	85	35	
	100	9	
$\text{C}_6\text{H}_5\text{CH}_2\text{N}(\text{CH}_3)_2$	100	85	9,62
	110	55	
	120	35	
Пиридин	100	70	11,1
	110	45	
	120	30	
N-метилпиридин	100	95	10,1
	110	40	
	120	70	
CH_3CONH_2	0	5	0,4
	18	0,5	
Изохинолин	100	120	4,56

Данные табл.2, показывают, что введение в бензольное кольцо ариламина электроакцепторных заместителей приводит к росту каталитической активности комплексов, что связано, по-видимому, с уменьшением их прочности. Как следует из предварительных качественных исследований [7], первичные амины проявляют большую каталитическую активность по сравнению с третичными. Следует отметить ряд интересных закономерностей. Уменьшение числа заместителей у атома азота в случае анилинов приводит к увеличению реакционной способности в ряду: диметиланилин-N-метиланилин-анилин, что согласуется с основностью указанных аминов. Вместе с тем, у анилина и 4-бромдиметиланилина значения pK_a примерно одинаковые, но они сильно отличаются по своей каталитической активности. Комплексы диметиланилина и изохинолина с BF_3 проявляют более низкую каталитическую активность по сравнению с комплексом более основного первичного бензиламина. Однако, в общем случае не наблюдается прямолинейной зависимости между понижением каталитической активности комплексов аминов и увеличением их основности.

Существенную роль на условия отверждения оказывает температурный фактор. Так, время отверждения эпоксидной композиции (1) с участием комплекса анилина при 70°C составляет 4 мин., а при 60°C - 10 мин. Для оценки энергетических параметров изучаемой реакции удобным является уравнение Аррениуса:

$$k = A e^{-E_a/RT} \quad (2)$$

Обработка данных табл.2 по уравнению (2) показывает наличие прямолинейной зависимости $\lg(1/t_g)$ от $1/T$, что позволяет рассчитать энергию активации (E_a) и предэкспоненциальный множитель (A) (табл.3).

Таблица 3.

Энергетические параметры реакции отверждения композиции (ЭД-20:ИМГФА:ТЭГ) в присутствии комплексов трифторида бора с аминами

Амин • BF_3	A	E_a , кДж/моль	$\Delta H^\ddagger$, кДж/моль	γ
$C_6H_5NH_2$	$3,9 \times 10^{13}$	109 ± 14	106,3	2,7
$4-NO_2C_6H_4NH_2$	$3,22 \times 10^{16}$	103 ± 13	100,6	3,7
$4-ClC_6H_4NH_2$	$5,55 \times 10^9$	49 ± 8	46,8	2,5
$4-NH_2C_6H_4NH_2$	$3,75 \times 10^7$	61 ± 10	57,7	1,8
$C_6H_5NHCH_3$	$3,8 \times 10^8$	81 ± 10	78,3	2,2
$C_6H_5N(CH_3)_2$	8,7	36 ± 4	69,9	1,4
$3-NO_2C_6H_4N(CH_3)_2$	$5,8 \times 10^8$	70 ± 9	49,5	2,4
$4-BrC_6H_4(CH_3)_2$	59,7	41 ± 5	48,6	1,4
$4-CH_3OC_6H_4N(CH_3)_2$	1,3	30 ± 5	47,1	1,3
$C_6H_5CH_2NH_2$	$2,08 \times 10^7$	75 ± 7	33,3	2,4
$C_6H_5CH_2N(CH_3)_2$	$2,2 \times 10^3$	53 ± 2	67,2	1,6
Пиридин	$1,4 \times 10^3$	52 ± 3	37,9	1,5
N-метилпиридин	$1,2 \times 10^3$	50 ± 2	26,6	1,5

Так, в ряду анилин, N-метиланилин, N,N-диметиланилин наблюдается прямолинейная зависимость между энергией активации и основностью амина. Аналогичная зависимость наблюдается в ряду диметиланилин, п-бромдиметиланилин, п-метоксидиметиланилин.

Взаимосвязь между значением A и основностью амина не наблюдается. Следует отметить, что для стерически затрудненных аминов, таких как третичные амины, A в большинстве случаев мал, например, у н-метоксидиметиланилина, N,N-диметиланилина.

Таким образом, исследование процесса отверждения эпоксидной смолы ЭД-20 показано, что амины по каталитическим свойствам их комплексов с BF_3 могут быть разделены на 2 группы.

В первую группу входят третичные амины сравнительно высокой основности, например, диметиланилин диметилбензиламин, изохинолин. Для этой группы аминов характерны низкие энthalпии и энергии активации, что свидетельствует в пользу электрофильного катализа

Во вторую группу входят малоосновные ароматические третичные амины, например, м-нитродиметиланилин, а также первичные и вторичные амины. Для комплексов этой группы характер-

ны высокие энтальпии и энергии активации, что свидетельствует в пользу кислотного катализа.

Таким образом, предложенные комплексы аминов с BF_3 являются эффективными катализаторами процесса ангидридного отверждения эпоксидных смол, причем параметры отверждения и жизнеспособность композиции можно варьировать, изменяя состав комплекса. Ангидридное отверждение изучаемой реакции идет по электрофильному или кислотному механизму в зависимости от природы амина.

РЕЗЮМЕ

Для створення ангідридних композицій на основі епоксидної смоли ЕД-20 запропоновані каталізатори процесу затвердження на основі комплексів амінів з трифторидом бору. Використання цих комплексів дозволяє широко варіювати час та температуру затвердження композицій.

SUMMARY

The effective hardening process catalysts based on the complexes of boron trifluoride with amines are proposed for the obtaining of the epoxide compositions on the basis of epoxy monomer ED-20. The application of these complexes permits to vary widely the hardening time and temperature of the compositions.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Пат. Швейцарии 483467, C08G 30/10, C07D 3/68. Отверждающие смеси из эпоксидных смол, ангидридов полкарбоновых кислот и ускорителей отверждения аминного типа - Заявл. 8.12.67 - Оpubл. 13.02.70.
2. Пат. ФРГ 37060886 C08G59/68, C08L 63/60. Ускорители отверждения эпоксидных смол ангидридами и их применение для оптоэлектронных конструкционных элементов. - Заявл. 25.02.1987. - Оpubл. 08.09.1988.
3. Пат. США 4321351, C08G 59/42. Process for production of epoxy resin castings. - Заявл. 27.10.1980. - Оpubл. 23.03.82.
4. Пат. США 4663397, C08G 60/00. Thermosetting resin composition. - Заявл. 24.03.1986. - Оpubл. 5.05.1987.
5. Пакен А. М. Эпоксидные соединения и эпоксидные смолы. - Л.: ГНТИ, 1962. -962с.
6. Ли Х., Невилл К. Справочное руководство по эпоксидным смолам. - М.: Энергия, 1973.-415с.
7. Пат. УКР №24708А. Серебряков І.М., Швед О.М., Олгєник М.М. Композиція ангидридного затвердження.// № 95010082 - Заявл. 4.01.95. - Оpubл. 30.10.98.
8. Справочник химика/ Под ред. Никольского В.П. и др.// М.: Химия. -1971. - Т.3. -1004с.

Надійшла до редакції 25.12.2000 р.

УДК 661.635.413(088.8)

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ ГИДРОКСИАПАТИТ И КЕРАМИКА НА ЕГО ОСНОВЕ

Г.М. Розанцев, Е.Е. Белоусова, Л.В. Заславская, О.В. Загорюлько

Среди биоматериалов, применяемых для ортопедии, особое место занимает биокерамика на основе фосфатов кальция [1–3]. Перспективным представляется создание биокерамических материалов на основе гидроксиапатита кальция, который по химическому составу близок к естественному материалу кости. Применение имеющейся на сегодняшний день гидроксиапатитной биокерамики в таких областях медицины, как травматология, ортопедия, стоматология невозможно из-за ее недостаточных прочностных характеристик. Ведутся разработки по созданию новых материалов на основе гидроксиапатита с улучшенными прочностными свойствами, которые должны оставаться близкими к характеристикам органической костной ткани. Этому пытаются добиться введением в гидроксиапатит различных добавок: оксидов циркония, иттрия и магния [3–6].

В данной работе представлены результаты синтеза модифицирующих добавок к гидроксиапатиту кальция с целью изучения их влияния на свойства апатитовой керамики.

1. Гидроксиапатит кальция, модифицированный ионами лантана и кремния.

Большое внимание уделяется апатитоподобным структурам, в которых возможно замещение ионов без нарушения апатитовой структуры, что делает такие соединения перспективной группой с контролируемыми свойствами.

Известно, что редкоземельные элементы входят в состав бритолиит-абукумулитовой серии

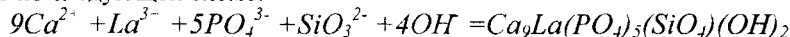
Бритолиит $(Ca,Ce)_{10}\{(Si,P)O_4\}_6(OH,F)_2$

Абукумулит $(Ca,Y)_{10}\{(Si,P)O_4\}_6(OH,F)_2$

Поскольку анионные группы $(PO_4)^{3-}$ замещаются в этих структурах на разные по величине ионы $(SiO_4)^{4-}$, то возникает возможность компенсации валентностей в катионной части: замещение Ca^{2+} на La^{3+} . В связи с этим целью данного этапа работы являлось получение из водных растворов гидроксиапатита кальция, модифицированного ионами лантана и кремния, присутствие которых в конечном продукте позволило бы улучшить механические свойства керамики на основе гидроксиапатита.

Для синтеза гидроксиапатита кальция, модифицированного ионами лантана и кремния (ГАКЛ) использовали растворы нитратов кальция и лантана ($C=0,06$ моль/л), метасиликата натрия ($C=0,2$ моль/л), однозамещенного фосфата натрия ($C=0,07$ моль/л), гидроксида натрия ($C=0,7$ моль/л).

Образование модифицированного гидроксиапатита состава $Ca_9La(PO_4)_5(SiO_4)(OH)_2$ (ГАКЛ) возможно по следующей схеме:



Гидроксогруппы в указанной схеме реакции выполняют две функции: переводят метасиликат-ион в ортоформу и входят в структуру гидроксиапатита лантана и кремния. Выбор области pH осаждения указанного соединения был проведен на основании моделирования процессов в исходных растворах. Установлено, что первая функция OH-группы выполняется в области $pH=12,5$. Метасиликат-ион практически переходит в ортоформу, кальций находится в виде $CaOH^+$, фосфор в виде PO_4^{3-} . Поэтому осаждение ГАКЛ проводили при pH от 12,5 до 13,5. Рабочими выбраны значения: 12,5; 12,6; 12,75; 13,0; 13,25, а для сравнения один из синтезов проводили при естественном значении pH исходных растворов.

Для осуществления реакции по предложенной схеме предварительно смешивали растворы катионов и анионов. Приготовление смеси катионов проводили медленным добавлением раствора $La(NO_3)_3$ в соотношении $Ca/La=9,0$ к раствору нитрата кальция до $pH=6,73$.

Раствор анионов готовили следующим образом: к рассчитанному количеству раствора Na_2HPO_4 с $pH=9,0$ приливали в соотношении $P/Si=5,0$ раствор Na_2SiO_3 с $pH=13,25$. Полученная смесь растворов имела $pH=11,2$. Затем добавляли гидроксогруппы до значений pH , выбранных в качестве рабочих.

Синтез осуществляли в реакторе при температуре $100^\circ C$ в течение двух часов. Полученные осадки отфильтровывали через плотный фильтр, промывали водой до нейтрального значения pH и высушивали. Затем синтезированные образцы прокаливали в течение четырех часов и анализировали методом рентгенофазового анализа (РФА).

По данным РФА порошки, синтезированные при pH маточного раствора 11,2 с последующим прокаливанием при $800^\circ C$, представляют собой смесь средних фосфатов кальция, лантана и силиката кальция $CaSiO_3$.

Введение OH-групп в процессе синтеза для увеличения pH до 12,5 сопровождается образованием наряду с фосфатом лантана и трикальцийфосфатом, гидроксиапатита кальция, о чем свидетельствуют

штрихрентгенограммы, представленные на рис.1. При увеличении pH до 13,25 происходит образование продукта со структурой гидроксиапатита кальция, рефлексы которого смещены в сторону меньших углов.

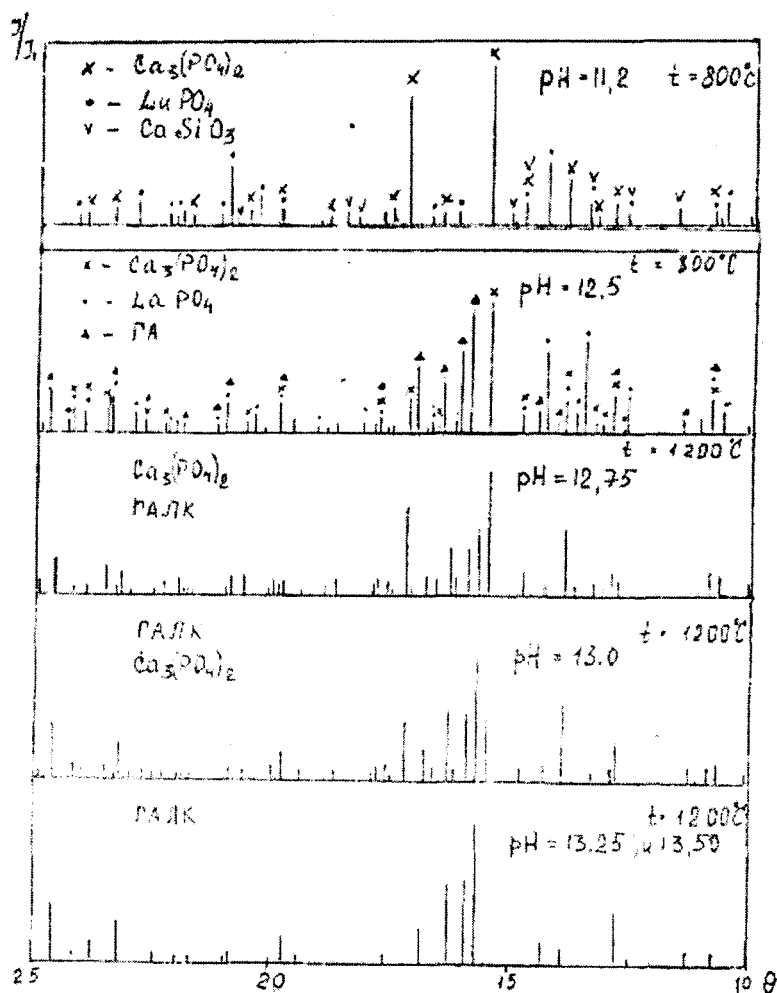


Рис. 1 Штрихдифрактограммы образцов синтезированных при разных значениях pH .

Синтезированные образцы использовали для приготовления керамики с предварительным перетиранием в течение одного часа, перенесением их в формы, гидростатическим прессованием и отжигом при температуре $1200^{\circ}C$ в течение трех часов.

При исследовании механических свойств акцент делался на изучении границы прочности на изгиб σ (МПа) образцов, синтезированных при различных значениях pH (рис.2).

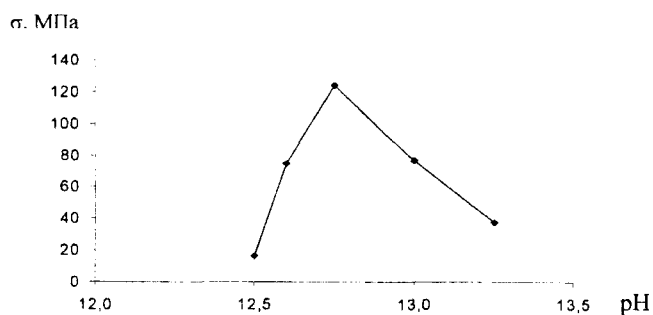


Рис.2. Изменение прочности на изгиб σ образцов модификатора, синтезированных при различных значениях pH

Анализ состава образцов (по данным РФА) и графической зависимости предела их прочности на изгиб показал, что наиболее существенно увеличивается прочность образцов модификатора с равноценным количеством фаз апатита и трикальцийфосфата ($pH=12,75$). А увеличение или снижение этих фаз в соотношении апатит: трикальцийфосфат приводит к уменьшению значений σ .

2. Изучение химизма осаждения в системе $Ca(NO_3)_2-(NH_4)_2HPO_4-H_3[MO(C_2O_4)_3]-NH_3 \cdot H_2O$, где $M-Nb, Ta$.

С целью получения модифицированного гидроксиапатита был изучен химизм осаждения в системах из гидрофосфата аммония, оксалониобиевой (танталовой) кислот и аммиака в зависимости от мольного соотношения исходных растворов с постоянной концентрацией ионов Ca^{2+} и переменным соотношением ионов фосфора (V). Суммарное мольное количество фосфора и ниобия (тантала), приходящееся на одно и то же количество кальция, было выбрано из стехиометрического состава гидроксиапатита кальция $Ca_{10}(PO_4)_6(OH)_2$.

В основу способа приготовления данной серии был положен описанный метод синтеза гидроксиапатита кальция в водно-аммиачной среде с использованием в качестве реагентов растворов нитрата кальция и двузамещенного фосфата аммония. Полноту осаждения ионов кальция, фосфора, тантала и ниобия контролировали в каждой точке серии. Состав твердой фазы определяли методом остаточных концентраций.

Высушенные осадки перетирались и подвергались термообработке при температуре $1000^\circ C$ в течение шести часов и при $1200^\circ C$ в течение четырех часов.

Для идентификации продуктов осаждения и продуктов после термообработки использовали метод рентгенофазового анализа.

Результаты исследования систем представлены в табл.1. Данные остаточных концентраций свидетельствуют о том, что ниобий (тантал) и фосфор полностью связан с кальцием в виде труднорастворимых соединений. Полученные по результатам химического анализа осадки представляют собой гетерогенные продукты с мольным соотношением равным заданному. Воздушносухие образцы представляют собой гетерогенные смеси, состоящие из гидроксиапатита кальция, ниобиевой (танталовой) кислоты и незначительных количеств $Ca(OH)_2$.

Табл. 1

Данные рентгенофазового анализа продуктов осаждения системы $Ca^{2+}/ЭO(C_2O_4)_3^{3-}-PO_4^{3-}-NH_3 \cdot H_2O$, где Э- Nb, Ta.

Мольный состав осадка			Данные рентгенофазового анализа при $1200^\circ C$ в системах с	
Ca^{2+}	PO_4^{3-}	$\varnothing(v)$	Nb	Ta
10	-	6,0	$Ca_3Nb_2O_8$	$Ca_2Ta_2O_7$; $Ca_4Ta_2O_9$
10	1,0	5,0	$Ca_3Nb_2O_8$	$Ca_2Ta_2O_7$; $Ca_4Ta_2O_9$; $Ca_{10}(PO_4)_6(OH)_2$
10	2,0	4,0	$Ca_3Nb_2O_8$	$Ca_2Ta_2O_7$; $Ca_4Ta_2O_9$; $Ca_{10}(PO_4)_6(OH)_2$
10	3,0	3,0	$Ca_3Nb_2O_8$; $Ca_{10}(PO_4)_6(OH)_2$	$Ca_{10}(PO_4)_6(OH)_2$; $Ca_2Ta_2O_7$
10	4,0	2,0	$Ca_3Nb_2O_8$; $Ca_{10}(PO_4)_6(OH)_2$	$Ca_{10}(PO_4)_6(OH)_2$; $Ca_2Ta_2O_7$
10	5,0	1,0	$Ca_3Nb_2O_8$; $Ca_{10}(PO_4)_6(OH)_2$	$Ca_{10}(PO_4)_6(OH)_2$; $Ca_2Ta_2O_7$
10	4,2	6,0	$Ca_3Nb_2O_8$; $Ca_{10}(PO_4)_6(OH)_2$	$Ca_{10}(PO_4)_6(OH)_2$; $CaTa_2O_6$

Данные рентгенофазового анализа подтверждают образование продуктов после осаждения и прокаливания. В опыте 10, где в исходном соотношении ниобия и фосфора больше, чем приходящееся стехиометрическое количество кальция, образуется в доминирующем количестве фаза ниобата кальция ромбической и кубической сингонии и незначительное количество гидроксиапатита кальция.

Повышение температуры прокаливании смеси до $1200^\circ C$ приводит к протеканию дальнейших химических процессов, конечными продуктами которых являются однофазные образцы опытов 1-4. В этих точках образуется только фаза ниобата кальция с ромбической сингонией. Смещенные рефлексы предполагают образование твердых растворов CaO и гидроксиапатита кальция на основе ниобата кальция в пределах 25 мол.. В остальных случаях наблюдается образование предполагаемого твердого раствора на основе ниобата кальция в смеси с гидроксиапатитом.

В системе с танталом результаты исследований отличаются. При $1000^\circ C$ в составе гетерогенных продуктов обнаружены фазы Ta_2O_5 , $Ca_4Ta_2O_9$ и неидентифицированной фазы. При повышении температуры до $1200^\circ C$ в результате химического взаимодействия рефлексы неидентифицированной фазы ис-

чезли, а конечный продукт состоит из различного количества $Ca_2Ta_2O_7$, $Ca_4Ta_2O_9$ с примесью гидроксиапатита. В опыте 7 при 1200°C наблюдается образование соединения $CaTa_2O_6$ с орторомбической сингонией. Смешанные рефлексы на рентгенограммах предполагают образование твердого раствора гидроксиапатита кальция на основе $CaTa_2O_6$ следующего состава: $0,7Ca_{10}(PO_4)_6(OH)_2 + 3CaTa_2O_6$. Как следует из данных табл. 1 в условиях эксперимента для тантала характерно образование танталата кальция со структурой пирохлора состава $Ca_2Ta_2O_7$. Смешанные рефлексы гидроксиапатита кальция и $Ca_2Ta_2O_7$ на рентгенограммах предполагают их взаимную растворимость.

3. Свойства керамики на основе модифицированного гидроксиапатита кальция

Результаты исследований серий были использованы в процессе приготовления керамики на основе гидроксиапатита кальция, полученного осаждением из водных растворов. Керамика на основе чистого гидроксиапатита кальция обладает физико-механическими свойствами (сжатие, растяжение, изгиб и удар), которые несколько ниже, чем свойства органической кости. Согласно литературным данным [3] получить такой материал можно путем введения модифицирующих добавок в искусственный гидроксиапатит кальция.

В связи с этим были выбраны добавки, представляющие собой оксидные соединения ниобия(V) и тантала (V), представленные в результатах вышеописанных серий, которые при введении в организм не вызывают побочных действий. Для сравнения были использованы в качестве добавок также оксиды иттрия, ниобия и тантала.

В качестве параметра физико-механических характеристик для исследования было выбрано свойство «прочность на изгиб». Проведенные ранее работы по выбору количества модифицирующей добавки позволили выбрать оптимальное количество модификатора, а также отработать условия термообработки, включая температуру и продолжительность обжига изделия. Количество модификатора, добавленного в гидроксиапатит кальция, во всех случаях составляло 2,5 мас. %.

Из полученных результатов (табл.2) следует, что наиболее удовлетворительные результаты получились с добавкой, представляющей собой предполагаемый твердый раствор гидроксиапатита кальция на основе $CaTa_2O_6$. Полученный параметр практически совпадает с параметром органической кости 100-200 МПа, а в данном случае – 90 МПа.

Введение оксида Ta_2O_5 дало неудовлетворительные результаты, т.к. керамика получалась рыхлой. Такой же результат получился на добавке, представляющей собой твердый раствор гидроксиапатита кальция на основе ниобата кальция. Керамика с добавкой оксида ниобия (V), иттрия (III) и лантана (III) имеет практически одинаковые значения. Этот параметр на чистом гидроксиапатите кальция составляет 49 МПа. Но он ниже результата с добавкой, представляющей собой смесь гидроксиапатита кальция и $Ca_2Ta_2O_7$, а также смеси гидроксиапатита кальция и его твердого раствора на основе ниобата кальция.

Данные рентгенофазового анализа керамики показали, что ее состав не меняется после термообработки.

Таким образом, можно считать, что наиболее перспективными в создании гидроксиапатитной керамики являются соединения на основе гидроксиапатита кальция, модифицированного оксидными соединениями тантала.

Таблица 2

Свойства керамики на основе гидроксиапатита кальция.

Модифицирующие добавки	Размеры, мм Ширина / высота	Прочность на изгиб, МПа
Оксид тантала(V) Ta_2O_5	5,5 / 4,7	37
Твердый раствор гидроксиапатита на основе $CaTa_2O_6$	5,5 / 4,4	99
Смесь гидроксиапатита и $Ca_2Ta_2O_7$ (пирохлор)	5,5 / 4,4	73
Твердый раствор гидроксиапатита кальция на основе $Ca_3Nb_2O_8$	5,5 / 4,9	38
Смесь гидроксиапатита кальция и $Ca_3Nb_2O_8$	5,5 / 4,7	70
Оксид ниобия(v) Nb_2O_5	5,6 / 4,5	60
Оксид иттрия (III) Y_2O_3	5,8 / 4,4	60
Оксид лантана La_2O_3	5,8 / 4,4	60
Гидроксиапатит кальция	5,6 / 4,7	49

РЕЗЮМЕ

В роботі наведені умови синтезу модифікованого іонами лантану та кремнію гідроксиапатиту кальцію методом осадження з водних розчинів. Встановлено, що на склад модифікованого продукту впливає pH вихідних розчи-

нів та осадження, концентрація та температура обробки. Показано, що кисневмісні сполуки танталу та ніобію в якості модифікаторів поліпшують фізико-механічні властивості кераміки.

SUMMARY

In the work it was given the conditions of synthesis of calcium hydroxiapatit modified by the lantan and silicon ions using the method of precipitating from the water solutions. It was determined that *pH* of initial solutions and precipitation, concentration and temperature processing influence on the composition of the modified product. It was shown that the introducing of the oxygen compounds of tantalum and niobium improve the physical and mechanical properties of ceramics.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ

1. Арсеньев П.А., Саратовская Н.В. Синтез и исследование материалов на основе гидроксиапатита кальция.- Стоматология- 1996.-С.74 – 79.
2. Балин В.Н., Черныш В.Ф., Ковалевский А.М. Опыт клинической апробации материалов на основе биокерамики в стоматологии.- Стоматология.-1996.- С.45-47.
3. Абдуллаев Ш.Ю. Стеклокристаллические апатитсодержащие материалы медицинского назначения.- Стоматология.-1996.-С.
4. Tamari N., Mouki H. Kondo J. –J.Ceram. Soc. Jap.,-1987.-V.95, N8.-P.806-809.
5. De Groot K. Interceram.-1987.- V.36, N.4.-P.38-41/
6. Umergaki T., Yamada S.- In. XI International conference on phosphor chemistry. Tallin, 1990.- P.5-12.

Надійшла до редакції 25.12.2000 р.

Б І О Л О Г І Я

УДК 598.2 : 591.5 : 574.2

**РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПТИЦ В ПРИДОРОЖНЫХ БИОТОПАХ
В УСЛОВИЯХ УРБАНИЗИРОВАННОГО ЛАНДШАФТА
(НА ПРИМЕРЕ Г. ДОНЕЦКА)***Ю. А. Штирц*

Воздействие транспортных средств на животный мир могут быть прямыми (ранения, уничтожение, отравление транспортными выбросами) или косвенными, обусловленными изменением среды обитания [1]. Автомобильные дороги являются одним из мощных факторов элиминации птиц в антропогенном ландшафте [2, 3]. Видовой состав и количество погибших птиц зависит от интенсивности движения автотранспорта, плотности населения птиц в окружающих дорогу ландшафтах, привлекательности обочины дороги в качестве кормовой станции и других причин, что было показано рядом исследователей, как для различных регионов, так и в условиях различных биотопов [2–5]. Особенно важную роль играет структура прилегающих к дорогам биотопов [3]. Наибольшее количество погибших птиц приходится на гнездовой и начало послегнездового сезона [3, 5, 6].

Автомобильный транспорт выбрасывает в воздух с отработанными газами до 200 различных химических веществ [7–9]. В результате интенсивного движения вдоль автомагистралей образуются своеобразные техногенные аномалии. Почвы придорожной зоны большинства автомагистралей содержат свинца, цинка и кадмия в несколько десятков и даже сотен раз больше, чем почвы, удаленные от автомагистралей [9–12]. Птицы, находящиеся непосредственно в зоне придорожной полосы и питающиеся растительными и животными объектами, способствуют дальнейшему продвижению продуктов транспортной эмиссии по пищевым цепям.

Таким образом, выявление закономерностей распределения птиц вдоль автодорог имеет вполне определённый практический интерес как с точки зрения охраны орнитофауны, так и с позиций охраны окружающей среды в целом.

Одним из значимых факторов, влияющих на численность птиц на придорожных территориях, является шум транспорта, определяемый интенсивностью и составом транспортного потока, прежде всего долей грузовых автомобилей в потоке [1]. Вместе с тем, птицы, населяющие территории крупных городов, в значительной степени толерантны к шумовому загрязнению, так как адаптация к городскому шуму является составным элементом адаптации к урбанизированному ландшафту. Так, по данным Ю.А. Белосова [13], проводившем исследования в г. Ярославле, ряд видов (воробьи, галки, серые вороны, сизые голуби) собирают корм на газонах и обочинах дорог в 1–2 м. от проезжей части и не реагируют на шум проезжающих машин.

