ВІСНИК ДОНЕЦЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ, Сер. А: Природничі науки, 2005, вип. 1

МАТЕМАТИКА

УДК 512.53

ЗСУВИ НАПІВГРУПИ РІСА МАТРИЧНОГО ТИПУ

А.В.Жучок
Слов'янський державний педагогічний університет.

Вступ. Оболонка зсувів $\Omega(T)$ напівгрупи T грає важливу роль в теорії ідеальних розширень напівгруп, оскільки кожне ідеальне розширення S напівгрупи T може бути побудовано за допомогою часткового гомоморфізму $T \setminus 0$ в $\Omega(S)$. В роботі [1] Л.М. Глускіним доведено: якщо S – слабо
редуктивний щільно вкладений ідеал напівгрупи T, то $T \cong \Omega(S)$. В деяких роботах в термінах щільно вкладених ідеалів описуються абстрактні характеристики напівгруп (див., наприклад, [2]). В [3], використовуючи теорію щільно вкладених ідеалів, вивчено напівгрупи та кільця ендоморфізмів лінійних просторів. Задачу описання напівгрупи лівих (правих) зсувів цілком 0 – простих напівгруп та оболонки зсувів цілком 0 – простих напівгруп було розв'язано в [4]. Природньо, отже, виникає задача описання напівгрупи лівих (правих) зсувів напівгруп Ріса матричного типу над однобічно простими моноїдами.

Термінологія та позначення відповідають прийнятим в [5].

Основні визначення та позначення.

Нехай S – довільна напівгрупа. Перетворення $\lambda(\rho)$ множини S називається лівим (правим) зсувом напівгрупи S, якщо $(u\upsilon)\lambda = (u\lambda)\upsilon$ $((u\upsilon)\rho = u(\upsilon\rho))$ для всіх $u, \upsilon \in S$. Лівий зсув λ та правий зсув ρ напівгрупи S називаються зв'язаними, якщо $u(\upsilon\lambda) = (u\rho)\upsilon$ для всіх $u, \upsilon \in S$. Множина всіх лівих зсувів напівгрупи S є напівгрупою відносно операції композиції перетворень. Цю напівгрупу називають напівгрупою лівих зсувів напівгрупи S. Аналогічно визначається напівгрупа правих зсувів напівгрупи S. Напівгрупу лівих (правих) зсувів напівгрупи S будемо позначати через $T_\ell(S)$ $(T_r(S))$.

Кожному елементу a напівгрупи S зіставимо перетворення λ_a (ρ_a) напівгрупи S, поклавши $x\lambda_a = ax$ $(x\rho_a = xa)$ для всіх $x \in S$. Перетворення λ_a (ρ_a) називається внутрішнім лівим (правим) зсувом напівгрупи S, який відповідає елементу $a \in S$. Множина всіх внутрішніх лівих (правих) зсувів напівгрупи S є піднапівгрупою напівгрупи лівих (правих) зсувів напівгрупи S (див.[5]).

Нехай S – довільна напівгрупа, I, Λ – довільні непорожні множини, для яких визначено відображення

$$t: \quad \Lambda \times I \to S : (j;i) \mapsto t_{ji}.$$

Визначивши на множині $M = I \times S \times \Lambda$ операцію за правилом $(i,g,j)(k,h,l) = (i, gp_{jk}h, l)$, отримаємо напівгрупу. Цю напівгрупу називають напівгрупою Ріса матричного типу над напівгрупою S із сендвіч-матрицею $T = (t_{ji})$ і позначають через $M(I, S, \Lambda; T)$.

Нехай S – довільна напівгрупа, $\Im(X)$ – симетрична напівгрупа на множині X, а $S^X = Map(X;S)$ – напівгрупа відображень $F : X \to S : x \mapsto xF$ з операцією поточкового добутку :

$$x(F * G) = xF \cdot xG, \text{ де } F, G \in Map(X;S), \ x \in X.$$

Для $(F;\varphi), (G;\psi) \in S^X \times \Im(X)$ покладемо

$$(F;\varphi)(G;\psi) = (F * G^\varphi; \varphi\psi), \qquad (□)$$

де $xG^\varphi = (x\varphi)G, x \in X$. Множина $S^X \times \Im(X)$ відносно цієї операції є напівгрупою. Дійсно, якщо $a = (F;\varphi), b = (G;\psi), c = (H;\tau)$ – довільні елементи множини $S^X \times \Im(X)$, то

$$(ab)c = (F * G^\varphi; \varphi\psi)(H;\tau) = (F * G^\varphi * H^{\varphi\psi}; \varphi\psi\tau).$$

Але

$$x(G^{\varphi} * H^{\varphi\psi}) = xG^{\varphi} \cdot xH^{\varphi\psi} = (x\varphi)G \cdot ((x\varphi)\psi)H =$$

$$= (x\varphi)G \cdot (x\varphi)H^{\psi} = x\varphi(G * H^{\psi}) = x(G * H^{\psi})^{\varphi}$$

який би не був $x \in X$. Отже, $G^{\varphi} * H^{\varphi\psi} = (G * H^{\varphi})^{\psi}$ і, таким чином –

$$(ab)c = (F * (G * H^{\psi})^{\varphi}; \varphi(\psi\tau)) = (F; \varphi)(G * H^{\psi}; \psi\tau) = a(bc).$$

Отриману напівгрупу називають лівим (стандартним) вінцевим добутком напівгрупи S і симетричної напівгрупи $\Im(X)$. Лівий стандартний вінцевий добуток напівгрупи S і симетричної напівгрупи $\Im(X)$ будемо позначати через $(S;X)Wr^{\ell}$.

Якщо операцію (□) на множині $S^{X} \times \Im(X)$ змінити наступним чином:

$$(F;\varphi)(G;\psi) = (G^{\varphi} * F; \varphi\psi),$$

то отримаємо правий (стандартний) вінцевий добуток напівгрупи S і симетричної напівгрупи $\Im(X)$. Правий стандартний вінцевий добуток напівгрупи S і симетричної напівгрупи $\Im(X)$ будемо позначати через $(S;X)Wr^{r}$.

Напівгрупу S називають простою справа (зліва), якщо вона не містить власних правих (лівих) ідеалів. Напівгрупа S є простою справа (зліва) тоді й лише тоді, коли $aS = S$ $(Sa = S)$ для кожного $a \in S$.

1. Основні результати.

В роботі [4] описано будову напівгрупи лівих (правих) зсувів цілком $0-$простих напівгруп, зображених у вигляді $M^{0}(I,G,\Lambda;P)$, де $G-$довільна група. В цьому пункті ми узагальнюємо ці результати, описуючи напівгрупи лівих (правих) зсувів напівгрупи Ріса матричного типу $M(I,G,\Lambda;P)$ $(M(I,G^{'},\Lambda;P^{'}))$, де G $(G^{'})-$простий справа (зліва) моноїд, в термінах вінцевих добутків напівгруп. Крім того, знайдено необхідні та достатні умови за яких лівий (правий) зсув напівгрупи $M(I,G,\Lambda;P)$ $(M(I,G^{'},\Lambda;P^{'}))$, де G $(G^{'})-$простий справа (зліва) моноїд, є внутрішнім та наведено критерій за яким лівий та правий зсуви напівгрупи $M(I,G,\Lambda;P)$, де $G-$довільна группа, є зв'язаними.

1.1. Нехай $M(G) = M(I,G,\Lambda;P)-$напівгрупа Ріса матричного типу над простим справа моноїдом G з сендвіч-матрицею P. Має місце

Теорема. $T_{\ell}(M(G)) \cong (G;I)Wr^{r}$.

Доведення. Нехай $(i,a,j)-$довільний елемент напівгрупи $M(G)$, p_{kt} $-$довільний, але фіксований елемент матриці (p_{kt}). Оскільки $G-$простий справа моноїд, то для елементів a, $p_{kt} \in G$ існує елемент $b \in G$ такий, що $p_{kt}b = a$.

Припустимо, що $\lambda-$лівий зсув напівгрупи $M(G)$, $(i,1,k)\lambda = (i^{'},n,k^{'})$ для $(i,1,k) \in M(G)$. Тоді

$$(i,a,j)\lambda = (i,p_{kt}b,j)\lambda = ((i,1,k)(t,b,j))\lambda =$$

$$= (i,1,k)\lambda(t,b,j) = (i^{'},n,k^{'})(t,b,j) = (i^{'},np_{k^{'}t}b,j),$$

звідки випливає, що лівий зсув λ не змінює елемент j. Крім цього,

$$(i,a,m)\lambda = (i,p_{kt}b,m)\lambda = ((i,1,k)(t,b,m))\lambda =$$

$$= (i,1,k)\lambda(t,b,m) = (i^{'},n,k^{'})(t,b,m) =$$

$$= (i^{'},np_{k^{'}t}b,m) = (i^{'},np_{kt}b,m) = (i^{'},na,m)$$

для $(i,a,m) \in M(G)$, оскільки $k^{'} = k$. Це, разом з попереднім, означає, що елементи $(i,a,j)\lambda$ і $(i,a,m)\lambda$ мають однакові перші компоненти та однакові другі компоненти при будь-яких $j,m \in \Lambda$.

Якщо $(i,z,\eta) \in M(G)$, $z = p_{kt}z^{'}$ для деякого $z^{'} \in G$, то

$$(i,z,\eta)\lambda=(i,p_{kt}\,z',\eta)\lambda=((i,1,k)(t,z',\eta))\lambda=$$
$$=(i,1,k)\lambda(t,z',\eta)=(i',n,k')(t,z',\eta)=$$
$$=(i',np_{k't}z',\eta)=(i',np_{kt}z',\eta)=(i',nz,\eta).$$

Виникають, таким чином, відображення $\alpha:I\to I:i\mapsto i\alpha$, $\phi:I\to G:i\mapsto i\phi$. Отже, кожний зсув $\lambda\in T_\ell(M(G))$ однозначно визначається парою (ϕ,α). Для зручності позначимо λ через $\lambda_{(\phi,\alpha)}:(i,a,j)\lambda_{(\phi,\alpha)}=(i\alpha,i\phi\, a,j),(i,a,j)\in M(G)$.

Покладемо, далі, $\lambda_{(\phi,\alpha)}c=(\phi,\alpha)$. Покажемо, що c є ізоморфізмом напівгрупи $T_\ell(M(G))$ на напівгрупу $(G;I)Wr^r$. Для цього візьмемо довільний зсув $\lambda_{(\phi',\alpha')}\in T_\ell(M(G))$ та розглянемо добуток $\lambda_{(\phi,\alpha)}\lambda_{(\phi',\alpha')}$:

$$(i,a,j)\lambda_{(\phi,\alpha)}\lambda_{(\phi',\alpha')}=((i,a,j)\lambda_{(\phi,\alpha)})\lambda_{(\phi',\alpha')}=$$
$$=(i\alpha,i\phi\, a,j)\lambda_{(\phi',\alpha')}=(i\alpha\alpha',(i\alpha)\phi'(i\phi)a,j)=$$
$$=(i\alpha\alpha',i(\phi')^\alpha(i\phi)a,j)=(i\alpha\alpha',i((\phi')^\alpha*\phi)a,j)\quad((i,a,j)\in M(G)).$$

Діючи зараз відображенням c на $\lambda_{(\phi,\alpha)}\lambda_{(\phi',\alpha')}$ отримуємо:

$$(\lambda_{(\phi,\alpha)}\lambda_{(\phi',\alpha')})c=\lambda_{((\phi')^\alpha*\phi,\alpha\alpha')}c=((\phi')^\alpha*\phi,\alpha\alpha').$$

З іншого боку,

$$\lambda_{(\phi,\alpha)}c\lambda_{(\phi',\alpha')}c=(\phi,\alpha)(\phi',\alpha')=((\phi')^\alpha*\phi,\alpha\alpha').$$

Таким чином, $(\lambda_{(\phi,\alpha)}\lambda_{(\phi',\alpha')})c=\lambda_{(\phi,\alpha)}\,c\,\lambda_{(\phi',\alpha')}c$ для будь-яких $\lambda_{(\phi,\alpha)},\lambda_{(\phi',\alpha')}\in T_\ell(M(G))$ і, отже, c – гомоморфізм.

Покажемо, що c – взаємно-однозначне відображення.

Оскільки для будь-якого елементу $(\phi,\alpha)\in(G;I)Wr^r$ існує зсув $\lambda_{(\phi,\alpha)}\in T_\ell(M(G))$ такий, що $\lambda_{(\phi,\alpha)}\,c=(\phi,\alpha)$, то c – сюрьєктивне. Якщо $\lambda_{(\phi,\alpha)}\neq\lambda_{(\phi',\alpha')}$, то $(i,a,j)\lambda_{(\phi,\alpha)}\neq(i,a,j)\lambda_{(\phi',\alpha')}$ для деякого $(i,a,j)\in M(G)$, тобто

$$(i\alpha,i\phi\, a,j)\neq(i\alpha',i\phi'\,a,j).$$

Звідси $i\alpha\neq i\alpha'$ або $i\phi\, a\neq i\phi'\,a$ або $i\alpha\neq i\alpha'$ і $i\phi\, a\neq i\phi'\,a$. З цього в будь-якому випадку випливає, що $(\phi,\alpha)\neq(\phi',\alpha')$, тобто c – ін'єктивне. Таким чином, c – взаємно-однозначний гомоморфізм. Теорему доведено.

1.2. Нехай $M(G')=M(I,G',\Lambda;P')$ – напівгрупа Ріса матричного типу над простим зліва моноїдом G' з сендвіч-матрицею P'.

Визначимо відображення $\sigma:\Lambda\to\Lambda:j\mapsto j\sigma$, $\gamma:\Lambda\to G':j\mapsto j\gamma$. Аналогічно (див. п.1.1) показується, що кожний зсув $\rho\in T_r(M(G'))$ однозначно визначається парою (σ,γ). Для зручності позначимо ρ через $\rho_{(\sigma,\gamma)}:(i,g,j)\rho_{(\sigma,\gamma)}=(i,g\,(j\sigma),j\gamma),(i,g,j)\in M(G')$.

В двоїстий спосіб доводиться

Теорема. $T_r(M(G'))\cong(G';\Lambda)Wr^\ell$.

1.3. Необхідні та достатні умови за яких лівий зсув напівгрупи $M(G)$ (див.п.1.1) є внутрішнім дає наступна

Теорема. Лівий зсув $\lambda_{(\phi,\alpha)}$ напівгрупи $M(I,G,\Lambda;P)$ є внутрішнім лівим зсувом, який відповідає елементу $(f,b,l)\in M(I,G,\Lambda;P)$, тоді й лише тоді, коли $i\alpha=f$, $i\phi=bp_{li}$ для всіх $i\in I$.

Доведення. Якщо $\lambda_{(\phi,\alpha)}$ – внутрішній лівий зсув напівгрупи $M(G)$, що відповідає елементу (f,b,l), то

$$(i,a,j)\lambda_{(\phi,\alpha)}=(f,b,l)(i,a,j)=(f,bp_{li}a,j)=(i\alpha,i\phi\, a,j),$$

звідки $i\alpha=f$, $bp_{li}=i\phi$ для всіх $i\in I$, оскільки G – простий справа.

Навпаки. Нехай $\lambda_{(\phi,\alpha)}$ – лівий зсув напівгрупи $M(G)$ такий, що $i\alpha=f$, $i\phi=bp_{li}$ для всіх $i\in I$. Тоді для довільного $(i,a,j)\in M(G)$ маємо:

$$(i,a,j)\lambda_{(\phi,\alpha)}=(i\alpha,i\phi\, a,j)=(f,bp_{li}a,j)=(f,b,l)(i,a,j),$$

звідси $\lambda_{(\phi,\alpha)}$ – внутрішній зсув, що відповідає елементу $(f,b,l)\in M(G)$. Теорему доведено.

1.4. В умовах та позначеннях п.1.2 в двоїстий спосіб доводиться

Теорема. Правий зсув $\rho_{(\sigma,\gamma)}$ напівгрупи $M(I,G',\Lambda;P')$ є внутрішнім правим зсувом, який відповідає елементу $(f,g,l)\in M(I,G',\Lambda;P')$, тоді й лише тоді, коли $j\gamma=f$, $j\sigma=p_{lj}\,g$ для всіх $j\in\Lambda$.

1.5. Нехай G – довільна група, $M(G)=M(I,G,\Lambda;P)$ – напівгрупа Ріса матричного типу над групою G з сендвіч-матрицею P.