Целью проводимых нами исследований являлось изучение влияния двух, на наш взгляд, наиболее значимых факторов, на распределение птиц в придорожной зоне в условиях города: интенсивности движения транспортного потока и степени озеленения придорожной полосы. Сбор материала проводился на территории г. Донецка вдоль автодорог, расположенных в кварталах с многоэтажной жилой застройкой. Дороги, на которых проводились исследования, имели асфальтобетонное покрытие. Учеты птиц проводились в гнездовые периоды (15.04–30.06) 1998–2001 гг. по маршрутному методу с ограниченной шириной полосы [14]. Ширина полосы учёта определялась расстоянием между зданиями, примыкающими к тротуарам дорог. Учитывались все виды, отмеченные в изучаемом пространстве: автодорога + тротуары + сторона зданий, примыкающая к тротуарам. Такой способ регистрации птиц, учитывая их высокую мобильность, носит, в известной мере, случайный характер, но, вместе с тем, отражает определённую меру использования видами данного пространства.

В ходе сбора материала отмечено 28 видов птиц, относящихся к 5 отрядам: Голубеобразных (Columbiformes) – 2 вида, Кукушкообразных (Cuculiformes) – 1, Стрижеобразных (Apodiformes) – 1, Дятлообразных (Piciformes) – 1, Воробьинообразных (Passeriformes) – 23 вида. Видовая принадлежность и систематическое положение зарегистрированных видов приведены в соответствии с "Конспектом орнитологической фауны СССР" [15].

Согласно данным дорожного ремонтно-строительного управления г. Донецка, площадь дорог города с различной интенсивностью движения автотранспорта (для дорог с твёрдым покрытием) представлена следующим образом: 1) 1000 авт./сутки – 1991,5 тыс. м²; 2) 1000–5000 авт./сутки – 2597,6 тыс. м²;

3) 5000–10 000 авт./сутки – 2533,5 тыс. м²; 4) свыше 10 000 авт./сутки – 2192,2 тыс. м². Общая площадь автодорог с твёрдым покрытием составляет 9314,8 тыс. м², тогда как общая площадь города – 36066 га.

Мерой интенсивности движения автотранспорта в наших исследованиях послужила средняя величина количества транспортных объектов, проходящих через сечение автодороги за один час в светлое время суток. Единицей измерения озеленения являлось число древесных растений на прилегающих к дороге тротуарах в зрелой и поздней стадии генеративного периода (g_2 – g_3) в пересчёте на км². Возрастное состояние деревьев определялось по системе О.В. Смирновой [16]. Согласно полученным данным, выделялись соответствующие ступени (классы) факторов. В зависимости от интенсивности движения транспорта были выделены три класса: 1) < 700 авт./час, 2) 700–1200 авт./час, 3) > 1200 авт./час; по степени озеленения – четыре: 1) 5000–10 000 деревьев/км², 2) 10 000–15 000 деревьев/км², 3) 15 000–20 000 деревьев/км², 4) 20 000–25 000 деревьев/км². Анализ распределения птиц проводился на основе данных о численности на участках автодорог, соответствующих указанным ступеням факторов.

В целях выяснения силы влияния каждого из исследуемых факторов на распределение птиц был применён информационный анализ по методу Л. Орлоци (цит. по [17]), в ходе которого вычислялись следующие показатели.

1. Информация, содержащаяся во всех классах явления (под классом явления понималась численность особей на км² каждого конкретного вида птиц):

$$I(A) = N \ln N - (a_1 \ln a_1 + a_2 \ln a_2 + a_3 \ln a_3 + \dots + a_n \ln a_n),$$

где N – суммарное значение общей численности особей всех видов по всем рассматриваемым классам фактора; $a_1, a_2, \dots, a_n$ – суммарное значение численности особей каждого вида также по всем классам фактора.

2. Информация, содержащаяся во всех ступенях фактора:

$$I(B) = N \ln N - (b_1 \ln b_1 + b_2 \ln b_2 + b_3 \ln b_3 + \dots + b_m \ln b_m),$$

где $b_1, b_2, \dots, b_m$ – суммарная численность особей всех видов в условиях каждой ступени фактора.

3. Полная совместная информация системы, т.е. содержащаяся во всех классах явления и ступенях фактора при их взаимодействии:

$$I(A, B) = N \ln N - [(a_1, b_1) \ln(a_1, b_1) + (a_1, b_2) \ln(a_1, b_2) + (a_1, b_3) \ln(a_1, b_3) + \dots + (a_m, b_m) \ln(a_m, b_m)].$$

где $(a_1, b_1); (a_1, b_2); \dots (a_m, b_m)$ – численность каждого конкретного вида, соответствующая каждой конкретной ступени фактора.

4. Взаимная полезная информация, показывающая связь явления в целом с фактором также вычисляется:

$$I(A; B) = I(A) + I(B) - I(A, B)$$

5. Метрика Райского, являющаяся мерой сходства явления с фактором:

$$d(A; B) = 1 - I(A; B) : I(A, B)$$

Полученное значение может варьировать от 0 (явление полностью зависит от данного фактора) до 1 (полное отсутствие связи явления с данным фактором).

6. Коэффициент когерентности:

$$r(A; B) = \sqrt{1 - d^2(A; B)}$$

Варьирует от 0 (при отсутствии связи) до 1 (при полной связи явления с фактором).

7. Коэффициент информационной связи, отражающий силу влияния фактора на изучаемое явление:

$$K_I(A; B) = I(A; B) : I(B)$$

Измеряется от 0 (связь отсутствует) до 1 (связь полная).

Результаты информационного анализа отражены в таблице 1.

Таблица 1.

Результаты информационного анализа распределения птиц
в придорожных биотопах в зависимости от интенсивности движения транспорта
и озеленения придорожной полосы

Фактор	N	I(A)	I(B)	I(A, B)	I(A; B)	d(A; B)	r(A; B)	K _I (A; B)
Интенсивность движения транспорта	11933,60	26761,21	18913,71	39180,63	6494,29	0,8342	0,5514	0,34336
Озеленение придорожной полосы	16784,90	27933,84	22886,27	49734,80	1085,31	0,9782	0,2078	0,04742

Таким образом, более существенное влияние на распределение птиц в придорожных биотопах оказывает интенсивность движения транспортного потока ($K_i (A; B) = 0,34336$; $r (A; B) = 0,5514$). Влияние степени озеленения придорожной полосы значительно ниже ($K_i (A; B) = 0,04742$; $r (A; B) = 0,2078$). Из значений коэффициентов информационной связи следует, что 34,3% регистраций птиц на придорожных территориях обусловлены влиянием интенсивности движения транспорта; 4,7% – степенью озеленения придорожной полосы. Совместное влияние указанных факторов определяет 39% регистраций. Остальные, неучтенные факторы составляют в сумме 61%. Учитывая множество факторов, оказывающих влияние на распределение птиц в условиях городского ландшафта, полученная величина информационной связи является достаточно значительной.

Проведенный анализ отражает степень воздействия факторов на распределение птиц в придорожной зоне в целом. С целью выяснения влияния исследуемых факторов на конкретные виды птиц для каждого зарегистрированного вида в пределах каждого класса факторов вычислялся коэффициент предпочтения: отношение обилия к среднему показателю по всем используемым видом грациям биотопов, соответствующих ступеням фактора. Принцип вычисления коэффициента предпочтения заимствован из работы Е.С. Преображенской [18]. Результаты вычислений отражены в таблице 2.

Таблица 2.

Значение коэффициентов предпочтения, отражающие распределение птиц в придорожных биотопах города в зависимости от степени воздействия факторов

№	Вид	Интенсивность движения транспорта, авт./час			Озеленение придорожной полосы, число деревьев/км ²			
		< 700	700-1200	>1200	5000 - 10 000	10000 - 15 000	15 000 - 20 000	20 000 - 25 000
1	<i>Columba livia</i> Gmelin, 1789	1,4	1,1	0,4	1,7	0,3	0,9	1,1
2	<i>Streptopelia decaocto</i> (Frisvaldszky, 1838)	1,5	1,1	0,4	0,9	0,4	1,3	1,3
3	<i>Cuculus canorus</i> Linnaeus, 1758	+	–	–	–	–	–	+
4	<i>Apus apus</i> (Linnaeus, 1758)	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
5	<i>Dendrocopos syriacus</i> (Hemprich et Ehrenberg, 1833)	0,9	1,1	–	–	–	0,8	1,2
6	<i>Hirundo rustica</i> Linnaeus, 1758	1,8	0,2	–	–	–	0,6	1,4
7	<i>Delichon urbica</i> (Linnaeus, 1758)	1,0	1,0	1,0	3,1	0,4	0,4	0,1
8	<i>Motacilla alba</i> Linnaeus, 1758	1,3	1,5	0,3	0,2	0,4	2,3	1,1
9	<i>Lanius colurio</i> Linnaeus, 1758	+	–	–	–	–	–	+
10	<i>Oriolus oriolus</i> (Linnaeus, 1758)	+	–	–	–	–	–	+
11	<i>Sturnus vulgaris</i> Linnaeus, 1758	1,8	0,9	0,3	0,3	0,4	1,0	2,3
12	<i>Garrulus glandarius</i> (Linnaeus, 1758)	1,0	–	–	–	–	–	1,0
13	<i>Pica pica</i> (Linnaeus, 1758)	1,3	1,3	0,3	0,1	0,5	1,6	1,9
14	<i>Corvus frugilegus</i> Linnaeus, 1758	1,1	1,1	0,8	0,8	0,8	1,2	1,2
15	<i>Corvus cornix</i> Linnaeus, 1758	1,6	0,9	0,4	0,3	0,5	1,6	1,7
16	<i>Sylvia curruca</i> (Linnaeus, 1758)	1,0	1,0	–	–	–	0,8	1,2
17	<i>Ficedula albicollis</i> (Temminck, 1815)	1,0	–	–	–	–	–	1,0
18	<i>Muscicapa striata</i> (Pallas, 1764)	1,1	0,9	–	–	–	0,6	1,4
19	<i>Phoenicurus ochruros</i> (S.G.Gmelin, 1774)	1,5	1,2	0,2	1,3	0,2	0,9	1,6
20	<i>Luscinia luscinia</i> (Linnaeus, 1758)	+	–	–	–	–	–	+
21	<i>Parus caeruleus</i> Linnaeus, 1758	1,5	0,5	–	–	–	0,3	1,7
22	<i>Parus major</i> Linnaeus, 1758	1,2	1,2	0,6	0,7	0,7	1,2	1,4
23	<i>Passer domesticus</i> (Linnaeus, 1758)	1,3	0,8	0,9	1,3	0,7	0,8	1,2
24	<i>Passer montanus</i> (Linnaeus, 1758)	1,4	1,1	0,5	0,2	0,5	1,0	2,2
25	<i>Fringilla coelebs</i> Linnaeus, 1758	1,1	0,9	–	–	–	0,8	1,2
26	<i>Chloris chloris</i> (Linnaeus, 1758)	1,6	1,1	0,3	0,2	0,4	1,3	2,1
27	<i>Carduelis carduelis</i> (Linnaeus, 1758)	2,3	0,6	0,1	–	0,1	1,3	1,6
28	<i>Acanthis cannabina</i> (Linnaeus, 1758)	1,0	–	–	–	–	0,8	1,2

Примечание. + - единичные случаи регистрации вида.

В случае определяющего влияния фактора на численность вида, на наш взгляд, должно проследиваться последовательное возрастание (или убывание) значений коэффициента предпочтения в ряду ступеней фактора. В противном случае, либо фактор влияния не оказывает, либо его влияние "перекрывается" иным, более значимым для данного вида фактором. Следовательно, исходя из значений таблицы 2, 13 видов птиц из числа зарегистрированных реагируют изменением численности на оба фактора. Возрастание количества регистраций вдоль автодорог в связи с увеличением степени озеленения придорожной

полосы, а также, уменьшение числа регистраций, связанное с увеличением транспортной нагрузки, отмечено для следующих видов: деревенской ласточки, обыкновенного скворца, сороки, грача, серой вороны, славки-завирушки, серой мухоловки, обыкновенной лазоревки, большой синицы, полевого воробья, зяблика, обыкновенной зеленушки, черноголового щегла. Отдельно следует отметить коноплянку: значение коэффициента предпочтения возрастает с увеличением степени озеленения, что же касается другого рассматриваемого фактора, вид регистрировался вдоль автодорог с интенсивностью движения, не превышающей 700 автомобилей в час (см. табл. 2). Сойка и мухоловка-белошейка отмечены только на участках с озеленением более 20 000 древесных растений на км² и количеством проходящих автомашин менее 700 в час. Случаи единичных регистраций особей обыкновенной кукушки, обыкновенного жулана, обыкновенной иволги, обыкновенного соловья также приурочены к участкам с минимальным движением и максимальной степенью озеленения.

Для 5 видов прослеживается последовательное изменение коэффициентов предпочтения в ряду ступеней только одного из исследуемых факторов. Так с увеличением интенсивности движения транспортного потока снижается численность сизого голубя, кольчатой горлицы, горихвостки-чернушки. С увеличением числа древесных растений в придорожной полосе возрастает число регистраций сирийского дятла. Численность же воронка с увеличением степени озеленения снижается (табл. 2).

Таким образом, проведенный анализ демонстрирует неоднозначную реакцию разных видов птиц на исследуемые факторы.

ВЫВОДЫ

1. Согласно результатам информационного анализа, более существенное влияние на распределение птиц вдоль автодорог в условиях урбанизированного ландшафта оказывает интенсивность движения транспортного потока. Влияние степени озеленения придорожной полосы значительно ниже. Суммарное действие рассматриваемых факторов определяет 39% регистраций птиц в условиях данного биотопа.
2. Увеличение интенсивности движения автотранспорта приводит к снижению численности 16 видов птиц из 28 зарегистрированных. Для 15 видов отмечен рост числа особей, регистрируемых в придорожных биотопах, с увеличением степени озеленения придорожной полосы. Для одного вида (воронка) наблюдается снижение численности с увеличением числа древесных растений на единицу площади. Ряд видов птиц, в том числе, не совсем типичные для данного биотопа, были отмечены только вдоль участков дорог с максимальной степенью озеленения и минимальной транспортной нагрузкой.

РЕЗЮМЕ

Вивчався вплив інтенсивності руху автотранспорту та ступеня озеленіння прилягової смуги на розподіл птахів уздовж автошляхів в умовах урбанізованого ландшафту. Дослідження проводились на території м. Донецька у гніздові періоди 1998–2001 рр. Внаслідок інформаційного аналізу встановлено: більш суттєвий вплив на розподіл птахів надає інтенсивність руху транспортного потоку, вплив ступеня озеленіння прилягової смуги значно нижче. Аналізовані чинники обумовлюють 39% реєстрацій птахів в умовах даного біотопу.

SUMMARY

It was studied the influence of intensity of driving of a vehicle and the degree of gardening of a band for a road on allocation of birds along motorways in conditions of a urban landscape. The gathering of a material was carried out in territory of Donetsk in nested phases 1998–2001. As a result of carrying out of the information analysis is established: the intensity of driving of a transport stream renders the more essential influence on allocation of birds; the influence of a degree of gardening along of a band is much lower. The considered factors cause 39% of registrations of birds in conditions of the given biotope.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Луканин В.Н., Трофименко Ю.В. Промышленно-транспортная экология. – М.: Высш. шк., 2001. – 273 с.
2. Ковалёв В.А. К гибели птиц на автомобильных дорогах // Мат. III конф. молодых орнитологов Украины (м. Київ, 14–15 березня 1998 р.). – Чернівці, 1998. – С. 70–71.
3. Башта А.-Т. В. Автотранспорт як фактор антропогенної елімінації птахів // Екологічні аспекти охорони птахів. Мат. VII наради орнитологів Західної України (м. Івано-Франківськ, 4–7 лютого 1999 р.). – Львів, 1999. – С. 11–12.
4. Моци-Демарти А. Смертность птиц на дорогах // Тез. докл. и станд. сообщ. XVIII Междунар. орнитол. конгресса. – М.: Наука, 1982. – С. 202.
5. Роговий Ю.Ф. Загибель птахів на автошляхах Глобинського району Полтавської області // Мат. III конф. молодих орнитологів України (м. Київ, 14–15 березня 1998 р.). – Чернівці, 1998. – С. 123–126.
6. Новак В.О. Загибель птахів на автошляхах Поділля // Проблеми вивчення та охорони птахів. Мат. VI наради орнитологів Західної України (м. Дрогобич, 1–3 лютого 1995 р.). – Львів – Чернівці, 1995. – С. 99–100.

7. Оуэн О.С. Охрана природных ресурсов. – М.: Колос, 1977. – 416 с.
8. Никифорова Е.М. Источники и вещественный состав техногенных потоков, возникающих в связи с работой автотранспорта // Техногенные потоки вещества в ландшафтах и состояние экосистем. – М.: Наука, 1981. – С. 210–220.
9. Шарковские П.А., Никодемус О.Э. Содержание металлов в продуктах эмиссии на придорожной полосе автодорог Латвии // Воздействие выбросов автотранспорта на природную среду. – Рига: Зинатне, 1989. – С. 5–21.
10. Бериня Дз. Ж., Карелина Л.В., Цекулия В.А. Нагрузки выбросов автотранспорта и загрязнение почв придорожной зоны металлами // Загрязнение природной среды выбросами автотранспорта. – Рига: Зинатне, 1980. – С. 16–27.
11. Никифорова Е.М. Свинец в ландшафтах придорожных экосистем // Техногенные потоки вещества в ландшафтах и состояние экосистем. – М.: Наука, 1981. – С. 220–229.
12. Keller Th. Verkehrsbedingte Luftverunreinigungen und Vegetation // Garten u. Landschaft. – 1974. – Bd. 84, N 10. – S. 547–550.
13. Белоусов Ю.А. Адаптации птиц к урбанизированному ландшафту // Птицы и урбанизированный ландшафт. Сб. кратких сообщ. – Каунас, 1984. – С. 23–24.
14. Гузий А.И. Методы учетов птиц в лесах // Обліки птахів: підходи, методики, результати. – Львів – К., 1997. – С. 18–49.
15. Степанян Л.С. Конспект орнитологической фауны СССР. – М.: Наука, 1990. – 726 с.
16. Смирнова О.В., Заугольнова Л.Б., Таронова Н.А., Фаликов Л.Д. Критерии выделения возрастных состояний и особенности хода онтогенеза у растений различных биоморф / Уранов А.А., Серебрякова Т.И. Ценопопуляции растений. – М.: Наука, 1976. – Ч. I. – С. 14–43.
17. Нешатаев Ю.Н. Методы анализа геоботанических материалов. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1987. – 192 с.
18. Преображенская Е.С. Кормовое поведение и биотопическое распределение воробьиных птиц Приветлужья // Экологическая ординация и сообщества: Сб. МОИП. – 1990. – С. 79–111.

Надійшла до редакції 29.04.2002 р.

УДК 612.52+612.55

ВЛИЯНИЕ СОВМЕСТНЫХ ИНЪЕКЦИЙ ТРИЙОДИТРОНИНА И КАТЕХОЛАМИНОВ В ПРОЦЕССЕ ПОСТХОЛОДОВОЙ ДЕЗАДАПТАЦИИ*Г.И. Чирва, В.И. Соболев*

Среди многочисленных гормональных факторов, участвующих в процессах обеспечения температурной адаптации, важное место принадлежит системе щитовидной железы и катехоламинам [1-4]. Работами ряда авторов установлено, что в процессе холодовой адаптации под влиянием тиреоидных гормонов и катехоламинов формируется основные адаптогенные механизмы [2,5,6,7], в частности возрастает термогенная эффективность мышечного сокращения [5,2,8], формируется так называемый норадреналин-зависимый термогенез [2,9,10] и др. Однако остается недостаточно исследованной роль названных гормонов в процессах сохранения ранее выработанных механизмов холодовой адаптации [2,5,9,10].

Целью работы явилось изучение влияния совместных инъекций трийодтиронина и катехоламинов на устойчивость некоторых следовых эффектов холодовой адаптации.

Объект и методы исследования. Работа выполнена на 54 белых крысах массой около 240 г. Первоначально 44 животных были адаптированы к холоду (25 суток при 5°C в холодовой комнате в индивидуальных клетках размером 20 x 40 x 20 см), после чего 12 животных (1-я группа) исследовались как адаптированных к холоду (АХ), а для остальных (2-я, 3-я и 4-я группы) наступал процесс 15-суточной дезадаптации при температуре окружающей среды 30°C, являющейся для белых крыс термонеutralной [5]. Для выяснения роли трийодтиронина и катехоламинов в сохранении функциональных проявлений холодовой адаптации второй группе ($n=10$) подкожно инъецировали трийодтиронин (100 мкг/кг ежедневно во все дни дезадаптации) совместно с гидротартратом норадреналина (0.2 мг/кг дважды в сутки с интервалом 12 часов во все дни дезадаптации). Третьей группе ($n=10$) трийодтиронин вводили совместно с гидрохлоридом адреналина (0.2 мг/кг подкожно дважды в сутки с интервалом 12 часов во все дни дезадаптации). Крысы четвертой группы ($n=12$) процесс 15-ти суточной дезадаптации проходили без какого-либо фармакологического вмешательства. Крысы пятой группы ($n=10$) воздействию холода и фармакологическому влиянию не подвергались, содержались при 30°C и являлись контрольными.

У всех животных всех групп регистрировались следующие показатели: ректальная температура, скорость охлаждения при -25°C (до достижения ректальной температуры значения 20.0°C); скорость потребления кислорода в термонеutralной зоне (28...30°C) (газоанализатор "Radiometer"). Согласно многочисленным литературным данным [4,5,9], изучаемые показатели характеризуют состояние адаптированности при длительном воздействии холода.

Полученный материал обрабатывался общепринятыми методами вариационной статистики.

Результаты исследования и их обсуждение. Многосуточная холодовая экспозиция при 5°C привела к формированию состояния адаптированности (табл.1, 2). Прежде всего, об этом свидетельствует скорость охлаждения при -25°C, которая значительно уменьшалась (с $4.8 \pm 0.5^\circ\text{C}/\text{час}$ у контроля до $0.2 \pm 0.1^\circ\text{C}$ при адаптации к холоду). Многосуточная холодовая экспозиция отразилась и на значении ректальной температуры, измеренной в термонеutralной зоне. Так, у крыс, адаптированных к холоду, температура тела составила $37.8 \pm 0.1^\circ\text{C}$, тогда как у животных контрольной группы $36.7 \pm 0.1^\circ\text{C}$ или на $1.1 \pm 0.14^\circ\text{C}$ меньше ($P < 0.05$).

На формирование адаптационного следа указывает и такой показатель, как скорость потребления кислорода, измеренная в термонеutralной зоне. Так, если у крыс контрольной группы она составляла 12.5 ± 0.3 мл/кг/мин, то у животных, адаптированных к холоду, достигала 20.0 ± 0.5 мл/кг/мин, т.е. была на 7.7 ± 0.7 мл/кг/мин больше ($P < 0.05$).

Таким образом, многосуточная холодовая экспозиция вызывает формирование ряда адаптационных следов, являющихся основой физиологических механизмов холодовой адаптации.

После того, как были получены доказательства существования выраженных следов холодовой адаптации, животные помещались на 15 суток в камеру с температурой 30°C, где и проходил процесс дезадаптации. Последующий анализ экспериментального материала показал, что в течение 15-суточного дезадаптационного периода произошло четкое угасание следов ранее выработанной холодовой адаптации. Так, ректальная температура, измеренная в термонеutralной зоне, составила $36.6 \pm 0.1^\circ\text{C}$ (т.е. вернулась к контрольному, исходному, уровню $36.7 \pm 0.1^\circ\text{C}$), а скорость охлаждения при -25°C (табл.1) у дезадаптированных животных возросла до $4.1 \pm 0.4^\circ\text{C}/\text{час}$, в то время как при адаптации к холоду, она составляла $0.2 \pm 0.1^\circ\text{C}/\text{час}$. Значение данного показателя, как видно, достигло уровня контроля ($4.8 \pm 0.5^\circ\text{C}/\text{час}$). Следовательно, данный след холодовой адаптации "long-term"-типа полностью исчезал. Аналогичная картина наблюдалась и со стороны следов адаптации, характеризующих общий калориге-

нез организма. Так, величина потребления кислорода, измеренная при температуре комфорта 30°C, у деадаптированных крыс вернулась к контрольным величинам (19.5 ± 0.2 мл/кг/мин - при деадаптации и 17.5 ± 0.3 мл/кг/мин - у контроля, $P > 0.05$).

Таблица 1

Влияние совместных инъекций трийодтиронина и катехоламинов на общую холодовую устойчивость белых крыс разных групп

Условия экспериментов	Скорость охлаждения при -25°C, °C/час
При адаптации к 30°C (контроль)	$4.8 \pm 0.5^*$
После адаптации к холоду (5°C)	$0.2 \pm 0.1^*$
После 15-ти суточной деадаптации при 30°C	$4.1 \pm 0.4^*$
<i>Введение трийодтиронина и катехоламинов в процессе деадаптации:</i>	
• трийодтиронин + норадреналин (T_3+HA)	$0.8 \pm 0.2^{**}$
• трийодтиронин + адреналин (T_3+A)	$3.8 \pm 0.7^*$

Примечание: * - различия статистически достоверны ($P < 0.05$) по отношению к уровню "при адаптации к холоду"; * - различия статистически достоверны ($P < 0.05$) по отношению к уровню при 15-суточной деадаптации без гормональной коррекции

На следующем этапе настоящей серии экспериментов исследовался характер действия совместных инъекций трийодтиронина с норадреналином (T_3+HA) и адреналином (T_3+A) на стойкость следовых эффектов холодовой адаптации "long-term" - типа. Оказалось, что скорость охлаждения при -25°C у животных, которым в процессе деадаптации вводились T_3+HA , изменилась незначительно и составляла 0.8 ± 0.2^0C (табл.1). Если учесть, что в группе крыс, не получавших в процессе деадаптации названной гормональной пары, скорость охлаждения была равной 4.1 ± 0.4^0C , то можно говорить о положительном влиянии трийодтиронина с норадреналином на данный след холодовой адаптации.

В отличие от пары (T_3+HA) совместное введение животным в процессе деадаптации трийодтиронина и адреналина (T_3+A) оказывало слабый эффект на стойкость данного следа адаптации к холоду: скорость охлаждения была близка к уровню контрольной, не адаптированной к холоду группы (табл.1).

Показателем, характеризующим состояние адаптированности к холоду, является скорость потребления кислорода, измеренная в термонеutralной зоне (табл.2). Результаты экспериментов показали, что после длительной холодовой экспозиции величина потребления кислорода у животных возросла до 28 ± 0.5 мл/кг/мин, что было на 10.5 ± 0.6 мл/кг/мин больше в сравнении с контролем. После 15-ти суточной деадаптации при 30°C скорость поглощения кислорода была все еще больше по сравнению с контрольными величинами ($+2.0 \pm 0.4$ мл/кг/мин, или 11%, $P < 0.05$).

Таблица 2

Влияние совместных инъекций трийодтиронина и катехоламинов на скорость потребления кислорода и калоригенный эффект изопропилнорадреналина в термонеutralной зоне (30°C) у крыс разных групп

Условия экспериментов	Потребление кислорода, мл/кг/мин:		
	Исходное при	После введения изопропилнорадреналина	Прирост
При адаптации к 30°C (контроль)	$17.5 \pm 0.3^*$	$28.8 \pm 0.8^*$	$+11.3 \pm 0.7^{**}$
После адаптации к холоду (5°C)	$28.0 \pm 0.5^*$	$46.7 \pm 0.5^*$	$+18.7 \pm 0.5^*$
После 15-ти сут деадаптации при 30°C	$19.5 \pm 0.2^*$	$27.9 \pm 0.2^*$	$+8.4 \pm 0.2^*$
<i>Введение трийодтиронина с катехоламинами в процессе деадаптации:</i>			
• трийодтиронин + норадреналин (T_3+HA)	$26.7 \pm 0.8^*$	$43.6 \pm 0.9^{**}$	$+16.9 \pm 0.9^*$
• трийодтиронин + адреналин (T_3+A)	$26.1 \pm 0.8^{**}$	$40.9 \pm 1.1^{**}$	$+14.8 \pm 0.5^{**}$

Примечание: * - различия статистически достоверны ($P < 0.05$) по отношению к уровню "при адаптации к холоду"; * - различия статистически достоверны ($P < 0.05$) по отношению к уровню при 15-суточной деадаптации без гормональной коррекции

Введение крысам в деадаптационном периоде трийодтиронина совместно с катехоламинами показало, что сохранению данного адаптационного эффекта способствовала только пара (T_3+HA), но не (T_3+A). Действительно (табл.2), у крыс, получавших после холодовой адаптации инъекции (T_3+HA), скорость потребления кислорода была такой же, как и при адаптации к холоду. Таким же эффектом обладала и пара (T_3+A).

Гормональная коррекция возможна и в отношении такого следа холодовой адаптации как калоригенный эффект изопропилнорадреналина. По данным табл.2 видно, что трийодтиронин при введении в паре с норадреналином или адреналином способствовал сохранению данного адаптогенного механизма.

Таким образом, анализ экспериментальных данных позволяет говорить о закономерностях стирания ранее выработанных следов холодовой адаптации и способности трийодтиронина в паре с катехоламинами контролировать процесс дезадаптации в целом. Подобный эффект трийодтиронина и норадреналина можно объяснить с учетом их роли в формировании основных эффектов холодовой адаптации "long-term"-типа. По данным целого ряда авторов [2,5,9,10], длительное холодовое воздействие сопровождается развитием так называемого норадреналин-зависимого термогенеза. Данный механизм связан с усиленной секрецией норадреналина в процессе холодовой адаптации. В связи с этим, на наш взгляд, и связано явление замедления процесса угасания физиологических механизмов сформированных при холодовой адаптации, которое мы наблюдали при введении гормонов в ходе постадаптационного периода.

Что же касается интимных механизмов отмеченного феномена, то они могут быть связаны со способностью трийодтиронина и катехоламинов при их гиперсекреции стимулировать процессы термогенеза, например, путем повышения термогенного эффекта мышечного сокращения, развитием гипертрофии калоригенно активных тканей, увеличением числа β -адренорецепторов в этих тканях, наконец, активацией процессов диссипации энергии [2,3,9]. В последнем случае тепловой "выход" любой биологической работы возрастет, что автоматически вызовет активацию всех калоригенных реакций, стимулируемых гормонами.

ВЫВОДЫ

1. В течение 15-суточного дезадаптационного периода в термонеutralной зоне наблюдается выраженное угасание следов ранее выработанной холодовой адаптации (ректальной температуры, скорости охлаждения при -25°C и общего калоригенеза организма).
2. Скорость охлаждения при -25°C у животных, которым в процессе дезадаптации вводились $\text{T}_3 + \text{НА}$, изменилась незначительно и составляла $0.8 \pm 0.2^{\circ}\text{C}$, что свидетельствует о положительном влиянии трийодтиронина с норадреналином на данный след холодовой адаптации.
3. Введение в дезадаптационном периоде трийодтиронина совместно с катехоламинами способствовало сохранению гиперметаболизма – одного из следов холодовой адаптации.

РЕЗЮМЕ

У експериментах на білих щурах показано, що введення в процесі дезадаптації трийодтироніну з норадреналіном або адреналіном сприяє збереженню основних механізмів холодової адаптації.

SUMMARY

In experiments on white rats was shown, that the introduction during a disadaptation triiodothyronine with noradrenaline or epinephrine promotes conservation of the basic mechanisms of cold acclimatization.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Соболев В.И. Катехоламины и химическая терморегуляция при акклимации к холоду // Физиол. журн. УССР. – 1979.-№5.- С. 593-598.
2. Султанов Ф.Ф., Соболев В.И. Гормональные механизмы температурной адаптации. -Ашгабад: Ылым.- 1991.-214 с.
3. Чирва Г.И. Влияние резерпина и β -адреноблокады на процесс холодовой дезадаптации// Вісник Донецького університету. - Сер.А: Природничі науки. - Вип. 1.- 2001.-С.256-259.
4. Чирва Г.И. Устойчивость следовых эффектов длительной холодовой акклиматизации// Тезисы докладов конференции "Важнейшие теоретические и практические проблемы терморегуляции".-Новосибирск: АН СССР.- 1982. - С.102.
5. Барабаш О.В., Чирва Г.И., Соболев В.И. Особенности формирования и угасания следовых эффектов длительных холодовых воздействий// Вестник пробл. биол. и мед.,1997,N27.-С.93-104.
6. Иванов К.П. Основы энергетики организма. Том 1. Общая энергетика. Теплообмен и терморегуляция. - Ленинград.: Наука, 1990. -303 с.
7. Соболев В.И., Чирва Г.И., Резник М.Е. Биоэнергетика изотонического мышечного сокращения при экспериментальном гипотиреозе. Миометрическое исследование//Вестник Донецкого университета. Серия А. –1997.- Вип. 1. -С.176-179.
8. Чирва Г.И., Резник М.Е., Соболев В.И. Влияние экспериментального гипертиреоза на работоспособность скелетной мышцы белой крысы//Вестник пробл. биол. и мед.- 1999.-N7.-С.79-85.
9. Хаскин В.В. Энергетика теплообразования и адаптации к холоду. Новосибирск: Наука.- 1975. -200 с.
10. Чирва Г.И. Калоригенное взаимодействие тиреоидных гормонов и катехоламинов// Вісник проблем біології і медицини.-2001.-№3.-С.40-45.

Надійшла до редакції 04.03.2002 р.

УДК 616.441-008.61:615.217.22]-092.9

**ХАРАКТЕРИСТИКА АДРЕНЕРГИЧЕСКОЙ ПРИРОДЫ ТАХИКАРДИИ ПРИ
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМ ТИРЕОТОКСИКОЗЕ***Ю.А. Девяткова*

Проблема гормональной регуляции физиологических функций является одной из важнейших в современной медико-биологической науке [1,2]. Среди многочисленных аспектов данной проблемы важное место принадлежит изучению роли гормонов щитовидной железы в обеспечении функционирования сердечно-сосудистой системы [3,]. В настоящее время общие принципы участия тиреоидных гормонов в регуляции функции сердца в целом известны. Сформулировано положение о "тиреотоксическом сердце", установлено, что "выключение" тиреоидного влияния угнетает хронотропную функцию сердца [4-6], а гипертиреоидное состояние наоборот – стимулирует [5,7]. Однако общие принципы тиреоидной регуляции хронотропной функции сердца не позволяют ответить на вопрос о характере влияния различной степени гипертиреоза на указанную адренергическую реакцию. В частности, остается мало исследованным вопрос о реактивности хронотропной функции сердца, его чувствительности и состоянии других его показателей в зависимости от выраженности состояния тиреотоксикоза.

Целью настоящей работы явилось изучение характера и выраженности действия одного из классических β -адренергических агонистов (изопропилнорадреналина) на хронотропную функцию сердца белых крыс в зависимости от степени выраженности экспериментального гипертиреоза.

Материалы и методы исследования. В качестве экспериментальных животных были выбраны взрослые белые крысы самцы массой около 300 г. Последние являются наиболее распространенным объектом, используемым в подобного рода исследованиях [1,3,5].

Все животные были разделены на 4 группы. Первой группе животных (12) ежедневно (как правило, 4-6 инъекции) подкожно вводили водный раствор трийодтиронина (T_3) в дозе 100 мкг/кг до тех пор, пока ректальная температура не поднималась до $39.0 \pm 0.1^\circ C$ ($1T_3$ -группа). Второй группе (12) трийодтиронин в той же дозе вводился до повышения ректальной температуры до $40.0 \pm 0.1^\circ C$ ($2T_3$ - группа). Животным 3-й группы (12) инъекции трийодтиронина в дозе 100 мкг/кг вводились до повышения температуры тела вплоть до $41.0 \pm 0.2^\circ C$ ($3T_3$ -группа). Таким способом достигался разный уровень выраженности экспериментального гипертиреоза – от легкой степени до тяжелой [5,7]. Четвертая группа крыс (10) была контрольной и содержалась совместно с гипертиреоидными животными в условиях вивария, получая стандартный корм и воду.

После окончания подготовительного периода, в течение которого у животных вызывался экспериментальный гипертиреоз, у крыс всех групп при температуре комфорта ($30^\circ C$) изучался положительный хронотропный эффект изопропилнорадреналина при внутривенной инфузии (v. dors. penis). Агонист инфузировавался в дозах 1.0 и 5.0 мкг/кг/мин. Продолжительность инфузии каждой из доз составляла 5 мин. Выбор условий эксперимента, вида тиреоидного гормона и типа адренергического агониста определялся, исходя из литературных данных [2].

Выраженность хронотропной функции сердца оценивалась методом автоматического подсчета R-зубцов кардиограммы (электронный кардиотахометр) в первом стандартном отведении.

Полученные данные обрабатывались общепринятыми методами вариационной статистики. При выполнении экспериментов строго придерживались "Правил обращения с экспериментальными животными".

Результаты экспериментов и их обсуждение. Многократные инъекции гормона щитовидной железы трийодтиронина закономерно приводили к постепенному развитию состояния экспериментального гипертиреоза. Показателем этого выступает ректальная температура, которая у крыс экспериментальных групп увеличилась в сравнении с контролем и составила у животных $1T_3$, T_3 и $3T_3$ групп соответственно 39.0 ± 0.1 , 40.0 ± 0.1 и $41.0 \pm 0.2^\circ C$ (у контроля $38.1 \pm 0.1^\circ C$). Следовательно, эксперименты были выполнены на животных с разной степенью выраженности экспериментального гипертиреоза – от легкой у $1T_3$ -группы до тяжелой у $3T_3$ - группы (тиреотоксикоз).

Вторым показателем, свидетельствующим о развитии состояния экспериментального гипертиреоза разной степени выраженности, является частота сердечных сокращений. Так, по данным таблицы следует, что у животных контрольной группы частота сердцебиений составляла 388 ± 5 уд/мин, тогда как у крыс с экспериментальным гипертиреозом увеличивалась соответственно на 24 ± 7 ($1T_3$ -группа), 73 ± 9 ($2T_3$ -группа) и 31 ± 12 уд/мин ($3T_3$ -группа), достигая значительных величин - 412 ± 6 уд/мин, 461 ± 8 уд/мин и 419 ± 11 уд/мин.

На следующем этапе экспериментов исследовалась хронотропная реакция сердца при β_1 -адренергической стимуляции, вызванной внутривенной инфузией изопропилнорадреналина в дозах 1.0 и 5.0 мкг/кг/мин. Цифровой материал приведен в таблице. При анализе полученных данных обращают на себя внимание следующие основные моменты. Во-первых, при инфузии изопропилнорадреналина в дозе 1.0 мкг/кг/мин у животных контрольной группы наблюдался выраженный положительный хронотропный эффект использованного агониста. Так, по данным таблицы видно, что прирост частоты сердечных сокращений (ЧСС) составил 30 ± 6 уд/мин, а при инфузии 5.0 мкг/кг/мин 51 ± 8 уд/мин. Следовательно, у крыс с эутиреоидным статусом при пятикратном увеличении дозы α -агониста адренергическая стимуляция возрастала на 70 % ($P < 0.05$).

Аналогичный характер со стороны хронотропной адренергической реакции сердца при инфузии изопропилнорадреналина был отмечен у крыс $1T_3$ и $2T_3$ -группы. У крыс указанных групп прирост ЧСС при инфузии дозы агониста 1.0 мкг/кг/мин составил соответственно 62 ± 10 уд/мин и 89 ± 13 уд/мин и был существенно выше в сравнении с контрольными величинами у крыс эутиреоидной группы. Например, если у животных контрольной группы прирост ЧСС составил 30 ± 6 уд/мин, то у крыс $1T_3$ -группы он был на 107 % выше ($P < 0.05$). У животных $2T_3$ -группы положительный хронотропный эффект изопропилнорадреналина при дозе 1.0 мкг/кг/мин был выше уже на 197 % ($P < 0.05$).

Подобная закономерность имела место при сравнении степени выраженности хронотропной адренергической реакции при инфузии агониста в дозе 5.0 мкг/кг/мин. По данным таблицы видно, что у крыс $1T_3$ -группы частота сердечных сокращений по сравнению с исходной величиной возросла на 87 ± 10 уд/мин, а у крыс $2T_3$ -группы на 119 ± 12 уд/мин. Сравнивая приросты ЧСС с контрольной группой крыс ($+51 \pm 8$ уд/мин), можно прийти к выводу, что у крыс $1T_3$ и $2T_3$ -групп адренергическая стимуляция была выше соответственно на 70 и 133 % ($P < 0.05$).

Во-вторых, тяжелая степень экспериментального гипертиреоза (тиреотоксикоз) вызывала в ряде случаев иные последствия, чем модели легкой и средней степени выраженности экспериментального гипертиреоза. Из таблицы видно, что при тиреотоксикозе ($3T_3$ -группа) частота сердечных сокращений, измеренная в отсутствии адренергической стимуляции, составила 419 ± 11 уд/мин и была уже ниже на 42 ± 13 уд/мин, чем у крыс со средней степенью выраженности гипертиреоза ($2T_3$ -группа). В то же время значения ЧСС у крыс $3T_3$ -группы оставались существенно выше, чем у контроля.

Таблица

Состояние адренергической хронотропной функции сердца (частота сердечных сокращений, уд/мин) при разной степени выраженности экспериментального гипертиреоза

Группа	Исходная величина, уд/мин	Частота сердечных сокращений (уд/мин) при инфузии разных доз изопропилнорадреналина			
		1.0 мкг/кг/мин		5.0 мкг/кг/мин	
		Максимальная величина частоты сердечных сокращений, уд/мин	Максимальный прирост, уд/мин	Максимальная величина частоты сердечных сокращений, уд/мин	Максимальный прирост, уд/мин
$1T_3$ n=12	412 ± 6 $+24 \pm 7^*$ $P < 0.05$	$474 \pm 8^*$	$+62 \pm 10$ $P < 0.05$	$489 \pm 7^*$	$+87 \pm 10^*$ $P < 0.05$
$2T_3$ n=12	461 ± 8 $+73 \pm 9^*$ $P < 0.05$	$550 \pm 12^*$	$+89 \pm 13$ $P < 0.05$	$580 \pm 9^*$	$119 \pm 12^*$ $P < 0.05$
$3T_3$ n=12	419 ± 11 $+31 \pm 12^*$ $P < 0.05$	$436 \pm 10^*$	$+17 \pm 15$ $P > 0.05$	411 ± 21	$-8 \pm 23^*$ $P > 0.05$
Контроль n=10	388 ± 5	418 ± 4	$+30 \pm 6$ $P < 0.05$	443 ± 6	$+51 \pm 8$ $P < 0.05$

Примечание: * - различия статистически достоверны ($P < 0.05$) по отношению к контрольной группе крыс

Инфузия β -адреноагониста в дозе 1.0 мкг/кг/мин крысам $3T_3$ -группы не приводила к возрастанию частоты сердцебиений, как у крыс других групп. Подобная зависимость отмечена и при инфузии большей дозы изопропилнорадреналина (5.0 мкг/кг/мин). Как видно, тяжелая степень экспериментального гипертиреоза существенно изменяла характер β -адренергической стимуляции сердца белых крыс.

Отмеченный характер влияния тиреоидного статуса на состояние хронотропной функции сердца и чувствительность его к катехоламинам свидетельствует об изменении механизмов, лежащих в основе изучаемой адренергической реакции. На наш взгляд, наиболее важные из них связаны со способностью тиреоидных гормонов воздействовать на состояние различных звеньев адренергического процесса. Так, по данным ряда авторов [8,9] под влиянием гормонов щитовидной железы изменяется концентрация β_1 -адренорецепторов в проводящей системе сердца, наблюдается экспрессия и взаимная конверсия адренорецепторов сердца, меняется механизм образования гормоно-рецептивного комплекса [10,11,12]. Наконец, при гипертиреозах возможно влияние гормонов на собственно передаточную функцию адренорецепторов, например через ингибирование фосфодиэстеразы [11], а также на активность аденилатциклазы и скорость синтеза цикло-АМФ [13,14,15]. Во всех случаях должны активироваться все биологические эффекты катехоламинов, в том числе и β_1 -адренергические сердца.

Выводы.

1. Выраженность одного из основных симптомов гипертиреоза – тахикардии определяется степенью нарушения тиреоидного статуса: при легкой и средней степени выраженности гипертиреоза наблюдается существенная активация хронотропной функции сердца; этот эффект уменьшается при тяжелой форме тиреотоксикоза.

2. Экспериментальный гипертиреоз повышает чувствительность сердца белых крыс к β -адренергической стимуляции при внутривенной инфузии изопропилнорадреналина (до 133%); степень стимуляции наиболее выражена при легкой и средней выраженности экспериментального гипертиреоза; тяжелая форма экспериментального гипертиреоза (тиреотоксикоз), сопровождающаяся повышением температуры тела до 42.0 °C, приводит к потере чувствительности сердца к действию катехоламина β -адренергической природы.

РЕЗЮМЕ

В дослідках на білих щурах вивчався степен β_1 -адренергічної реакції серця білих щурів з різним тиреоїдним статусом. Виразність одного з основних симптомів гіпертиреозу – тахікардії визначається ступенем порушення тиреоїдного статусу: при легкому і середньому ступені виразності гіпертиреозу спостерігається істотна активація хронотропної функції серця; цей ефект зменшується при важкій формі тиреотоксикозу. Експериментальний гіпертиреоз підвищує чутливість серця білих щурів до β -адренергічної стимуляції при внутрішньовенній інфузії ізопропілнорадреналіну (до 133%); ступінь стимуляції найбільш виражена при легкій і середній виразності експериментального гіпертиреозу; важка форма експериментального гіпертиреозу (тиреотоксикоз), що супроводжується підвищенням температури тіла до 42.0 °C, приводить до втрати чутливості серця до дії катехолаїну β -адренергічної природи.

SUMMARY

The expressiveness of one of the basic signs of a hyperthyroidism - tachycardia is determined by a degree of infringement of the thyroid status: at a mild and average degree of an expressiveness of a hyperthyroidism the essential activation of chronotropic function of heart is observed; this effect decreases at the serious form of a thyrotoxicosis.

The experimental hyperthyroidism raises sensitivity of heart white rats to an adrenergic stimulation at an intravenous infusion of isopropilnoradrenaline (up to 133 %); the degree of a stimulation is most expressed at a mild and average expressiveness of an experimental hyperthyroidism; the serious form of an experimental hyperthyroidism results (thyrotoxicosis) accompanying by a fervescence up to 42.0 °C. With, in an sensitivity of heart to action of a catecholamin of an adrenergic nature.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гольбер Л.М., Кандрор В.И. Тиреотоксическое сердце. -Москва.: Медицина.- 1972.-344 с.
2. Комиссаров И.В., Абрамец И.И. Модуляция эффективности межнейронных связей биорегуляторами и фармакологическими средствами. -Киев: Наукова думка.-1994.-189 с.
3. Гольбер Л.М., Кандрор В.И., Крюкова И.В. Гипертиреоз и симпатoadреналовая система. - Москва: АН СССР.- 1978. -100 с.
4. Ром-Богуславская Е.С. Некоторые особенности обменных превращений катехоламинов при тиреотоксикозе//Пробл. эндокринологии.-1981.-N5.-С.6-11.
5. Соболев В.И. Влияние α - и β -адреноблокаторов на калоригенный эффект адреналина у крыс с экспериментальным гипертиреозом//Пробл. эндокринологии.-1980.-N5.-С.63-66.
6. Султанов Ф.Ф., Соболев В.И. Гормональные механизмы температурных адаптаций.- Ашхабад:Ылым.- 1991.-216 с.
7. Туракулов Я.Х. Биохимия гормонов щитовидной железы в норме и при тиреоидной патологии. -Ташкент: АН Узб. ССР.- 1962. -222 с.
8. Fox A.W., Juberg E. et al. Thyroid status and adrenergic receptor subtypes in the rat : comparison of receptor density and responsiveness//J. Pharmacol. and Exp. Ther. 1985.- V.235.- N3. -P.208-212.
9. Gross G., Schuman Hans-J. Reduced number of α_2 -adrenoreceptors in cortical brain membranes of hypothyroid rats//J. Pharm and Pharmacol. -1981.-V.33.- N 8. -P.552-554.

10. Kunos G., Preiksatis H. G. Induced changes in adrenoreceptor properties.//Rec. Adv. Pharmacol. Adrenoreceptors. Proc. Satell Symp. 7th Int. Congr. Pharmacol., Manchester, 24-th-26-th July., 1978. Amsterdam, 1978.-P.23.
11. Law S., Henkin R. I. Thyroid hormone inhibits purified taste bud membrane adenosine-3-5-monophosphate phosphodiesterase activity//Res. Commun. Chem. Pathol. and Pharmacol. -1984.-V.43.- N 3. -P. 449-462.
12. Lefkowitz R. Heterogeneity of adenylate cyclase-coupled beta-adrenergic receptors //Biochem.biophys.acta. -1975. V.24, N5. -P.558-590.
13. Challoner D.R., Allen D. An in vitro effect of triiodothyronine on lipolysis, cyclic AMP-C 14-accumulation and oxygen consumption isolated fat cells//Metabolism.-1970.-V.19, N 7.- P.480-487.
14. Das Dipak K., Bandiopad N.D., Bandiopad N.S. Thyroid hormone regulation of β -adrenergic receptors and catecholamine sensitive adenylate cyclase in heart//Acta endocrinol.-1984.- V.106.- N 4.-P.569-576.
15. Lefkowitz R. Heterogeneity of adenylate cyclase-coupled beta-adrenergic receptors // Biochem.biophys.acta. -1975. V.24, N5. -P.558-590.

Надійшла до редакції 20.06.2002 р.

УДК 639.64 (262.5)

МАКРОФИТОБЕНТОС СУХОГО ЛИМАНА ЧЕРНОГО МОРЯ

Ф.П.Ткаченко

Одеський національний університет

Сухой (Малодолинский) лиман расположен в 18 км юго-западнее г. Одессы. Он образовался в результате трансгрессии моря и затопления низовьев большой балки. Длина водоема 14 км, ширина от 0,5 до 1,2 км, а общая площадь водного зеркала равна 12 км². Дно лимана углублено до 15 м, так как большая часть его акватории превращена в морской залив-порт. В 1957 г. здесь введен в эксплуатацию торговый порт Ильичевск [1]. Соленость вод лимана аналогична прилегающей акватории моря и меняется на протяжении года от 5,6 ‰ в период весеннего половодья и до 15,8 ‰ – осенью.

Как известно, исходным звеном биоресурсов водоемов являются водоросли. Первые сведения о 5 видах водорослей-макрофитов Сухого лимана приведены в работе В.И. Липского [2]. Позже (50-ые гг.) подробные исследования и анализ альгофлоры данного водоема выполнил И.И. Погребняк [3], который выявил здесь 40 видов водорослей-макрофитов и 5 видов высших водных растений.

Реконструкция лимана и превращение его в морской залив вызвала коренные изменения в гидролого-гидрохимическом режиме, что отразилось на составе и структуре донных фитоценозов водоема.

Цель настоящей работы заключалась в изучении современного состояния донной растительности лимана и сравнение с данными предыдущих исследований.

Материал и методы исследований

Макрофитобентос исследовали посезонно в акваториях Сухого лимана и на прилегающем участке моря. Всего за период 1993-1995 гг. на 9 станциях собрано около 250 проб макрофитов.

Сбор и обработку материала проводили по стандартным методикам морских фитоценологических исследований [4]. Макрофиты идентифицировали по соответствующим определителям [5, 6, 7].

Степень сходства флористических списков макрофитов разных периодов исследования Сухого лимана оценивали по коэффициенту Серенсена [8]. Качество вод оценивали по сапробионтному составу макрофитов и флористическому коэффициенту (*P*) Д. Ченя [9].

Результаты исследований и их обсуждение

В настоящее время в Сухом лимане нами выявлено 34 вида водорослей-макрофитов и 5 видов высших водных растений. В донной растительности лимана преобладают зеленые водоросли – 15 видов (38,5% от выявленного видового состава), за ними следуют красные – 12 видов (30,8%), бурые – 7 (17,9%) и высшие водные растения – 5 (12,8%) (табл.1.).

Таблица 1. Видовой состав макрофитов Сухого лимана

№	Таксон	Период исследований	
		1965 [3]	1995 (собственные данные)
Chlorophyta			
1.	<i>Bryopsis plumosa</i> (Huds.) Ag.	*	*
2.	<i>B. hypnoides</i> Lamour.	*	*
3.	<i>Chaetomorpha chlorotica</i> (Mont.) Ktz.	*	*
4.	<i>Ch. linum</i> (Mll.) Ktz.	*	—
5.	<i>Cladophora albida</i> (Huds.) Ktz.	*	*
6.	<i>C. fracta</i> Ktz.	*	—
7.	<i>C. laetevirens</i> (Dillw.) Ktz.	*	*
8.	<i>C. vagabunda</i> (L.) Hoek	*	*
9.	<i>Enteromorpha clathrata</i> (Roth) Grev.	*	*
10.	<i>E. compressa</i> (L.) Grev.	*	—
11.	<i>E. flexuosa</i> (Wulf.) J. Ag.	*	*
12.	<i>E. intestinalis</i> (L.) Link.	*	*
13.	<i>E. linza</i> (L.) J. Ag.	*	*
14.	<i>Entocladia viridis</i> Reinke	*	—
15.	<i>Gomontia polyrrhiza</i> (Lagerh.) Born. & Flah.	*	—
16.	<i>Monostroma fuscum</i> (Post. & Rupr.) Wittr.	*	—
17.	<i>Rhizoclonium implexum</i> (Dillw.) Ktz.	*	—
18.	<i>R. tortuosum</i> (Dillw.) Ktz.	—	*
19.	<i>Ulothrix implexa</i> (Ktz.) Ktz.	*	*
20.	<i>Ulothrix pseudoflaccida</i> Wille	*	*

21.	<i>Ulva rigida</i> Ag.	*	*
22.	<i>Urospora penicilliformis</i> (Roth) Aresch.	–	*
<i>Xanthophyta</i>			
23.	<i>Vaucheria litorea</i> Hofm.-Bang. & Ag.	*	–
<i>Rhodophyta</i>			
24.	<i>Callithamnion corymbosum</i> (J. E. Smith) Lyngb.	*	*
25.	<i>Ceramium diaphanum</i> (Lightf.) Roth	*	*
26.	<i>C. elegans</i> Ducl.	*	*
27.	<i>C. rubrum</i> (Huds.) Ag.	*	*
28.	<i>C. strictum</i> Grev. & Harv.	*	–
29.	<i>C. tenuissimum</i> (Lyngb.) J. Ag.	*	*
30.	<i>Chondria tenuissima</i> (Good. & Wood.) Ag.	*	–
31.	<i>Chroodactylon ramosum</i> (Thw.) Hansg.	*	*
32.	<i>Goniotrichum elegans</i> (Chauv.) Zanard.	*	–
33.	<i>Kylinia virgatula</i> (Harv.) Papenf.	–	*
34.	<i>Lophosiphonia obscura</i> (Ag.) Falkenb.	*	–
35.	<i>Melobesia farinosa</i> Lamour.	*	–
36.	<i>Polysiphonia denudata</i> (Dillw.) Ktz.	*	*
37.	<i>P. denudata f. fragilis</i> (Sperk) Woronich.	–	*
38.	<i>P. elongata</i> (Huds.) Harv.	–	*
39.	<i>P. spinulosa</i> Grev.	*	–
40.	<i>Porphyra leucosticta</i> Thur.	–	*
41.	<i>Rhodochorton purpureum</i> (Lightf.) Rosenv.	–	*
<i>Phaeophyta</i>			
42.	<i>Ascocyclus orbicularis</i> (J. Ag.) Magn.	*	–
43.	<i>Cystoseira barbata</i> (Good. & Wood.) Ag.	*	–
44.	<i>Desmotrichum undulatum</i> (J. Ag.) Reinke.	*	*
45.	<i>Leathesia difformis</i> (L.) Aresch.	*	–
46.	<i>Ectocarpus confervoides</i> (Roth) Le Jolis	*	*
47.	<i>E. siliculosus</i> (Dillw.) Lyngb.	–	*
48.	<i>Pseudolithoderma extensum</i> (Crouan) S. Lund	*	–
49.	<i>Punctaria latifolia</i> Grev.	–	*
50.	<i>Pylaiella littoralis</i> (L.) Kjellm.	–	*
51.	<i>Scytosiphon lomentaria</i> (Lyngb.) J. Ag.	–	*
52.	<i>Stilophora rhizodes</i> (Ehrh.) J. Ag.	–	*
<i>Magnoliophyta</i>			
53.	<i>Phragmites australis</i> (Cav.) Trin ex Steud.	*	*
54.	<i>Potamogeton pectinatus</i> L.	*	*
55.	<i>Ruppia spiralis</i> L.	*	*
56.	<i>Zannichellia major</i> Boenn. ex Reichenb.	*	–
57.	<i>Zostera noltii</i> Hornem.	*	*
58.	<i>Z. marina</i> L.	–	*
	Вместе	45	39

Примечание: “*” – вид, выявленный в бентосе “–” – не выявленный.

Водорослевые фитоценозы лимана – простые, моно- и полидоминантные, одно- и двухъярусные, полусомкнутые с выраженной сезонной сменой видового состава и соответствующими изменениями биомассы.

Состав фитоценозов и характер их распределения в изучаемом водоеме очень сходны с Григорьевским лиманом [10], где также функционирует порт. Открытость Сухого лимана как морского залива-порта обуславливает развитие здесь в основном морских и солоноватоводно-морских видов макрофитов.

Отрицательное антропогенное влияние на среду обитания донной растительности лимана привело к тому, что видовой состав фитобентоса в настоящее время сократился на 6 единиц (на 5 видов зеленых, 1 – красных и 1 – желто-зеленых водорослей), в то же время число видов бурых водорослей возросло на 1. Всего из прежнего состава макрофитов [7] Сухого лимана не выявлено 19 видов, а впервые для данного водоема нами идентифицировано 13 видов. В составе водорослевых фитоценозов лимана доминируют мезо- и полисапробные виды из родов *Urospora*, *Enteromorpha*, *Ceramium* и *Cladophora*. Развитие олиго- и мезосапробных бурых водорослей приурочено к холодному периоду года, когда прибрежные воды бывают более чистыми в связи с более активными гидродинамическими процессами. В 50-е годы в Сухом лимане

преобладали виды олиго- и мезосапробных группировок водорослей, а в настоящее время – мезо- и полисапробных (рис. 1.).