Необхідні та достатні умови за яких лівий та правий зсуви напівгрупи $M(G)$ є зв'язаними дає наступна

Теорема. Лівий зсув $\lambda_{(\phi,\alpha)}$ і правий зсув $\rho_{(\sigma,\gamma)}$ напівгрупи $M(I,G,\Lambda;P)$ є зв'язаними тоді й лише тоді, коли $(j\sigma)p_{(j\gamma)k}=p_{j(k\alpha)}(k\phi)$ для всіх $j\in\Lambda, k\in I$.

Доведення. Якщо лівий зсув $\lambda_{(\phi,\alpha)}$ і правий зсув $\rho_{(\sigma,\gamma)}$ напівгрупи $M(I,G,\Lambda;P)$ є зв'язаними, то при будь-яких $(i,a,j),(k,b,l)\in M(G)$ виконується тотожність :

$$((i,a,j)\rho_{(\sigma,\gamma)})(k,b,l)=(i,a,j)((k,b,l)\lambda_{(\phi,\alpha)}),$$

тобто

$$\begin{aligned}((i,a,j)\rho_{(\sigma,\gamma)})(k,b,l)&=(i,a(j\sigma),j\gamma)(k,b,l)=\\&=(i,a(j\sigma)p_{(j\gamma)k}b,l)=(i,ap_{j(k\alpha)}(k\phi)b,l)=\\&=(i,a,j)(k\alpha,(k\phi)b,l)=(i,a,j)((k,b,l)\lambda_{(\phi,\alpha)}).\end{aligned}$$

Звідси, маємо:

$$a\,(j\sigma)p_{(j\gamma)k}b=ap_{j(k\alpha)}(k\phi)b\Rightarrow (j\sigma)p_{(j\gamma)k}=p_{j(k\alpha)}(k\phi)\quad (j\in\Lambda,k\in I),$$

оскільки G – група.

Якщо тепер $(j\sigma)p_{(j\gamma)k}=p_{j(k\alpha)}(k\phi)$ для всіх $j\in\Lambda,k\in I$, то для довільних $(i,a,j),(k,b,l)\in M(G)$ безпосередньо отримуємо :

$$((i,a,j)\rho_{(\sigma,\gamma)})(k,b,l)=(i,a,j)((k,b,l)\lambda_{(\phi,\alpha)}),$$

тобто $\lambda_{(\phi,\alpha)}$ і $\rho_{(\sigma,\gamma)}$ – зв'язані зсуви. Теорему доведено.

2. Регулярність та ідемпотентність.

В останніх пунктах даної роботи вивчаються алгебраїчні властивості напівгруп $T_\ell(M(G))$, $T_r(M(G'))$ (див. п.1.1, п.1.2) такі як регулярність, ідемпотентність, подільність та відношення Гріна. При цьому треба відмітити, що відношення подільності в симетричній напівгрупі розглядались в [6], регулярність напівпрямих добутків вивчалась в [7].

В даному пункті напівгрупи $T_\ell(M(G))$, $T_r(M(G'))$ досліджуються на регулярність та ідемпотентність.

2.1. Має місце

Лема . Напівгрупи $T_\ell(M(G))$ та $T_r(M(G'))$ є регулярними.

Доведення. Ми розглянемо випадок напівгрупи $T_\ell(M(G))$. Для напівгрупи $T_r(M(G'))$ доведення проводиться аналогічно. Для доведення регулярності напівгрупи $T_\ell(M(G))$ необхідно показати, що для довільного зсува $\lambda_{(\phi,\alpha)} \in T_\ell(M(G))$ існує зсув $\lambda_{(\varphi,\beta)} \in T_\ell(M(G))$ такий, що $\lambda_{(\phi,\alpha)}\lambda_{(\varphi,\beta)}\lambda_{(\phi,\alpha)} = \lambda_{(\phi,\alpha)}$.

Оскільки, відомо, що симетрична напівгрупа є регулярною (див., наприклад, [5]), то виберемо β так, щоб

$$\alpha\beta\alpha = \alpha, \quad \alpha,\beta \in \Im(I). \tag{1}$$

Відзначимо, що з правої простоти моноїду G випливає, що для довільного $a \in G$ завжди існує $\overline{a} \in G$ такий, що $a\overline{a} = 1$ та позначимо через x^{-1} довільний, але фіксований елемент множини

$$G_x = \{a \in G \mid xa = 1\}, x \in X.$$

Для довільних відображень $\alpha \in \Im(I), \phi \in G^I$ коректно визначеним, отже, є відображення

$$\varphi^{\phi}_{\alpha,\beta} : I\alpha \to G : i\alpha \mapsto (i\alpha)\varphi^{\phi}_{\alpha,\beta} = (((i\alpha)\beta)\phi)^{-1}.$$

Якщо $\varphi_\alpha : I \setminus I\alpha \to G$ – довільне відображення, то шукане відображення $\varphi \in G^I$ має вигляд :

$$\varphi = \overline{\varphi}^{\phi}_{\alpha,\beta} : I \to G : i \mapsto i\overline{\varphi}^{\phi}_{\alpha,\beta} = \begin{cases} i\varphi^{\phi}_{\alpha,\beta}, \ i \in I\alpha \\ i\varphi_\alpha, \ i \in I \setminus I\alpha. \end{cases} \tag{2}$$

Дійсно, користуючись (1), (2) для довільного $(i,a,j) \in M(G)$ маємо:

$$(i,a,j)\lambda_{(\phi,\alpha)}\lambda_{(\varphi,\beta)}\lambda_{(\phi,\alpha)} = (i\alpha, i\phi\, a, j)\lambda_{(\varphi,\beta)}\lambda_{(\phi,\alpha)} =$$
$$= (i\alpha\beta, (i\alpha)\varphi\,(i\phi\,)a, j)\lambda_{(\phi,\alpha)} = (i\alpha\beta\alpha\,, (i\alpha\beta)\phi\,(i\alpha)\varphi\,(i\phi\,)a, j) =$$
$$= (i\alpha\beta\alpha\,, (i\alpha\beta)\phi\,(i\alpha)\varphi^{\phi}_{\alpha,\beta}\,(i\phi\,)a, j) =$$
$$= (i\alpha\,, (i\alpha\beta)\phi\,(((i\alpha)\beta)\phi)^{-1}\,(i\phi\,)a, j) = (i\alpha\,, i\phi\, a, j) = (i\,, a, j)\lambda_{(\phi,\alpha)},$$

тобто $\lambda_{(\phi,\alpha)}\lambda_{(\varphi,\beta)}\lambda_{(\phi,\alpha)} = \lambda_{(\phi,\alpha)}$, звідки й випливає стверджуване. Лему доведено.

2.2. Через θ_I позначимо тотожне перетворення множини I, а через $\theta^x_{G[I]}$ – елемент із G^I такий, що $i\theta^x_{G[I]} = x$ для всіх $i \in I$. Справедлива наступна

Лема. Лівий зсув $\lambda_{(\phi,\alpha)}$ напівгрупи $M(G)$ є ідемпотентним тоді і тільки тоді, коли $\alpha^2 = \alpha, \quad \phi^\alpha = \theta^1_{G[I]}$.

Доведення. Нехай $(\lambda_{(\phi,\alpha)})^2 = \lambda_{(\phi,\alpha)}$. Для довільного $(i,a,j) \in M(G)$ маємо:

$$(i,a,j)(\lambda_{(\phi,\alpha)})^2 = (i,a,j)\lambda_{(\phi,\alpha)}\lambda_{(\phi,\alpha)} =$$
$$= (i\alpha, i\phi\, a, j)\lambda_{(\phi,\alpha)} = (i\alpha^2, (i\alpha)\phi\,(i\phi)\, a, j) =$$
$$= (i\alpha, i\phi\, a, j) = (i,a,j)\lambda_{(\phi,\alpha)},$$

звідки $i\alpha^2 = i\alpha, \quad (i\alpha)\phi\,(i\phi)\, a = i\phi\, a$, тобто $\alpha^2 = \alpha, \quad \phi^\alpha = \theta^1_{G[I]}$.

Навпаки. Нехай $\lambda_{(\phi,\alpha)} \in T_\ell(M(G))$, причому $\alpha^2 = \alpha, \quad \phi^\alpha = \theta^1_{G[I]}$. Тоді при будь-якому $(i,a,j) \in M(G)$ матимемо :

$$(i,a,j)(\lambda_{(\phi,\alpha)})^2 = (i,a,j)\lambda_{(\phi,\alpha)}\lambda_{(\phi,\alpha)} =$$
$$= (i\alpha, i\phi\, a, j)\lambda_{(\phi,\alpha)} = (i\alpha^2, (i\alpha)\phi\,(i\phi)\, a, j) =$$
$$= (i\alpha, (i\alpha)\phi\,(i\phi)\, a, j) = (i\alpha, i\phi^\alpha\,(i\phi)\, a, j) =$$
$$= (i\alpha, (i\,\theta^1_{G[I]})(i\phi)\, a, j) = (i\alpha, i\phi\, a, j) =$$
$$= (i, a, j)\lambda_{(\phi,\alpha)}.$$

Лему доведено.

2.3. Аналогічно доводиться

Лема. Правий зсув $\rho_{(\sigma,\gamma)}$ напівгрупи $M(G^{'})$ є ідемпотентним тоді і тільки тоді, коли $\gamma^2=\gamma,\ \ \sigma^\gamma=\theta^1_{G^{'}[\Lambda]}$.

Відзначимо, що одиницею напівгрупи $T_\ell(M(G))$ є елемент $\lambda_{(\phi,\alpha)}$, де $\alpha=\theta_I,\quad \phi=\theta^1_{G[I]}$, а напівгрупи $T_r(M(G^{'}))$ – елемент $\rho_{(\sigma,\gamma)}$, де $\gamma=\theta_\Lambda,\quad \sigma=\theta^1_{G^{'}[\Lambda]}$.

3. Подільність.

В цьому пункті описуються відношення правої та двобічної подільності напівгруп $T_\ell(M(G)),\quad T_r(M(G^{'}))$. Нагадаємо необхідні визначення.

Нехай S – напівгрупа. Якщо $z=x\,y,\ z,x,y\in S$, то кажуть, що z ділиться на y справа. Якщо $z=x\,y\,d,\ z,x,y,d\in S$, то кажуть, що z медіально ділиться на y.

3.1. Має місце

Лема. Нехай $\lambda_{(\phi_1,\alpha_1)},\lambda_{(\phi^{'},\alpha^{'})}\in T_\ell(M(G))$. Для того, щоб $\lambda_{(\phi_1,\alpha_1)}$ ділилося на $\lambda_{(\phi^{'},\alpha^{'})}$ справа, необхідно і достатньо, щоб α_1 ділилося на $\alpha^{'}$ справа.

Доведення. Відзначимо по-перше, що в напівгрупі G^I для будь-яких $\phi^{'},\phi_1\in G^I,\ \beta\in\Im(I)$ завжди існує $\varphi\in G^I$ такий, що

$$(\phi^{'})^\beta*\varphi=\phi_1, \tag{3}$$

оскільки G – простий справа моноїд.

Якщо для будь-яких $\lambda_{(\phi_1,\alpha_1)},\lambda_{(\phi^{'},\alpha^{'})}\in T_\ell(M(G))$ існує $\lambda_{(\varphi,\beta)}\in T_\ell(M(G))$ такий, що $\lambda_{(\varphi,\beta)}\lambda_{(\phi^{'},\alpha^{'})}=\lambda_{(\phi_1,\alpha_1)}$, то для довільного $(i,a,j)\in M(G)$ отримаємо:

$$(i,a,j)\lambda_{(\varphi,\beta)}\lambda_{(\phi^{'},\alpha^{'})}=(i\beta,i\varphi\,a,j)\lambda_{(\phi^{'},\alpha^{'})}=$$
$$=(i\beta\alpha^{'},(i\beta)\phi^{'}\,(i\varphi)a,j)=$$
$$=(i\alpha_1,i\phi_1\,a,j)=(i,a,j)\lambda_{(\phi_1,\alpha_1)},$$

звідки $\beta\alpha^{'}=\alpha_1$.

Навпаки. Нехай α_1 ділиться на $\alpha^{'}$ справа . Тоді, використовуючи (3), маємо :

$$(i,a,j)\lambda_{(\phi_1,\alpha_1)}=(i\alpha_1,i\phi_1 a,j)=$$
$$(i\beta\alpha^{'},i((\phi^{'})^\beta*\varphi)a,j)=(i\beta\alpha^{'},(i\beta)\phi^{'}(i\varphi)a,j)=$$
$$=(i\beta,i\,\varphi\,a,j)\lambda_{(\phi^{'},\alpha^{'})}=(i,a,j)\lambda_{(\varphi,\beta)}\lambda_{(\phi^{'},\alpha^{'})}\Rightarrow\lambda_{(\phi_1,\alpha_1)}=\lambda_{(\varphi,\beta)}\lambda_{(\phi^{'},\alpha^{'})}.$$

Лему доведено.

3.2. Аналогічно доводиться

Лема. Нехай $\rho_{(\sigma,\gamma)},\rho_{(\sigma^{'},\gamma^{'})}\in T_r(M(G^{'}))$. Для того, щоб $\rho_{(\sigma,\gamma)}$ ділилося на $\rho_{(\sigma^{'},\gamma^{'})}$ справа, необхідно і достатньо, щоб γ ділилося на $\gamma^{'}$ справа.

3.3. Має місце

Лема. Нехай $\lambda_{(\phi,\alpha)},\lambda_{(\varphi,\beta)}\in T_\ell(M(G))$. Для того, щоб $\lambda_{(\phi,\alpha)}$ медіально ділилося на $\lambda_{(\varphi,\beta)}$, необхідно і достатньо, щоб α медіально ділилося на β .

Доведення. Відзначимо по-перше, що в напівгрупі G^I для будь-яких $\phi,\phi_2,\varphi\in G^I,\ \alpha_1,\beta\in\Im(I)$ завжди існує $\phi_1\in G^I$ такий, що

$$\phi=\phi_2^{\alpha_1\beta}*\varphi^{\alpha_1}*\phi_1, \tag{4}$$

оскільки G – простий справа моноїд.

Якщо для будь-яких $\lambda_{(\phi,\alpha)},\lambda_{(\varphi,\beta)}\in T_\ell(M(G))$ існують $\lambda_{(\phi_1,\alpha_1)},\lambda_{(\phi_2,\alpha_2)}\in T_\ell(M(G))$ такі, що $\lambda_{(\phi,\alpha)}=\lambda_{(\phi_1,\alpha_1)}\lambda_{(\varphi,\beta)}\lambda_{(\phi_2,\alpha_2)}$, то для довільного $(i,a,j)\in M(G)$ отримуємо:

$$(i,a,j)\lambda_{(\phi_1,\alpha_1)}\lambda_{(\varphi,\beta)}\lambda_{(\phi_2,\alpha_2)}=(i\alpha_1,i\phi_1a,j)\lambda_{(\varphi,\beta)}\lambda_{(\phi_2,\alpha_2)}=$$
$$=(i\alpha_1\beta,(i\alpha_1)\varphi(i\phi_1)\,a,j)\lambda_{(\phi_2,\alpha_2)}=$$
$$=(i\alpha_1\beta\alpha_2,(i\alpha_1\beta)\phi_2\;(i\alpha_1)\varphi\;(i\phi_1)\,a,j)=$$
$$=(i\alpha,i\phi\;a,j)=(i,a,j)\lambda_{(\phi,\alpha)},$$

звідки $\alpha=\alpha_1\beta\alpha_2$.

Навпаки. Нехай α медіально ділиться на β. Тоді, використовуючи (4), маємо:

$$(i,a,j)\lambda_{(\phi,\alpha)}=(i\alpha,i\phi\;a,j)=$$
$$=(i\alpha_1\beta\alpha_2,\;i(\phi_2^{\alpha_1\beta}*\varphi^{\alpha_1}*\phi_1)\,a,j)=$$
$$=(i\alpha_1\beta\alpha_2,(i\alpha_1\beta)\phi_2\;(i\alpha_1)\varphi\;(i\phi_1)\,a,j)=$$
$$=(i,a,j)\lambda_{(\phi_1,\alpha_1)}\lambda_{(\varphi,\beta)}\lambda_{(\phi_2,\alpha_2)}\Rightarrow\lambda_{(\phi,\alpha)}=\lambda_{(\phi_1,\alpha_1)}\lambda_{(\varphi,\beta)}\lambda_{(\phi_2,\alpha_2)}.$$

Лему доведено.

3.4. Аналогічно доводиться

Лема. Нехай $\rho_{(\sigma,\gamma)},\rho_{(\sigma',\gamma')}\in T_r(M(G'))$. Для того, щоб $\rho_{(\sigma,\gamma)}$ медіально ділилося на $\rho_{(\sigma',\gamma')}$, необхідно і достатньо, щоб γ медіально ділилося на γ'.