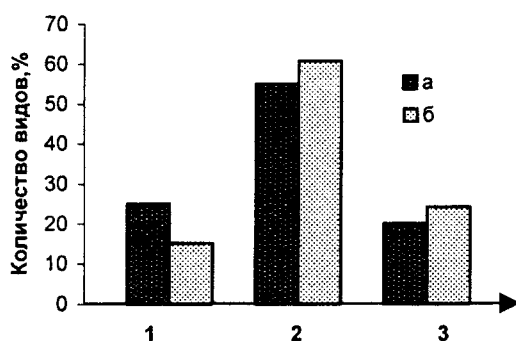


Рис. 1.: Сапробионный состав макрофитов Сухого лимана: 1 – олигосапробы; 2 – мезосапробы; 3 – полисапробы. Условные обозначения: а – 50-е гг.; б – 90-е гг.

Экологическая ситуация в лимане в конце 90-х годов прошлого столетия несколько стабилизировалась: величина флористического коэффициента Р [9] уменьшилась с 5,5 [3] до 3,8 (водоем умеренно загрязненный – β-мезосапробная зона) Это обусловило появление новых для данного водоема видов бурых водорослей *Punctaria latifolia* и *Desmotrichum undulatum*. Кроме того, в приморской части лимана (левый берег) наблюдается расширение зарослей *Zostera marina* (глубины 1–3 м) и *Z. noltii* – на глубине 0,5–1,0 м. Данные виды макрофитов относятся к олигосапробному комплексу. Еще одним показателем адаптации макрофитов к данным экологическим условиям является изменение их состава по продолжительности вегетации. Нами установлено, что по сравнению с предыдущим периодом исследования [3], к настоящему времени число видов многолетников возросло на 5,5% при одновременном сокращении на 12,6% числа однолетников. Сезонные летние формы водорослей сократились на 3,6%, а число видов сезонных зимних – увеличилось на 13% (рис. 2.). Последняя группа макрофитов представлена в основном холодолюбивыми бурыми олигосапробными водорослями

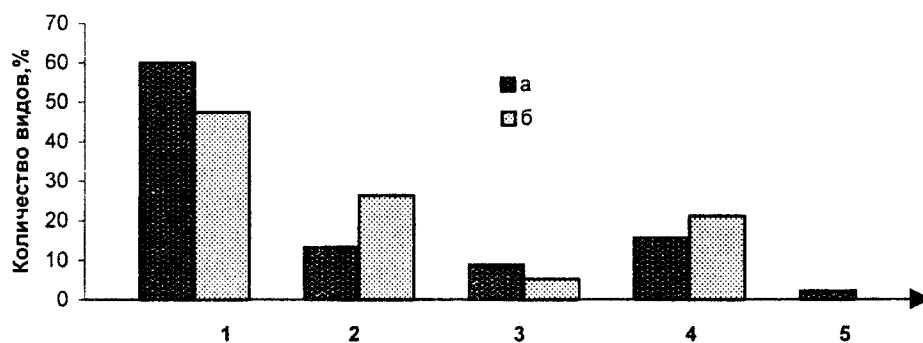


Рис. 2. Состав макрофитобентоса Сухого лимана по продолжительности вегетации: 1 – однолетники; 2 – сезонные зимние; 3 – сезонные летние; 4 – многолетники; 5 – с невыясненной природой (?). Условные обозначения: а – 50-е гг.; б – 90-е гг.

Как и в Григорьевском лимане, донная растительность Сухого лимана прошла заметные этапы сукцессии: стабильное состояние до 50-х годов, затем резкая деградация в связи со строительством порта и разрушением большинства экотопов водоема и нынешний восстановительный период. Следует заметить, что современный уровень загрязнения лимана, изменение геоморфологии побережья, глубин и особенностей гидродинамики препятствуют восстановлению прежнего видового состава макрофитобентоса.

Важным информативным показателем состояния макрофитобентоса лимана является его биомасса. Основными ее продуцентами в данном водоеме являются зеленые водоросли (*Ulva*, *Enteromorpha* и *Cladophora*). Во второй половине лета и осенью в продуцировании биомассы заметную роль играют и красные водоросли (*Ceramium* и *Polysiphonia*). Средняя биомасса макрофитов по районам Сухого лимана и сезонам года представлена в таблице 2.

Роль бурых водорослей в продукционном процессе водоема – минимальна. Небольшое значение в Сухом лимане имеют и высшие водные растения, так как площади, занимаемые их зарослями, здесь не-

значительны. В 50-е годы [3] в создании органического вещества водоема основную роль играли высшие водные растения из родов *Ruppia* и *Zannichellia*, в меньшей мере – водоросли-макрофиты из родов *Ceramium*, *Chondria*, *Ulva*, *Enteromorpha* и *Cladophora*.

Таблица 2. Сезонная динамика биомассы макрофитов Сухого лимана (1993-95 гг.), г/м²

Районы исследования	Сезоны		
	Весна	Лето	Осень
Верховье	448±193	2289±691	1435±209
Средняя часть	594±186	2205±803	1379±342
Низовье	471±209	2744±417	1365±201

В связи с однородностью нынешних условий обитания макрофитов в Сухом лимане, заметных отличий по средней биомассе в разных его районах не выявлено. Биомасса макрофитов закономерно нарастает от весны к лету и снижается осенью. В целом же средняя биомасса нынешнего состава макрофитов Сухого лимана почти в 1,5 раза меньше, по сравнению с данными предыдущего периода исследований [3].

Как известно, для водорослей характерен миксотрофный тип питания. Кроме того, в процессе фотосинтеза они способны выделять перекись водорода, переводя примеси природной воды в окисленное состояние и, тем самым, активируют процессы ее самоочищения [11]. Массовость и широкое распространение в Сухом лимане ряда видов макрофитов (из родов *Enteromorpha*, *Cladophora*, *Ceramium*, *Scytosiphon* и др.) свидетельствует о высоком потенциале самоочистительной способности водоема.

Таким образом, донная растительность Сухого лимана играет важную роль в поддержании его биологического равновесия, а сукцессия макрофитобентоса проходит в соответствии с меняющимися экологическими условиями и носит в основном антропогенный характер.

Основные черты макрофитобентоса Сухого лимана сохраняются. Степень сходства флор макрофитов предыдущего и нынешнего периодов исследования по коэффициенту Серенсена равна 0,62.

РЕЗЮМЕ

Наведені дані про сучасний стан макрофітобентосу Сухого лиману Чорного моря. Ідентифіковано 39 видів макрофітів: 34 – водоростей (зелених – 15, червоних – 12, бурих – 7) і 5 видів вищих водних рослин. Вперше для лиману наведено 13 видів макрофітів. З екологічної точки зору макрофітобентос має мезосапробний, солонувато-морський і морський характер.

SUMMARY

The data about contemporary state of macrophytobenthos of the Suchoy Estuary of the Black Sea were presented in the article. It was identify 39 species of macrophytes: 34 – seaweeds (green – 15, red – 12, brown – 7) and 5 species of sea grass. 13 species of macrophytes was founded for the first time. From ecological point of view, macrophytobenthos has mesosaprobic, saltwater-sea and sea character.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Лиманно-устьевые комплексы /Под ред. Г.И. Швобса. –Л.: Наука, 1988. – 303 с.
2. Липский В.И. Краткий отчет о ботаническом исследовании Сухого лимана // Труды Озерной комиссии Всеск. АН. – 1928, вып. 1. – С. 34-42.
3. Погребняк И.И. Донная растительность лиманов северо-западного Причерноморья и сопредельных акваторий Черного моря: Автореф. дис. ... д-ра биол. наук, – Одесса, 1965. – 31с.
4. Калугина-Гутник А.А. Фитобентос Черного моря. – Киев: Наук. думка, 1975. – 247 с.
5. Доброчаева Д.Н., Котов М.И., Прокудин Ю.Н. и др. Определитель высших растений Украины. – Киев: Наук. думка, 1987. – 548 с.
6. Зинова А.Д. Определитель зеленых, бурых и красных водорослей южных морей СССР. – М.; Л.: Наука, 1967. – 398 с.
7. Косинская Е.К. Определитель морских сине-зеленых водорослей. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948. – 278 с.
8. Шмидт В.М. Математические методы в ботанике. – Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1984. – 287 с.
9. Cheney D. T. R+C/P – A new and improved ratio for comparing seaweed floras // J. Phycol. – 1977. – 13, № 2 (Suppl.). – P. 12-15.
10. Ткаченко Ф.П., Сременко Т.І. Макрофіти Григорівського та Дофінівського лиманів Чорного моря // Укр. ботан. журн. – 2000. – 57, № 2. – С.141–147.
11. Водоросли. Справочник / Вассер С.П., Кондратьева Н.В., Масюк Н.П. и др. – Киев: Наук. думка, 1989. – 608 с.

Надійшла до редакції 26.02.2002 р.

ЕКОЛОГІЯ І ТЕХНОГЕННА БЕЗПЕКА

УДК 502.3:575.1.

КОМПЛЕКСНЫЙ ЭКОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ГЕРПЕТОФАУНЫ
ГОБУСТАНА (АЗЕРБАЙДЖАН)

Н.А. Магеррамова

Бакинский государственный университет

Гобустан и Апшеронский полуостров признаны как единый экологический район Кавказского округа [Мустафаев, 1985, 1999]. В этом районе находятся два крупных города – Баку и Сумгаит. Несмотря на это, некоторые первобытные уголки Гобустана чудом сохранились до сих пор в естественном состоянии. Мы интересовались состоянием и изученностью фауны и экологии позвоночных животных Гобустана по программе аспирантуры [Магеррамова, 2000, 2001]. В настоящем сообщении речь идет только о земноводных и пресмыкающихся. Выяснилось, что герпетофауна и ее экология в этом районе по специальной программе не изучалась, с чем и нужно поторопиться. Имеются лишь попутные сведения о распространении и частично, об аутоэкологии некоторых видов [Алиев, 1974; Алекперов, 1978; Джафарова, 1979]. Демэкологических и, тем более, синэкологических данных нет.

Следует отметить, что Гобустан представляет собой всхолмленный гористый участок, занимающий юго-восточное окончание Большого Кавказского хребтов. Климат его – сухой субтропический. Основные реки – Пирсагатчай, Джейранкечмезчай и Сумгайытчай, которые питаются атмосферными осадками Большого Кавказа и летом почти высыхают. Питьевая вода в Гобустане-колодцы. Она соленовата и недостаточна для скотоводства. Поэтому организованы много мелких водохранилищ, наполняющихся атмосферными осадками в зимнее время для обеспечения скота до подъема на летние яйлаги (конец мая-начало июня). Основные природные ландшафты Гобустана-пустынный и полупустынный, только в северной части-степной. Растительность – в основном из эфемерных трав и кустов многолетних солянок и полыни.

Гобустан приобрел мировое значение после открытия в его юго-восточной части многотысячных наскальных изображений на Беюкдаше, Кичикдаше, Джангирдаге и на холме Язылы [Джафарзаде, 1973]. К тому же на границе Гобустана с Апшеронским полуостровом обнаружена богатая четвертичная фауна Бинагадинских местозахоронений [Верещагин 1958, 1979; Бурчак-Абрамович, 1966].

МАТЕРИАЛ И МЕТОДИКА

Материалы, вложенные в основу настоящего сообщения, собраны и обработаны автором в 1996-2001 гг, будучи студентом, магистрантом и аспирантом на кафедре «Зоологии позвоночных и биоэкология» БГУ. Кроме того, использовались коллекции и экспонаты в музеях и научных хранилищах г. Баку и, конечно же, литература.

Основным методом полевых исследований являлось проведение учета животных на пеших маршрутах и визуальные наблюдения над ними на выборочных ландшафтах в разные сезоны года. Всего совершены 84 экскурсии, в том числе 5 ночных экскурсий. Особое внимание уделялось на изучение животных в их репродуктивном периоде жизни. Установлен спектр герпетофауны Гобустана, который охватывает 28 видов, относящихся к 24 родам, 14 семействам, 4 отрядам и 2 классам. Земноводных – 3, пресмыкающихся – 25 видов. Из них фоновых – 10, редких видов – 18. К фоновым относятся многочисленные и обычные виды. Таксономия и ареалы изучаемых животных заимствованы из сводки «Животный мир Азербайджана» [Гаджиев, Рахматулина, ред., 2000]. Для определения видов в полевых условиях пользовались их цветными рисунками [Банников, Даревский, Рустамов, 1971]. Распространение и некоторые детали биологии изучаемых животных в Азербайджане даны по А.М.Алекперову [1978].

Таблица 1

Фоновые и редкие виды герпетофауны Гобустана (Азербайджан)		
Название видов	Фоновые	Редкие
Зеленая жаба – <i>Bufo viridis</i> Laur.	+	-
Обыкновенная квакша – <i>Hyla arborea</i> Linn.	-	+
Озерная лягушка – <i>Rana ridibunda</i> Pall.	-	+
Средиземноморская черепаха – <i>Testudo graeca</i> Linn.	+	-
Каспийская черепаха – <i>Clemmys caspica</i> Gim.	-	+
Болотная черепаха – <i>Emys orbicularis</i> Linn.	-	+

Каспийский геккон – <i>Cyrtopodion caspicus</i> Eich.	+	-
Кавказский стеллион – <i>Stellio caucasicus</i> Eich.	+	-
Такырная круглоголовка – <i>Phrynocephalus helioseopus</i> Pall.	-	+
Желтопузик – <i>Pseudopus apodus</i> Pall.	-	+
Длинноногий сцинк – <i>Eumeces Schneideri</i> Daud.	-	+
Азиатский гологлаз – <i>Ablepharus pannarius</i> Licht.	-	+
Быстрая ящурка – <i>Eremias velox</i> Pall.	+	-
Разноцветная ящурка – <i>Eremias arguta</i> Pall.	+	-
Полосатая ящерица – <i>Laserta strigata</i> Eich.	-	+
Стройная змееголовка – <i>Ophisops elegans</i> Men.	+	-
Червообразная слепозмейка – <i>Typhlops vermicularis</i> Mer.	-	+
Западный удавчик – <i>Eryx jaculus</i> Linn.	-	+
Обыкновенный уж – <i>Natrix natrix</i> Linn.	-	+
Водяной уж – <i>Natrix tessellata</i> Laur.	-	+
Оливковый полоз – <i>Coluber najadum</i> Eich.	-	+
Краснобрюхий полоз – <i>Coluber schmidtii</i> Nicol.	-	+
Разноцветный полоз – <i>Coluber ravergieri</i> Men.	-	+
Ошейниковый эйренис – <i>Eirenis collaris</i> Men.	+	-
Кошачья змея – <i>Telescopus fallax</i> Fleisch.	-	+
Ящеричная змея – <i>Malpolon monspessulanus</i> Herm.	+	-
Степная гадюка – <i>Vipera ursine</i> Bonap.	-	+
Гюрза – <i>Vipera lebetina</i> Linn.	+	-
Всего 28 видов	10	18

Комплексный экологический анализ герпетофауны основан на концепции Г.Т.Мустафаева [1985] и охватывает более 10 параметров: тип фауны, макроструктура видов, характер сезонного пребывания, сезонная активность, суточная активность, биотопическое размещение, степень синантропизации, условия репродукции, половое взаимоотношение, социальность, тип развития, характер кормодобывания, характер питания. Эти параметры достаточно подробно характеризуют экологическое приспособление животных к окружающей среде. Тип фауны и макроструктура видов (подвиды) заимствованы из литературы [Гаджиев, Рахматулина, ред., 2000]. Степень синантропизации животных определены по шкале Г.Т.Мустафаева и Ф.Ал-Баллем [2000], а характер питания – по шкале Г.Т.Мустафаева и др. [1999]. Результаты комплексного экологического анализа могут составлять научную основу тактических приемов сохранения генофонда и биоразнообразия в регионе.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Комплексный экологический анализ показал, что основу герпетофауны Гобустана составляют средиземноморские виды-60% из фоновых и 50%- из редких. На втором месте стоит среднеазиатский и иранский типы фауны (28,6%). Вероятно, указанные типы фауны лучше приспособились к Гобустану. Автор концепции «типов фауны» Б.К.Штегман [1938] относил орнитофауну Кавказа, включая ее южную часть, к европейскому типу. Однако, наши данные по герпетофауне Гобустана подтверждают мнение Г.Т.Мустафаева [1985] о том, что возможно зоогеографическое отделение юга Кавказа (во всяком случае безлесные низменности и предгорья) от собственно Кавказской горной страны и сближение его с прилегающими территориями Ирана. Вероятно, нужно согласиться с Мустафаевым в том, что концепцию «типов фауны» желательнее применять, прежде всего, к отдельным ландшафтам, нежели к регионам и странам.

Таблица 2

Типы фауны земноводных и пресмыкающихся в Гобустане

Типы фауны	Фоновые виды		Редкие виды	
	Кол-во видов	%	Кол-во видов	%
Средиземноморские	6	60,0	9	50,0
Европейские	0,0	0,0	2	11,1
Иранские	1	10,0	3	16,7
Кавказские	1	10,0	0,0	0,0
Среднеазиатские	2	20,0	2	11,1
Малоазиатские	0,0	0,0	2	11,1
Всего	10	100	18	100

Интересно, что группа фоновых видов герпетофауны в Гобустане складывается в основном из моно-типических (70%), а группа редких видов - из политипических видов-55,6%. Вероятно, монотипичность видов более выгодна для аридного и семиаридного условий. По характеру сезонного пребывания исклю-

чительно все виды герпетофауны в Гобустане являются оседлыми, что связано, вероятно, с малоподвижностью этих животных. По сезонной активности все они, будучи пойкилотермными, идут в зимнюю спячку. Анализ герпетофауны по суточной активности показывает, что большинство как фоновых (70,0%), так и редких видов (66,7%) ведут дневной образ жизни. Видимо зрение играет большую роль в их жизни. Только озерная лягушка активна круглосуточно.

Таблица 3

Характер суточной активности герпетофауны в Гобустане				
Показатели	Фоновые виды		Редкие виды	
	Кол-во видов	%	Кол-во видов	%
Дневные	7	70,0	12	66,7
Ночные	1	10,0	3	16,7
Сумерочные	2	20,0	2	11,1
Круглосуточные	0,0	0,0	1	5,5
Всего	10	100	18	100

Анализ биотопического размещения герпетофауны в Гобустане показал, что половину фоновых видов (50,0%) составляют эврибионты, а из редких видов-ореофилы (44,4%). Все лимнодофилы, кроме зеленой жабы, являются редкими, что связано аридностью региона.

Таблица 4

Размещение герпетофауны по биотопам в Гобустане				
Биотопические группы	Фоновые виды		Редкие виды	
	Кол-во видов	%	Кол-во видов	%
Лимнодофилы	1	10,0	5	27,8
Ореофилы	3	30,0	8	44,4
Петрофилы	1	10,0	0,0	0,0
Гидрофилы	0,0	0,0	1	5,6
Эврибионты	5	50,0	4	22,2
Всего	10	100	18	100

Почти все виды герпетофауны в Гобустане (90% из фоновых, 88,9% - из редких) репродуцируют в закрытых условиях, что лучше обеспечивает сохранность потомства без активной формы защиты. Исключение составляют земноводные, неспособные репродуцировать вне воды. Изучение социальности герпетофауны показало, что большинство их являются одиночными-80% из фоновых и 72,2%-из редких видов. Виды, являющиеся групповыми или одиночно-групповыми относятся в основном к группе редких. Вероятно одиночность позволяет им лучше прятаться от всяких преследователей. К тому же все виды без исключения являются полигамными, что облегчает встречу полов и оздоравливает популяцию. Метоморфозный тип развития земноводных обеспечивает им использование двух средств жизни- воды и суши. Пресмыкающиеся, все без исключения, матурантны, что обеспечивает им жизнь без активной формы заботы о потомстве.

Синантропизация герпетофауны в Гобустане слабее, чем у птиц [Мустафаев, Ал-Баллем, 2000]. Всего 4 вида из фоновых (зеленая жаба, средиземноморская черепаха, каспийский геккон, кавказский стеллион) и 6 видов из группы редких (квакша, озерная лягушка, каспийская и болотная черепахи, желтопузик, кошачья змея) находятся на начальных стадиях синантропизации.

Способы кормодобывания земноводных и пресмыкающихся Гобустана довольно различны. Тем не менее, большинство их добывает пищу на земле. В воде кормятся всего два вида - каспийская и болотная черепахи, а на суше и воде - 3 вида: озерная лягушка, водяной уж и обыкновенный уж.

Таблица 5

Характер кормодобывания земноводных и пресмыкающихся в Гобустане				
Показатели	Фоновые виды		Редкие виды	
	Кол-во видов	%	Кол-во видов	%
На земле	7	70,0	10	55,6
На земле и на растениях	1	10,0	1	5,6
На земле и на скалах	2	20,0	1	5,6
На скалах и на растениях	0,0	0,0	1	5,6
В воде и на суше	0,0	0,0	3	16,6
Только в воде	0,0	0,0	2	11,0
Всего	10	100	18	100

Установлено, что по характеру питания большинство видов герпетофауны в Гобустане относятся к группе зоофагов (53,6%) и группе энтомофагов - 42,9%. Надо отметить, что основу группы фоновых видов составляют энтомофаги - 70,0%, а группы редких видов - зоофаги (72,2%). Мы допускаем, что зоофагия для этих животных в условиях Гобустана - явление вторичное, они вынужденно переходят от энтомофагии к зоофагии, где не находят в достаточном количестве насекомых и других беспозвоночных. Тем более, что в Гобустане имеются и более сильные конкуренты по энтомофагии из числа птиц и млекопитающих (об этом в другой работе). Истинным фитофагом здесь является только средиземноморская черепаха.

Таблица 6

Характер питания земноводных и пресмыкающихся в Гобустане

Характер питания	Фоновые виды		Редкие виды	
	Кол-во видов	%	Кол-во видов	%
Фитофаги	1	10,0	0,0	0,0
Энтомофаги	7	70,0	5	27,8
Зоофаги	2	20,0	13	72,8
Всего	10	100	18	100

Нам кажется, что результат комплексного экологического анализа может и должен составлять научную основу тактических приемов сохранения генетического фонда и биоразнообразия земноводных и пресмыкающихся в регионе.

РЕЗЮМЕ

Экология земноводных и пресмыкающихся из Гобустана не исследована. Герпетофауна данной области охватывает 28 видов, относящихся к 24 родам, 14 семействам, 4 группам и 2 классам. Земноводных - 3, пресмыкающихся - 25 видов. Виды Фона(подготовки) - 10, редкий - 18. Виды фоновых состоят из многочисленных и обычных. Сложный экологический анализ, основанный на концепции Г.Т. Мустафаева [1985, 2000], охватывает больше чем 10 параметров адаптации животных: тип фауны, макроструктура видов, характер сезонного пребывания, сезонная активность, суточная активность, биотопическое размещение, степень синантропизации, условия репродукции, половое взаимоотношение, социальность, тип развития, характер кормодобывания, характер питания. Анализ фауны на этих параметрах характеризует подробно механизмы экологической адаптации животных к окружающей среде, и его результаты должны быть приложены на основание тактических методов генетического сохранения фонда и биоразнообразия.

SUMMARY

The ecology of the amphibious and the kowtowing of Gobustan is not investigated. The herpetofauna of the given region covers 28 kinds concerning 24 sorts, 14 families, 4 groups and 2 classes. Amphibious - 3, kowtowing - 25 kinds. Background kinds - 10, rare - 18. The background kinds consist of numerous and usual ones. The complex ecological analysis based on the concept of G.T.Mustafayev (1985, 2000), covers more than 10 parameters of adaptation of animals: a spectrum of fauna, types of fauna, a macrostructure of kinds, character of seasonal stay, seasonal activity, daily activity, sexual mutual relation, conditions of the reproduction, types of development, the sociality, biotic accommodation, a degree of sinantropization, character of food getting, character of a meal. The analysis of fauna on these parameters characterizes in detail mechanisms of the ecological adaptation of animals to the environment, and its results should be enclosed onto the basis of tactical methods of genetic fund preservation and biovariety.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Алекперов А.М. Земноводные и пресмыкающиеся Азербайджана. Баку, "Элм", 1978, 264 с.
 Алиев Т.Р. Ядовитые змеи Азербайджана. Автореферат кандидатской диссертации. Баку, "Элм", 1974, 17с.
 Банников А.Г., Даревский И.С., Рустамов А.К. Земноводные и пресмыкающиеся СССР. Москва, "Мысль", 1971, 303 с.
 Бурчак-Абрамович Н.И. Бинагадинские птицы /некоторые итоги изучения/. "Бюлл. МОИП, отд. биол", №3. Москва, 1966
 Верещагин Н.К. Условия жизни и экологическая группировка животных Кавказского перешейка// Животный мир СССР, том V. Москва, 1958, 237 с.
 Верещагин Н.К. Животный мир и ландшафт Гобустана в начале нашей эры.- Материалы пленума науч.совета по пробл.биол.основы освоения, реконструкции охр. животного мира. Тбилиси, АН Грузинской ССР, 1979, с. 90-104.
 Гаджиев Д.В., Рахматулина И.К., ред. Животный мир Азербайджана. Том III, Позвоночные. Баку, "Элм", 2000, 654 с.
 Джафарзаде И.М. Гобустан /наскальные изображения/. Баку, "Элм", 1973, 250 с.
 Джафарова С.К. Узкоареальные и малочисленные виды пресмыкающихся Азербайджана: состояние и перспективы их охраны // Уч. зап. АГУ, сер. биол. наук, №3, Баку, 1979, с. 27-30.

- Магеррамова Н.А. Природа Гобустана // Материалы науч. конф. "Современные проблемы биологии". Баку, БГУ, 2000, с.77-78.
- Магеррамова Н.А. Основные причины редкости позвоночных животных в Гобустане // Материалы науч. конф. "Современные проблемы биологии". Баку, БГУ, 2001, с.103-104.
- Мустафаев Г.Т. Птицы наземных экосистем Азербайджана /Автореферат докторской диссертации/. Москва, МГУ, 1985, 54 с.
- Мустафаев Г.Т. Экологическое районирование Азербайджана //Уч.зап. БГУ, сер. естеств. наук, № 2, Баку, 1998, с.74-79.
- Мустафаев Г.Т. и др. Объективный метод определения трофической группы наземных позвоночных животных. В кн. "БГУ-80". Баку, БГУ, 1999, с. 176-177.
- Мустафаев Г.Т., Ф.А. Ал-Баллем. Этапы синантропизации зоологического вида //Журн. "Химия, медицина, биология", №2, Баку, "Техсил", 2000, с. 35-39.
- Штегнам Б.К. Основы орнитогеографического деления Палеарктики. Фауна СССР, том 1, вып.2, Ленинград, Изд-во АН СССР, 1938

Надійшла до редакції 19.09.2002 р.

УДК 504.54

ОЦІНЮВАННЯ БІОЦЕНТРИЧНО-СІТЬОВОЇ СТРУКТУРИ ЛАНДШАФТІВ РЕГІОНУ В ПЕРСПЕКТИВІ ОПТИМІЗАЦІЇ ЇЇ ПОТЕНЦІАЛУ ЩОДО ЗБЕРІГАННЯ ПРИРОДНОГО СЕРЕДОВИЩА (НА ПРИКЛАДІ ДОНЕЦЬКОЇ ОБЛАСТІ)

А.А. Блакберн

Донецький інститут соціальної освіти

У теперішній час в галузі взаємовідносин людини та природи на глобальному рівні все чіткіше виявляється інтеграція двох пріоритетних напрямів, які довгий час розвивалися незалежно, - *охорони природи (біоцентристський підхід)* і *охорони середовища навколо людини (антропоцентристський підхід)* – в єдиний процес гармонізації (оптимізації на даному етапі) цих взаємовідносин. Відповідно до цієї нової парадигми було сформульовано **стратегічне завдання** спільного існування біосфери і людства: *зберігання структурної та функціональної різноманітності біосфери, необхідної для її сталого стану і еволюційного розвитку як неодмінна умова існування не тільки біосфери, а і виживання і нормального розвитку самого людства.*

В основі такого підходу у взаємовідносинах людини і природи лежить основний онтологічний принцип підтримки глобальної екологічної рівноваги, так званий **принцип Ле Шательє Брауна в біосфері**: *сталий стан біосфери можливий лише за умовою корінного перетворення не більш ніж 1% всієї території Землі або на 1/10 не більш 10% її площі* [1]. Людство в своїй “перетворювальній” діяльності вже давно переступило цей рубіж і тому найбільш актуальною задачею на сучасному етапі є негайне припинення антропогенної експансії на біосферу і розробка програми поступального зменшення антропогенного збурення і відновлення принципу Ле Шательє Брауна в біосфері. Вже зараз необхідно зробити в цьому напрямку перший і рішучий крок у вигляді негайного припинення “освоєння все ще не вивчених цивілізацією природних ділянок біосфери, які повинні стати реальними джерелами її відновлення. Тому треба негайно почати безпосередню інвентаризацію частин біосфери, що зберігаються, і встановити їх сучасний темп змін” [2].

Цей принцип є особливо важливим для територій, ландшафти яких зазнали сильної трансформації в процесі розвитку цивілізації. Біосфери з природною біотою, незмінною або майже незмінною, існують тільки на невеличких ділянках, тому разі острівки “дикої природи” в суцільно антропогенному ландшафті. Тут виступає в силу **другий основний закон співіснування біосфери та антропогенної біосфери - закон збіднення різноманітності живої речовини в острівних її згущеннях**: *“індивідуальна система, яка працює в... середовищі з рівнем організації, нижчим за рівень системи, приречена, - поступово втрачаючи свою структуру, система через деякий час розчиниться в навколишньому середовищі”* [3]. Стосовно до ділянок “дикої природи” цей закон треба трактувати таким чином: *видова різноманітність природних ділянок біосфери, які знаходяться в оточенні цілком антропогенно трансформованого середовища і не мають ніякого сполучення одна з одною, як правило, буде зменшуватися, поки не зрівняється з кількістю видів в навколишньому середовищі.*

Донецька область, як і вся Східна Україна, являє собою типовий регіон з майже повністю перетвореними людською діяльністю ландшафтами. Наявність трьох крихітних степових заповідників (“Кам’яні могили”, “Крейдова флора” та “Хомутовський степ”) і одного “середнього” за площею національного природного парку “Святі гори”, які є основними еталонними ділянками біосфери в найбільш густонаселеній та промислово розвиненій області України, явно недостатньо для виконання основної функції **Мережі природних територій**, які охороняються особливо (ПТОО) - *підтримання сталого стану природно-територіального комплексу свого регіону.* В умовах же Донецької області говорити саме про мережу ПТОО можна лише з великою натяжкою, фактично, ця “мережа” саме і являє собою вищезначені ізольовані острівки натуральної природи в цілком антропогенному ландшафті, яка дійсно охороняється. А втім створення в області мережі слабо - і середньоперетворених людиною ділянок територій або навіть штучного походження, але в комплексі з іншими ділянками, здатних виконувати основну природозберігаючу функцію регіону, на наш погляд, цілком реально і необхідно. Бо основна задача **територіального методу підтримання** *натурального природного балансу полягає в тому, щоб “в умовах інтенсивної експлуатації території створити екологічний буфер у вигляді ділянок, які експлуатуються екстенсивно, площ з частковою охороною і абсолютно заповідних, де б зберігався видовий (елементарний) склад біоти, необхідний для підтримки надійності роботи екологічних систем та динамічного оптимуму середовищеутворюючих компонентів в усій ієрархії природних комплексів до біосфери включно”* [1]. А девіз “мислити глобально, діяти локально” повинен стати основним методологічним принципом такого підходу до проблеми підтримання екологічної рівноваги в регіоні [4,5].

Ідея цього підходу полягає в оцінюванні біотичної різноманітності і середовищезберігаючого потенціалу Донецької області на основі поетапної інвентаризації природних та в різній мірі антропогенно трансформованих ландшафтів і їх фрагментів, подальшого опису і аналізу біоцентрично-сітьової структури Донецької області.

Мета такого дослідження: на основі фактичного виявлення і аналізу біоцентрично-сітьової ландшафтно-територіальної структури області визначити ступінь її середовищезберігаючого потенціалу як основної функції природного фонду регіону і розробити заходи щодо його оптимізації.

Критерії оцінки:

1. *Основним критерієм* оцінювання середовищезберігаючого потенціалу біоцентрично-сітьової ландшафтно-територіальної структури (БСЛ) природно-територіального комплексу (ПТК) є її *складність* як головний фактор забезпечення біотичної різноманітності і генофонду популяцій шляхом міграції організмів між ділянками, що її складають. Складність БСЛ визначається через кількість її структурно-територіальних одиниць і характер зв'язку між ними.

2. *Другим за значенням критерієм* середовищезберігаючого потенціалу БСЛ є її *буферна роль* як фактор підтримання в оптимальному стані структурних та функціональних характеристик природних середовищ регіону. Буферна роль БСЛ визначається через кількість її структурних одиниць, їх абсолютних та відносних площ (у відношенні до площ цільових агро- та урбаноконкомплексів), характером їх розміщення і конфігурації відносно до антропогенно трансформованих територій і мірою впливу на останніх.

3. *Додатковими критеріями* можуть служити різноманітність популяційного складу (видова різноманітність) структурно-територіальних одиниць БСЛ, їх представництво за біотичною належністю, абсолютна та відносна чисельність особин в популяціях, співвідношення аборигенних та інтродукційних видів (в тому числі бур'янистих), наявність рідких, зникаючих та ендемічних видів, сукупна біомаса (або фітомаса) і продукція. Ці показники характеризують *значущість окремих біоцентрів в загальному комплексі БСЛ* і їх роль в забезпеченні біотичної та генетичної різноманітності регіону.

Крім цього, додатковими критеріями оцінювання значущості окремих структурно-територіальних одиниць БСЛ є їх роль як ресурсозберігаючих та оздоровчих населення компонентів регіону, функції яких можуть бути реалізовані в специфічних формах взаємодії людини і природи (рекреація, збирання грибів і ягід, рибальство до початку заготовлення сіна та ін.).

У дослідженні зазначених критеріїв дозволять дати комплексну оцінку середовищезберігаючого потенціалу БСЛ Донецької області і виробити на її основі заходи для його оптимізації. Останні можна висловити у вигляді рекомендацій щодо визначення природоохоронного статусу складових БСЛ ділянок (від абсолютно заповідних до тих, що в різній мірі експлуатуються екстенсивно), які з перспективи будуть служити основою для вироблення *принципів і критеріїв виділення ділянок територій в спеціальну категорію земель державного фонду природних територій, які охороняються особливо.*

Ключові слова і поняття.

Біоцентрично-сітьова ландшафтно-територіальна структура ПТК, або Біоцентрично-сітьова структура ландшафту (БСЛ) - натуральна хорологічна структура природно-територіального комплексу, в основу класифікації якої покладено характер розміщення і взаємозв'язку природних і напівприродних ділянок біосфери [6].

Основною функцією БСЛ є забезпечення біотичної різноманітності і генофонду популяцій шляхом міграції організмів між її структурними елементами як головний фактор підтримання середовищезберігаючого потенціалу ПТК.

Біотична різноманітність території (ландшафту) на відміну від біологічної різноманітності припускає не тільки абсолютну і відносну кількість видів, які мешкають на цій території, а і характер відносного положення видів в суспільстві, їх біотопічну і біогеографічну належність, тобто характеризує структуру і складність біотичного угруповання. Синонім - *біоценотична різноманітність.*

Структурно-територіальні одиниці БСЛ:

1. *Біоцентр* - ділянка території з природним або близьким до нього самопідтримуючим біотичним угрупованням (головним чином рослинним), яка характеризується відносною стійкістю щодо зовнішніх антропогенних впливів, виконує роль зберігання генофонду ландшафту, є центром розселення, міграції та переживання організмів. Біоцентри здійснюють функції оптимізуючого впливу на прилягаючі геотопи з культурною рослинністю (агроценози) або позбавлені її (урбаноекосистеми), а також естетичної привабливості території.

В дуже окультурених ландшафтах біоцентрами можуть бути і ділянки із *штучним рослинним угрупованням* (наприклад, посаджений ліс в степовій зоні).

В умовах *агроландшафту* біоцентрами є окремі ліси (в тому числі і лісонасадження), ділянки степу, лугів, боліт, а в *міському ландшафті* - парки, лісопарки, сквери, райони приватної власності з присадибними садовими і парковими ділянками.

За біогеографічним значенням виділяють: біоцентри локального, регіонального, надрегіонального, провінційного і біосферного рівнів.

Чіткі критерії виділення цих рівнів поки не існують [6].

2. **Біокоридор** - продовгастий (здовжений) ареал, представлений геотопами з природною або близькою до неї рослинністю, через який здійснюються біотичні міграції між окремими біоцентрами.

В *агроландшафті* біокоридорами є покриті лісами або лугами схили і днища лінійних ерозійних форм, лісосмуги, водоохоронні зони річок, річкові долини і взагалі будь-які подовжені ареали, які не зазнавали сильного антропогенного навантаження - витоптування, перевипасу, щорічного сінокошу.

В *міському ландшафті* функції біокоридорів можуть виконувати алеї, бульвари, достатньо озеленені вулиці.

Основна функція біокоридорів - забезпечення умов для міграції видів.

Додаткові функції:

- а) бар'єрна (снігозахисна, зменшення швидкості поверхневого стоку та ін.);
- б) екотопна (місце проживання або переживання багатьох видів рослин і тварин);
- в) оптимізуюча - оптимізація впливу на прилягаючі території (геотопи);
- г) естетична.

3. **Інтерактивний елемент** - лінійний ареал, зайнятий геотопами з природною або близькою до неї рослинністю, який відгалужується від біоцентру, або біокоридору і виконує функцію поширення їх впливу на прилягаючі агро - і урбанотериторії. Відрізняється від біокоридору тим, що не з'єднує біоцентри поміж собою.

Хід виконання дослідження.

I етап.

На першому етапі виконання дослідження передбачається інвентаризація крок за кроком природних і напівприродних ділянок території з їх схематичним ландшафтним картографуванням і геоботанічним описом. При цьому доцільно всю біоцентрично-сітьову ландшафтну структуру області показати у вигляді ієрархічного дерева "підпорядкованості" біоцентрів, в основі якого лежали б співвідношення площ. Розглядати:

- Біоцентри I-го порядку: $S > 100 \text{ га}$ ($S > 100 \text{ га}$);
- Біоцентри II-го порядку: $100 \text{ га} > S > 10 \text{ га}^2$ ($100 \text{ га} - 2500 \text{ га}$);
- Біоцентри III-го порядку: $10 \text{ га}^2 > S > 100 \text{ м}^2$ ($500 \text{ га} - 1000 \text{ га}$);
- Біоцентри IV-го порядку: $100 \text{ м}^2 > S > 5 \text{ м}^2$ ($100 \text{ га} - 500 \text{ га}$);
- Біоцентри V-го порядку: $S < 1 \text{ км}^2$ ($< 100 \text{ га}$).

Інвентаризація ділянок проводиться крок за кроком, починаючи з опису біоцентрів I-го порядку, потім II-го і т.д. Тут треба урахувати деяку умовність в визначенні ділянок території як біоцентрів, біокоридорів і інтерактивних елементів, оскільки біоцентри нижчих порядків можуть служити біокоридорами та інтерактивними елементами відносно біоцентрів вищих порядків. У всякому разі виявлення статусу і категорії структурних елементів БСЛ буде визначатися масштабом проведення дослідження (на рівні області, адміністративного району, місцевості та ін.).

В ході інвентаризації на даному етапі необхідно класифікувати ділянки, що виявляються за їх *репрезентативністю* (відповідністю зональному і азональному типам рослинності) і *ступенем антропогенної трансформації*. За критерії останньої можна узяти співвідношення аборигенних та інтродукованих видів рослинності, їх відносну роль в геоботанічній структурі угруповання, ступінь пригніченості окремих видів рослин.

Паралельно з геоботанічним і ландшафтним аналізом територій бажано провести *фауністичний опис* БСЛ у вигляді нанесення на карту меж ареалів або точок виявлення основних систематичних груп тварин (орнітофауни, теріофауни, герпетофауни, ентомофауни), підрозділяючи їх за такими категоріями: фонові види, рідкісні і зникаючі (червонокнижкові), реліктові і ендемічні, полювально-промислові і полювально-спортивні та ін. Для ділянок, перспективних з природоохоронної точки зору, доцільно провести комплексні фауністичні дослідження, які включають опис видової структури суспільства даної систематичної групи (видову різноманітність і відносну чисельність видів), чисельності і структури їх популяцій, динаміки чисельності і факторів, які впливають на них.

II етап.

Другий етап дослідження складається з математичного аналізу одержаних на першому етапі даних по первинній інвентаризації ділянок БСЛ території. Цей аналіз обґрунтований на використанні методів та елементів *теорії графів*, застосованих в ландшафтній екології [6]. За основою інвентаризації та картографування структури БСЛ будується її *граф у вигляді сукупності точок (вершин графу), які з'єднані одна з одною лініями (ребрами)*. Вершинами графу БСЛ є *біоцентри*, а ребрами – *біокоридори та інтерактивні елементи*.

Через те що основною функцією БСЛ є забезпечення біотичної різноманітності та генофонду популяцій шляхом міграції організмів, то ступінь реалізації цієї функції може бути визначена по інтенсивності міграції організмів між біоцентрами, яка в свою чергу знаходиться в функціональній залежності від площ контактуючих біоцентрів та відстані між ними. Якщо емпіричних даних про інтенсивність міграції немає, її приблизно можна вирахувати за формулою (гравітаційної моделі):

$$C_{ij} = k S_i S_j / d_{ij}^2,$$

Де C_{ij} - умовна оцінка інтенсивності біотичних міграцій між біоцентрами I та J ; k - коефіцієнт "провідності" біокоридору, за який можна прийняти оцінку його едафічної різноманітності; S_i і S_j - відповідно площі біоцентрів I та J ; d_{ij} - довжина з'єднуючого їх біокоридору.

Кількісні показники БСЛ.

Основним показником середовищезберігаючої функції усього комплексу БСЛ є його "складність", яка визначається через кількість структурних елементів, які його складають, та характер зв'язку між ними. Складність БСЛ оцінюється по комплексу "кількісних показників":

1. **Прості показники:** кількість біоцентрів, їх розміри, довжина біокоридорів, процент площі, яку займають біоцентри (Б) і біокоридори (К) на всій площі території тощо.

2. Більш інформативними є показники, які характеризують ступінь зв'язності графу БСЛ. В ландшафтній екології в топографічній оцінці БСЛ використовують α -, β - та γ -індекси зв'язності:

$$\alpha = (K - B + 1) / (2B - 5), \quad \alpha \in (0, 1);$$

$$\beta = K/B, \quad \beta \in (0, 3);$$

$$\gamma = K/3(B - 2), \quad \gamma \in (0, 1),$$

де K - кількість біокоридорів, B - кількість біоцентрів.

Альфа-індекс являє собою відношення числа циклів, які існують у біоцентрично-сітьовій ЛТС, до їх максимально можливого (для даного біоцентру) числа. Чим вище значення α -індексу, тим більше альтернативних шляхів міграції особин з біоцентру. *Оптимальною є БСЛ з $\alpha = 1$.*

Бета-індекс характеризує ступінь розвитку та складність сітки біокоридорів. При $\beta < 1$ граф не має жодного циклу, при $\beta = 1$ - тільки один, при $\beta > 1$ - кілька циклів. (Примітка: *цикл* - це ланцюг послідовних з'єднань, які починаються з якоїсь вершини і закінчуються в цій же вершині). *Оптимальною є БСЛ з $\beta = 1$.*

Гамма-індекс характеризує ступінь розгалуження біокоридорів до їх максимального (для даного біоцентру) числа. Чим вище значення γ -індексу, тим більше розгалужена сітка біокоридорів, тим коротші шляхи міграції між двома довільно обраними біоцентрами. При $\gamma = 0$ жоден з біоцентрів не зв'язаний один з одним (тобто біокоридорів у БСЛ взагалі немає), при $\gamma = 1$ кожен біоцентр безпосередньо (одним біокоридором) пов'язаний з рештою, що і є *оптимальним для БСЛ* [6].

3. Крім показників, які характеризують *біоцентрично-сітьову ландшафтну структуру в цілому*, важливо також врахувати *показники, які оцінюють роль окремих біоцентрів у цій структурі*. Таким показником, зокрема, є *ступінь (значущість) біоцентру*.

3.1. *Ступінь біоцентру* дорівнюється числу біокоридорів, які безпосередньо з'єднують даний біоцентр з іншими. Чим вище ступінь біоцентру, тим він краще захищений від деградації і тим більше значення має в біоцентрично-сітьовій ЛТС як центр розповсюдження видів.

3.2. З топологічної точки зору повніше роль окремого біоцентру в БСЛ може бути оцінена через показники *центральної* або *доступності біоцентрів*. Ці показники розраховуються за матрицями доступності вершин графу. Найбільше застосовуються такі показники:

а) *абсолютний індекс доступності біоцентру I (S_i)* - сума біокоридорів від нього до всіх інших біоцентрів. Вона є сумою всіх елементів i -го рядка матриці доступності. Вершина з найменшим значенням S_i є центральною на графі.

б) *число Кеніга (K_i) біоцентру I* - найбільший елемент i -го рядка матриці доступності. Вершина з найменшим значенням K_i є центральною.

в) *індекс Бавелаша (B_i)* є відносною оцінкою центральної вершини I -

$$B_i = (1/S_i) \sum_{i=1}^n S_i,$$

де S_i - абсолютний індекс доступності i -ої вершини (біоцентру), n - їх число.

г) *індекс Бічема (R_i)* - також відносна оцінка центральної вершини I , але, на відміну від B_i , розраховується простіше -

$$R_i = (n - 1) / S_i$$

Біоцентри з найбільшим значеннями B_i та R_i є *центральними* в біоцентрично-сітьовій структурі ландшафту. Від центрального біоцентру найкоротші (в топологічному розумінні) шляхи міграції до всіх інших біоцентрів і тому він заслуговує особливої уваги в аспекті охорони та збагачення живої природи.

Вада цих показників у тому, що вони характеризують лише топологічну роль біоцентру, залишаючи поза увагою такі його суттєві особливості, як біологічну різноманітність, площу, місцезоположення в ландшафті тощо.

Як комплексний показник значення біоцентру в біоцентрично-сітьовій структурі ландшафту з урахуванням усіх вищезгаданих критеріїв є *синтетичний індекс ролі і-го біоцентру* (SIR_i):

$$SIR_i = R_i (n_i / N) \sqrt{S_i / S (d_i / P_i^2)},$$

де R_i – індекс Бічема; n_i – число видів рослин (або усіх видів взагалі або тільки якої-небудь сукупності видів) в i -му біоцентрі; N – те ж в усіх біоцентрах БСЛ; S_i – площа i -го біоцентру; S – площа всієї території, на якій розміщена біоцентрично-сітьова ЛТС; d_i – відстань від i -го біоцентру до точки геометричного центру цієї території; P_i – відстань від i -го біоцентру до зовнішніх меж БСЛ.

РЕЗЮМЕ

Предлагается схема оценки бицентрично-сетевой структуры ландшафтов для определения и оптимизации средосберегающего потенциала густонаселенного региона (на примере Донецкой области). Обосновывается идея необходимости сохранения в густонаселенном регионе природных и полуприродных участков (биоцентров), соединенных в общую сеть посредством биокоридоров. Предлагается иерархический подход в определении значимости отдельных природных участков для оценки средосберегающего потенциала территории.

SUMMARY

The proposal is given on the estimation of biocentre network landscape structure to determine and optimize an environmental protection potential of a density populated region (using the example of Donetsk Region). The idea is substantiated of the need to preserve natural and semi-natural areas (biocentres) at density populated region connected into the general system using biocorridors. A hierarchical approach is proposed to determine the importance of individual parts of the landscape for the estimation of the environmental protection potential of the territory.

Надійшло до редакції 15.04.2002 р.

1. Брайанс Г. *Сохранение природы*. // В кн. *Украинские природные территории*. – М.: Мысль, 1978. – 295 с.
2. Марчук Г.П., Кондратьев К.Я. *Приоритеты глобальной экологии*. – М.: Наука, 1992. – 261 с.
3. Хильми Г.Ф. *Основы физики биосферы*. – Л.: Гидрометеиздат, 1966. – 300 с.
4. Розбудова екомережі України / під ред. Шеляг-Сосонко Ю.Р. – К.: 1999. – 158 с.
5. Закон України „Про загальнодержавну програму формування національної екологічної мережі України на 2000 – 2015 роки”. – 21.09.2000 р., № 1989-III.
6. Гродзинський Д.М. *Основы ландшафтной экологии*. – К.: Либідь, 1993. – 224 с.

Надійшла до редакції 15.04.2002 р.

УДК 616.15:612.017.1:504.056:622

ОСОБЛИВОСТІ ГЕМАТО-ІМУНОЛОГІЧНОГО СТАНУ ГІРНИКІВ-ЛІКВІДАТОРІВ НАСЛІДКІВ АВАРІЇ НА ЧАЕС, ЩО МЕШКАЮТЬ В ЕКОЛОГІЧНО НЕСПРИЯТЛИВОМУ ДОНЕЦЬКОМУ РЕГІОНІ.

О.А. Ракша-Слюсарева

Інститут невідкладної і відновної хірургії АМН України, Донецьк

ВСТУП

У результаті аварії на Чорнобильській атомній електростанції виник радіаційний фактор. Територія України була забруднена широким спектром викинутих радіонуклідів. Населення, що проживає в різних за рівнем екологічним рівнем регіонах, підпало під вплив іонізуючої радіації.

Основою екологічного неблагополуччя в Донецькому регіоні є комбінований вплив комплексу негативних факторів, що виникають за рахунок продуктів переробки хімічної, металургійної, гірничодобувної й гірничо-переробної промисловості, а також постійної дії низькоінтенсивного іонізуючого випромінювання, обумовленого особливостями геологічної платформи Донбасу й наявністю її техногенних розломів [1-7].

Ці шкідливі фактори навколишнього середовища підсилюють дію радіаційного фактора, що виник у результаті аварії на ЧАЕС на населення в тому числі і на ліквідаторів наслідків аварії (ЛНА) на ЧАЕС. При цьому, більшість ЛНА Донецького регіону складають гірники вугільних шахт, що, як населення категорії Б, додатково підпадають під дію природної низько інтенсивної радіації, в основному за рахунок радону і дочірніх продуктів розпаду радону і торона [8-10]. При цьому, встановлено негативний вплив останніх факторів на деякі показники системи крові й імунітету [11-12].

Вивчення раніше невідомого комбінованого впливу специфічного Чорнобильського фактора, посиленого несприятливими екологічними умовами життя, на гемато-імунологічний стан організму є актуальним і необхідним для дослідження на кожному відрізку часу існування біоти в поставарійний період.

ОБ'ЄКТИ ТА МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕНЬ

З 1997 по 1998 рік досліджували 123 гірників вугільних шахт, що приймали участь у ліквідації наслідків аварії на ЧАЕС (ЛНА) у Мінському і постійно проживають у Донецькому регіоні. Дослідження проводили за допомогою аналізу офіційних документів, середня вік - 40,5 років - 100 років. Контрольну групу складала 122 умовно здорових гірників, що не приймали участі в ліквідації наслідків аварії на ЧАЕС (УЗГ).

В обстежуваних вивчали гемограму і якісний склад лейкоцитів периферичної крові з перерахунком абсолютного вмісту кожного пула лейкоцитів. Вміст основних популяцій і субпопуляцій лімфоцитів периферичної крові визначали за допомогою методу непрямой імунофлюоресценції (Пінчук В.Г. і ін., 1990) із використанням панелі комерційних моноклональних антитіл ІКО, ІПО, аналогічних моноклональних антитілам для виявлення експресії мембранами лімфоцитів антигенних рецепторів. CD 3+, CD 4+, CD 8+, CD 22+. Вміст сироваткових імуноглобулінів класу А, М, G визначали методом Mancini G. et al. (1965). Рівень циркулюючих імунних комплексів реєстрували за методом Digione M. et al. (1969) у власній модифікації (Ракша-Слюсарева О.А., 1992). Фагоцитарна активність нейтрофілоцитів вивчали за методом П. Б. Стенко й Е.А. Кост (1975), бактерицидна активність - за методом Нагосова Б.С., Шубича М.Г., (1981). Визначення токсичності плазми крові проводили за методом Генес .Н. та інші (1958), показники середніх молекул – за методом Габриелян Н.І. і Ліпатової В.Н. (1992).

Отримані результати оброблювались методами варіаційної статистики з використанням програми "Statistical Window", версія 1 і пакету відповідних програм вимірів.

РЕЗУЛЬТАТИ ТА ОБГОВОРЕННЯ

Аналіз гемато-імунологічного стану ГЛНА показав вірогідне зниження в периферичній крові вмісту тромбоцитів ($234,40 \pm 9,00$ Г в 1 л), лейкоцитів ($5,90 \pm 0,18$), мета мієлоцитів ($0,02 \pm 0,01$ Г в 1 л), сегментоядерних нейтрофілів ($2,90 \pm 0,09$ Г в 1л) і природних кілерів ($0,04 \pm 0,02$ Г в 1 л) у порівнянні з УЗГ Донецького регіону ($264,30 \pm 3,00$ Г в 1 л, $7,20 \pm 0,46$ Г в 1 л, $0,036 \pm 0,009$ Г в 1 л, $2,90 \pm 0,09$ Г в 1 л, $0,26 \pm 0,13$, відповідно). При цьому, в ГЛНА спостерігалася тенденція до зниження вмісту моноцитів і еозинофілів периферичної крові, а також до підвищення гематокритного числа.

У ГЛНА зареєстроване підвищення частоти клітинних розпадів з $15,50 \pm 3,00\%$ до $22,50 \pm 1,40\%$. Встановлено вірогідне збільшення вмісту нейтрофільних гранулоцитів з токсогенною зернистістю цитоплазми ($13,90 \pm 3,20\%$), фрагментованими ($33,70 \pm 2,70\%$), гіперсегментованими ($17,80 \pm 1,60\%$) і набряклими ядрами ($37,30 \pm 3,40\%$), відповідно при нормі для гірників: ($3,00 \pm 2,50\%$, $19,00 \pm 4,10\%$, $8,40 \pm 2,00\%$, $19,60 \pm 4,30\%$). Зареєстровано збільшення пула лімфоцитів з бобовидними й атипovими ядрами у виді су-

ного листа з $2,30 \pm 0,40\%$ до $7,30 \pm 1,50\%$ і з $0,78 \pm 0,10\%$ до $6,10 \pm 1,70\%$, відповідно. Виявлено тенденцію до зростання вмісту атипових моноцитів до $0,83 \pm 0,32\%$, при нормі $0,30 \pm 0,10\%$ і появи двоядерних моноцитів ($0,35 \pm 0,03\%$), що не реєструються у нормі.

У ГЛНА встановлено вірогідне зниження вмісту пулів Т-лімфоцитів. Так, вміст популяцій лімфоцитів, що експресують на своїй поверхні антигенні рецептори CD3+, CD 4+, CD8+ складав у ГЛНА $0,99 \pm 0,06$ Г в 1 л, $0,49 \pm 0,03$ Г в 1 л, $0,38 \pm 0,03$ Г в 1 л при регіональній нормі, відповідно: $1,48 \pm 0,03$ Г в 1 л, $0,85 \pm 0,02$ Г в 1 л, $0,61 \pm 0,02$ Г в 1 л ($P < 0,05$).

При цьому, зареєстровано вірогідне збільшення рецепції антигенних детермінант В - лімфоцитів (CD22+) - $0,67 \pm 0,02$ Г в 1 л, при нормі для УЗГ - $0,52 \pm 0,03$ Г в 1 л ($P < 0,05$).

На відміну від осіб, що не працюють у гірничодобувній промисловості, не спостерігався дисбаланс експресії мембранами лімфоцитів антигенних рецепторів, що асоціюються із субпопуляціями лімфоцитів Т-хелперів (CD 4+) і Т-супресорів (CD8+), але намічалася тенденція до його розвитку.

У порівнянні з УЗГ в ГЛНА вірогідно знижувався рівень сироваткових імуноглобулінів класу А ($1,73 \pm 0,19$ г/л) і М ($1,0 \pm 0,11$ г/л) при нормі, відповідно $2,20 \pm 0,01$ г/л і $1,80 \pm 0,14$ г/л. Вміст імуноглобулінів класу G у ГЛНА практично не мінявся і складав $8,90 \pm 0,37$ г/л, при нормі $9,00 \pm 0,70$ г/л.

У ГЛНА спостерігалася тенденція до зниження фагоцитарної і бактерицидної активності нейтрофілів, відповідно, до $32,80 \pm 2,90\%$ і $21,98 \pm 2,60\%$ при регіональній нормі $39,40 \pm 2,50\%$ і $25,30 \pm 2,30\%$.

Така ж тенденція зареєстрована у відношенні вмісту циркулюючих імунних комплексів, рівень яких у ГЛНА складав $30,60 \pm 3,70$ од. опт. пл., при нормі в гірників Донецького регіону - $34,50 \pm 5,80$ од. опт. пл.

У цього контингенту відзначена тенденція до наростання сенсibiliзації лімфоцитів периферичної крові до стрептокока і вірогідне збільшення сенсibiliзації імунокомпетентних кліток організму до стафілокока ($0,38 \pm 0,08$ при нормі $0,17 \pm 0,04$, при $P < 0,05$). Це побічно підтверджує присутність і збільшення вмісту патогенних мікроорганізмів у ГЛНА і узгоджується з вищенаведеними даними про зміни в системі імунітету і неспецифічній резистентності організму.