4. Відношення Гріна.

В цьому пункті описуються відношення Гріна на напівгрупах $T_\ell(M(G))$, $T_r(M(G'))$.

Для довільної напівгрупи S нагадаємо визначення відношень Гріна L та F:

$$\mathsf{L}=\{(x;y)\in S\times S\,|\,S^1x=S^1y\},$$
$$\mathsf{F}=\{(x;y)\in S\times S\mid S^1xS^1=S^1yS^1\}.$$

Відзначимо, що усі відношення Гріна є відношеннями еквівалентності на напівгрупі S (див., наприклад, [5]).

4.1. Має місце

Лема. Елементи $\lambda_{(\phi,\alpha)}$ і $\lambda_{(\varphi,\beta)}$ напівгрупи $T_\ell(M(G))$ є L-еквівалентними тоді й лише тоді, коли α і $\beta-\mathsf{L}$-еквівалентні в напівгрупі $\Im(I)$.

Доведення. Відзначимо по-перше, що в напівгрупі G^I для будь-яких $\phi,\varphi\in G^I$, $\alpha_1,\alpha_2\in\Im(I)$ завжди існують $\phi_1,\phi_2\in G^I$ такі, що

$$\phi=\varphi^{\alpha_1}*\phi_1,\quad \varphi=\phi^{\alpha_2}*\phi_2, \tag{5}$$

оскільки G – простий справа моноїд.

Нехай $\lambda_{(\phi,\alpha)}$ та $\lambda_{(\varphi,\beta)}$ – L-еквівалентні елементи напівгрупи $T_\ell(M(G))$. Це означає, що існують елементи (ϕ_1,α_1), $(\phi_2,\alpha_2)\in(G,I)Wr^r$ такі, що

$$\lambda_{(\phi,\alpha)}=\lambda_{(\phi_1,\alpha_1)}\lambda_{(\varphi,\beta)},\quad \lambda_{(\varphi,\beta)}=\lambda_{(\phi_2,\alpha_2)}\lambda_{(\phi,\alpha)}.$$

Отже, маємо:

$$(i,a,j)\lambda_{(\phi,\alpha)}=(i\alpha,i\phi a,j)=(i\alpha_1\beta,(i\alpha_1)\varphi\;(i\phi_1)\,a,j)=$$
$$=(i\alpha_1,i\phi_1a,j)\lambda_{(\varphi,\beta)}=(i,a,j)\lambda_{(\phi_1,\alpha_1)}\lambda_{(\varphi,\beta)},$$
$$(i,a,j)\lambda_{(\varphi,\beta)}=(i\beta,i\varphi a,j)=(i\alpha_2\alpha,(i\alpha_2)\phi\;(i\phi_2)a,j)=$$
$$=(i\alpha_2,i\phi_2a,j)\lambda_{(\phi,\alpha)}=(i,a,j)\lambda_{(\phi_2,\alpha_2)}\lambda_{(\phi,\alpha)}$$

для будь-якого $(i,a,j)\in M(G)$, звідки

$$\alpha = \alpha_1\beta,\ \beta = \alpha_2\alpha,$$

тобто α і β – L -еквівалентні елементи симетричної напівгрупи $\Im(I)$.

Якщо тепер α і β – L -еквівалентні в напівгрупі $\Im(I)$, то, використовуючи (5), отримуємо :

$$(i,a,j)\lambda_{(\phi,\alpha)} = (i\alpha, i\phi a, j) = (i\alpha_1\beta, i(\varphi^{\alpha_1} * \phi_1)a, j) =$$
$$= (i\alpha_1\beta, (i\alpha_1)\varphi(i\phi_1)a, j) = (i\alpha_1, i\phi_1 a, j)\lambda_{(\varphi,\beta)} =$$
$$= (i,a,j)\lambda_{(\phi_1,\alpha_1)}\lambda_{(\varphi,\beta)},\quad (i,a,j)\in M(G),$$

тобто $\lambda_{(\phi,\alpha)} = \lambda_{(\phi_1,\alpha_1)}\lambda_{(\varphi,\beta)}$. Аналогічно:

$$(i,a,j)\lambda_{(\varphi,\beta)} = (i\beta, i\varphi a, j) = (i\alpha_2\alpha, i(\phi^{\alpha_2} * \phi_2)\, a, j) =$$
$$= (i\alpha_2\alpha, (i\alpha_2)\phi\,(i\phi_2)\, a, j) = (i\alpha_2, i\phi_2 a, j)\lambda_{(\phi,\alpha)} =$$
$$= (i,a,j)\lambda_{(\phi_2,\alpha_2)}\lambda_{(\phi,\alpha)},$$

тобто $\lambda_{(\varphi,\beta)} = \lambda_{(\phi_2,\alpha_2)}\lambda_{(\phi,\alpha)}$.

Отже, $\lambda_{(\phi,\alpha)}$ та $\lambda_{(\varphi,\beta)}$ – L -еквівалентні елементи напівгрупи $T_\ell(M(G))$. Лему доведено.

4.2. Аналогічно доводиться

Лема. Елементи $\rho_{(\sigma,\gamma)}$ та $\rho_{(\sigma^{'},\gamma^{'})})$ напівгрупи $T_r(M(G^{'}))$ є L -еквівалентними тоді й лише тоді, коли γ і $\gamma^{'}$ – L -еквівалентні в напівгрупі $\Im(\Lambda)$.

4.3. Має місце

Лема. Елементи $\lambda_{(\phi,\alpha)}$ і $\lambda_{(\varphi,\beta)}$ напівгрупи $T_\ell(M(G))$ є F -еквівалентними тоді й лише тоді, коли α і β – F -еквівалентні в напівгрупі $\Im(I)$.

Доведення. Відзначимо по-перше, що в напівгрупі G^I для будь-яких $\phi, \varphi, \phi_2, \phi_4 \in G^I$, $\alpha, \alpha_1, \alpha_3, \beta \in \Im(I)$ завжди існують $\phi_1, \phi_3 \in G^I$ такі, що

$$\phi = {\phi_2}^{\alpha_1\beta} * \varphi^{\alpha_1} * \phi_1,\quad \varphi = \phi_4^{\alpha_3\alpha} * \phi^{\alpha_3} * \phi_3, \tag{6}$$

оскільки G – простий справа моноїд.

Нехай $\lambda_{(\phi,\alpha)}, \lambda_{(\varphi,\beta)}$ – F -еквівалентні елементи напівгрупи $T_\ell\big(M(G)\big)$. Це означає, що існують елементи $(\phi_i, \alpha_i) \in (G;I)Wr^r$ $\big(1 \le i \le 4\big)$ такі, що

$$\lambda_{(\phi,\alpha)} = \lambda_{(\phi_1,\alpha_1)}\lambda_{(\varphi,\beta)}\lambda_{(\phi_2,\alpha_2)},$$
$$\lambda_{(\varphi,\beta)} = \lambda_{(\phi_3,\alpha_3)}\lambda_{(\phi,\alpha)}\lambda_{(\phi_4,\alpha_4)}.$$

Для довільного $(i,a,j)\in M(G)$ маємо:

$$(i,a,j)\lambda_{(\phi,\alpha)} = (i\alpha, i\phi a, j) = (i,a,j)\lambda_{(\phi_1,\alpha_1)}\lambda_{(\varphi,\beta)}\lambda_{(\phi_2,\alpha_2)} =$$
$$= (i\alpha_1, i\phi_1 a, j)\lambda_{(\varphi,\beta)}\lambda_{(\phi_2,\alpha_2)} = (i\alpha_1\beta, (i\alpha_1)\varphi\ (i\phi_1)a, j)\lambda_{(\phi_2,\alpha_2)} =$$
$$= (i\alpha_1\beta\alpha_2, (i\alpha_1\beta)\phi_2\,(i\alpha_1)\varphi\,(i\phi_1)a, j),$$
$$(i,a,j)\lambda_{(\varphi,\beta)} = (i\beta, i\varphi a, j) = (i,a,j)\lambda_{(\phi_3,\alpha_3)}\lambda_{(\phi,\alpha)}\lambda_{(\phi_4,\alpha_4)} =$$
$$= (i\alpha_3, i\phi_3 a, j)\lambda_{(\phi,\alpha)}\lambda_{(\phi_4,\alpha_4)} = (i\alpha_3\alpha, (i\alpha_3)\phi(i\phi_3)a, j)\lambda_{(\phi_4,\alpha_4)} =$$
$$= (i\alpha_3\alpha\alpha_4, (i\alpha_3\alpha)\phi_4(i\alpha_3)\phi(i\phi_3)a, j),$$

звідки

$$\alpha = \alpha_1\beta\alpha_2,\quad \beta = \alpha_3\alpha\alpha_4.$$

Навпаки. Якщо тепер α і β – F -еквівалентні елементи напівгрупи $\Im(I)$ і виконується умова (6), то безпосередньо перевіряється, що $\lambda_{(\phi,\alpha)}$ та $\lambda_{(\varphi,\beta)}$ – F -еквівалентні. Лему доведено.

4.4. Аналогічно доводиться

Лема. Елементи $\rho_{(\sigma,\gamma)}$ і $\rho_{(\sigma',\gamma')}$ напівгрупи $T_r(M(G'))$ є F -еквівалентними тоді й лише тоді, коли γ і γ' – F -еквівалентні в напівгрупі $\Im(\Lambda)$.

ВИСНОВКИ

В роботі описано точне зображення напівгрупи лівих (правих) зсувів напівгрупи Ріса матричного типу над простим справа (зліва) моноїдом в вінцевому добутку напівгруп, вивчено алгебраїчні властивості відповідних напівгруп. Крім того, знайдено необхідні та достатні умови за яких лівий (правий) зсув напівгрупи Ріса матричного типу над простим справа (зліва) моноїдом є внутрішнім та наведено критерій за яким лівий та правий зсуви напівгрупи Ріса матричного типу над довільною групою є зв'язаними.

РЕЗЮМЕ

В работе описание полугруппы левых (правых) сдвигов полугруппы Риса матричного типа над простым справа (слева) моноидом обобщает основные результаты [4].

SUMMARY

The description of left (right) translations of the Rees matrix semigroups with right (left) simple monoid generalizes the basic results [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л.М.Глускин. Идеалы полугрупп // Матем. сб. 55, (1961) 421-448.
2. Л.М.Глускин. Идеалы полугрупп преобразований // Матем.сб.47, (1959), 111-130.
3. Л.М.Глускин. Полугруппы и кольца эндоморфизмов линейных пространств // Изв. АН СССР, сер. матем. 23 (1959), 841-870.
4. M.Petrich. The translational hull in semigroups and rings // Semigroup Forum. – 1970. – V.1. – P.283-360.
5. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп // М.:Мир. – 1972. – Т.1. – С.285.
6. Сушкевич А.К. Теория обобщенных групп // Харьков-Киев: ГНТИ. – 1937.
7. V.Nico. On the Regularity of semidirect products// Journal of algebra, 80, 29-36(1983).

Надійшла до редакції 11.11.2004 р.

ВІСНИК ДОНЕЦЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ, Сер. А: Природничі науки, 2005, вип. 1

УДК 510.6

ГРУППОВАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ ДВУЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ. III

Н.И.Лавренко

Настоящая работа является продолжением работ [1, 2]. В ней посредством введенных в работе [2] системы предикатов от пропозициональных формул и группы преобразований этих предикатов введены система классов пропозициональных формул и классов упорядоченных пар таких формул, а также группа преобразований этих классов – нециклическая абелева группа восьмого порядка, изоморфная группе преобразований предикатов от формул. Рассмотрены различные подсистемы введенной системы классов, инвариантные относительно подгрупп группы преобразований классов. Получена геометрическая интерпретация этой группы преобразований и инвариантности подсистем классов относительно ее подгрупп. Приведены предложения о классах, в частности, о классах равносильности и альтернативности, порождаемых пропозициональными формулами.

Логика высказываний: система классов формул и классов пар формул, ее групповая инвариантность

Для сокращения записей будем использовать символы $\rightleftharpoons$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ метаязыка, заменяющие выражения «есть по определению», «если…, то», «если и только если» соответственно.

Пусть, как и в работе [2], V – универсальный класс формул логики высказываний, Λ – пустой класс формул. Подклассы класса V будем обозначать заглавными греческими буквами Г, Δ, Е, ...; а систему всех таких подклассов обозначим буквой Σ.

Введем унарные операции над классами пропозициональных формул. *Утверждением* класса Е (обозначается через $\mid$Е) назовем утверждение каждой формулы этого класса, т.е. его тождественное преобразование. *Отрицанием* класса Е (обозначается через $\overline{E}$) назовем отрицание каждой формулы этого класса, т.е. преобразование этого класса посредством отрицания каждого его элемента. *Дополнением* класса Е (обозначается через E^*) назовем обычное взятие дополнения этого класса до V, т.е. преобразование этого класса в его дополнение до V. Дополнение * класса является отрицанием класса в целом в отличие от поэлементного отрицания $^-$ класса. При этом $\mid V = V$, $\overline{V} = V$, $V^* = \Lambda$; $\mid \Lambda = \Lambda$, $\overline{\Lambda} = \Lambda$, $\Lambda^* = V$.

Умножением операций $\mid$, $^-$, * назовем их последовательное выполнение. Это умножение ассоциативно. Его коммутативность для операций $^-$, * (для других пар операций она очевидна) доказывается следующей последовательностью очевидных равносильностей отношений для произвольной формулы *A* и произвольного класса формул Δ: $A \in (\overline{\Delta})^* \Leftrightarrow A \notin \overline{\Delta} \Leftrightarrow \overline{A} \notin \Delta \Leftrightarrow \overline{A} \in \Delta^* \Leftrightarrow A \in (\overline{\Delta^*})$, где $\in$ и $\notin$ – символы отношения принадлежности и его отрицания соответственно. Следовательно, $(\overline{\Delta})^* = (\overline{\Delta^*})$, т.е. умножение операций $^-$, * коммутативно, и имеет место следующая таблица умножения

	$\mid$	$-$	*	$-^*$
$\mid$	$\mid$	$-$	*	$-^*$
$-$	$-$	$\mid$	$-^*$	*
*	*	$-^*$	$\mid$	$-$
$-^*$	$-^*$	*	$-$	$\mid$

Заданную этой таблицей нециклическую абелеву группу порядка 4 с образующими элементами [3] $^-$ и * обозначим буквой Н. Группа Н является группой отрицаний [2] и равна прямому произведению [3] любых двух из трех ее подгрупп второго порядка: $C \rightleftharpoons \{^-\}$, $C_1 = \{^*\}$, $C_2 = \{^{-*}\}$.

Система Σ классов формул инвариантна относительно преобразований из группы Н. Она распадается на четверки классов $\{\Delta, \overline{\Delta}, \Delta^*, \overline{\Delta}^*\}$, инвариантные относительно группы преобразований Н. Каждая из таких четверок порождается некоторым (произвольным) классом формул Δ и может быть геометрически интерпретирована как четверка вершин разностороннего прямоугольника (рис. 1). При этом подгруппы группы Н интерпретируются как элементы симметрии этого прямоугольника: подгруппы С и C_1 изображаются его осями симметрии, а подгруппа C_2 изображается его центром симметрии. Преобразования отрицания $^-$ и дополнения * интерпретируются как отражения в осях С и C_1 соответственно, а произведение этих преобразований $^{-*}$ интерпретируется как отражение в центре C_2. Таким образом, группа Н изоморфна группе симметрии разностороннего прямоугольника.

В случае $\Delta = \overline{\Delta}$ (в частности, в предельных случаях $\Delta = \Lambda$ или $\Delta = V$) указанная четверка классов вырождается в пару $\{\Delta, \Delta^*\}$ (в предельных случаях – в пару $\{\Lambda, V\}$), инвариантную относительно группы C_1 и изображаемую парой концов отрезка, в который в этом случае вырождается прямоугольник, показанный на рис. 1.

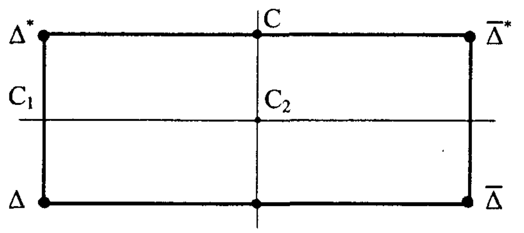


Рис. 1.