Зареєстровані зміни гемато-імунологічного стану ГЛНА виявлені на тлі значного зростання показників вмісту клітин крові та антигенних рецепторів з параметриями (від $18,79 \pm 0,80$ хвилини до $8,28 \pm 0,40$ хвилини при ліквідації аварії на ЧАЕС, при збільшенні частоти лінійної частоти від 280 нм до $0,56$ нм при дозкинні хвили 280 нм із $0,56$ нм до $0,56$ нм).

Висновком з урахуванням отриманих результатів про відмінності зміни показників гемато-імунологічного стану гірників та ліквідаторів аварії на ЧАЕС і ліквідаторів аварії на ЧАЕС, що не працюють у гірничодобувній промисловості в динаміці 1990-2000 р [12] і необхідності розробки адекватних методів корекції і медичної реабілітації для гірників - ліквідаторів наслідків аварії на ЧАЕС.

РЕЗЮМЕ

Досліджено стан системи крові та імунітету у 223 гірників вугільних шахт Донецького регіону - ліквідаторів наслідків аварії на ЧАЕС та 120 гірників, що не приймали участі в ліквідації аварії. Встановлено більш глибокі зміни гемато-імунологічного стану та негативну тенденцію розвитку цих змін з 1990 р. по 1996 р., при порівнянні з ліквідаторами наслідків аварії на ЧАЕС, що не працюють у вугільній промисловості, та подальшим етапом спостереження (1997-2000 р.). Отримані результати свідчать про необхідність проведення детоксикації та імунокорекції у контингенту шахтарів-ліквідаторів наслідків аварії на ЧАЕС.

SUMMARY

Status of blood and immune system of 223 clean appears of Chernobyl accident, working in Donbass coal mines were detected and 120 hells miners. It was founded more changes of haemato-immunologic status and negative tendency of their development from 1990 till 2000 year in population of miners- clean appear than non miners. The results show necessity of detoxification and immunocorrection in contingent of miners-clean uppers of Chernobyl accident.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Анализ радиационной ситуации в Донецкой области и ее влияние на онкологическую заболеваемость населения /С.В. Грищенко, Е.М. Набиева, И.В. Коктышев: Сб. науч. трудов ДонМГУ.- Донецк, 1996.-С. 52-54.
2. Арых А.М. Окружающая среда и здоровье населения, //Экологические проблемы Донбасса и пути их решения: Сб. докл. науч.-практ. конф.-Донецк,1990.-С.59-62.
3. Богданов В.А. Эпидемиология рака легкого в условиях крупного промышленного центра Донбасса: Сб. науч. трудов ДонМГУ.- Донецк, 1996.-С.15-16.
4. Влияние факторов производственной среды в условиях глубоких угольных шахт на иммунный статус горнорабочих /Донченко Л.И. Трунова О.А. Дружинина Л.А. Пола К.П // Гигиена труда и проф. заболеваний.-1988.- N8. С7 53-54.

5. Об изучении влияния объектов промышленности на загрязнение окружающей среды /Н.П. Грищенко, Д.Я. Миронюк, А.В. Дударенко, В.К. Бородай //Актуальные вопросы гигиены и эпидемиологии Донбасса: Тез. докл. науч.-практ. конф.-Донецк, 1993.
6. Содержание ксенобиотиков в пищевых продуктах Донбасса: / Л.Б. Нелепа, Л.И. Городник, Г.Н. Гончаров и др.// Актуальные вопросы гигиены и санитарии Донбасса: Тез. докл. науч.-практ. конф.- Донецк, 1993.-С. 144-145.
7. Features of measurement and valuation of dust-radioactive factor in coal mines /D.O. Lastkov, O.V. Partas, Raksha E.A et al.// International conf. "Technologically Enhanced Natural Radiation Caused by Non-Uranium Mining". 16-19 October 1996 in Szczyrk, Poland. -1996. - P. 12.
8. Влияние технологически измененного естественного радиационного фона на население угледобывающих регионов /Д.О. Ластков, О.В. Партас, Е.А. Ракша и др. //Проблемы профилактической медицины: Сб. статей. Ч.1. - Донецк: ООО "Лебедь". - 1997. - С.36-38.
9. Особенности воздействия радиационного фактора на горнорабочих угольных шахт // Радиобиологический съезд: Тез. докл. Киев. -20 - 25 сентября, 1993 г. Пушино, 1993.- С. 575. – Ракша-Слюсарева Е.А., Ластков Д.О., Слюсарев А.А., Соловьев В.В., Николенко В.Ю.
10. Ракша-Слюсарева Е.А. Деякі показники системи імунітету та цитоморфологія лейкоцитів у гірників вугільних шахт Донбасу, що працюють в умовах різних радіаційних навантажень // Матеріали 3 симпозіуму "Діагностика та профілактика негативних наслідків радіації". Київ.-1998.-С.194-196.
11. Особенности воздействия малых доз ионизирующей радиации на организм горнорабочих угольных шахт Донбасса/ Ракша- Слюсарева Е.А., Ластков Д.О., Партас О.В., Слюсарев А.А., Бахтеева Т.Д., Варенко Ю.С.//Вестник гигиены и эпидемиологии.-1998.- Т 2.-N 2.- С.220-223.
12. Вплив іонізуючої радіації на гемато-імунологічний стан гірників вугільних шахт. Повідомлення перше /Ракша-Слюсарева О.А., Ластков Д.О., Партас О.В., Бахтеєва Т.Д., Асланова О.О., Слюсарев А.А., Варенко Ю.С., Барабой В.А. // Український радіологічний журнал (УРЖ).-1999.-N3.-

Надійшла до редакції 19.02 2002 р.

СИСТЕМИ ТА ПРОЦЕСИ КЕРУВАННЯ

УДК 004.942+534-7

МОДЕЛИ НЕЧЁТКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ЗАДАЧАХ АВТОМАТИЗАЦИИ БИЗНЕС ПРОЦЕССОВ

В.А. Каргин

Введение. Бизнес процессы включают такие стороны делопроизводства как маркетинг, освоение новых изделий, кадры, руководство, производство, денежное обращение и другие виды деятельности, связанные со сбором и обработкой информации и данных, планированием, принятием решений и управлением [1]. Особенности бизнес процессов являются крупномасштабность, многогранность, изменчивость и трудность прогнозирования по накопленным данным. Поэтому теория нечётких систем является основной методологией при моделировании бизнес процессов [2] с целью построения эффективных автоматизированных систем. В качестве основного математического аппарата для моделирования бизнес процессов предлагается использовать модели нечётких управляемых динамических процессов [3].

В работе [4] отмечается, что неполнота описания динамических процессов может носить двоякий характер. В зависимости от возможностей контроля отдельно взятых свойств и событий, на которых определён сам процесс, говорят о точных или размытых (нечётких) моделях. В зависимости от степени изученности причинно-следственных связей модели могут быть детерминированными, стохастическими или хаотическими. Таким образом, полный арсенал моделей динамических процессов следующий: точные детерминированные; точные стохастические; точные хаотические; нечёткие детерминированные; нечёткие стохастические; нечёткие хаотические.

В настоящей работе приводятся модели управляемых нечётких детерминированных и стохастических динамических процессов, а также модели управления хаотическим процессом. Для анализа возможности их применения для конструирования систем автоматизации бизнес процессов на рынке финансов.

Модель управления нечетким детерминированным процессом. Исходная форма представления произвольного нечеткого процесса - это временная последовательность ситуаций, формализованная в виде нечёткого множества, определённого либо на универсальном множестве свойств S

$$[\xi]^{[t]} = ([C]_t, [C]_{t-T}, \dots, [C]_{t-iT}, \dots), \quad (1)$$

либо на универсальном множестве событий Ω

$$[\xi]^{[t]} = ([\Omega]_t, [\Omega]_{t-T}, \dots, [\Omega]_{t-iT}, \dots), \quad (2)$$

где $[C]_{t-iT} = \{c \mid [\mu_{C'}(c)]_{t-iT}, \forall c \in C\}$, $[\Omega]_{t-iT} = \{\omega \mid \mu_{\Omega'}(\omega), \forall \omega \in \Omega\}$ - модель ситуации в момент времени $t-iT$, представленная нечетким множеством, соответственно, свойств $[C]_{t-iT} = C'$ и событий $[\Omega]_{t-iT} = \Omega'$;

$\mu_{C'}(c)$, $\mu_{\Omega'}(\omega)$ - функции принадлежности свойства c и события ω , соответственно, нечётким множествам C' и Ω' .

Нечёткость носит двоякую интерпретацию. Во-первых, она характеризует размытость события во времени, а во-вторых, в пространстве свойств или возможных событий.

Управляемый нечёткий динамический процесс можно представить в более компактной чем (1) или (2) форме: уравнением движения динамического процесса [4].

$$[\xi]_{t+1} = G_t([\xi]^{[t_n, t]}, [U]^{[t_n, t]}, \tilde{\varphi}([S]^{[t_n, t]}, [\mathfrak{R}]^{[t_n, t]})), \quad (3)$$

где $\tilde{\phi}([S]^{[t_n, t]}, [\mathfrak{R}]^{[t_n, t]})$ - нечёткая мера близости временного фрагмента ситуации $[S]^{[t_n, t]}$ к некоторой эталонной области $[\mathfrak{R}]^{[t_n, t]}$ (необходимые условия);

$[U]^{[t_n, t]}$ - временной фрагмент свойств или событий от которого зависят состояния процесса (управляющие свойства);

$$t_n = t - nT.$$

Теперь можно дать определение управляемого нечеткого детерминированного процесса:

А) Универсальные множества свойств S или событий Ω , на которых определен динамический процесс (в дальнейшем будем обозначать Ξ), контролируются неполностью, либо из-за большой размерности, либо из-за отсутствия точных измерительных приборов. Состояния процесса ξ представлены обобщенными характеристиками или качественными лингвистическими оценками и формально представлены нечёткими множествами.

Б) В уравнении движения (3) множество свойств ситуации S контролируемо не полностью. Используются нечеткие или качественные лингвистические оценки ситуации $\tilde{S}$ в виде нечётких множеств.

В) Известны причинно-следственные законы, которые представлены отображением G в уравнении движения (3): для любых $[\xi]^{[t_n, t]}$, $[U]^{[t_n, t]}$ имеет место нечёткая детерминированная зависимость между ними и состоянием процесса в будущий момент времени $[\xi]_{t+1}$ при условии, что

состояние S описано нечётким множеством $\tilde{S} = \{s \mid \mu_{\tilde{S}}(s) > 0\}$. Формально G имеет вид:

Уравнение (3) можно переписать, обозначив состояние системы процессом ξ_t и управлением U_t . Тогда нечёткое отображение состояний процесса в (3) существенно зависит от управлений $[U]^{[t_n, t]}$, как от параметра.

Введём в рассмотрение лицо, принимающее решение (ЛПР). В качестве его модели примем оценки состояниям процесса, предпочтения ЛПР на множестве оценок и закон управления, которым пользуется ЛПР при формировании управлений.

Оценки ЛПР. Задано универсальное множество V , на котором определено множество оценок ЛПР: $V = \{V\}$. Оценки могут быть представлены нечёткими множествами $\tilde{V} = \{v \mid \mu_{\tilde{V}}(v), \forall v \in V\}$, простыми лингвистическими переменными или сложными конструкциями, например, типа: «после наступления события A долго не должно быть события B ». Задано нечеткое отображение $\tilde{\Phi}: \Xi \rightarrow \tilde{V}$, индуцирующее оценки $\tilde{V}$. Операцию индуцирования нечёткого множества оценок из нечётких множеств состояний процесса обозначим как

$$[\tilde{V}]_t = \tilde{\Phi}([\xi]_t). \quad (4)$$

Известно подмножество оценок $V' \subset V$, которые будем называть предпочтениями ЛПР.

Закон управления ЛПР. Лицо, принимающее решение формирует временную последовательность свойств $[U]^{[t-nT, t]}$, которые являются управляющими свойствами для процесса (3). Закон управления будем представлять множеством нечётких правил π , которые, в общем случае, используют информацию

о состояниях процесса и об оценках критерия качества $\mathbf{K}$. Зависимость правил управления от перечисленных факторов будем отражать в записи $\pi_{\xi, K}$.

В качестве критерия $\mathbf{K}$ примем нечёткую меру близости оценки $[V]_t$, найденной согласно (4), для фактического состояния процесса и предпочтений ЛПР $V' \subset V$.

$$[K]_t = \delta([V]_t, \mathfrak{R}_{\sim V'}) \quad (5)$$

Задача управления нечётким детерминированным процессом на интервале времени $[t - \theta, t]$ ставится в следующем виде. Найти такую последовательность правил управления $\tilde{\pi}_{\xi, K}$, формирующих траекторию управления $[U^*]^{[t-\theta, t]}$, которая даёт минимум среднего значения меры близости предпочтений ЛПР и фактических оценок состояний процесса.

$$K^* = \underset{\tilde{\pi}_{\xi, K}}{MIN} \left(\frac{1}{N} \sum_{\tau=t-\theta}^t [K]_{\tau} \right) \quad (6)$$

Модель управления нечётким стохастическим процессом. Для этого класса выполняются условия А) и Б), сформулированные ранее для детерминированных процессов, однако, условие В) отличается: причинно-следственные законы, которые представлены отображением G в уравнении движения (3), известны неполностью, потому что неизвестны области $[\mathfrak{R}]^{[t_n, t]}$, а значит не

выполняются условия $\tilde{\rho}([S]^{[t_n, t]}, [\mathfrak{R}]^{[t_n, t]}) \leq \varepsilon$. Сущность нечёткой стохастической зависимости сводится к следующему. Пусть на множестве, например, событий Ω заданы нечёткие множества $\mathfrak{R}_{\sim \Omega} = \{ \mathfrak{R}_i \}$ - области или классы нечётко различных состояний процесса. Аналогично, на множестве $\mathfrak{U}$ заданы нечёткие множества $\mathfrak{R}_{\sim \mathfrak{U}} = \{ \mathfrak{R}_i \}$ - области или классы нечётко различных управлений.

В уравнении движения (3) нечётко различные области управлений $\{\mathfrak{R}_{\sim \mathfrak{U}}\}$ и ситуаций $\{\mathfrak{R}_{\sim S}\}$. В уравнении движения (3) отображение G задаётся не параметризованными нечёткими отображениями, как это имело место для детерминированных процессов, а семейством условных лингвистических вероятностей

$$\{ P_t(\circ/\circ)_{\sim S}^{[\xi]_t, \mathfrak{R}_{\sim S}''} \} = \{ P_t(\circ/\circ)_{\sim S}^{([\xi]_{t+1} \in \mathfrak{R}_{\sim \Omega}' / [\xi]_t \in \mathfrak{R}_{\sim \Omega}'', [U]_t \in \mathfrak{R}_{\sim \mathfrak{U}}'')} \}, \quad (7)$$

где $\tilde{P}_t(\circ/\circ)$ условная лингвистическая вероятность, характеризующая правдоподобность появления в момент времени $t+1$ состояния процесса $[\xi]_{t+1}$, принадлежащего классу состояний $[\xi]_{t+1} \in \mathfrak{R}_{\sim \Omega}'$, при условии, что в момент времени t состояние процесса принадлежало области $[\xi]_t \in \mathfrak{R}_{\sim \Omega}''$ и управление было из подмножества управлений $\mathfrak{R}_{\sim \mathfrak{U}}''$.

Лингвистическая вероятность может быть представлена либо нечётким множеством, например, вида

$$\tilde{P}_t(\circ/\circ) = \{ 0.0 | \mu(0.0); 0.1 | \mu(0.1); \dots; 0.9 | \mu(0.9); 1.0 | \mu(1.0) \}, \quad (8)$$

либо лингвистической переменной, например,

$$\tilde{P}_t(\circ/\circ) = L, \quad (9)$$

где L – одно из значений лингвистической переменной из заданного терм-множества.

Лингвистическая переменная конструируется на универсальном множестве $P = \{0.0; 0.1; \dots; 0.9; 1.0\}$ и имеет терм-множество следующего вида [5].

$T(P) = \{\text{правдоподобно, не_правдоподобно, неправдоподобно, очень_правдоподобно, более_или_менее_правдоподобно, очень_не_правдоподобно, \dots}\}$.

Если известны (можно оценить) обычные вероятности $\{p(\omega)\}$ появления отдельных событий ω при наблюдаемых состояниях и управлениях и известны функции принадлежности $\mu_{\mathfrak{R}}(\omega)$ различным нечётким классам состояний процесса $\{\mathfrak{R}_{\sim \Omega}\}$, то, в соответствии с [5], можно найти обычные вероятности путём усреднения по нечётким подмножествам $\{\mathfrak{R}_{\sim \Omega}\}$.

$$P_t^{\rho([S]_t, \mathfrak{R}''_{\sim S})}([\xi]_{t+1} \in \mathfrak{R}'_{\sim \Omega} / [\xi]_t \in \mathfrak{R}''_{\sim \Omega}, [U]_t \in \mathfrak{R}''_{\sim U}) = \sum_{\forall \omega \in \mathfrak{R}_{\sim \Omega}} p(\omega) \cdot \mu_{\mathfrak{R}}(\omega), \quad (10)$$

Если этого сделать не удаётся, то переходят к лингвистическим вероятностям (7) либо в виде нечётких множеств (8), либо лингвистических переменных (9).

$$P_t^{\rho([S]_t, \mathfrak{R}''_{\sim S})}([\xi]_{t+1} \in \mathfrak{R}'_{\sim \Omega} / [\xi]_t \in \mathfrak{R}''_{\sim \Omega}, [U]_t \in \mathfrak{R}''_{\sim U}) = \{P \otimes \mu_{\mathfrak{R}}(\omega), \forall \omega \in \mathfrak{R}_{\sim \Omega}\}, \quad (11)$$

где P – лингвистическая вероятность, представленная нечётким множеством, полученная путём

обобщения на случай лингвистических значений критерия

формулы (7) для нечётких значений критерия. В этом случае нечёткое множество P является лингвистической вероятностью, представленной нечётким множеством, полученная путём обобщения на случай лингвистических значений критерия формулы (7) для нечётких значений критерия. В этом случае нечёткое множество P является лингвистической вероятностью, представленной нечётким множеством, полученная путём обобщения на случай лингвистических значений критерия формулы (7) для нечётких значений критерия.

Отличие кроется в законе управления. Он представлен, как и раньше, множеством правил π . Правила устанавливают соответствие между нечёткими классами состояний процесса и управлениями. Это соответствие найдено с учётом вероятностей (7) уравнения движения процесса таким образом, чтобы выполнялось условие (6).

Модель управления нечетким хаотическим процессом. Для этого класса процессов уравнение движения (3) примет вид

$$[\xi]_{t+1} = G([\xi]^{[t_n, t]}, [\eta]^{[t_n, t]}, [u]^{[t_n, t]}), \quad (12)$$

где $[\eta]^{[t]}$ – наблюдаемый ЛПР, но неуправляемый процесс.

В уравнении движения (12) отсутствуют в явном виде нечёткие конструкции. Это означает, что ξ , η и u могут быть представлены числами, нечёткими структурами, вербальным (словесным) описанием. Состояния процесса ξ зависят от истории некоторого другого процесса η и управляющих воздействий ЛПР u . Эта зависимость носит качественный характер, что может быть представлено лингвистическими терминами типа «имеет место тенденция роста» и другими. Поэтому отсутствует возможность формализовать непосредственно отображение G какими либо нечёткими математическими структурами.

Рассмотрим динамический процесс η . Предполагается, что исходная форма представления процесса может быть либо числовой, либо вербальной. Уравнение движения процесса запишем в виде

$$[\eta]_{t+1} = G([\eta]^{[t]}, \tilde{\rho}([S_1]^{[t]}, [\mathfrak{R}_{S_1}]^{[t]}), \tilde{\rho}([S_2]^{[t]}, [\mathfrak{R}_{S_2}]^{[t]}), \dots, \tilde{\rho}([S_k]^{[t]}, [\mathfrak{R}_{S_k}]^{[t]})), \quad (13)$$

где $[S_i]^{[t]}$ -i-й фрагмент ситуации, влияние которой на процесс $[\eta]^{[t]}$ известно для некоторых значений, близких к эталонным $\mathfrak{R}_{S_i}$. В свою очередь в качестве модели временных фрагментов ситуаций $[S_i]^{[t]}$ может быть принят динамический процесс.

Зависимость G в (13) на этом уровне отсутствует. Она может быть обнаружена в виде качественных наблюдаемых тенденций, если перейти от исходного представления состояния процесса $[\eta]^{[t]}$ и ситуации $[S_i]^{[t]}$ в (13) к некоторым характеристикам следующего порядка, например, динамике изменения, статистикам или другим, представленным на некотором обобщенном лингвистическом уровне. Будем представлять такие преобразования отображением L . Тогда из (13) получим следующую промежуточную форму представления уравнения движения

$$[L(\eta)]_{t+1} = G([L(\eta)]^{[t]}, \tilde{\varphi}([L(S_1)]^{[t]}, [L(\mathfrak{R}_{S_1})]^{[t]}), \dots, \tilde{\varphi}([L(S_k)]^{[t]}, [L(\mathfrak{R}_{S_k})]^{[t]})) \quad (14)$$

От формы (14) можно перейти к форме представления основанной на знаниях. Выбрана, как наиболее универсальная, нечёткая модель представления знаний. В этом виде уравнение движения приведено ниже

$$[\eta]_{t+1} = \tilde{G}([\eta]^{[t]}, \tilde{\varphi}([S_1]^{[t]}, [\mathfrak{R}_{S_1}]^{[t]}), \dots, \tilde{\varphi}([S_k]^{[t]}, [\mathfrak{R}_{S_k}]^{[t]})) \quad (15)$$

В (15) модели состояний процесса, ситуаций и эталоны $\eta, S_i, \mathfrak{R}_{S_i}$ получены из соответствующих количественных или вербальных моделей $L(\eta), L(S_i), L(\mathfrak{R}_{S_i})$ путём применения нечёткого механизма преобразования данных в знания. Как известно [6], это механизм преобразования данных в результате работы механизма интерпретации данных понимается более широко, чем просто преобразование исходных данных (14) в форму (15), так и переход от (14) к (15). Такую операцию можно обозначать, например, для состояний процесса

$$\tilde{\eta} = I(\eta) = I'(I''(\dots(L'(L''(\tilde{\eta})).)).)) \quad (16)$$

В (16) операция интерпретации данных представлена как многошаговая, в которой несколько шагов предварительной численной или вербальной обработки исходных данных и несколько шагов преобразования представлений в виде моделей знаний.

Теперь мы можем задачу управления в постановке (6) хаотическим нечётким процессом (12) представить как задачу интерпретации данных в следующем виде.

ЛПР характеризуется множеством нечётких оценок и их некоторым подмножеством предпочтений $V' \subset V$, которые, как и прежде, заданы на множестве возможных состояний процесса $[\xi]^{[t]}$. Оценка фактического состояния процесса $[\xi]^{[t]}$ находится из (4). Закон управления задан множеством правил π . В правилах нечёткие знания, представленные моделями определённого уровня обобщения, указывают отношения между управлениями и описаниями состояний $\eta = I(\eta)$ и факторов $S_i = I(S_i)$.

Эти отношения устанавливаются с учётом близости $\tilde{\varphi}([S_i]^{[t]}, [\mathfrak{R}_{S_i}]^{[t]})$ значения факторов S_i к эталонам $\mathfrak{R}_{S_i}$ и с учётом уравнения движения процесса (15), таким образом, чтобы выполнялось условие (6).

Особенность управления таким классом процессов состоит в наличии фазы интерпретации данных в контуре и формировании управляющего решения методом вывода на нечётких знаниях.

Пример модели бизнес процесса. Приведенные в статье модели предназначены для описания банковского процесса торговли финансовыми инструментами. Представим реализованную валютную позицию (прибыль/убытки от проведения торговых операций) моделью процесса $[\xi]^{[t]}$ типа (12).

Котировки – моделью процесса $[\eta]^{[t]}$ в виде (13). Последний зависит от ряда фундаментальных факторов: изменения процентных ставок, ВВП, уровней инфляции и безработицы и других. Все они могут быть представлены моделями ситуаций $[S_i]^{[t]}$.

Первый этап интерпретации процесса $\eta = I(\eta)$ основан на методах [7] технического анализа рынка

(набор основных приёмов предварительной количественной обработки данных и прогнозирования направления движения курса валют). Например, методы построения дневного, недельного или месячного графиков курсов валют с последующей процедурой количественной обработки типа скользящего среднего и/или стохастического медленного, RSI и/или MACD Forest. На следующих этапах интерпретации на основании анализа полученных динамических показателей определяются путём применения знаний тенденции и их основные характеристики. Результат этого этапа интерпретации представлен в лингвистической форме. Это первая задача управления процессом - интерпретация данных – установление соответствия между исходными данными (числовые данные - характеристики графиков - результаты технического анализа) и понятиями, которыми специалисты характеризуют различные ситуации.

Однако, получив лингвистическое описание тренда, трейдер не может принять решение об управлении («входе» или «выходе» из рынка) без дополнительного анализа фундаментальных факторов. Здесь решается вторая задача управления хаотическим процессом - принятие решения методом вывода на нечётких знаниях, полученных как на этапе интерпретации, так и поступившей из окружения о значениях фундаментальных факторов.

РЕЗЮМЕ

Наведені моделі управління трьома типами нечітких динамічних процесів: детермінованими, стохастичними та хаотичними. На підставі моделей хаотичного процесу дано уявлення бізнес процесу банківської торгівлі фінансовими інструментами.

СЛОВА КЛЮЧ

технічний аналіз, лінійні тренди, скользящее среднее, стохастический медленный, RSI, MACD Forest, лингвистическая форма, вывод на нечётких знаниях, управление процессом

СВІДОМІ ВПЛИВАННЯ

1. Шерр А. В. Бизнес-процессы. Основные понятия. Теория. Методы. / Пер с англ., 2000. — 182 стр.
2. Прикладные нечёткие системы / Под редакцией Т. Тэрано, К. Асан, М. Сугэно.- М.: Мир, 1993. -368с.
3. Каргин А.А., Каргин В.А., Петренко Т.Г. Представление и обработка знаний о динамических свойствах ситуаций в интеллектуальных машинах // Вісник Східноукраїнського державного університету, № 6(22):– Луганск; СДУ, 1999.–С.18–24.
4. Каргин А.А. Петренко Т.Г. Модели динамических ситуационных интеллектуальных машин // Искусственный интеллект, 1999.–№2.
5. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию решений. М.: Мир, 1976, -167с.
6. Базы знаний интеллектуальных систем / Т.А. Гаврилова, В.Ф. Хорошевский – СПб: Питер, 2000.–384с.
7. Мэрфи Джон Дж. Технический анализ фьючерсных рынков: теория и практика. — М.: Сокол, 1996. - 592 с.

Надійшла до редакції 23.04.2002 р.

УДК 519.8

ПРО ЗАСТОСУВАННЯ ЛІНІЙНОЇ ЗГОРТКИ КРИТЕРІЇВ ДО ПОШУКУ ОПТИМАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ БАГАТОЦІЛЬОВИХ НЕПЕРЕРВНИХ ЗАДАЧ РОЗБИТТЯ

Н.К.Васильєва

Дніпропетровський національний університет

1. Вступ.

Багато практичних та теоретичних задач можуть бути розглянутими в рамках задачі розбиття заданої множини на її неперетинні підмножини з метою мінімізації деякого критерію якості розбиття. Прикладами таких задач є задачі територіального планування сфери обслуговування, організації функціонування міських екстрених служб швидкої допомоги та охорони правопорядку, формування екологічної структури навколо промислових об'єктів, узагальнена задача Неймана-Пірсона, задачі глобальної оптимізації, побудови оптимальних квадратур, кластерного аналізу, розпізнавання образів [1].

У даній роботі досліджуються багатоцільові неперервні задачі розбиття множин на підмножини з відомими координатами їх центрів при обмеженнях у формі рівностей та нерівностей. Багатокритеріальність поширює область прикладного та суто математичного застосування задач розбиття та дозволяє розглядати різні концепції оптимальності (за Слейтером, Парето, Джофріоном, Смейлом), враховуючи потрібні співвідношення між бажаними значеннями критеріїв.

Розв'язання названих задач здійснюється за допомогою лінійної згортки критеріїв. З одного боку, цей підхід не порушує властивості цільових функціоналів: неперервність, опуклість, диференційованість. З іншого боку, застосування теорії лінійної параметризації критеріїв дозволяє знаходити усю сукупність оптимальних у потрібному сенсі розв'язків, з яких фахівець у предметній галузі задачі, особа, що приймає рішення, обирає потім найбільш придатну альтернативу.

2. Математична постановка розглянутого класу багатокритеріальних неперервних задач розбиття.

Нехай Ω – обмежена, вимірною за Лебегом множина з n -вимірною евклідовою метрикою. Підмножини $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ (якщо вони можуть бути і порожні) є розбиттям множини Ω , якщо:

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \quad \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_k) = 0, \quad i \neq k, \quad i, k = \overline{1, N}. \quad (1)$$

де $\text{mes}(\cdot)$ – міра Лебега. Нехай $\tau_i = (\tau_{i1}, \dots, \tau_{in})$ – фіксований центр підмножини Ω_i , який належить E_n , $i = \overline{1, N}$.