Введенные унарные операции над классами формул, образующие группу H, с очевидностью распространяются на классы упорядоченных n-ок (в частности, пар) формул, если под отрицанием n-ки формул понимать отрицание каждой ее формулы. При этом для классов упорядоченных n-ок формул остаются в силе группа преобразований H и ее геометрическая интерпретация, представленная на рис.1.

Пусть, как и в работе [2], Γ, $\overline{\Gamma}$ – системы посылок, одна из которых позитивная, а другая – негативная. При этом рассматривается как случай Γ – позитивная система посылок, а $\overline{\Gamma}$ – негативная, так и случай $\overline{\Gamma}$ – позитивная система посылок, а Γ – негативная (в данном абзаце и иногда в дальнейшем второй случай выделен скобками). Кроме того, предполагается, что позитивная система посылок Γ (или $\overline{\Gamma}$) как конъюнкция всех своих посылок $\wedge\Gamma$ (или $\wedge\overline{\Gamma}$) позитивно совместимая, непротиворечивая; а негативная система посылок $\overline{\Gamma}$ (или Γ) как дизъюнкция всех своих посылок $\vee\overline{\Gamma}$ (или $\vee\Gamma$) негативно совместимая, непротиворечивая; т.е. $\overset{+}{\mid\!\nless} \wedge\Gamma$ и $\mid\!\nleq \vee\overline{\Gamma}$ (или $\overset{+}{\mid\!\nless} \wedge\overline{\Gamma}$ и $\mid\!\nleq \vee\Gamma$) [2]. Такие системы посылок будем называть *непротиворечивыми*. В случае позитивной несовместимости, противоречивости, позитивной системы посылок и негативной несовместимости, противоречивости, негативной системы; т.е. в случае $\overset{+}{\ngtr\!\mid} \wedge\Gamma$ и $\ngeq\!\mid \vee\overline{\Gamma}$ (или $\overset{+}{\ngtr\!\mid} \wedge\overline{\Gamma}$ и $\ngeq\!\mid \vee\Gamma$) [2], в силу (1)-(4) из [2], каждая пропозициональная формула B является и Γ-позитивной, и $\overline{\Gamma}$-негативной (или и $\overline{\Gamma}$-позитивной, и Γ-негативной). Тем самым, в случае противоречивости систем посылок исчезает различие между относительной позитивностью и относительной негативностью пропозициональных формул.

Далее, пусть $\mathscr{P}(x)$, $\mathscr{R}(x)$ – одноместные предикаты, а $\{\, x \mid \mathscr{P}(x)\}$, $\{\, x \mid \mathscr{R}(x)\}$ – классы, определяемые этими предикатами по классическому принципу свертывания: так, $\{\, x \mid \mathscr{P}(x)\}$ – класс всех тех и только тех x, для которых $\mathscr{P}(x)$ выполняется, позитивно. Соединив предикаты $\mathscr{P}(x)$, $\mathscr{R}(x)$ связками *и*, *или*, получим новые одноместные предикаты: $\mathscr{P}(x)$ *и* $\mathscr{R}(x)$, $\mathscr{P}(x)$ *или* $\mathscr{R}(x)$. При этом, как известно, имеют место равенства:

$$\{\, x \mid \mathscr{P}(x) \text{ и } \mathscr{R}(x)\} = \{\, x \mid \mathscr{P}(x)\} \cap \{\, x \mid \mathscr{R}(x)\}, \tag{1}$$

$$\{\, x \mid \mathscr{P}(x) \text{ или } \mathscr{R}(x)\} = \{\, x \mid \mathscr{P}(x)\} \cup \{\, x \mid \mathscr{R}(x)\}, \tag{2}$$

где $\cap$, $\cup$ – символы операций пересечения и объединения классов соответственно.

Пусть, всякое преобразование τ предиката $\mathscr{P}(x)$ определяет преобразование t класса $\{\, x \mid \mathscr{P}(x)\}$, и обратно, следующим образом:

$$\mathrm{t}\{\, x \mid \mathscr{P}(x)\} \rightleftharpoons \{\, x \mid \tau\mathscr{P}(x)\}. \tag{3}$$

Если к тому же $\mathrm{f}\{\, x \mid \mathscr{P}(x)\} \rightleftharpoons \{\, x \mid \varphi\mathscr{P}(x)\}$, то пусть произведение $\tau\varphi$ (результат последовательного выполнения) преобразований φ и τ предиката $\mathscr{P}(x)$ определяет произведение tf преобразований f и t класса $\{\, x \mid \mathscr{P}(x)\}$, и обратно, таким образом:

$$\mathrm{tf}\{\, x \mid \mathscr{P}(x)\} \rightleftharpoons \{\, x \mid \tau\varphi\mathscr{P}(x)\}. \tag{4}$$

Если n-местный предикат рассматривать как одноместный предикат от упорядоченной n-ки его переменных, то в такой интерпретации для него и определяемого им по принципу свертывания класса упорядоченных n-ок остаются в силе соотношения (1)-(4).

Итак, по принципу свертывания система предикатов от пропозициональных формул, введенная в работе [2], определяет систему классов пропозициональных формул и классов упорядоченных пар таких формул, а в силу (3), (4), группа $\mathscr{G}$ преобразований этих предикатов [2] определяет соответствующую группу преобразований классов. Действительно, пусть $\mathscr{P}(B)$ – произвольный одноместный предикат от пропозициональных формул, определяющий по принципу свертывания класс формул $\{B \mid \mathscr{P}(B)\}$. Тогда, согласно (3), (4), преобразования I, g_1, g_2, g_3, g_{12}, g_{13}, g_{23}, g_{123} предиката $\mathscr{P}(B)$, образующие группу $\mathscr{G}$, определяют соответственно преобразования I, h_1, h_2, h_3, h_{12}, h_{13}, h_{23}, h_{123} класса $\{B \mid \mathscr{P}(B)\}$. Следовательно, группа $\mathscr{G}$ определяет изоморфную себе группу с образующими h_1, h_2, h_3, которую обозначим буквой G. При этом, так как преобразование g_1 является отрицанием предиката $\mathscr{P}(B)$ [2], то определяемое им преобразование h_1 является дополнением класса $\{B \mid \mathscr{P}(B)\}$: $\{B \mid g_1\mathscr{P}(B)\} \rightleftharpoons h_1\{B \mid \mathscr{P}(B)\} \rightleftharpoons \{B \mid \mathscr{P}(B)\}^*$, $h_1 = {}^*$. Преобразование g_2 изменяет логическую ориентацию предиката $\mathscr{P}(B)$, поэтому определяемое им преобразование h_2 изменяет логическую ориентацию класса $\{B \mid \mathscr{P}(B)\}$ и называется *логической переориентацией*, или *трансверсией*, класса формул.

Преобразование h_2 переобозначим штрихом $'$, помещаемым справа у верхней части символа класса. Так как, согласно определениям (1)-(4) из [2], $\overset{\pm}{\models} \wedge\Gamma \lessdot B \Leftrightarrow \models \vee\overline{\Gamma} \gtrdot \overline{B}$, $\overset{\pm}{=\!\mid} \wedge\Gamma \lessdot B \Leftrightarrow =\!\mid \vee\overline{\Gamma} \gtrdot \overline{B}$, $\overset{\pm}{\models} \wedge\overline{\Gamma} \lessdot B \Leftrightarrow \models \vee\Gamma \gtrdot \overline{B}$, $\overset{\pm}{=\!\mid} \wedge\overline{\Gamma} \lessdot B \Leftrightarrow =\!\mid \vee\Gamma \gtrdot \overline{B}$, то сохранение выполнимости предиката $\mathscr{P}(B)$ после его преобразования $\overline{g_{23}}$ равносильно отрицанию формулы B: $\mathscr{P}(B) \Leftrightarrow g_{23}\,\mathscr{P}(\overline{B})$. Следовательно, $\{B \mid g_{23}\mathscr{P}(B)\} \rightleftharpoons h_{23}\{B \mid \mathscr{P}(B)\} \rightleftharpoons \{B \mid \mathscr{P}(B)\}$, т.е. преобразование h_{23} является отрицанием класса формул, $h_{23} = {}^{-}$. Тем самым отрицание g_{23} предикатора предиката от формул [2] определяет отрицание ${}^{-}$ соответствующего класса формул, причем $h_{23}h_2 = h_3 = {}^{-\prime}$. Преобразование h_3 назовем (соответственно преобразованию g_3) *транспозицией* класса формул. Итак, для преобразований из группы G имеем: $h_1 = {}^{*}$, $h_2 = {}'$, $h_3 = {}^{-\prime}$, $h_{12} = {}^{\prime *}$, $h_{13} = {}^{-\prime *}$, $h_{23} = {}^{-}$, $h_{123} = {}^{-*}$. Преобразования g_{12}, g_{13}, g_{123} предикатов от формул и определяемые ими преобразования ${}^{\prime *}$, ${}^{-\prime *}$, ${}^{-*}$ классов формул назовем соответственно *инволюцией*, *трансмутацией*, *конверсией*. В предельном случае $\Gamma = \overline{\Gamma} = \Lambda$, в силу (6) из [2], $h_3 = \mid$, $h_1 = h_{13} = {}^{*}$, $h_2 = h_{23} = {}' = {}^{-}$, $h_{12} = h_{123} = {}^{-*}$, и группа G вырождается в группу H.

Приняв ${}^{-}$, *, ${}'$ в качестве образующих элементов группы G, получим для нее следующую таблицу умножения

	$\mid$	$^{-}$	*	$'$	$^{-*}$	$^{-\prime}$	$^{\prime *}$	$^{-\prime *}$
$\mid$	$\mid$	$^{-}$	*	$'$	$^{-*}$	$^{-\prime}$	$^{\prime *}$	$^{-\prime *}$
$^{-}$	$^{-}$	$\mid$	$^{-*}$	$^{-\prime}$	*	$'$	$^{-\prime *}$	$^{\prime *}$
*	*	$^{-*}$	$\mid$	$^{\prime *}$	$^{-}$	$^{-\prime *}$	$'$	$^{-\prime}$
$'$	$'$	$^{-\prime}$	$^{\prime *}$	$\mid$	$^{-\prime *}$	$^{-}$	*	$^{-*}$
$^{-*}$	$^{-*}$	*	$^{-}$	$^{-\prime *}$	$\mid$	$^{\prime *}$	$^{-\prime}$	$'$
$^{-\prime}$	$^{-\prime}$	$'$	$^{-\prime *}$	$^{-}$	$^{\prime *}$	$\mid$	$^{-*}$	*
$^{\prime *}$	$^{\prime *}$	$^{-\prime *}$	$'$	*	$^{-\prime}$	$^{-*}$	$\mid$	$^{-}$
$^{-\prime *}$	$^{-\prime *}$	$^{\prime *}$	$^{-\prime}$	$^{-*}$	$'$	*	$^{-}$	$\mid$

Как видно, группа G имеет 16 подгрупп. Семь из них – циклические подгруппы порядка 2: $C = \{^{-}\}$, $C_1 = \{^{*}\}$, $C_2 = \{^{-*}\}$, $C_3 = \{^{-\prime *}\}$, $C_4 = \{'\}$, $C_5 = \{^{-\prime}\}$, $C_6 = \{^{\prime *}\}$; и семь – нециклические подгруппы порядка 4: $H = \{^{-}, ^{*}\}$, $H_1 = \{^{*}, '\}$, $H_2 = \{^{-*}, '\}$, $H_3 = \{^{-\prime}, ^{*}\}$, $H_4 = \{^{-}, '\}$, $H_5 = \{^{-\prime}, ^{\prime *}\}$, $H_6 = \{^{-}, ^{\prime *}\}$. Подгруппы первой семерки изоморфны между собой, а их образующие элементы представляют собой разновидности отрицания, т.е. группа G есть группа отрицаний [2]. Подгруппы второй семерки тоже изоморфны между собой, и каждая из них является прямым произведением двух подгрупп первой семерки: $H = C \times C_1$, $H_1 = C_1 \times C_4$, $H_2 = C_2 \times C_4$, $H_3 = C_3 \times C_5$, $H_4 = C_4 \times C_5$, $H_5 = C_5 \times C_6$, $H_6 = C_6 \times C$. Кроме того, $G = C \times C_1 \times C_4$.

В предыдущих рассуждениях группа G получена из группы $\mathscr{G}$ как группа преобразований классов формул. Однако эти преобразования распространяются на классы упорядоченных пар (а в общем случае n-ок) формул, так же как преобразования одноместных предикатов от формул распространяются на двуместные (а в общем случае n-местные) предикаты от формул в работе [2]. При этом для некоторых двуместных (или n-местных) предикатов от формул и определяемых ими по принципу свертывания классов пар (или n-ок) формул отдельные преобразования из групп $\mathscr{G}$ и G, соответственно, могут выродиться в тождественное преобразование, и вследствие этого сами группы могут выродиться в те или иные свои подгруппы (ср., например, предикаты четверок (26), (31) и пар (27), (32) из [2]).

Введенные в работе [2] предикаты от формул восьмерок (7), (16) и четверок (8), (17) логически ориентированы либо позитивно, либо негативно. Эту же логическую ориентацию имеют и определяемые ими классы формул.

Согласно преобразованиям из групп $\mathscr{G}$ и G, введем обозначения классов формул, определяемых по принципу свертывания предикатами восьмерки (7) из [2]:

$$\begin{gathered} K(F) = \{B \mid \Gamma \overset{\pm}{\models} B\},\ \ K^{*}(F) = \{B \mid \Gamma \overset{\pm}{=\!\mid} B\},\ \ K(\overline{F}) = \{B \mid \overline{\Gamma} \models B\},\ \ K^{*}(\overline{F}) = \{B \mid \overline{\Gamma} =\!\mid B\}, \\ K(\overline{F}) = \{B \mid \overline{\Gamma} \overset{\pm}{\models} B\},\ \ K^{*}(\overline{F}) = \{B \mid \overline{\Gamma} \overset{\pm}{=\!\mid} B\},\ \ K(F) = \{B \mid \Gamma \models B\},\ \ K^{*}(F) = \{B \mid \Gamma =\!\mid B\}, \end{gathered} \tag{5}$$

причем $K(\overline{F}) = \overline{K}(F)$, $K(F) = K'(F)$.

В предельном случае $\Gamma = \overline{\Gamma} = \Lambda$ эти классы вырождаются в следующие четыре класса:

$$K_{+} = \{B \mid \overset{\pm}{\models} B\},\ \ K_{+}^{*} = \{B \mid \overset{\pm}{=\!\mid} B\},\ \ K_{-} = \{B \mid \models B\},\ \ K_{-}^{*} = \{B \mid =\!\mid B\}, \tag{6}$$

определяемые предикатами четверки (8) из [2], причем $K_{-} = \overline{K_{+}}$.

Итак, в соответствии с определениями (1), (2) из [2] в случае Γ – позитивная система посылок, $\overline{\Gamma}$– негативная система посылок имеем следующие классы формул логики высказываний:

$K(F)$ – класс всех Γ-позитивов, или всех позитивных Γ-следствий;

$K^{*}(F)$ – класс всех формул, не являющихся Γ-позитивами, или позитивными Γ-следствиями;

$K(\overline{F})$ – класс всех $\overline{\Gamma}$-негативов, или всех негативных $\overline{\Gamma}$-следствий;

$K^{*}(\overline{F})$ – класс всех формул, не являющихся $\overline{\Gamma}$-негативами, или негативными $\overline{\Gamma}$-следствиями.

Заменив в этом предложении всюду Γ на $\overline{\Gamma}$ и обратно, в соответствии с определениями (3), (4) из [2] получим четыре класса формул для случая $\overline{\Gamma}$ – позитивная система посылок, Γ – негативная система посылок.

В предельном случае $\Gamma = \overline{\Gamma} = \Lambda$ в соответствии с (6) из [2] имеем следующие четыре класса формул логики высказываний:

K_{+} – класс всех абсолютных позитивов, или всех позитивных тавтологий;

K_{+}^{*} – класс всех формул, не являющихся абсолютными позитивами, или позитивными тавтологиями;

K_{-} – класс всех абсолютных негативов, или всех негативных тавтологий;

K_{-}^{*} – класс всех формул, не являющихся абсолютными негативами, или негативными тавтологиями.

Таким образом, по принципу свертывания восьмерка предикатов (7) из [2] определяет восьмерку классов

$$\{\, K(F),\ K^{*}(F),\ K(\overline{F}),\ K^{*}(\overline{F}),\ K(\overline{F}),\ K^{*}(\overline{F}),\ K(F),\ K^{*}(F)\}, \tag{7}$$

которая в случае $\Gamma = \overline{\Gamma} = \Lambda$ вырождается в четверку классов, определяемую четверкой предикатов (8) из [2],

$$\{K_{+},\ K_{+}^{*},\ K_{-},\ K_{-}^{*}\}. \tag{8}$$

Из определений (1)-(6) из [2] и (5), (6) с очевидностью следует

Предложение 1. *Для всякой пары непротиворечивых систем посылок* $\Gamma, \overline{\Gamma}$:

(a) $K_{+} \subseteq K(F),\ K^{*}(F) \subseteq K_{+}^{*}$;

(c) $K_{+} \subseteq K(\overline{F}),\ K^{*}(\overline{F}) \subseteq K_{+}^{*}$;

(b) $K_{-} \subseteq K(\overline{F}),\ K^{*}(\overline{F}) \subseteq K_{-}^{*}$;

(d) $K_{-} \subseteq K(F),\ K^{*}(F) \subseteq K_{-}^{*}$;

где $\subseteq$ *– символ отношения нестрогого включения.*

Выделив основные сочетания введенных классов формул, инвариантные относительно подгрупп группы G, получаем следующие три предложения.

Предложение 2. *Для всякой пары непротиворечивых систем посылок* Γ, $\overline{\Gamma}$ *каждая пара классов любой из приведенных ниже четверок пар классов инвариантна относительно группы преобразований, указанной слева от этой четверки, а каждая четверка пар классов инвариантна относительно преобразований из групп, указанных справа от этой четверки:*

$$\text{(a)}\ C \left\{\begin{matrix} \{K(F), K(\overline{F})\}, & \{K^{*}(F), K^{*}(\overline{F})\}, \\ \{K(\overline{F}), K(F)\}, & \{K^{*}(\overline{F}), K^{*}(F)\} \end{matrix}\right\} H_1. \qquad \text{(e)}\ C_4 \left\{\begin{matrix} \{K(F), K(F)\}, & \{K^{*}(F), K^{*}(F)\}, \\ \{K(\overline{F}), K(\overline{F})\}, & \{K^{*}(\overline{F}), K^{*}(\overline{F})\} \end{matrix}\right\} H.$$

$$\text{(b)}\ C_1 \left\{\begin{matrix} \{K(F), K^{*}(F)\}, & \{K(\overline{F}), K^{*}(\overline{F})\}, \\ \{K(\overline{F}), K^{*}(\overline{F})\}, & \{K(F), K^{*}(F)\} \end{matrix}\right\} H_4. \qquad \text{(f)}\ C_5 \left\{\begin{matrix} \{K(F), K(\overline{F})\}, & \{K^{*}(F), K^{*}(\overline{F})\}, \\ \{K(F), K(\overline{F})\}, & \{K^{*}(F), K^{*}(\overline{F})\} \end{matrix}\right\} H, H_1.$$

$$\text{(c)}\ C_2 \left\{\begin{matrix} \{K(F), K^{*}(\overline{F})\}, & \{K^{*}(F), K(\overline{F})\}, \\ \{K(\overline{F}), K^{*}(F)\}, & \{K^{*}(\overline{F}), K(F)\} \end{matrix}\right\} H_1, H_4. \qquad \text{(g)}\ C_6 \left\{\begin{matrix} \{K(F), K^{*}(F)\}, & \{K^{*}(F), K(F)\}, \\ \{K(\overline{F}), K^{*}(\overline{F})\}, & \{K^{*}(\overline{F}), K(\overline{F})\} \end{matrix}\right\} H, H_4.$$

$$\text{(d)}\ C_3 \left\{\begin{matrix} \{K(F), K^{*}(\overline{F})\}, & \{K^{*}(F), K(\overline{F})\}, \\ \{K(F), K^{*}(\overline{F})\}, & \{K^{*}(F), K(\overline{F})\} \end{matrix}\right\} H, H_4.$$

В случае $\Gamma = \overline{\Gamma} = \Lambda$ *эти четверки пар классов, кроме* (f), *вырождаются в следующие пары пар классов, причем каждая пара классов любой пары пар инвариантна относительно группы преобразований, указанной слева от этой пары пар; а каждая пара пар классов инвариантна относительно групп преобразований, указанных справа от этой пары пар:*

(h) $C\ \{\,\{K_{+}, K_{-}\},\ \ \{K_{+}^{*}, K_{-}^{*}\}\,\}\ C_1, C_2.$

(j) $C_2\{\,\{K_{+}, K_{-}^{*}\},\ \ \{K_{+}^{*}, K_{-}\}\,\}\ C, C_1.$

(i) $C_1\ \{\,\{K_{+}, K_{+}^{*}\},\ \ \{K_{-}, K_{-}^{*}\}\,\}\ C_2, C.$

Четверка пар классов (f) *вырождается в четверку классов* (8), *инвариантную относительно преобразований из группы* H.

Предложение 3. *Для всякой пары непротиворечивых систем посылок* $\Gamma, \overline{\Gamma}$ *каждая четверка классов любой из приведенных ниже пар четверок классов инвариантна относительно преобразований из группы, указанной слева от этой пары, а каждая пара четверок классов инвариантна относительно групп преобразований, указанных справа от этой пары:*

$$\text{(a)}\ H \left\{\begin{matrix}\{K(F), K^*(F),\ K(\overline{F}), K^*(\overline{F})\},\\ \{K(\overline{F}), K^*(\overline{F}),\ K(F), K^*(F)\}\end{matrix}\right\} \begin{matrix}C_6, C_3,\\ C_4, C_5.\end{matrix} \qquad \text{(e)}\ H_4 \left\{\begin{matrix}\{K(F), K(\overline{F}),\ K(F), K(\overline{F})\},\\ \{K^*(F), K^*(\overline{F}), K^*(F), K^*(\overline{F})\}\end{matrix}\right\} \begin{matrix}C_3, C_6,\\ C_1, C_2.\end{matrix}$$

$$\text{(b)}\ H_1 \left\{\begin{matrix}\{K(F), K^*(F),\ K(F), K^*(F)\},\\ \{K(\overline{F}), K^*(\overline{F}),\ K(\overline{F}), K^*(\overline{F})\}\end{matrix}\right\} \begin{matrix}C, C_2,\\ C_3, C_5.\end{matrix} \qquad \text{(f)}\ H_5 \left\{\begin{matrix}\{K(F), K(\overline{F}),\ K^*(F), K^*(\overline{F})\},\\ \{K^*(F), K^*(\overline{F}), K(F), K(\overline{F})\}\end{matrix}\right\} \begin{matrix}C_4, C,\\ C_1, C_3.\end{matrix}$$

$$\text{(c)}\ H_2 \left\{\begin{matrix}\{K(F), K^*(\overline{F}),\ K(F), K^*(\overline{F})\},\\ \{K^*(F), K(\overline{F}),\ K^*(F), K(\overline{F})\}\end{matrix}\right\} \begin{matrix}C_1, C_5,\\ C_6, C.\end{matrix} \qquad \text{(g)}\ H_6 \left\{\begin{matrix}\{K(F), K^*(\overline{F}),\ K^*(F), K(\overline{F})\},\\ \{K^*(F), K(\overline{F}),\ K(F), K^*(\overline{F})\}\end{matrix}\right\} \begin{matrix}C_5, C_1,\\ C_2, C_4.\end{matrix}$$

$$\text{(d)}\ H_3 \left\{\begin{matrix}\{K(F), K^*(F),\ K(\overline{F}), K^*(\overline{F})\},\\ \{K(\overline{F}), K^*(\overline{F}),\ K(F), K^*(F)\}\end{matrix}\right\} \begin{matrix}C_2, C_4,\\ C_6, C.\end{matrix}$$

В случае $\Gamma = \overline{\Gamma} = \Lambda$ *пары четверок классов* (e), (d), (f) *вырождаются соответственно в пары пар классов* (h), (i), (j) *предложения 2; а пары четверок классов* (a), (b), (c), (g) *вырождаются в четверку классов* (8).

Предложение 4. *Для всякой пары непротиворечивых систем посылок* Γ, $\overline{\Gamma}$ *группа* G *есть группа автоморфизмов восьмерки классов* (7). *В случае* $\Gamma = \overline{\Gamma} = \Lambda$ *группа* H *есть группа автоморфизмов четверки* (8).

Восьмерка классов (7) допускает геометрическую интерпретацию, согласно которой ее классы изображаются вершинами разностороннего прямоугольного параллелепипеда (рис.2). При этом группа преобразований G интерпретируется как группа симметрии этого параллелепипеда, а ее подгруппы интерпретируются как его элементы симметрии. Подгруппы C, C_1, C_2 изображаются осями симметрии параллелепипеда, подгруппы C_3, C_4, C_5 – его плоскостями симметрии, а подгруппа C_6 изображается его центром симметрии. Преобразования отрицания $^{-}$, дополнения *, конверсии $^{-*}$ интерпретируются как повороты параллелепипеда на угол π вокруг осей (поворотных осей 2-го порядка) C, C_1, C_2 соответственно. Преобразования трансмутации $^{-\prime *}$, трансверсии $^{\prime}$, транспозиции $^{-\prime}$ интерпретируются как отражения параллелепипеда в плоскостях C_3, C_4, C_5 соответственно. Преобразование инволюции $^{\prime *}$ интерпретируется как отражение параллелепипеда в точке C_6.

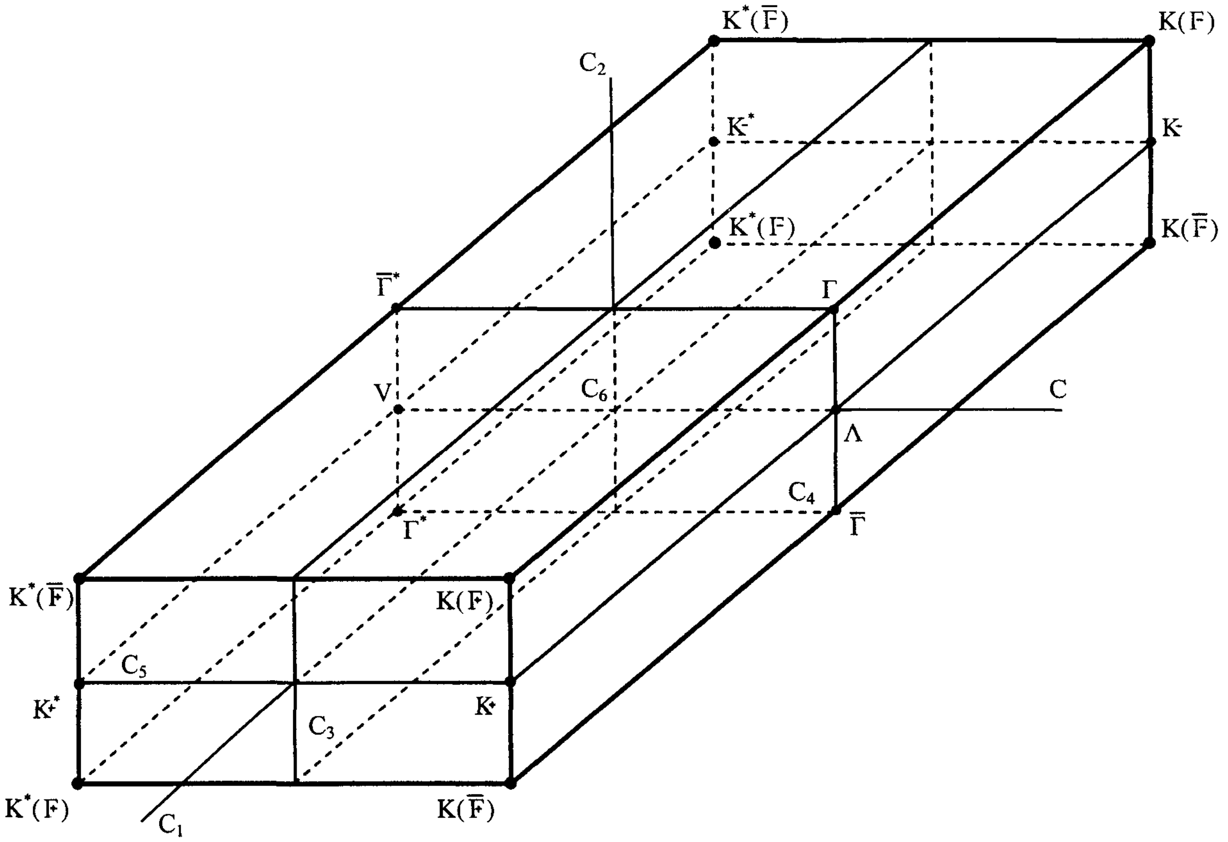


Рис. 2.

В данной геометрической интерпретации (рис. 2) системы посылок Γ, $\overline{\Gamma}$ и их дополнения Γ^*, $\overline{\Gamma}^*$ изображаются вершинами сечения параллелепипеда плоскостью C_4. Предельные классы Λ и V изображаются точками пересечения оси C с ребрами этого сечения.

В случае $\Gamma = \overline{\Gamma} = \Lambda$, $\Gamma^{*} = \overline{\Gamma}^{*} = \mathrm{V}$ четверка $\{\Gamma, \overline{\Gamma}, \Gamma^{*}, \overline{\Gamma}^{*}\}$ вырождается в пару $\{\Lambda, \mathrm{V}\}$. В этом случае параллелепипед, вершины которого изображают классы восьмерки (7), а группа симметрии которого изоморфна группе G, вырождается в его сечение плоскостью C_5, являющееся разносторонним прямоугольником, вершины которого изображают классы четверки (8), а группа симметрии которого изоморфна группе H.

Итак, имеет место

Предложение 5. *Группа* G *изоморфна группе симметрии разностороннего прямоугольного параллелепипеда, а каждая ее подгруппа порядка 4 изоморфна группе симметрии разностороннего прямоугольника.*

Представленная на рис. 2 геометрическая интерпретация восьмерки классов (7) и группы преобразований G, очевидно, является геометрической интерпретацией и предложений 2-4. Так, в предложении 3 (a) первая четверка классов соответствует случаю Г – позитивная система посылок, $\overline{\Gamma}$ – негативная система посылок; а вторая четверка – случаю $\overline{\Gamma}$ – позитивная система посылок, Г – негативная система посылок. Каждая из этих четверок классов изображается четверкой вершин параллелепипеда (рис.2), симметричной относительно поворотных осей 2-го порядка C, C_1, C_2. Пара этих четверок вершин симметрична относительно плоскостей C_3, C_4, C_5 и центра C_6 параллелепипеда. В предложении 3 (d) первая четверка классов имеет позитивную ориентацию (представляет позитивную логику высказываний), а вторая – имеет негативную ориентацию (представляет негативную логику высказываний). Каждая из этих двух четверок классов изображается четверкой вершин одной из двух граней параллелепипеда, перпендикулярных оси C_1. Каждая из этих четверок вершин симметрична относительно оси C_1 и плоскостей C_3, C_5 параллелепипеда. Пара этих четверок вершин симметрична относительно поворотных осей 2-го порядка C, C_2, плоскости C_4 и центра C_6 параллелепипеда. Аналогичным образом геометрически интерпретируются остальные предложения 2-4.

Вследствие изоморфности групп $\mathscr{G}$ и G, а также восьмерки предикатов (7) из [2] и восьмерки классов (7), четверки предикатов (8) из [2] и четверки классов (8) предложения 1-5 и приведенная на рис. 2 геометрическая интерпретация восьмерки классов (7), четверки классов (8) и группы G остаются в силе после замены в них всюду термина «класс» термином «предикат», обозначений классов обозначениями определяющих (по принципу свертывания) эти классы предикатов, а обозначений подгрупп группы G обозначениями определяющих (согласно (3), (4)) эти подгруппы подгрупп группы $\mathscr{G}$ и символа $\subseteq$ в предложении 1 символом $\Rightarrow$.

Введем обозначения классов формул, определяемых по принципу свертывания предикатами восьмерки (16) из [2]:

$$\begin{gathered}\Delta(\mathrm{F}) = \{B \mid \Gamma \mid\!\overset{+}{\nless} B\},\ \Delta^{*}(\mathrm{F}) = \{B \mid \Gamma \overset{+}{\ngtr}\!\mid B\},\ \Delta(\overline{\mathrm{F}}) = \{B \mid \overline{\Gamma} \mid\!\leqslant B\},\ \Delta^{*}(\overline{\mathrm{F}}) = \{B \mid \overline{\Gamma} \geqslant\!\mid B\},\\ \Delta(\overline{\mathrm{F}}) = \{B \mid \overline{\Gamma} \mid\!\overset{+}{\nless} B\},\ \Delta^{*}(\overline{\mathrm{F}}) = \{B \mid \overline{\Gamma} \overset{+}{\ngtr}\!\mid B\},\ \Delta(\mathrm{F}) = \{B \mid \Gamma \mid\!\leqslant B\},\ \Delta^{*}(\mathrm{F}) = \{B \mid \Gamma \geqslant\!\mid B\},\end{gathered} \tag{9}$$

причем $\Delta(\overline{\mathrm{F}}) = \overline{\Delta}(\mathrm{F})$, $\Delta(\mathrm{F}) = \Delta'(\mathrm{F})$.