Треба знайти оптимальний розв'язок, розбиття $\Omega_{*1}, \dots, \Omega_{*N}$, що мінімізує цільові функціонали

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \rho(x) c^j(x, \tau_i) dx, \quad j = \overline{1, K}, \quad (2)$$

при обмеженнях

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx = b_i, \quad i = \overline{1, p}, \quad \int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = \overline{p+1, N}. \quad (3)$$

Тут та у подальшому інтеграли слід розуміти у сенсі Лебега. Функції $c^j(\cdot, \tau_i)$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, K}$, $\rho(\cdot)$ – дійсні, обмежені, додатні для майже усіх (м.у.) $x \in \Omega$, вимірні за x на Ω . Задані дійсні числа b_i , $i = \overline{1, N}$, задовольняють такі співвідношення:

$$0 < b_i \leq \int_{\Omega} \rho(x) dx, \quad i = \overline{1, N}; \quad \sum_{i=1}^p b_i \leq \int_{\Omega} \rho(x) dx; \quad \sum_{i=1}^N b_i \geq \int_{\Omega} \rho(x) dx.$$

Як відомо, існування припустимих розв'язків, що мінімізують одночасно усі цільові функціонали, є у багатокритеріальній оптимізації рідким виключенням. Тому, згідно з [2], будемо розглядати наступні чотири типи оптимальних розв'язків багатоцільових задач.

Означення 1. Припустимий розв'язок x_* задачі

$$f_i(x) \rightarrow \min, i = \overline{1, S}, \text{ при } x \in X \quad (4)$$

називається оптимальним за Слейтером або слабо ефективним, якщо не існує $x \in X$, такого що $f_i(x) < f_i(x^*)$, $i = \overline{1, S}$.

Означення 2. Припустимий розв'язок x^* задачі (4) називається оптимальним за Парето або ефективним, якщо не існує $x \in X$, такого що $f_i(x) \leq f_i(x^*)$, $i = \overline{1, S}$, і для деякого індексу $j \in \{1, \dots, S\}$ виконується $f_j(x) < f_j(x^*)$.

Означення 3. Ефективний розв'язок x^* задачі (4) називається оптимальним за Джофріоном або власно ефективним, якщо існує таке число $\theta > 0$, що для будь-якого $x \in X$ та будь-якого $i \in \{1, \dots, S\}$, які задовольняють співвідношення $f_i(x) < f_i(x^*)$, знайдеться індекс $j \in \{1, \dots, S\}$, такий що $f_j(x) > f_j(x^*)$ та

$$\frac{f_i(x^*) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(x^*)} \leq \theta.$$

Означення 4. Припустимий розв'язок задачі (4) називається оптимальним за Смейлом або строго ефективним, якщо не існує іншого $x \in X$, такого що $f_i(x) \leq f_i(x^*)$, $i = \overline{1, S}$.

Будемо розглядати питання про існування та зв'язок чотирьох вказаних типів оптимальних розв'язків для задачі розбиття (1)-(3). За аналогією до [1] введемо для кожної підмножини Ω_i однозначно визначаючу її характеристичну функцію

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in \Omega_i \\ 0, & \text{якщо } x \in \Omega \setminus \Omega_i \end{cases} \text{ для м.у. } x \in \Omega.$$

Тоді $\lambda_i(x)$ є характеристичною функцією Ω_i у такому випадку, якщо оптимальний розв'язок задачі (1)-(3) виконує умову $\lambda_i(x) = 1$ для всіх $x \in \Omega_i$ та $\lambda_i(x) = 0$ для всіх $x \in \Omega \setminus \Omega_i$.

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \rho(x) c^i(x, \epsilon_i) \lambda_i(x) dx, j = \overline{1, K}, \quad (5)$$

при обмеженнях

$$\lambda(\cdot) \in \Lambda = \{\lambda(\cdot) \in (L_2(\Omega))^N : \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1, \lambda_i(x) = 0 \vee 1, i = \overline{1, N}, \text{ для м.у. } x \in \Omega\}, \quad (6)$$

$$\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx = b_i, i = \overline{1, p}, \quad \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \leq b_i, i = \overline{p+1, N}. \quad (7)$$

3. Необхідні та достатні умови оптимальності для розглядуваного класу багатокритеріальних неперервних задач розбиття.

Від умови (6) перейдемо до обмеження

$$\lambda(\cdot) \in \Gamma = \{\lambda(\cdot) \in (L_2(\Omega))^N : \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1, 0 \leq \lambda_i(x) \leq 1, i = \overline{1, N}, \text{ для м.у. } x \in \Omega\}, \quad (8)$$

де множина Γ , на відміну від Λ , є опуклою.

Проведемо дослідження задачі (5), (7), (8), а нижче встановимо її зв'язок з багатокритеріальною неперервною задачею розбиття у постановці (5)-(7).

Множина припустимих розв'язків, задана обмеженнями (7), (8), є опуклою, критерії (5) лінійні за $\lambda(\cdot)$, звідси задача (5), (7), (8) є задачею опуклого програмування. Застосовуючи до багатокритеріальної задачі (5), (7), (8) лінійну згортку критеріїв, одержуємо наступну сім'ю однокритеріальних задач з параметрами α : знайти оптимальний розв'язок, вектор-функцію $\lambda^*(\cdot) = (\lambda_{*1}(\cdot), \dots, \lambda_{*N}(\cdot))$, що мінімізує цільовий функціонал

$$\sum_{j=1}^K \alpha_j \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \rho(x) c^j(x, \tau_i) \lambda_i(x) dx \quad (9)$$

при обмеженнях (7), (8),

$$\text{де } \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_K) \in A = \{\alpha \in E_K : \alpha_j \geq 0, j = \overline{1, K}, \sum_{j=1}^K \alpha_j = 1\}. \quad (10)$$

Зв'язок між оптимальними розв'язками параметричної сім'ї задач (7)-(9) та множиною оптимальних за Парето розв'язків задачі (5), (7), (8) встановлюється у сформульованій та доведеній нижче теоремі 1, де наводиться необхідна та достатня умова оптимальності за Парето розв'язків задачі (5), (7), (8).

Будемо вважати, що функції $c^j(\cdot, \tau_i)$, $c^j(\cdot, \tau_s)$ при будь-яких $\alpha \in A$ та будь-яких

$$\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_N) \in \Psi = \{\Psi \in E_N : \psi_i \geq 0, i = \overline{p+1, N}\} \quad (11)$$

задовольняють співвідношення

$$\text{mes}\{x \in \Omega : \sum_{j=1}^K \alpha_j c^j(x, \tau_i) + \psi_i = \sum_{j=1}^K \alpha_j c^j(x, \tau_s) + \psi_s\} = 0, i \neq s, i, s = \overline{1, N}. \quad (12)$$

Ця умова, зокрема, виконується, якщо

$$c^j(x, \tau_i) = \sum_{m=1}^n \beta_{im}^j (x_m - \tau_{im} - \gamma_{im}^j)^2,$$

тобто має вигляд, подібний до квадрату евклідової метрики, або

$$c^j(x, \tau_i) = \sqrt{\sum_{m=1}^n (\alpha_{im}^j x_m - \tau_{im}^j)^2},$$

$$\alpha_{im}^j \geq 0, \tau_{im}^j \geq 0, m = \overline{1, n}, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, K}.$$

Нехай $\lambda_*(\cdot)$ – вектор-функція, яка задовольняє обмеження (7), (8), і є оптимальною за Парето розв'язком задачі (5), (7), (8). Тоді, якщо виконуються умови (12), необхідно та достатньо, щоб існували числа $\alpha \in A$ (10) та $\Psi \in \Psi$ (11), $\Psi_i = \{\int_{\Omega} \rho(x) c^j(x, \tau_i) \lambda_{*i}(x) dx - b_i\} = 0, i = \overline{p+1, N}$, що для кож. $x \in \Omega$ виконуються співвідношення

$$\sum_{j=1}^K \alpha_j c^j(x, \tau_i) + \psi_i = \min_{r=1, N} (\sum_{j=1}^K \alpha_j c^j(x, \tau_r) + \psi_r) \text{ при } \lambda_{*i}(x) = 1, i = \overline{1, N}.$$

Доведення. Дійсно, для того щоб вектор-функція $\lambda_*(\cdot)$, яка задовольняє обмеження (7), (8), була оптимальним за Парето розв'язком задачі (5), (7), (8), необхідно та достатньо, щоб знайшлися такі числа $\alpha \in A$ (10), що

$$\sum_{j=1}^K \alpha_j \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \rho(x) c^j(x, \tau_i) \lambda_{*i}(x) dx \leq \sum_{j=1}^K \alpha_j \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \rho(x) c^j(x, \tau_i) \lambda_i(x) dx \quad (13)$$

для всіх вектор-функцій $\lambda(\cdot)$, які задовольняють обмеження (7), (8).

Необхідність цієї умови випливає з леми 7.4.1 [3], яка поширюється на розглядувану у роботі задачу розбиття.

Достатність умови (13) випливає з того, що для будь-яких обраних чисел $\alpha \in A$ задача (7)-(9) при умові (12) завжди має єдиний розв'язок $\lambda_*(\cdot)$, тобто не існує такої вектор-функції $\tilde{\lambda}(\cdot)$, яка задовольняє обмеження (7), (8), що

$$\sum_{j=1}^K \alpha_j \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \rho(x) c^j(x, \tau_i) \lambda_{*i}(x) dx = \sum_{j=1}^K \alpha_j \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \rho(x) c^j(x, \tau_i) \tilde{\lambda}_i(x) dx,$$

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \rho(x) c^j(x, \tau_i) \lambda_{*i}(x) dx \geq \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \rho(x) c^j(x, \tau_i) \tilde{\lambda}_i(x) dx, j = \overline{1, K},$$

та для деякого $r \in \{1, \dots, N\}$ при $\alpha_r = 0$ маємо

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \rho(x) c^r(x, \tau_i) \lambda_{*i}(x) dx > \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \rho(x) c^r(x, \tau_i) \tilde{\lambda}_i(x) dx.$$

Таким чином, оптимальний за Парето розв'язок задачі (5), (7), (8) $\lambda_*(\cdot)$ доставляє мінімальне значення цільовому функціоналу задачі (7)-(9) при деяких $\alpha \in A$ та, навпаки, оптимальний розв'язок $\lambda_*(\cdot)$ деякої задачі (7)-(9) є ефективним розв'язком задачі (5), (7), (8).

Якщо в задачі (7)-(9) для функцій $c^j(\cdot, \tau_i)$, $c^j(\cdot, \tau_s)$ виконуються умови (12) та задано числа $\alpha \in A$, то, згідно з [1], для того щоб вектор-функція $\lambda_*(\cdot)$, яка задовольняє обмеження (7), (8), була оптимальним розв'язком задачі (7)-(9), необхідно та достатньо, щоб знайшлися такі числа $\psi \in \Psi$, $\psi_i \cdot (\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_{*i}(x) dx - b_i) = 0$, $i = \overline{p+1, N}$, що для м.у. $x \in \Omega$

$$\sum_{j=1}^K \alpha_j c^j(x, \tau_i) + \psi_i = \min_{r=1, N} (\sum_{j=1}^K \alpha_j c^j(x, \tau_r) + \psi_r) \text{ при } \lambda_{*i}(x) = 1, i = \overline{1, N}. \quad (14)$$

Об'єднуючи (13) та (14), одержуємо потрібну умову оптимальності. Теорему 1 доведено.

Зауваження 1. Множини оптимальних за Парето розв'язків задач (5)-(7) та (5), (7), (8) не порожні, оскільки містять, принаймні, усі вектор-функції, які доставляють мінімальні значення критеріям (5) при обмеженнях (7), (8) (або (6), (7)).

Враховуючи, що $\lambda_i(x) \in [0, 1]$, з рівнянь (14) випливає рівняння оптимальної межі між множинами Ω_1 та Ω_2 у вигляді $\lambda_i(x) = 1$ та $\lambda_i(x) = 0$ відповідно.

$$\sum_{j=1}^K \alpha_j c^j(x, \tau_i) + \psi_i = \min_{r=1, N} (\sum_{j=1}^K \alpha_j c^j(x, \tau_r) + \psi_r) \quad (15)$$

У просторі E_2 , тобто на площині, коли функції $c^j(\cdot, \tau_i)$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, K}$, мають вигляд, подібний до квадрату евклідової метрики, оптимальні межі визначаються рівняннями другого порядку та графічно можуть бути еліпсами, гіперболами, параболками, прямими в залежності від комбінацій коефіцієнтів β_{im}^j , $m = \overline{1, 2}$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, K}$. Якщо ж функції $c^j(\cdot, \tau_i)$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, K}$, мають вигляд, подібний до евклідової метрики, оптимальні межі визначаються рівняннями більш високих порядків. Так, при $K = 2$ для багатокритеріальної задачі розбиття без обмежень у формі рівностей та нерівностей у просторі E_2 межа буде лінією восьмого порядку. Відзначимо, що аналогічний висновок можна зробити і для

$$c^j(x, \tau_i) = 1 / \sum_{m=1}^n \beta_{im}^j (x_m - \tau_{im} - \gamma_{im}^j)^2 \quad \text{та} \quad c^j(x, \tau_i) = 1 / \sqrt{\sum_{m=1}^n \beta_{im}^j (x_m - \tau_{im} - \gamma_{im}^j)^2}, \quad i = \overline{1, N},$$

$j = \overline{1, K}$, які дозволяють, наприклад, для задач екології визначити рівень забруднення навколишнього середовища, а при цьому центри τ задають положення об'єктів, наближення до яких є небезпечним.

Встановимо тепер зв'язок між ефективними розв'язками та слабо, строго, власно ефективними розв'язками багатокритеріальної задачі (5), (7), (8).

Теорема 2. Множини слабо, строго та власно ефективних розв'язків задачі (5), (7), (8) співпадають з множиною її оптимальних за Парето розв'язків.

Доведення. Згідно з означенням, будь-який оптимальний за Парето розв'язок є слабо ефективним. Слабо ефективні розв'язки задачі (5), (7), (8), які не оптимальні за Парето, при лінійній згортці критеріїв можуть бути знайденими лише при розв'язанні однокритеріальної задачі (7)-(9), у якій серед коефіцієнтів $\alpha_1, \dots, \alpha_K$ є рівні 0. Але при будь-яких обраних $\alpha \in A$ задача (7)-(9) за умови (12) має єдиний оптимальний розв'язок $\lambda_*(\cdot)$. За теоремою 1 $\lambda_*(\cdot)$ - оптимальний за Парето розв'язок задачі (5), (7), (8). Тому множини ефективних та слабо ефективних розв'язків вказаної задачі співпадають.

Далі, кожний оптимальний за Парето розв'язок $\lambda_*(\cdot)$ задачі (5), (7), (8) є за теоремою 1 єдиним оптимальним розв'язком задачі (7)-(9) при деяких $\alpha \in A$. Тому не існує такої вектор-функції $\tilde{\lambda}(\cdot) \neq \lambda_*(\cdot)$, яка задовольняє обмеження (7), (8), що

$$\int \sum_{\Omega i=1}^N \rho(x) c^j(x, \tau_i) \lambda_{*i}(x) dx \geq \int \sum_{\Omega i=1}^N \rho(x) c^j(x, \tau_i) \tilde{\lambda}_i(x) dx, \quad j = \overline{1, K}.$$

Звідси випливає, що оптимальний за Парето розв'язок $\lambda_*(\cdot)$ є і строго ефективним розв'язком задачі (5), (7), (8), тобто множини ефективних та оптимальних за Смейлом розв'язків задачі (5), (7), (8) співпадають.

Нарешті, згідно з зауваженням до леми 7.4.1 [3] та з огляду на лінійність цільових функціоналів та лінійність обмежень у багатокритеріальній задачі (5), (7), (8) для будь-якого її оптимального за Парето

розв'язка $\lambda_*(\cdot)$ знайдуться такі числа $\alpha_j > 0, j = \overline{1, K}, \sum_{j=1}^K \alpha_j = 1$, що

$$\sum_{j=1}^K \alpha_j \int \sum_{\Omega i=1}^N \rho(x) c^j(x, \tau_i) \lambda_{*i}(x) dx \leq \sum_{j=1}^K \alpha_j \int \sum_{\Omega i=1}^N \rho(x) c^j(x, \tau_i) \lambda_i(x) dx$$

для усіх вектор-функцій $\lambda(\cdot)$, які задовольняють обмеження (7), (8). Тоді за теоремою 5.2 [4] $\lambda_*(\cdot)$ є оптимальним за Джофріоном розв'язком задачі (5), (7), (8). Отже, множини ефективних та власно ефективних розв'язків задачі (5), (7), (8) співпадають. Теорему 2 повністю доведено.

У теоремі 3 встановлено зв'язок оптимальних розв'язків задач (5)-(7) та (5), (7), (8).

Теорема 3. Множини слабо ефективних розв'язків задач (5), (7), (8) та (5)-(7) співпадають.

Доведення. За теоремами 1 та 2 будь-який слабо ефективний розв'язок задачі (5), (7), (8) $\lambda_*(\cdot)$ є оптимальним за Парето розв'язком задачі (5), (7), (8).

Згідно з зауваженням до леми 7.4.1 [3] та з огляду на лінійність цільових функціоналів та лінійність обмежень у багатокритеріальній задачі (5), (7), (8) для будь-якого її оптимального за Парето

розв'язка $\lambda_*(\cdot)$ знайдуться такі числа $\alpha_j > 0, j = \overline{1, K}, \sum_{j=1}^K \alpha_j = 1$, що

$$\int \sum_{\Omega i=1}^N \rho(x) c^j(x, \tau_i) \lambda_{*i}(x) dx \geq \int \sum_{\Omega i=1}^N \rho(x) c^j(x, \tau_i) \lambda_i(x) dx, \quad j = \overline{1, K},$$

але існує така вектор-функція $\bar{\lambda}(\cdot) \in \Gamma \setminus \Lambda$, яка задовольняє обмеження (7), що

$$\int \sum_{\Omega i=1}^N \rho(x) c^j(x, \tau_i) \bar{\lambda}_i(x) dx < \int \sum_{\Omega i=1}^N \rho(x) c^j(x, \tau_i) \lambda_{*i}(x) dx, \quad j = \overline{1, K}.$$

Тоді знайдеться оптимальний за Слейтером розв'язок $\tilde{\lambda}(\cdot)$ задачі (5), (7), (8), такий що

$$\int \sum_{\Omega i=1}^N \rho(x) c^j(x, \tau_i) \tilde{\lambda}_i(x) dx < \int \sum_{\Omega i=1}^N \rho(x) c^j(x, \tau_i) \lambda_{*i}(x) dx, \quad j = \overline{1, K}.$$

Дійсно, якщо вектор-функції $\tilde{\lambda}(\cdot)$ не існує, то можна вказати послідовність $\{\lambda^{(r)}(\cdot)\}_{r=1, \infty}$ припустимих розв'язків задачі (5), (7), (8), таку що

$$\begin{aligned} \int \sum_{\Omega i=1}^N \rho(x) c^j(x, \tau_i) \lambda_i^j(x) dx &< \int \sum_{\Omega i=1}^N \rho(x) c^j(x, \tau_i) \lambda_i^{(r+1)}(x) dx < \\ &< \int \sum_{\Omega i=1}^N \rho(x) c^j(x, \tau_i) \lambda_i^{(r)}(x) dx < \int \sum_{\Omega i=1}^N \rho(x) c^j(x, \tau_i) \lambda_{*i}(x) dx, \quad j = \overline{1, K}, r = \overline{1, \infty}, \end{aligned}$$

де $\lambda_i^j(\cdot)$ - оптимальний розв'язок задачі мінімізації j -го критерію (5) при обмеженнях (7), (8), та не існує вектор-функції $\bar{\lambda}(\cdot)$, що задовольняє обмеження (7), (8), для якої мають місце нерівності

$$\int \sum_{\Omega i=1}^N \rho(x) c^j(x, \tau_i) \bar{\lambda}_i(x) dx < \int \sum_{\Omega i=1}^N \rho(x) c^j(x, \tau_i) \lambda_i^{(r)}(x) dx, \quad j = \overline{1, K}, r = \overline{1, \infty}.$$

Множина припустимих розв'язків багатокритеріальної задачі (5), (7), (8) слабо компактна з огляду на її опуклість, замкненість та обмеженість у просторі $(L_2(\Omega))^N$ [1]. Тоді з послідовності $\{\lambda^{(r)}(\cdot)\}_{r=\overline{1, \infty}}$ можна вибрати підпослідовність $\{\lambda^{(r_m)}(\cdot)\}_{m=\overline{1, \infty}}$, яка слабо збігається до припустимого розв'язка $\lambda(\cdot)$ задачі (5), (7), (8). Отже,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int \sum_{\Omega i=1}^N \lambda_i^{(r_m)}(x) f_i(x) dx = \int \sum_{\Omega i=1}^N \lambda_i(x) f_i(x) dx$$

для будь-яких вектор-функцій $f(\cdot) = (f_1(\cdot), \dots, f_N(\cdot)) \in (L_2(\Omega))^N$.

Але тоді маємо

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int \sum_{\Omega i=1}^N \rho(x) c^j(x, \tau_i) \lambda_i^{(r_m)}(x) dx = \int \sum_{\Omega i=1}^N \rho(x) c^j(x, \tau_i) \lambda_i(x) dx, \quad j = \overline{1, K},$$

та, за визначенням послідовності $\{\lambda^{(r)}(\cdot)\}_{r=\overline{1, \infty}}$, одержуємо:

$$\int \sum_{\Omega i=1}^N \rho(x) c^j(x, \tau_i) \lambda_i(x) dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int \sum_{\Omega i=1}^N \rho(x) c^j(x, \tau_i) \lambda_i^{(r)}(x) dx, \quad j = \overline{1, K}.$$

Звідси випливає, що вектор-функція $\lambda(\cdot)$ - слабо ефективний розв'язок задачі (5), (7), (8), тобто $\lambda(\cdot) \in \Lambda_{\text{с.е.}}$.

Враховуючи, що $\lambda(\cdot) \in \Lambda_{\text{с.е.}}$, то згідно з лемою 1, функція $\lambda(\cdot)$ є оптимальним розв'язком задачі (5), (7), (8) за Слейтером. Крім того, згідно з лемою 2, функція $\lambda(\cdot)$ є оптимальним розв'язком задачі (5), (7), (8) за Парето, Джофріоном та Смейлом розв'язків задач (5)-(7) та (5), (7), (8) співпадають.

$$\int \sum_{\Omega i=1}^N \rho(x) c^j(x, \tau_i) \tilde{\lambda}_i(x) dx < \int \sum_{\Omega i=1}^N \rho(x) c^j(x, \tau_i) \lambda_{*i}(x) dx, \quad j = \overline{1, K}.$$

Приходимо до протиріччя.

Таким чином, будь-який слабо ефективний розв'язок задачі (5)-(7) є оптимальним за Слейтером розв'язком задачі (5), (7), (8). Теорему 3 доведено.

Наслідок. Множини оптимальних за Парето, Джофріоном та Смейлом розв'язків задач (5)-(7) та (5), (7), (8) співпадають.

4. Алгоритм розв'язання розглядуваного класу багатокритеріальних неперервних задач розбиття.

Одержані в теоремах 1-3 результати обґрунтовують перехід від досліджень задачі (5)-(7) до розгляду задачі (5), (7), (8) та, тим самим, дозволяють звести пошук оптимальних за Слейтером, Парето, Джофріоном та Смейлом розв'язків задачі (5)-(7) до розв'язання параметричної сім'ї однокритеріальних задач (7)-(9).

В основі запропонованого алгоритму розв'язання задачі (5)-(7) знаходиться алгоритм розв'язання неперервної лінійної задачі оптимального розбиття множини, розроблений в [1]. У відповідності з [1] нескінченновимірна задача (7)-(9) при заданих параметрах $\alpha \in A$ зводиться через функціонал Лагранжа до скінченновимірної задачі безумовної максимізації функції

$$G(\psi) = \int \min_{i=1, N} \left[\sum_{j=1}^K \alpha_j c^j(x, \tau_i) + \psi_i \right] \rho(x) dx - \sum_{r=1}^N \psi_r b_r - S \sum_{q=p+1}^N \max(0, -\psi_q). \quad (16)$$

Тут S - достатньо велике додатне число, $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N) \in E_N$. Вектор-функції $\lambda(\cdot)$ зв'язані зі змінними $\psi_i, i = \overline{1, N}$, співвідношеннями (14). Компоненти N -вимірного узагальненого градієнту функції (16) мають вигляд

$$\text{grad}_i(\psi) = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i, \quad i = \overline{1, p},$$

$$\text{grad}_i(\psi) = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i + S \max(0, \text{sign}(-\psi_i)), \quad i = \overline{p+1, N}.$$

Опишемо алгоритм розв'язання розглянутого в роботі класу багатокритеріальних неперервних задач розбиття множин.

Алгоритм. Аппроксимуємо множину Ω вузлами прямокутної рівномірної сітки з кроком Δx . Аппроксимуємо множину A вузлами прямокутної рівномірної сітки з кроком $\Delta \alpha$.

Задаємо точність $\varepsilon > 0$.

Переглядаємо послідовно усі вузли сітки за α . Якщо переглянуто усі вузли, алгоритм припиняє роботу.

У протилежному випадку фіксуємо в задачі (7)-(9) параметри α . Задаємо початкове наближення $\psi = \psi^{(0)}$. Визначаємо за формулами (14) $\lambda^{(0)}(\cdot)$ у вузлах сітки за x . Знаходимо $\text{grad}_i(\psi^{(0)}), i = \overline{1, N}$, при $\lambda(\cdot) = \lambda^{(0)}(\cdot)$, інтеграли обчислюємо за формулами трапецій. Проводимо перший крок π -алгоритму [5] для максимізації функції (16) та знаходимо $\psi^{(1)}$. Переходимо до другого кроку.

Нехай в результаті обчислень після k ($k = 1, 2, \dots$) кроків маємо значення $\psi^{(k)}, \text{grad}_i(\psi^{(k-1)}), i = \overline{1, N}$, та $\lambda^{(k-1)}(\cdot)$ у вузлах сітки за x . Опишемо $(k+1)$ -ий крок алгоритму.

Визначаємо за формулами (14) $\lambda^{(k)}(\cdot)$ у вузлах сітки за x . Знаходимо $\text{grad}_i(\psi^{(k)}), i = \overline{1, N}$, при $\lambda(\cdot) = \lambda^{(k)}(\cdot)$. Проводимо $(k+1)$ -ий крок π -алгоритму [5] та знаходимо $\psi^{(k+1)}$. Якщо $|\psi^{(k+1)} - \psi^{(k)}| < \varepsilon$, то алгоритм припиняє роботу. В протилежному випадку покладаємо $k = k+1$ та повертаємося до кроку 2.

Після закінчення роботи алгоритму знаходимо оптимальні розв'язки задачі (1)-(3) при $\psi = \psi^*$ та знаходимо розв'язки задачі (1)-(3) при $\psi = \psi^*$.

Висновки. Розроблено алгоритм розв'язання багатокритеріальних неперервних задач розбиття множин та доведено його оптимальність за Слейтером.

Поданий алгоритм запрограмований та протестований під час розв'язання ряду модельних багатокритеріальних неперервних задач розбиття. Результати розрахунків збігаються з відповідними точними аналітичними розв'язками. Наведемо для прикладу одну з розглянутих модельних задач.

Приклад. Нехай у задачі (1)-(3) $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \subset E_2$; $N = 2$; $\tau_1 = (0.25, 0.5)$, $\tau_2 = (0.75, 0.5)$; $K = 2$; $\rho(x) \equiv 1$ для м.у. $x \in \Omega$; $\int_{\Omega_1} \rho(x) dx \leq 0.5$, $\int_{\Omega_2} \rho(x) dx \leq 1$; для м.у. $x \in \Omega$ $c^1(x, \tau_1) = 2(x_1 - \tau_{11} - 0.25)^2 + 2(x_2 - \tau_{12})^2$, $c^1(x, \tau_2) = (x_1 - \tau_{21})^2 + (x_2 - \tau_{22})^2$, $c^2(x, \tau_1) = (x_1 - \tau_{11})^2 + 16(x_2 - \tau_{12})^2$, $c^2(x, \tau_2) = 16(x_1 - \tau_{21})^2 + (x_2 - \tau_{22})^2$. Обрано сітку за x з кроком $\Delta x = 1/5$ та сітку за α з кроком $\Delta \alpha = 1/2$.

На рис. 1-3 зображаються знайдені описаним алгоритмом оптимальні розв'язки розглядуваної задачі при $\varepsilon = 0.001$, $\psi^{(0)} = (10, 0)$. Точки показують розташування центрів τ_1, τ_2 . Підмножина Ω_{*1} виділяється горизонтальною, а підмножина Ω_{*2} – вертикальною штриховкою.

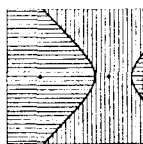


Рис. 1. Оптимальний розв'язок модельної задачі при $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$.

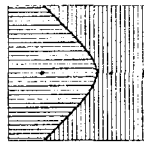


Рис. 2. Оптимальний розв'язок модельної задачі при $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_2 = 0.5$.

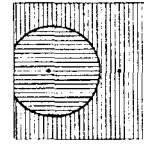


Рис. 3. Оптимальний розв'язок модельної задачі при $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$.