В предельном случае $\Gamma = \overline{\Gamma} = \Lambda$ эти классы вырождаются в следующие четыре класса, определяемые предикатами четверки (17) из [2]:

$$\Delta^{+} = \{B \mid\ \mid\!\overset{+}{\nless} B\},\quad \Delta^{\overset{*}{+}} = \{B \mid\ \overset{+}{\ngtr}\!\mid B\},\quad \Delta^{-} = \{B \mid\ \mid\!\leqslant B\},\quad \Delta^{\overset{*}{-}} = \{B \mid\ \geqslant\!\mid B\}, \tag{10}$$

причем $\Delta^{-} = \overline{\Delta^{+}}$.

Таким образом, в соответствии с определениями (11), (12) из [2] в случае Г – позитивная система посылок, $\overline{\Gamma}$ – негативная система посылок имеем следующие классы формул логики высказываний:

$\Delta(\mathrm{F})$ – класс всех позитивно Г-совместимых формул, или класс всех формул, не являющихся позитивными Г-противоречиями;

$\Delta^{*}(\mathrm{F})$ – класс всех позитивно Г-несовместимых формул, или класс всех позитивных Г-противоречий;

$\Delta(\overline{\mathrm{F}})$ – класс всех негативно $\overline{\Gamma}$-совместимых формул, или класс всех формул, не являющихся негативными $\overline{\Gamma}$-противоречиями;

$\Delta^{*}(\overline{\mathrm{F}})$ – класс всех негативно $\overline{\Gamma}$-несовместимых формул, или класс всех негативных $\overline{\Gamma}$-противоречий.

Заменив в этом предложении всюду Г на $\overline{\Gamma}$ и обратно, в соответствии с определениями (13), (14) из [2] получим четыре класса формул для случая $\overline{\Gamma}$ – позитивная система посылок, Г – негативная система посылок.

В предельном случае $\Gamma = \overline{\Gamma} = \Lambda$ в соответствии с (9), (10), (15) из [2] имеем следующие четыре класса формул логики высказываний:

Δ^{+} – класс всех позитивно совместимых формул, или класс всех формул, не являющихся (абсолютными) позитивными противоречиями;

$\Delta^{\overset{*}{+}}$ – класс всех (абсолютно) позитивно несовместимых формул, или класс всех (абсолютных) позитивных противоречий;

Δ^{-} – класс всех негативно совместимых формул, или класс всех формул, не являющихся (абсолютными) негативными противоречиями;

$\Delta^{\overset{*}{-}}$ – класс всех (абсолютно) негативно несовместимых формул, или класс всех (абсолютных) негативных противоречий.

Итак, по принципу свертывания восьмерка предикатов (16) из [2] определяет восьмерку классов

$$\{\ \Delta(\mathrm{F}),\ \Delta^{*}(\mathrm{F}),\ \Delta(\overline{\mathrm{F}}),\ \Delta^{*}(\overline{\mathrm{F}}),\ \Delta(\overline{\mathrm{F}}),\ \Delta^{*}(\overline{\mathrm{F}}),\ \Delta(\mathrm{F}),\ \Delta^{*}(\mathrm{F})\ \}, \qquad (11)$$

которая в случае $\Gamma = \overline{\Gamma} = \Lambda$ вырождается в четверку классов, определяемую четверкой предикатов (17) из [2],

$$\{\Delta^{+},\ \Delta^{\overset{*}{+}},\ \Delta^{-},\ \Delta^{\overset{*}{-}}\}. \qquad (12)$$

Из определений классов (5), (6), (9), (10), а также определений (9), (10) и предложения 4 из [2] следует

Предложение 6. *Для всякой пары непротиворечивых систем посылок* Γ, $\overline{\Gamma}$ *выполняются следующие равенства для классов восьмерок* (7), (11):

(a) $\Delta(\mathrm{F}) = \mathrm{K}^{*}(\overline{\mathrm{F}}),\quad \Delta^{*}(\mathrm{F}) = \mathrm{K}(\overline{\mathrm{F}}),\quad \Delta(\overline{\mathrm{F}}) = \mathrm{K}^{*}(\mathrm{F}),\quad \Delta^{*}(\overline{\mathrm{F}}) = \mathrm{K}(\mathrm{F});$

(b) $\Delta(\overline{\mathrm{F}}) = \mathrm{K}^{*}(\mathrm{F}),\quad \Delta^{*}(\overline{\mathrm{F}}) = \mathrm{K}(\mathrm{F}),\quad \Delta(\mathrm{F}) = \mathrm{K}^{*}(\overline{\mathrm{F}}),\quad \Delta^{*}(\mathrm{F}) = \mathrm{K}(\overline{\mathrm{F}});$

которые в случае $\Gamma = \overline{\Gamma} = \Lambda$ *вырождаются в такие равенства для классов четверок* (8), (12):

(c) $\Delta^{+} = \mathrm{K}^{-*},\qquad \Delta^{\overset{*}{+}} = \mathrm{K}^{-},\qquad \Delta^{-} = \mathrm{K}^{+*},\qquad \Delta^{\overset{*}{-}} = \mathrm{K}^{+}.$

Таким образом, восьмерки (7) и (11), а в случае $\Gamma = \overline{\Gamma} = \Lambda$ четверки (8) и (12), состоят из одних и тех же классов формул, но рассматриваются в разных контекстах. Означает это следующее. Позитивно ориентированные предикаты восьмерки (7) из [2], так же как и определяемые ими позитивно ориентированные классы формул восьмерки (7), определены и рассматриваются в контексте позитивной логики высказываний относительно позитивной системы посылок Γ (или $\overline{\Gamma}$). А негативно ориентированные предикаты восьмерки (7) из [2], так же как и определяемые ими негативно ориентированные классы формул восьмерки (7), определены и рассматриваются в контексте негативной логики высказываний относительно негативной системы посылок $\overline{\Gamma}$ (или Γ). При этом позитивно ориентированные предикаты восьмерки (16) из [2], соответственно позитивно ориентированные классы формул восьмерки (11), являются негативно ориентированными предикатами восьмерки (7) из [2], соответственно негативно ориентированными классами формул восьмерки (7), переопределенными и рассматриваемыми в аспекте позитивной логики высказываний. А негативно ориентированные предикаты восьмерки (16) из [2], соответственно негативно ориентированные классы формул восьмерки (11), являются позитивно ориентированными предикатами восьмерки (7) из [2], соответственно позитивно ориентированными классами формул восьмерки (7), переопределенными и рассматриваемыми в аспекте негативной логики высказываний. Аналогичным образом происходит изменение контекстов рассмотрения предикатов четверки (8) из [2] при переходе к предикатам четверки (17) из [2], а также контекстов рассмотрения классов формул четверки (8) при переходе к классам формул четверки (12) в случае $\Gamma = \overline{\Gamma} = \Lambda$.

Короче говоря, переход от предикатов восьмерки (7) и четверки (8) из [2], а также классов восьмерки (7) и четверки (8) соответственно к предикатам восьмерки (16) и четверки (17) из [2], а также классам восьмерки (11) и четверки (12) означает замену контекста каждой из двойственных логик высказываний контекстом другой логики при сохранении исходных объектов рассмотрения.

Отсюда следует, что предложения 1-4 и геометрическая интерпретация восьмерки классов (7), четверки классов (8) и группы преобразований G (рис. 2) остаются в силе после замены в них всюду, согласно предложению 6, обозначений классов восьмерки (7) обозначениями классов восьмерки (11), а обозначений классов четверки (8) обозначениями классов четверки (12). Так, из предложений 1 и 6 получаем

Предложение 7. *Для всякой пары непротиворечивых систем посылок* $\Gamma, \overline{\Gamma}$:

(a) $\Delta(\mathrm{F}) \subseteq \Delta^{+},\quad \Delta^{\overset{*}{+}} \subseteq \Delta^{*}(\mathrm{F}).$ (c) $\Delta(\overline{\mathrm{F}}) \subseteq \Delta^{+},\quad \Delta^{\overset{*}{+}} \subseteq \Delta^{*}(\overline{\mathrm{F}}).$

(b) $\Delta(\overline{\mathrm{F}}) \subseteq \Delta^{-},\quad \Delta^{\overset{*}{-}} \subseteq \Delta^{*}(\overline{\mathrm{F}}).$ (d) $\Delta(\mathrm{F}) \subseteq \Delta^{-},\quad \Delta^{\overset{*}{-}} \subseteq \Delta^{*}(\mathrm{F}).$

Далее, введем обозначения классов формул, определяемых по принципу свертывания предикатами четверки (21) из [2]:

$$\Omega(\Gamma,\overline{\Gamma}) = \{B \mid \tfrac{\Gamma}{\overline{\Gamma}} \models B\},\ \Omega^{*}(\Gamma,\overline{\Gamma}) = \{B \mid \tfrac{\Gamma}{\overline{\Gamma}} \Dashv B\},\ \Omega(\overline{\Gamma},\Gamma) = \{B \mid \tfrac{\overline{\Gamma}}{\Gamma} \models B\},\ \Omega^{*}(\overline{\Gamma},\Gamma) = \{B \mid \tfrac{\overline{\Gamma}}{\Gamma} \Dashv B\}. \qquad (13)$$

В предельном случае $\Gamma = \overline{\Gamma} = \Lambda$ эти классы вырождаются в следующие два класса, определяемые предикатами пары (22) из [2]:

$$\Omega = \{B \mid\ \models B\}, \qquad \Omega^{*} = \{B \mid\ \Dashv B\}. \qquad (14)$$

Итак, в соответствии с определениями (19), (20) из [2] в случае Γ – позитивная система посылок, $\overline{\Gamma}$ – негативная система посылок имеем два класса пропозициональных формул:

$\Omega(\Gamma,\overline{\Gamma})$ – класс всех $\frac{\Gamma}{\overline{\Gamma}}$-зависимых формул;

$\Omega^{*}(\Gamma,\overline{\Gamma})$ – класс всех $\frac{\Gamma}{\overline{\Gamma}}$-независимых формул;

а в случае $\bar{\Gamma}$ – позитивная система посылок, Γ – негативная система посылок имеем два класса:

$\Omega(\bar{\Gamma}, \Gamma)$ – класс всех $\frac{\bar{\Gamma}}{\Gamma}$-зависимых формул;

$\Omega^*(\bar{\Gamma}, \Gamma)$ – класс всех $\frac{\bar{\Gamma}}{\Gamma}$-независимых формул.

В предельном случае $\Gamma = \bar{\Gamma} = \Lambda$ в соответствии с (18) из [2] имеем следующие два класса формул:

Ω – класс всех абсолютно зависимых формул;

Ω^* – класс всех формул, не являющихся абсолютно зависимыми, т.е. относительно независимых.

Тем самым по принципу свертывания четверка предикатов (21) из [2] определяет четверку классов

$$\{\ \Omega(\Gamma, \bar{\Gamma}),\ \Omega^*(\Gamma, \bar{\Gamma}),\ \Omega(\bar{\Gamma}, \Gamma),\ \Omega^*(\bar{\Gamma}, \Gamma)\ \}, \tag{15}$$

которая в случае $\Gamma = \bar{\Gamma} = \Lambda$ вырождается в пару классов, определяемую парой предикатов (22) из [2],

$$\{\ \Omega,\ \ \Omega^*\ \}. \tag{16}$$

В силу определений (18)-(20) из [2] и (1), (2), (5), (6), (13), (14), имеет место

Предложение 8. *Для всякой пары непротиворечивых систем посылок* Γ, $\bar{\Gamma}$ *выполняются следующие соотношения для классов восьмерки* (7) *и четверки* (15):

(a) $\Omega(\Gamma, \bar{\Gamma}) = K(F) \cup K(\bar{F})$, $\quad \Omega^*(\Gamma, \bar{\Gamma}) = K^*(F) \cap K^*(\bar{F})$;

(b) $\Omega(\bar{\Gamma}, \Gamma) = K(\bar{F}) \cup K(F)$, $\quad \Omega^*(\bar{\Gamma}, \Gamma) = K^*(\bar{F}) \cap K^*(F)$;

которые в случае $\Gamma = \bar{\Gamma} = \Lambda$ *вырождаются в такие соотношения для классов четверки* (8) *и пары* (16):

(c) $\Omega = K^+ \cup K^-$, $\quad \Omega^* = K^{+*} \cap K^{-*}$.

Из предложений 6 и 8 получаем

Предложение 9. *Для всякой пары непротиворечивых систем посылок* Γ, $\bar{\Gamma}$ *выполняются следующие соотношения для классов восьмерки* (11) *и четверки* (15):

(a) $\Omega(\Gamma, \bar{\Gamma}) = \Delta^*(F) \cup \Delta^*(\bar{F})$, $\quad \Omega^*(\Gamma, \bar{\Gamma}) = \Delta(F) \cap \Delta(\bar{F})$;

(b) $\Omega(\bar{\Gamma}, \Gamma) = \Delta^*(\bar{F}) \cup \Delta^*(F)$, $\quad \Omega^*(\bar{\Gamma}, \Gamma) = \Delta(\bar{F}) \cap \Delta(F)$;

которые в случае $\Gamma = \bar{\Gamma} = \Lambda$ *вырождаются в такие соотношения для классов четверки* (12) *и пары* (16):

(c) $\Omega = \Delta^{*}_{+} \cup \Delta^{*}_{-}$, $\quad \Omega^* = \Delta^+ \cap \Delta^-$.

Из предложений 1 и 8 с очевидностью следует

Предложение 10. *Для всякой пары непротиворечивых систем посылок* $\Gamma, \bar{\Gamma}$:

(a) $\Omega \subseteq \Omega(\Gamma, \bar{\Gamma})$, $\ \Omega^*(\Gamma, \bar{\Gamma}) \subseteq \Omega^*$. $\qquad$ b) $\Omega \subseteq \Omega(\bar{\Gamma}, \Gamma)$, $\ \Omega^*(\bar{\Gamma}, \Gamma) \subseteq \Omega^*$.

Теперь обратимся к отношениям равносильности и неравносильности в классе V, введенным определениями (23)-(25) из [2]. Обозначим классы, определяемые по принципу свертывания предикатами четверки (26) из [2], таким образом:

$$A_e(\Gamma, \bar{\Gamma}) = \{< A, B > \mid A \overset{\Gamma}{\underset{\bar{\Gamma}}{\equiv}} B\ \}, \qquad A_e^*(\Gamma, \bar{\Gamma}) = \{< A, B > \mid A \overset{\Gamma}{\underset{\bar{\Gamma}}{\not\equiv}} B\ \},$$

$$A_e(\bar{\Gamma}, \Gamma) = \{< A, B > \mid A \overset{\bar{\Gamma}}{\underset{\Gamma}{\equiv}} B\ \}, \qquad A_e^*(\bar{\Gamma}, \Gamma) = \{< A, B > \mid A \overset{\bar{\Gamma}}{\underset{\Gamma}{\not\equiv}} B\ \}, \tag{17}$$

где $< A, B >$ – упорядоченная пара пропозициональных формул A, B.

В предельном случае $\Gamma = \bar{\Gamma} = \Lambda$ эти классы вырождаются в следующие два класса, определяемые предикатами пары (27) из [2]:

$$A_e = \{< A, B > \mid A \equiv B\ \}, \qquad A_e^* = \{< A, B > \mid A \not\equiv B\ \}. \tag{18}$$

Отсюда в соответствии с определениями (24), (25) из [2] в случае Γ – позитивная система посылок, $\bar{\Gamma}$ – негативная система посылок имеем два класса:

$A_e(\Gamma, \bar{\Gamma})$ – класс всех упорядоченных пар $\frac{\Gamma}{\bar{\Gamma}}$-равносильных формул;

$A_e^*(\Gamma, \bar{\Gamma})$ – класс всех упорядоченных пар $\frac{\Gamma}{\bar{\Gamma}}$-неравносильных формул;

а в случае $\bar{\Gamma}$ – позитивная система посылок, Γ – негативная система посылок имеем еще два класса:

$A_e(\bar{\Gamma}, \Gamma)$ – класс всех упорядоченных пар $\frac{\bar{\Gamma}}{\Gamma}$-равносильных формул;

$A_e^*(\bar{\Gamma}, \Gamma)$ – класс всех упорядоченных пар $\frac{\bar{\Gamma}}{\Gamma}$-неравносильных формул.

В случае $\Gamma = \bar{\Gamma} = \Lambda$ в соответствии с определениями (23) из [2] имеем следующие два класса:

A_e – класс всех упорядоченных пар (абсолютно) равносильных формул;

A_e^* – класс всех упорядоченных пар неравносильных формул, или формул, не являющихся (абсолютно) равносильными.

Итак, по принципу свертывания четверка предикатов (26) из [2] определяет четверку классов

$$\{\ \mathrm{A}_e(\Gamma,\overline{\Gamma}),\ \mathrm{A}_e^*(\Gamma,\overline{\Gamma}),\ \mathrm{A}_e(\overline{\Gamma},\Gamma),\ \mathrm{A}_e^*(\overline{\Gamma},\Gamma)\ \}, \tag{19}$$

которая в случае $\Gamma=\overline{\Gamma}=\Lambda$ вырождается в пару классов, определяемую парой предикатов (27) из [2],

$$\{\ \mathrm{A}_e,\ \mathrm{A}_e^*\ \}. \tag{20}$$

Отношение (абсолютной) равносильности и отношение $\overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{\equiv}}$ $\left(\overset{\overline{\Gamma}}{\underset{\Gamma}{\equiv}}\right)$-равносильности являются отношениями эквивалентности в классе V и разбивают этот класс на классы эквивалентности. Класс (относительной) эквивалентности, определяемый отношением $\overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{\equiv}}$ $\left(\overset{\overline{\Gamma}}{\underset{\Gamma}{\equiv}}\right)$-равносильности и произвольно фиксированной формулой A, т.е. класс всех формул, $\overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{\equiv}}$ $\left(\overset{\overline{\Gamma}}{\underset{\Gamma}{\equiv}}\right)$-равносильных формуле A, обозначим через $[A]\,(\Gamma,\overline{\Gamma})$ $([A]\,(\overline{\Gamma},\Gamma))$. В случае $\Gamma=\overline{\Gamma}=\Lambda$ для отношения (абсолютной) равносильности класс (абсолютной) эквивалентности, определяемый формулой A, обозначим, как принято, через $[A]$. Очевидно, $A\in[A]$, $\overline{A}\notin[A]$; $A\in[A]\,(\Gamma,\overline{\Gamma})$, $\overline{A}\notin[A]\,(\Gamma,\overline{\Gamma})$; $A\in[A]\,(\overline{\Gamma},\Gamma)$, $\overline{A}\notin[A]\,(\overline{\Gamma},\Gamma)$.

В дальнейшем ради краткости при рассмотрении классов, отнесенных к системам посылок, приводятся лишь предложения (теоремы) для случая Γ – позитивная система посылок, $\overline{\Gamma}$ – негативная система посылок. Заменив в этих предложениях всюду Γ на $\overline{\Gamma}$ и обратно, легко получить предложения для случая $\overline{\Gamma}$ – позитивная система посылок, Γ – негативная система посылок. При этом доказательства предложений для второго случая аналогичны доказательствам соответствующих предложений для первого случая.

Предложение 11. *Для всякой пары непротиворечивых систем посылок* $\Gamma,\overline{\Gamma}$ *и всякой пары формул* $<A,B>$:

(a) $<A,B>\in\ \mathrm{A}_e(\Gamma,\overline{\Gamma})\Leftrightarrow<\overline{A},\overline{B}>\in\ \mathrm{A}_e(\Gamma,\overline{\Gamma})$, т.е. $\overline{\mathrm{A}_e}(\Gamma,\overline{\Gamma})=\ \mathrm{A}_e(\Gamma,\overline{\Gamma})$.

(b) $<A,B>\in\ \mathrm{A}_e^*(\Gamma,\overline{\Gamma})\Leftrightarrow<\overline{A},\overline{B}>\in\ \mathrm{A}_e^*(\Gamma,\overline{\Gamma})$, т.е. $\overline{\mathrm{A}_e^*}(\Gamma,\overline{\Gamma})=\ \mathrm{A}_e^*(\Gamma,\overline{\Gamma})$.

(c) $<A,B>\in\ \mathrm{A}_e(\Gamma,\overline{\Gamma})\Leftrightarrow[A](\Gamma,\overline{\Gamma})=[B](\Gamma,\overline{\Gamma})$.

(d) $<A,B>\in\ \mathrm{A}_e^*(\Gamma,\overline{\Gamma})\Leftrightarrow[A](\Gamma,\overline{\Gamma})\cap[B](\Gamma,\overline{\Gamma})=\Lambda$.

В случае $\Gamma=\overline{\Gamma}=\Lambda$:

(e) $<A,B>\in\ \mathrm{A}_e\ \Leftrightarrow<\overline{A},\overline{B}>\in\ \mathrm{A}_e$, т.е. $\overline{\mathrm{A}_e}\ =\ \mathrm{A}_e$.

(f) $<A,B>\in\ \mathrm{A}_e^*\ \Leftrightarrow<\overline{A},\overline{B}>\in\ \mathrm{A}_e^*$, т.е. $\overline{\mathrm{A}_e^*}\ =\ \mathrm{A}_e^*$.

(g) $<A,B>\in\ \mathrm{A}_e\ \Leftrightarrow[A]=[B]$.

(h) $<A,B>\in\ \mathrm{A}_e^*\ \Leftrightarrow[A]\cap[B]=\Lambda$.

Доказательство. *Для всякой пары непротиворечивых систем посылок* $\Gamma,\overline{\Gamma}$ *и всякой пары формул* $<A,B>$:

(a) $<A,B>\in\ \mathrm{A}_e(\Gamma,\overline{\Gamma})\Leftrightarrow A\overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{\equiv}}B\Leftrightarrow\overline{A}\overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{\equiv}}\overline{B}\Leftrightarrow<\overline{A},\overline{B}>\in\ \mathrm{A}_e(\Gamma,\overline{\Gamma})\Leftrightarrow<A,B>\in\overline{\mathrm{A}_e}(\Gamma,\overline{\Gamma})$, т.е. $\overline{\mathrm{A}_e}(\Gamma,\overline{\Gamma})=\ \mathrm{A}_e(\Gamma,\overline{\Gamma})$.

(b) $<A,B>\in\ \mathrm{A}_e^*(\Gamma,\overline{\Gamma})\Leftrightarrow A\overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{\not\equiv}}B\Leftrightarrow\overline{A}\overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{\not\equiv}}\overline{B}\Leftrightarrow<\overline{A},\overline{B}>\in\ \mathrm{A}_e^*(\Gamma,\overline{\Gamma})\Leftrightarrow<A,B>\in\overline{\mathrm{A}_e^*}(\Gamma,\overline{\Gamma})$, т.е. $\overline{\mathrm{A}_e^*}(\Gamma,\overline{\Gamma})=\ \mathrm{A}_e^*(\Gamma,\overline{\Gamma})$.

(c) Пусть $<A,B>\in\ \mathrm{A}_e(\Gamma,\overline{\Gamma})$, т.е. $A\overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{\equiv}}B$. Тогда для всякой формулы C: если $C\in\ [A](\Gamma,\overline{\Gamma})$, то $C\overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{\equiv}}A$ и, в силу $A\overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{\equiv}}B$, $C\overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{\equiv}}B$, т.е. $C\in\ [B](\Gamma,\overline{\Gamma})$; если $C\in\ [B](\Gamma,\overline{\Gamma})$, то $C\overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{\equiv}}B$ и, в силу $B\overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{\equiv}}A$, $C\overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{\equiv}}A$, т.е. $C\in\ [A](\Gamma,\overline{\Gamma})$. Следовательно, $[A](\Gamma,\overline{\Gamma})=[B](\Gamma,\overline{\Gamma})$. Обратно, пусть $[A](\Gamma,\overline{\Gamma})=[B](\Gamma,\overline{\Gamma})$. Тогда, поскольку $A\in\ [A](\Gamma,\overline{\Gamma})$, то $A\in\ [B](\Gamma,\overline{\Gamma})$, т.е. $A\overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{\equiv}}B$, или $<A,B>\in\ \mathrm{A}_e(\Gamma,\overline{\Gamma})$.

(d) Пусть $<A,B>\in\ \mathrm{A}_e^*(\Gamma,\overline{\Gamma})$, т.е. $A\overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{\not\equiv}}B$. Тогда для всякой формулы C: если $C\in\ [A](\Gamma,\overline{\Gamma})$, то $C\overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{\equiv}}A$ и, в силу $A\overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{\not\equiv}}B$, $C\overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{\not\equiv}}B$, т.е. $C\notin\ [B](\Gamma,\overline{\Gamma})$. Тем самым $[A](\Gamma,\overline{\Gamma})\cap[B](\Gamma,\overline{\Gamma})=\Lambda$. Обратно, пусть $[A](\Gamma,\overline{\Gamma})\cap[B](\Gamma,\overline{\Gamma})=\Lambda$. Тогда, так как $A\in\ [A](\Gamma,\overline{\Gamma})$, то $A\notin\ [B](\Gamma,\overline{\Gamma})$, т.е. $A\overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{\not\equiv}}B$, или $<A,B>\in\ \mathrm{A}_e^*(\Gamma,\overline{\Gamma})$.

Доказательства (e), (f), (g), (h) получаются соответственно из доказательств (a), (b), (c),(d), если в последних всюду опустить обозначения систем посылок $\Gamma,\overline{\Gamma}$. Предложение доказано.

Далее, обратимся к отношениям альтернативности и неальтернативности в классе V, введенным определениями (28)-(30) из [2]. Обозначим классы, определяемые по принципу свертывания предикатами четверки (31) из [2], таким образом:

$$\mathrm{A}_\iota(\Gamma,\overline{\Gamma})=\{<A,B>\mid\ A\overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{\vert\vert\vert}}B\ \},\qquad \mathrm{A}_\iota^*(\Gamma,\overline{\Gamma})=\{<A,B>\mid\ A\overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{\not{\vert\vert\vert}}}B\ \},$$

$$\mathrm{A}_\iota(\overline{\Gamma},\Gamma)=\{<A,B>\mid\ A\overset{\overline{\Gamma}}{\underset{\Gamma}{\vert\vert\vert}}B\ \},\qquad \mathrm{A}_\iota^*(\overline{\Gamma},\Gamma)=\{<A,B>\mid\ A\overset{\overline{\Gamma}}{\underset{\Gamma}{\not{\vert\vert\vert}}}B\ \}. \tag{21}$$

В предельном случае $\Gamma = \overline{\Gamma} = \Lambda$ эти классы вырождаются в следующие два класса, определяемые предикатами пары (32) из [2]:

$$\mathrm{A}_\iota = \{< A, B > \mid A \mathrel{|||} B \}, \qquad \mathrm{A}_\iota^* = \{< A, B > \mid A \mathrel{\not{|||}} B \}. \tag{22}$$

Отсюда в соответствии с определениями (29), (30) из [2] в случае Γ – позитивная система посылок, $\overline{\Gamma}$ – негативная система посылок имеем два класса:

$\mathrm{A}_\iota(\Gamma, \overline{\Gamma})$ – класс всех упорядоченных пар $\frac{\Gamma}{\overline{\Gamma}}$-альтернативных формул;

$\mathrm{A}_\iota^*(\Gamma, \overline{\Gamma})$ – класс всех упорядоченных пар $\frac{\Gamma}{\overline{\Gamma}}$-неальтернативных формул;

а в случае $\overline{\Gamma}$ – позитивная система посылок, Γ – негативная система посылок имеем еще два класса:

$\mathrm{A}_\iota(\overline{\Gamma}, \Gamma)$ – класс всех упорядоченных пар $\frac{\overline{\Gamma}}{\Gamma}$-альтернативных формул;

$\mathrm{A}_\iota^*(\overline{\Gamma}, \Gamma)$ – класс всех упорядоченных пар $\frac{\overline{\Gamma}}{\Gamma}$-неальтернативных формул.

В предельном случае $\Gamma = \overline{\Gamma} = \Lambda$ в соответствии с определениями (28) из [2] имеем следующие два класса:

A_ι – класс всех упорядоченных пар (абсолютно) альтернативных формул;

A_ι^* – класс всех упорядоченных пар неальтернативных формул, т.е. формул, не являющихся (абсолютно) альтернативными.

Таким образом, по принципу свертывания четверка предикатов (31) из [2] определяет четверку классов

$$\{ \mathrm{A}_\iota(\Gamma, \overline{\Gamma}),\ \mathrm{A}_\iota^*(\Gamma, \overline{\Gamma}),\ \mathrm{A}_\iota(\overline{\Gamma}, \Gamma),\ \mathrm{A}_\iota^*(\overline{\Gamma}, \Gamma) \}, \tag{23}$$

которая в случае $\Gamma = \overline{\Gamma} = \Lambda$ вырождается в пару классов, определяемую парой предикатов (32) из [2],

$$\{ \mathrm{A}_\iota,\ \mathrm{A}_\iota^* \}. \tag{24}$$

Отношение (абсолютной) альтернативности и отношение $\frac{\Gamma}{\overline{\Gamma}} \left(\frac{\overline{\Gamma}}{\Gamma}\right)$-альтернативности иррефлексивны, симметричны и нетранзитивны. Каждое из этих отношений разбивает класс V на классы альтернативности. Класс (относительной) альтернативности, определяемый отношением $\frac{\Gamma}{\overline{\Gamma}} \left(\frac{\overline{\Gamma}}{\Gamma}\right)$-альтернативности и произвольно фиксированной формулой A, т.е. класс всех формул, $\frac{\Gamma}{\overline{\Gamma}} \left(\frac{\overline{\Gamma}}{\Gamma}\right)$-альтернативных формуле A, обозначим через $]A[(\Gamma, \overline{\Gamma})$ ($]A[(\overline{\Gamma}, \Gamma)$). В случае $\Gamma = \overline{\Gamma} = \Lambda$ для отношения (абсолютной) альтернативности класс (абсолютной) альтернативности, определяемый формулой A, обозначим через $]A[$. Очевидно, $A \notin\ ]A[$, $\overline{A} \in\ ]A[$; $A \notin\ ]A[(\Gamma, \overline{\Gamma})$, $\overline{A} \in\ ]A[(\Gamma, \overline{\Gamma})$; $A \notin\ ]A[(\overline{\Gamma}, \Gamma)$, $\overline{A} \in\ ]A[(\overline{\Gamma}, \Gamma)$.

Предложение 12. *Для всякой пары непротиворечивых систем посылок* $\Gamma, \overline{\Gamma}$ *и всякой пары формул* $< A, B >$:

(a) $< A, B > \in \mathrm{A}_\iota(\Gamma, \overline{\Gamma}) \Leftrightarrow < \overline{A}, \overline{B} > \in \mathrm{A}_\iota(\Gamma, \overline{\Gamma})$, т.е. $\overline{\mathrm{A}_\iota}(\Gamma, \overline{\Gamma}) = \mathrm{A}_\iota(\Gamma, \overline{\Gamma})$.

(b) $< A, B > \in \mathrm{A}_\iota^*(\Gamma, \overline{\Gamma}) \Leftrightarrow < \overline{A}, \overline{B} > \in \mathrm{A}_\iota^*(\Gamma, \overline{\Gamma})$, т.е. $\overline{\mathrm{A}_\iota^*}(\Gamma, \overline{\Gamma}) = \mathrm{A}_\iota^*(\Gamma, \overline{\Gamma})$.

(c) $< A, B > \in \mathrm{A}_\iota(\Gamma, \overline{\Gamma}) \Rightarrow\ ]A[(\Gamma, \overline{\Gamma}) \cap\ ]B[(\Gamma, \overline{\Gamma}) = \Lambda$.

В случае $\Gamma = \overline{\Gamma} = \Lambda$:

(d) $< A, B > \in \mathrm{A}_\iota \Leftrightarrow < \overline{A}, \overline{B} > \in \mathrm{A}_\iota$, т.е. $\overline{\mathrm{A}_\iota} = \mathrm{A}_\iota$.

(e) $< A, B > \in \mathrm{A}_\iota^* \Leftrightarrow < \overline{A}, \overline{B} > \in \mathrm{A}_\iota^*$, т.е. $\overline{\mathrm{A}_\iota^*} = \mathrm{A}_\iota^*$.

(f) $< A, B > \in \mathrm{A}_\iota \Rightarrow\ ]A[\cap\ ]B[= \Lambda$.