Результат, наведений на рис. 1, одержуємо за 14 ітерацій при $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, тут перший критерій дорівнює 0.249, другий критерій дорівнює 0.865. На рис. 2 подається результат, знайдений за 16 ітерацій при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, значення критеріїв 0.230 та 0.884. Рис. 3 відповідає розв'язку, отриманому за 17 ітерацій при $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, тут перший критерій дорівнює 0.220, другий критерій дорівнює 1.335.

5. Висновки.

Таким чином, у даній роботі пропонується та обґрунтовується метод розв'язання одного класу багатокритеріальних неперервних задач розбиття множин, що виникають у реальному житті у різних сферах техніки та економіки. Причому встановлюється, що знайдені розв'язки є одночасно оптимальними за Слейтером, Парето, Джофріоном та Смейлом, тобто враховується погляд користувача, фахівця у предметній галузі задачі, на бажаний зв'язок між значеннями критеріїв та, тим самим, розбудовується найбільш адекватна модель для розглядуваного реального процесу, об'єкту, системи.

РЕЗЮМЕ

Рассматривается один класс многокритериальных непрерывных задач разбиения множеств при ограничениях в форме равенств и неравенств. Строятся необходимые и достаточные условия оптимальности по Слейтеру, Парето, Джоффриону и Смейлу. Предлагается алгоритм решения рассматриваемых задач с помощью линейной свертки критериев.

SUMMARY

One class of the multicriteria continuous set partitioning problems under restrictions in the form of equalities and inequalities is considered. The necessary and sufficient conditions of optimality by Slater, Pareto, Geoffrion and Smale are obtained. The algorithm of solving the considered problems with the help of the linear criterion reduction is proposed.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Киселева Ю.М. Минимизация нелинейных функций и алгоритмы решения нелинейных задач оптимизации. — Киев: Техника, 1989. — 310 с.
2. Карданович В.И., Писарев В.В. Базисные оптимальные разбиения множеств. — М.: Наука, 1983. — 220 с.
3. Карданов В.И., Писарев В.В. Алгоритмы оптимального разбиения множеств. — М.: Наука, 1984. — 840 с.
4. Карданов В.И., Писарев В.В., Писарев В.В. Многокритериальное разбиение множеств. — М.: Наука, 1988. — 199 с.
5. Цор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. — Киев: Наук. думка, 1979. — 199 с.

Надійшла до редакції 26.06.2002 р.

КОРОТКІ ПОВІДОМЛЕННЯ

УДК 539.219.3:541.183.5

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛАБОСВЯЗАННОГО КИСЛОРОДА В ОБРАЗЦЕ ВТСП $YBa_2Cu_3O_{6+c}$

Д.А. Яковлев

Введение

Общеизвестным фактом является зависимость свойств керамики ВТСП $YBa_2Cu_3O_{6+c}$ от содержания в ней слабосвязанного кислорода. Большое количество работ посвящено исследованию диффузии кислорода в различных образцах керамики. Наиболее интересными являются следующие аспекты этой проблемы - насыщение образца кислородом в процессе приготовления керамики [1, 2, 3], обеднение и насыщение образца кислородом в процессе нагрева, имитирующего тот или иной возможный технологический режим [2, 4 - 6], и собственно измерение коэффициента диффузии [4, 5, 7 - 10].

При всей несхожести методик измерения и толкования результатов авторы упомянутых работ по существу решают "обратную задачу диффузии" [11] - по измеренному профилю концентрации кислорода (или другой информации, зависящей от деталей метода) определяется вид коэффициента диффузии. Целью же данной работы является решение "прямой задачи" - зная коэффициент диффузии и конфигурацию области (плюс граничные и начальные условия), найти профиль концентрации слабосвязанного кислорода в образце.

До изложения собственно математической постановки задачи необходимо сделать следующие замечания.

Во-первых, можно ожидать функциональную зависимость коэффициента диффузии от концентрации кислорода, например, $D = D_0 \exp(-U_0 + U_1 c)$. Решение разностного аналога уравнения диффузии для такого коэффициента диффузии требует большой вычислительной мощности, поэтому в данной работе рассматривается более простой вариант.

Во-вторых, хорошо известно, что значения коэффициентов диффузии, приводимые различными авторами, отличаются на порядки [7, 8]. Поэтому в работе ставилась задача разработать модель (и, соответственно, программу численного моделирования), которая хорошо работала бы с наиболее "сложным" коэффициентом диффузии из приводимых в литературе.

В-третьих, открытым остается вопрос о граничном условии на границе раздела вакуум-сверхпроводник. При задании концентрации на этой границе необходимо использовать какую-либо модель адсорбции, т.е. привлекать дополнительные полуэмпирические параметры [13], поэтому для простоты вычислений концентрация кислорода на поверхности образца принимается равной 0.

Постановка задачи

Запишем уравнение диффузии, полагая коэффициент диффузии зависящим от концентрации:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(c) \frac{\partial c}{\partial x} \right); \quad (1)$$

полагаем на правой границе (см. рис. 1) поток кислорода равным нулю:

$$\left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_L = 0. \quad (2)$$

На левой границе полагаем равной нулю концентрацию:

$$c|_0 = 0. \quad (3)$$

В качестве начального условия выберем

$$c(x, 0) = 1 \text{ при } 0 < x \leq L \quad (4)$$

Коэффициента диффузии запишем в виде, предложенном в работе [7]:

$$D = D_0 [1 + \lambda_1 c(2 - c)/4kT] \exp[-(U_0 - U_1 c)/kT], \quad (5)$$

В этой формуле $D_0 = 3,16 \cdot 10^5 \text{ см}^2/\text{с}$, $U_0 = 2,8 \text{ эВ}$, $U_1 = 1,45 \text{ эВ}$, $2000 \text{ К} < \lambda_1/k < 4000 \text{ К}$.

Уравнение (1), граничные условия (2) и (3) и начальное условие (4) формулируют математическую постановку задачи. Для численного решения использовалась неявная разностная схема [11]. Детали численного решения изложены в работе [14].

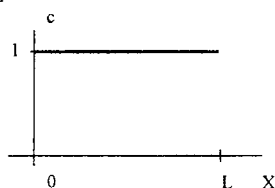


Рис. 1. Область, в которой решается задача

Результаты вычислений.

В работе [2] экспериментально установлено, что деградации тонких (0,6 мкм) эпитаксиальных пленок $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ при отжиге в вакууме не происходит до температур $T \sim 200$ С (эксперимент 1). Отжиг при температурах $T \sim 250$ С приводит к увеличению удельного сопротивления при комнатной температуре и уменьшению плотности критического тока (эксперимент 2). Авторы связывают эти явления с потерей слабосвязанного кислорода в вакуумной камере.

На рис.2 представлены результаты моделирования экспериментов 1 (верхний концентрационный профиль) и 2 (нижний профиль). Расчетная схема содержит 100 узлов по координате, шаг по времени 1 с, время процесса 1800 с. При счете принималось, что образец нагревается до расчетной температуры от 20 С в течение одной минуты.

Как легко видеть, для верхнего концентрационного профиля практически всюду $c > 0,7$. Следовательно, при температурах ~ 200 С не наблюдается существенного обеднения образца кислородом, и, следовательно, сохраняются его сверхпроводящие свойства. Для нижнего профиля, соответствующего температуре ~ 250 С, доля $c < 0,7$ невелика, следовательно, можно ожидать существенного ухудшения свойств сверхпроводника.

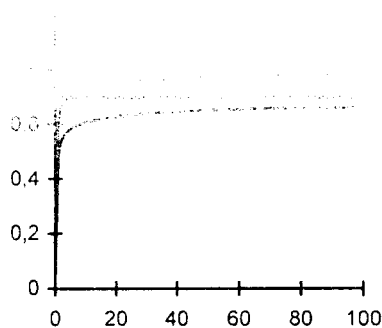


Рис. 2. Профили концентраций слабосвязанного кислорода.

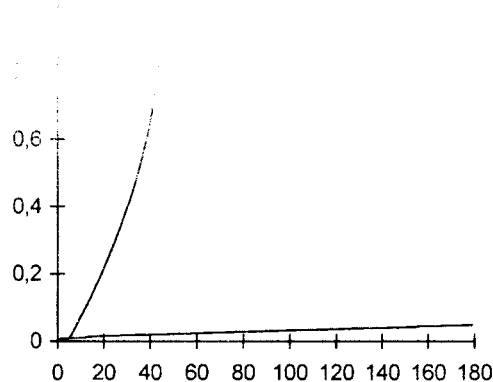


Рис. 3. Динамика процесса обеднения образца кислородом

Применяемый подход позволяет получать данные и о динамике процесса обеднения образца кислородом. На рис. 3 представлена зависимость доли образца, в которой $c < 0,7$, от времени нагрева (по оси x время в десятках секунд). Верхняя кривая соответствует температуре ~ 250 С (существенное обеднение кислородом), нижняя кривая - температуре ~ 200 С (слабое обеднение).

Выводы

1. Примененное рассмотрение процесса диффузии слабосвязанного кислорода в керамике $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6+c}$ позволяет с помощью машинного эксперимента получать данные о концентрационном профиле слабосвязанного кислорода в образце ВТСП. Достоинством модели является возможность работы со "сложными" коэффициентами диффузии.

2. При исследованных температурных режимах, соответствующим экспериментальным (и возможным технологическим), образец ВТСП существенно обедняется слабосвязанным кислородом.

РЕЗЮМЕ

За допомогою машинного експерименту в одновірному випадку досліджений перерозподіл слабкозв'язаного кисню в зразках ВТНП $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6+c}$. Результати моделювання зіставлені з експериментом. Достойнством запропонованої моделі є облік залежності коефіцієнта дифузії від концентрації.

SUMMARY

The oxygen redistribution in $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6+c}$ HTSC samples has been studied numerically. The concentration-dependent diffusion coefficient has been used. The simulation results were compared with the experimental data.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Братухин П.В., Елесин В.Ф., Жилин П.Б. и др. Влияние дефицита кислорода на критические и структурные параметры пленок $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6+c}$ // СФХТ.-1992.-Т.5.-№10.- С. 1855.
2. A.Mogro-Campero, K.W.Paik, L.G.Turner Degradation of Thin Films of $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6+c}$ by Annealing in Air and in Vacuum // Journal of Superconductivity.-1995.-No 1.-Vol.8.-p.95-98.
3. Выонг Н.В., Распопина Е.В., Яковенко Н.А. Пересинтез - новый подход к изготовлению массивных $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6+c}$ керамик // Сообщения объединенного института ядерных исследований, Дубна, P17-96-27, 1996.
4. Балагуров А.М., Выонг Н.В., Куан Ч.А. и др. Диффузия кислорода в керамике $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6+c}$ при нагревании // Сообщения объединенного института ядерных исследований, Дубна, P17-91-340, 1991.
5. Yupu Li, Jairui Liu, Wei-Kan Chu et. al. Ion beam techniques applied to the study of oxygen diffusion in $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6+c}$ films // CP392, Application of Accelerators in Research and Industry, edited by J.L.Duggan and I.L.Morgan AIP Press, New York.-1997
6. K.C.Goretta and Nan Chen Diffusion and Heat Treatment of High-Temperature Superconductors // Chapter submitted to book entitled "Superconducting Materials: Advances in Technology and Applications, January 1999.
7. Патракеев М.В., Леонидов И.А., Кожевников В.Л. и др. Диффузия кислорода в $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6+c}$ // СФХТ.-1992.-Т.5.-№10.- С.1912.
8. Балагуров А.М., Выонг Н.В., Куан Ч.А. Диффузия кислорода в керамике $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6+c}$ // Сообщения объединенного института ядерных исследований, Дубна, P17-91-378, 1991.
9. Balakrishna, Ch.Kruger Chemical diffusion of oxygen in the orthorhombic $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6+c}$ // Physica C 249-250 (1995) 1-12.
10. Chakrabarti, Sankar, P. and Chakrabarti, Sankar Diffusion in silver-free and silver-doped $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6+c}$ // J. Superconductivity 11 (1998) 1-14.
11. Самарский А.А., Гинзбург В.И. Основы сверхпроводимости / М.: Наука, 1989.-432 с.
12. H.L.Rothbart, S.J.Rothman Oxygen diffusion in cuprate superconductors // J.Appl.Phys 76 (10), 15 November 1994.- p.5615-5628.
13. Адамсон А. Физическая химия поверхностей / М.: Мир, 1979.-570 с.
14. Теплов С.В., Яковлев Д.А. К вопросу о некоторых упрощающих предположениях при машинном моделировании структуры типа "птичий клюв" // Поверхность.-1997.-№12.-С.91-95.

А.В. Бутюгин, Н.Б. Узденников, М.В. Гнеденко

Вещество	БУ исходный	БУ остаточный
Гексан	56,7	102,5
Бензол	32,3	107,7
Этиловый спирт	249,2	200,3
Изобутиловый спирт	89,4	123,9
Уксусная кислота	272,7	299,8

Можно отметить две закономерности:

- 1 – адсорбция всех веществ на остаточном угле – «матрице» – значительно выше, чем на исходном угле;
- 2 – адсорбция возрастает с ростом полярности органических веществ.

Первая закономерность – рост адсорбции на остаточном угле – подтверждает реальность существования матрицы: вакантные от гуминовых веществ места заполняются при адсорбции другими веществами. Вторая закономерность напрямую связана с химической структурой как исходного бурого угля, так и матрицы. По данным ИК-спектроскопии в буром угле обнаружены алифатические, ароматические и кислородсодержащие группы [1,11]. Гуминовые вещества бурых углей представляют собой оксикетокарбоновые кислоты [12]. Таким образом, объяснима наибольшая адсорбция именно карбоновой (уксусной) кислоты. Согласно теории и практике адсорбции – подобное лучше адсорбируется на подобном. Но это свидетельствует и о том, что матрица должна иметь подобное гуминовым веществам строение. Исходя из того, что угли продукт преобразования древних растительных материалов, прошедших обязательную стадию гумификации, можно с высокой степенью вероятности утверждать, что матрица есть продукт дальнейшего внутримолекулярного преобразования гуминовых веществ. Это предположение косвенно подтверждается опытами по окислительному щелочному гидролизу диспергированных углей, в которых отмечено увеличение выхода гуминовых кислот [13,14,15].

Следующим этапом работы будет детальное изучение строения и свойств угольной матрицы.

РЕЗЮМЕ

Робота присвячена питанням виявлення відносності структури та властивостей дослідного бурого вугілля теоретичній двофазній моделі "гість-господар". Вивчено адсорбційні властивості вихідного та залишкового вугілля (матриці). Встановлено закономірності, які підтверджують реальність існування матриці та взаємозв'язок хімічної структури матриці з її властивостями.

SUMMARY

The paper is devoted to problems of revealing of correspondence of explored brown coal structure and properties theoretical two-phase model "guest-master". The absorptive properties of initial and residual coal (matrix) are studied. The regularities confirming the reality of matrix existence and interrelation of chemical structure and its properties are obtained.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Поляманцев А.М., Гагарин С.Г., Гладун Т.Г., Головин П.С. Современное состояние проблемы взаимосвязи структуры и свойств органической массы углей // ХТТ. – 2000. – №6. – С.3-50.
2. Камнева А.И. Химия горючих ископаемых. – М.: Химия, 1974. – 272 с.
3. Marzec A.// J. Anal.Appl. Pyrolysis, 1985, V.8. – P. 241.
4. Given P.A., Marzec A., Barton W.A. Et al.// Fuel, 1986, V. 65. - P.155.
5. Кричко А.А., Гагарин С.Г., Макаров С.С. // ХТТ. – 1993. - №6. – С.27.
6. Кричко А.А., Гагарин С.Г., Скрипченко Г.Б. Структура и свойства углей в ряду метаморфизма. – Киев: Наукова думка, 1985. – С.42.
7. Кричко А.А., Гагарин С.Г. Успехи химии комплексов с переносом заряда и ионрадикальных солей. – Черногловка : РИО АН СССР, 1986. – С.22.
8. Забрамный Д.Т., Победоносцева О.И., Победоносцева Н.И., Умаров Т.Ж. Углегуминовые кислоты и их использование. – Ташкент : Фан, 1980. – С.153.
9. Бутюгин А.В., Иванов А.С. Изучение влияния механохимической активации на процесс извлечения гуминовых веществ из землистых бурых углей // Технологические проблемы измельчения и механоактивации: матер. Научн.-техн. Семинара (21-23 октября 1992г., г.Могилев). – Могилев, 1992. – С.26.
10. Пат. України №19280 C05F11/02. Спосіб отримання безбаластного гумату амоніа / Бутюгін О.В., Зубкова Ю.М., Іванов О.С. Опубл.25.12.97. Бюл.№6.
11. Крыпина Л.М., Ковалев К.Е. Особенности молекулярного строения Александровского бурого угля и продуктов на его основе по данным спектральных методов // Деп. В ВИНТИ 29.10.90г. №5511-B90. – Новочеркас.инж.-мелиор. ин-т.- Новочеркасск, 1990. – 10 с.
12. Гуминовые удобрения. Теория и практика их применения. – Т. V11. – Днепропетровск, 1980. – С.293.
13. Екатерина Л.Н., Метовина Л.В., Беликова В.И. и др. Исследование фракционного состава продуктов ступенчатого окисления углей // ХТТ. – 1974. - №1. – С.36-43.
14. Мотовилова Л.В., Хренкова Т.М., Аляутдинова Р.Х. и др. Состав и свойства гуминовых кислот, полученных при механодеструкции бурых углей // ХТТ. – 1988. – №2. – С.36-42.
15. Юхновец А.Б., Александров И.В., Камнева А.И. Ступенчатый щелочной гидролиз бурых углей // ХТТ. – 1987. - №6. – С.28-36.

Надійшла до редакції 19.06.2002 р.

УДК 534.3

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРА СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ДИСКОВИДНОЙ ПОПЕРЕЧНО-АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ

Ю.В. Мысовский, О.Д. Соколова, Ю.П. Бай

В пространственной постановке задача исследования структуры спектра осесимметричных резонансных колебаний изотропных дисковидных пластин детально рассматривалась в работах [1, 2]. Аналогичные исследования для поперечно-анизотропных (трансверсально-изотропных) пластин выполнены лишь частично [3, 4]. В настоящей статье рассматриваются результаты анализа частотного спектра симметричных по толщине колебаний поперечно-анизотропной керамической дисковидной пластины с использованием метода динамических однородных решений [3]. При этом пластина отнесена к безразмерным прямоугольным $Ox_1x_2x_3$ и цилиндрическим $Or\theta z$ координатам и занимает область

$$V = \left\{ (x_1^2 + x_2^2) \leq R^*, \quad |x_3| \leq h \right\} = \left\{ r \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad |z| \leq h \right\}, \quad (1)$$

а на поверхностях имеют место условия

$$\sigma_{3j}|_{x_3=\pm h} = 0 \quad (j = \overline{1, 3}); \quad \sigma_{rr}|_{r=R} = \varphi(z), \quad \sigma_{r3}|_{r=R} = \psi(z). \quad (2)$$

Представления комплекснозначных амплитудных характеристик напряженно - деформированного состояния пластины рядами по базисной системе однородных решений имеют вид

$$u_r = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \frac{\partial}{\partial r} C_j(r) f_{1j}(z), \quad u_z = \sum_{j=1}^{\infty} B_j C_j(r) f_{3j}(z),$$

$$\sigma_{rr} = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \left[c_{33} C_j f_{3j}'(z) - \gamma_j^2 C_j f_{1j}(z) c_{13} \right],$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \left[c_{13} f_{3j}(z) C_j(r) - \frac{c_{11} + c_{12}}{2} \gamma_j^2 f_{1j}(z) C_j(r) + \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} C_j(r) f_{1j}(z) \right] \quad (3)$$

Здесь γ_j - корни трансцендентного дисперсионного уравнения

$$\nabla^2 C = -\gamma^2 C \quad (4)$$

для случая симметричных нормальных волн в трансверсально-изотропном слое; λ_j - корни характеристического уравнения

$$a_1 a_2 \lambda_k^4 + (b_1 a_2 + a_1 b_2 - c_1 c_2) \lambda_k^2 + b_1 b_2 = 0;$$

$$a_1 = c_{44}; \quad a_2 = c_{33}, \quad b_1 = \rho \omega^2 - c_{11} \gamma^2, \quad b_2 = \rho \omega^2 - c_{44} \gamma^2, \quad c_1 = c_{13} + c_{44},$$

$$c_2 = -(c_{13} + c_{44}) \gamma^2, \quad \kappa_1 = i \frac{a_1 \lambda_1^2 + b_1}{c_1 \lambda_1}, \quad \kappa_2 = i \frac{a_1 \lambda_2^2 + b_1}{c_1 \lambda_2};$$

$$f_1(z) = A_1 \cos(i \lambda_1 z) + A_2 \cos(i \lambda_2 z), \quad f_3(z) = A_1 \kappa_1 \sin(i \lambda_1 z) + A_2 \kappa_2 \sin(i \lambda_2 z);$$

C_j - метагармонические функции вида $C_j(r) = J_0(\gamma_j r)$; B_j - произвольные коэффициенты разложений по базису однородных решений. Упругие постоянные трансверсально-изотропного материала c_{ij} и компоненты тензоров механических напряжений считаются отнесенными к нормирующему параметру c_* , а все координаты линейной размерности и упругие перемещения – к

нормирующему параметру R_* . Множество корней $\{\gamma_j\}$ дисперсионного уравнения (4), по которым ведется суммирование в представлениях (3), формируется следующим образом: в него включены все положительно определенные действительные значения γ_j , а также упорядоченные в порядке возрастания по модулю пары мнимых либо комплексных корней $\gamma_j, \bar{\gamma}_j$ ($\text{Re } \gamma_j > 0$).

С использованием представлений (3) краевые условия (2) на боковой поверхности пластины сводятся к системе функциональных уравнений

$$\sum_{j=1}^{\infty} B_j \Phi_j(z) = \varphi(z), \quad \sum_{j=1}^{\infty} B_j \Psi_j(z) = \psi(z), \quad (6)$$

где

$$\Phi_j(z) = -\frac{c_{11} + c_{12}}{2} \gamma_j^2 f_{1j}(z) C_j(r) + c_{13} f'_{3j}(x_3) C_j(r) - \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} C_j(r) f_{1j}(z),$$

$$\Psi_j(z) = c_{44} (f'_{1j}(z) \frac{\partial}{\partial r} C_j(r) + \frac{\partial}{\partial r} C_j(r) f_{3j}(z)).$$

Для решения системы функциональных уравнений (6) применен интегральный метод наименьших квадратов, согласно которому коэффициенты B_j определяются из условий $\partial J / \partial \bar{B}_j = 0$, где

$$J(B_j) = \int_{-h}^h |\sigma_{rr} - \varphi(z)|^2 + |\sigma_{rx_3} - \psi(z)|^2 dz, \quad (7)$$

$$J = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} B_j \bar{B}_p \int_{-h}^h (\Phi_j \bar{\Phi}_p + \Psi_j(z) \bar{\Psi}_p(z)) dz + \sum_{j=1}^{\infty} B_j \int_{-h}^h (\Phi_j(z) \bar{\varphi}(z) + \Psi_j(z) \bar{\psi}(z)) dz + \sum_{p=1}^{\infty} \bar{B}_p \int_{-h}^h (\bar{\Phi}_p(z) \varphi(z) + \bar{\Psi}_p(z) \psi(z)) dz + \int_{-h}^h (\varphi \bar{\varphi} + \psi \bar{\psi}) dz; \quad (8)$$

Эти условия приводят к системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{p=1}^{\infty} B_p \int_{-h}^h (\bar{\Phi}_j(z) \Phi_p(z) + \bar{\Psi}_j(z) \Psi_p(z)) dz = - \int_{-h}^h (\bar{\Phi}_j(z) \varphi(z) + \bar{\Psi}_j(z) \psi(z)) dz, \quad (j = \overline{1, \infty}), \quad (9)$$

которая при конкретных численных исследованиях редуцируется.

Анализ спектра резонансных колебаний с применением описанной методики реализован для пластины из титаната бария [5]. Предварительно рассчитанный дисперсионный спектр симметричных нормальных волн в слое из этого материала имеет вид, представленный на рис. 1, $\Omega = 2\omega R_*/\rho_* c_*$; $\Gamma = 2\gamma R_*/\rho_* c_*$; $R_* = h$; $\rho_* = 10^3$; $c_* = 10^{10}$. Частота резонансных колебаний определялась как частота, на которой внешнее гармоническое нагружение, определяемое видом функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$, вызывало неограниченный рост амплитудных характеристик напряженно-деформированного состояния. Поскольку эффективность возбуждения различных форм собственных колебаний зависит от характера внешних нагружений, то при расчетах использовались варьируемые сочетания $\varphi(z)$, $\psi(z)$: $\varphi(z) = \text{const}$, $\psi(z) = 0$ и $\varphi(z) = \cos(\pi z/h)$, $\psi(z) = 0$.

На рис. 2 представлены результаты расчета пяти низших ветвей спектра собственных колебаний диска в виде зависимостей приведенной безразмерной частоты резонансных колебаний Ω от нормированного радиуса пластины R . Цифры у кривых на рис. 2. соответствуют порядковому номеру собственной частоты (номеру моды резонансных колебаний). Фрагменты кривых, изображаемые символами $\bigcirc$, соответствуют колебаниям, в которых радиальные перемещения U_r точек срединной поверхности диска являются доминирующими по сравнению с перемещениями U_z точек на плоской грани пластины; фрагменты, изображаемые символами $\square$, соответствуют колебаниям, при которых перемещения U_z на плоской грани преобладают над радиальными перемещениями U_r в срединной поверхности. Фрагменты кривых, изображаемые символами $+$, соответствуют формам резонансных

колебаний, классифицируемых как краевые резонансы, при которых появляется зона интенсивных радиальных и осевых смещений точек диска, локализованная вблизи его боковой цилиндрической поверхности.

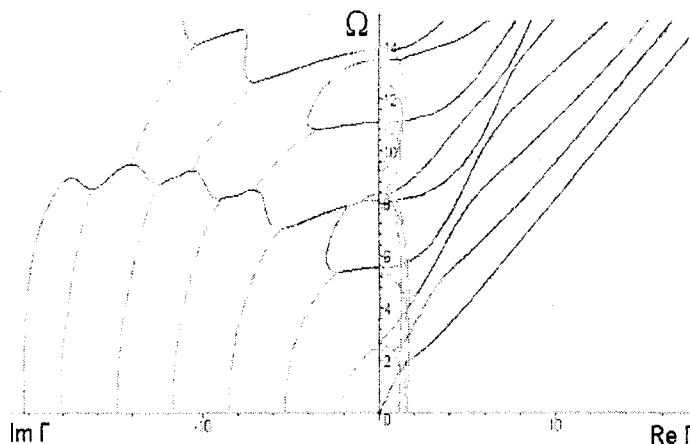


Рис. 1.

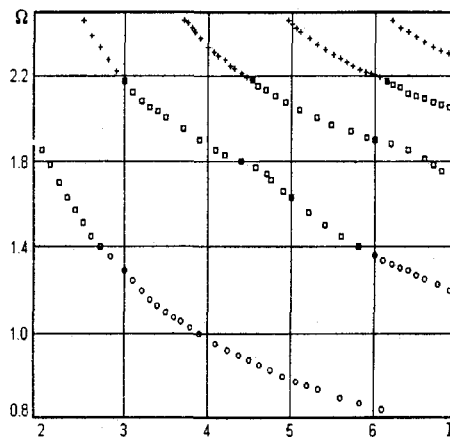


Рис. 2.

Проведенные расчеты показывают, что структура спектра для поперечно – анизотропной дисковидной пластины имеет качественную аналогию со структурой спектра для изотропных дисковидных пластин [1, 2], однако к числу количественных отличий можно отнести форму участков спектра, на которых наблюдается явление краевого резонанса.

РЕЗЮМЕ

На підставі методу динамічних однорідних розв'язків здійснено аналіз спектра симетричних по товщині резонансних коливань трансверсально-ізотропної дисковидної пластини просторової геометрії. Представлені результати чисельного розрахунку нижчих гілок спектру для диску з титанату барію і охарактеризовані відмінності форм власних хвильових рухів, властиві різним значенням резонансних частот певної моди.

SUMMARY

On the basis of dynamical homogeneous solutions method is analyzed the spectrum of symmetrical resonance vibrations of transversely - isotropic disk of three-dimensional geometry. The results of numerical calculations of low branches of spectrum for plates from BaTiO₃ are presented. The differences of own wave motions forms for resonance frequencies of each spectrum mode are characterized.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К.: Наук. думка, 1981. – 284 с.
2. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Анализ мод колебаний круглого диска в окрестности толщинного резонанса. // Прикладная механика. – 1979. – Т. 15, № 6. – С. 3-19.
3. Космодамианский А.С., Сторожев В.И. Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред. – К.: Наук. думка, 1985. – 176 с.
4. Ikegami S., Veda I., Kobayashi S. Frequency spectra of resonant vibrations in disk plates of PbTiO₃ piezoelectric ceramics // Journ. Acoust. Soc. Amer. – 1974. – Vol. 55, № 2. – P. 339-334.
5. Шутилов В.А. Основы физики ультразвука. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1980. – 280 с.

Надійшла 15.04.2002