Доказательство. *Для всякой пары непротиворечивых систем посылок* $\Gamma, \overline{\Gamma}$ *и всякой пары формул* $< A, B >$:

(a) $< A, B > \in \mathrm{A}_\iota(\Gamma, \overline{\Gamma}) \Leftrightarrow A \underset{\overline{\Gamma}}{\overset{\Gamma}{|||}} B \Leftrightarrow \overline{A} \underset{\overline{\Gamma}}{\overset{\Gamma}{|||}} \overline{B} \Leftrightarrow < \overline{A}, \overline{B} > \in \mathrm{A}_\iota(\Gamma, \overline{\Gamma}) \Leftrightarrow < A, B > \in \overline{\mathrm{A}_e}(\Gamma, \overline{\Gamma})$, т.е.

$\overline{\mathrm{A}_\iota}(\Gamma, \overline{\Gamma}) = \mathrm{A}_\iota(\Gamma, \overline{\Gamma})$.

(b) $< A, B > \in \mathrm{A}_\iota^*(\Gamma, \overline{\Gamma}) \Leftrightarrow A \underset{\overline{\Gamma}}{\overset{\Gamma}{\not{|||}}} B \Leftrightarrow \overline{A} \underset{\overline{\Gamma}}{\overset{\Gamma}{\not{|||}}} \overline{B} \Leftrightarrow < \overline{A}, \overline{B} > \in \mathrm{A}_\iota^*(\Gamma, \overline{\Gamma}) \Leftrightarrow < A, B > \in \overline{\mathrm{A}_\iota^*}(\Gamma, \overline{\Gamma})$, т.е.

$\overline{\mathrm{A}_\iota^*}(\Gamma, \overline{\Gamma}) = \mathrm{A}_\iota^*(\Gamma, \overline{\Gamma})$.

(c) Пусть $< A, B > \in \mathrm{A}_\iota(\Gamma, \overline{\Gamma})$, т.е. $A \underset{\overline{\Gamma}}{\overset{\Gamma}{|||}} B$. Тогда для всякой формулы C: если $C \in\ ]A[(\Gamma, \overline{\Gamma})$, то $C \underset{\overline{\Gamma}}{\overset{\Gamma}{|||}} A$ и, в силу $A \underset{\overline{\Gamma}}{\overset{\Gamma}{|||}} B$, $C \underset{\overline{\Gamma}}{\overset{\Gamma}{\not{|||}}} B$, т.е. $C \notin\ ]B[(\Gamma, \overline{\Gamma})$. Следовательно, $]A[(\Gamma, \overline{\Gamma}) \cap\ ]B[(\Gamma, \overline{\Gamma}) = \Lambda$.

Доказательства (d), (e), (f) получаются соответственно из доказательств (a), (b), (c), если в последних всюду опустить обозначения систем посылок $\Gamma, \overline{\Gamma}$. Предложение доказано.

Из определений отношений равносильности и альтернативности [2] очевидно следует

Предложение 13. *Для всякой пары непротиворечивых систем посылок* $\Gamma, \overline{\Gamma}$ *и всякой формулы* A:

(a) $[A] \subseteq [A](\Gamma,\overline{\Gamma})$, $[A]^*(\Gamma,\overline{\Gamma}) \subseteq [A]^*$. (b) $]A[\ \subseteq\ ]A[(\Gamma,\overline{\Gamma})$, $]A[^*(\Gamma,\overline{\Gamma}) \subseteq\ ]A[^*$.

Предложение 14. *Для всякой пары непротиворечивых систем посылок* $\Gamma, \overline{\Gamma}$ *и всякой пары формул* $< A, B >$:

(a) $< A, B > \in \mathrm{A}_e(\Gamma,\overline{\Gamma}) \Leftrightarrow\ ]A[(\Gamma,\overline{\Gamma}) =\ ]B[(\Gamma,\overline{\Gamma}) \Leftrightarrow \overline{]A[}(\Gamma,\overline{\Gamma}) = [B](\Gamma,\overline{\Gamma}) \Leftrightarrow \overline{[A]}(\Gamma,\overline{\Gamma}) =\ ]B[(\Gamma,\overline{\Gamma})$.

(b) $< A, B > \in \mathrm{A}_e^*(\Gamma,\overline{\Gamma}) \Leftrightarrow\ ]A[(\Gamma,\overline{\Gamma}) \cap\ ]B[(\Gamma,\overline{\Gamma}) = \Lambda$.

(c) $< A, B > \in \mathrm{A}_\iota(\Gamma,\overline{\Gamma}) \Leftrightarrow [A](\Gamma,\overline{\Gamma}) =\ ]B[(\Gamma,\overline{\Gamma}) \Leftrightarrow \overline{[A]}(\Gamma,\overline{\Gamma}) = [B](\Gamma,\overline{\Gamma}) \Leftrightarrow \overline{]A[}(\Gamma,\overline{\Gamma}) =\ ]B[(\Gamma,\overline{\Gamma})$.

(d) $< A, B > \in \mathrm{A}_\iota^*(\Gamma,\overline{\Gamma}) \Leftrightarrow [A](\Gamma,\overline{\Gamma}) \cap\ ]B[(\Gamma,\overline{\Gamma}) = \Lambda \Leftrightarrow\ ]A[(\Gamma,\overline{\Gamma}) \cap [B](\Gamma,\overline{\Gamma}) = \Lambda$.

В случае $\Gamma = \overline{\Gamma} = \Lambda$:

(e) $< A, B > \in \mathrm{A}_e \Leftrightarrow\ ]A[\ =\ ]B[\ \Leftrightarrow \overline{]A[} = [B] \Leftrightarrow \overline{[A]} =\ ]B[$.

(f) $< A, B > \in \mathrm{A}_e^* \Leftrightarrow\ ]A[\ \cap\ ]B[\ = \Lambda$.

(g) $< A, B > \in \mathrm{A}_\iota \Leftrightarrow [A] =\ ]B[\ \Leftrightarrow \overline{[A]} = [B] \Leftrightarrow \overline{]A[} =\ ]B[$.

(h) $< A, B > \in \mathrm{A}_\iota^* \Leftrightarrow [A] \cap\ ]B[\ = \Lambda \Leftrightarrow\ ]A[\ \cap [B] = \Lambda$.

Доказательство. *Для всякой пары непротиворечивых систем посылок* $\Gamma, \overline{\Gamma}$ *и всякой пары формул* $< A, B >$:

(a) Пусть $< A, B > \in \mathrm{A}_e(\Gamma,\overline{\Gamma})$, т.е. $A \overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{\equiv}} B$. Тогда для всякой формулы C: если $C \in\ ]A[(\Gamma,\overline{\Gamma})$, то $C \overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{|||}} A$ и, в силу $A \overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{\equiv}} B$, $C \overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{|||}} B$, т.е. $C \in\ ]B[(\Gamma,\overline{\Gamma})$; если $C \in\ ]B[(\Gamma,\overline{\Gamma})$, то $C \overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{|||}} B$ и, в силу $B \overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{\equiv}} A$, $C \overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{|||}} A$, т.е. $C \in\ ]A[(\Gamma,\overline{\Gamma})$. Следовательно, $]A[(\Gamma,\overline{\Gamma}) =\ ]B[(\Gamma,\overline{\Gamma})$. Обратно, пусть $]A[(\Gamma,\overline{\Gamma}) =\ ]B[(\Gamma,\overline{\Gamma})$. Тогда, так как $\overline{A} \in\ ]A[(\Gamma,\overline{\Gamma})$, то $\overline{A} \in\ ]B[(\Gamma,\overline{\Gamma})$, т.е. $\overline{A} \overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{|||}} B$ и, в силу $\overline{A} \overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{|||}} A$, $A \overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{\equiv}} B$, или $< A, B > \in \mathrm{A}_e(\Gamma,\overline{\Gamma})$. Аналогично доказывается остальная часть предложения (a).

(b) Пусть $< A, B > \in \mathrm{A}_e^*(\Gamma,\overline{\Gamma})$, т.е. $A \overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{\not\equiv}} B$. Тогда для всякой формулы C: если $C \in\ ]A[(\Gamma,\overline{\Gamma})$, то $C \overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{|||}} A$ и, в силу $A \overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{\not\equiv}} B$, $C \overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{\not{|||}}} B$, т.е. $C \notin\ ]B[(\Gamma,\overline{\Gamma})$. Следовательно, $]A[(\Gamma,\overline{\Gamma}) \cap\ ]B[(\Gamma,\overline{\Gamma}) = \Lambda$. Обратно, пусть $]A[(\Gamma,\overline{\Gamma}) \cap\ ]B[(\Gamma,\overline{\Gamma}) = \Lambda$. Тогда, так как $\overline{A} \in\ ]A[(\Gamma,\overline{\Gamma})$, то $\overline{A} \notin\ ]B[(\Gamma,\overline{\Gamma})$, т.е. $\overline{A} \overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{\not{|||}}} B$ и, в силу $\overline{A} \overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{|||}} A$, $A \overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{\not\equiv}} B$, или $< A, B > \in \mathrm{A}_e^*(\Gamma,\overline{\Gamma})$.

(c) Пусть $< A, B > \in \mathrm{A}_\iota(\Gamma,\overline{\Gamma})$, т.е. $A \overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{|||}} B$. Тогда для всякой формулы C: если $C \in [A](\Gamma,\overline{\Gamma})$, то $C \overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{\equiv}} A$ и, в силу $A \overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{|||}} B$, $C \overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{|||}} B$, т.е. $C \in\ ]B[(\Gamma,\overline{\Gamma})$; если $C \in\ ]B[(\Gamma,\overline{\Gamma})$, то $C \overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{|||}} B$ и, в силу $B \overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{|||}} A$, $C \overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{\equiv}} A$, т.е. $C \in [A](\Gamma,\overline{\Gamma})$. Следовательно, $[A](\Gamma,\overline{\Gamma}) =\ ]B[(\Gamma,\overline{\Gamma})$. Обратно, пусть $[A](\Gamma,\overline{\Gamma}) =\ ]B[(\Gamma,\overline{\Gamma})$. Тогда, так как $A \in [A](\Gamma,\overline{\Gamma})$, то $A \in\ ]B[(\Gamma,\overline{\Gamma})$, т.е. $A \overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{|||}} B$, или $< A, B > \in \mathrm{A}_\iota(\Gamma,\overline{\Gamma})$. Аналогично доказывается остальная часть предложения (c).

(d) Пусть $< A, B > \in \mathrm{A}_\iota^*(\Gamma,\overline{\Gamma})$, т.е. $A \overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{\not{|||}}} B$. Тогда для всякой формулы C: если $C \in [A](\Gamma,\overline{\Gamma})$, то $C \overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{\equiv}} A$ и, в силу $A \overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{\not{|||}}} B$, $C \overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{\not{|||}}} B$, т.е. $C \notin\ ]B[(\Gamma,\overline{\Gamma})$. Следовательно, $[A](\Gamma,\overline{\Gamma}) \cap\ ]B[(\Gamma,\overline{\Gamma}) = \Lambda$. Обратно, пусть $[A](\Gamma,\overline{\Gamma}) \cap\ ]B[(\Gamma,\overline{\Gamma}) = \Lambda$. Тогда, так как $A \in [A](\Gamma,\overline{\Gamma})$, то $A \notin\ ]B[(\Gamma,\overline{\Gamma})$, т.е. $A \overset{\Gamma}{\underset{\overline{\Gamma}}{\not{|||}}} B$, или $< A, B > \in \mathrm{A}_\iota^*(\Gamma,\overline{\Gamma})$. Остальная часть предложения (d) очевидна, в силу $< A, B > \in \mathrm{A}_\iota^*(\Gamma,\overline{\Gamma}) \Leftrightarrow < B, A > \in \mathrm{A}_\iota^*(\Gamma,\overline{\Gamma})$.

Доказательства (e), (f), (g), (h) получаются соответственно из доказательств (a), (b), (c), (d), если в последних всюду исключить обозначения систем посылок $\Gamma, \overline{\Gamma}$. Предложение доказано.

В силу $A \equiv A$, $A\ |||\ \overline{A}$ и предложений 14 (a), (c), (e), (g), очевидно

Предложение 15. *Для всякой пары непротиворечивых систем посылок* $\Gamma, \overline{\Gamma}$ *и всякой пары формул* $A, \overline{A}$:

(a) $\overline{[A]}(\Gamma,\overline{\Gamma}) =\ ]A[(\Gamma,\overline{\Gamma})$, $\overline{]A[}(\Gamma,\overline{\Gamma}) = [A](\Gamma,\overline{\Gamma})$.

(b) $\overline{[A]}(\Gamma,\overline{\Gamma}) = [\overline{A}](\Gamma,\overline{\Gamma})$, $\overline{]A[}(\Gamma,\overline{\Gamma}) =\ ]\overline{A}[(\Gamma,\overline{\Gamma})$.

(c) $[A](\Gamma,\overline{\Gamma}) =\ ]\overline{A}[(\Gamma,\overline{\Gamma})$, $]A[(\Gamma,\overline{\Gamma}) = [\overline{A}](\Gamma,\overline{\Gamma})$.

В случае $\Gamma = \overline{\Gamma} = \Lambda$:

(d) $\overline{[A]} =\ ]A[$, $\overline{]A[} = [A]$. (e) $\overline{[A]} = [\overline{A}]$, $\overline{]A[} =\ ]\overline{A}[$. (f) $[A] =\ ]\overline{A}[$, $]A[\ = [\overline{A}]$.

Согласно (13), (14), (17), (18), (21), (22) и определению преобразований из группы G, имеем

Предложение 16. *Группа* H_3 *есть группа автоморфизмов четверок классов* (15), (19), (23); *а ее подгруппа* C_1 *– группа автоморфизмов пар классов* (16), (20), (24).

Систему введенных в данной работе классов, которые определены по принципу свертывания предикатами системы S, введенной в работе [2], обозначим печатной латинской буквой S. В силу (1)-(4), системы S и S изоморфны. Поэтому система S распадается на подсистемы, изоморфные соответствующим подсистемам системы S. Прежде всего система классов S распадается на две подсистемы S_1 и S_2, где S_1 – подсистема классов формул, а S_2 – подсистема классов упорядоченных пар формул. Подсистема S_1 состоит из классов восьмерок (7), (11), четверок (8), (12), (15) и пары (16); а подсистема S_2 – из классов четверок (19), (23) и пар (20), (24). Затем система классов S распадается на две подсистемы S_a и S_r. Подсистема S_a состоит из классов четверок (8), (12) и пар (16), (20), (24), не зависящих от систем посылок Γ, $\overline{\Gamma}$ (соответствующих предельному случаю $\Gamma = \overline{\Gamma} = \Lambda$) и тем самым абсолютных. Подсистема S_r состоит из классов восьмерок (7), (11) и четверок (15), (19), (23), зависящих от систем (или отнесенных к системам) посылок Γ, $\overline{\Gamma}$ и тем самым относительных. Далее, система классов S распадается на две подсистемы S_o и S_n. Подсистема S_o состоит из классов восьмерок (7), (11) и четверок (8), (20), имеющих логическую ориентацию. Подсистема S_n состоит из классов четверок (15), (19), (23) и пар (16), (20), (24), не имеющих логической ориентации и тем самым нейтральных. Кроме того, подсистема классов формул S_o распадается на две двойственные подсистемы S_o^+ и S_o^-. Подсистема S_o^+ состоит из тех классов восьмерок (7), (11) и четверок (8), (12), которые имеют позитивную логическую ориентацию. Следовательно, эта подсистема в целом ориентирована позитивно и представляет позитивную логику высказываний. Подсистема S_o^- состоит из тех классов восьмерок (7), (11) и четверок (8), (12), которые имеют негативную логическую ориентацию. Следовательно, эта подсистема в целом ориентирована негативно и представляет негативную логику высказываний. Классы подсистемы S_n и сама эта подсистема, не имея логической ориентации, принадлежат логике высказываний в целом.

Пересечения и объединения указанных систем классов также являются системами классов, представляющими интерес с той или иной точки зрения. Отметим лишь пересечения $\mathrm{S}_{ao} = \mathrm{S}_a \cap \mathrm{S}_o$, $\mathrm{S}_{ro} = \mathrm{S}_r \cap \mathrm{S}_o$, $\mathrm{S}_{an} = \mathrm{S}_a \cap \mathrm{S}_n$, $\mathrm{S}_{rn} = \mathrm{S}_r \cap \mathrm{S}_n$. Система S_{ao} состоит из классов формул четверок (8), (12); а система S_{ro} – из классов формул восьмерок (7), (11). В системе S_{ao} позитивные значения формул, образующих классы, соотнесены с логическим абсолютом «позитив»; а негативные значения – с логическим абсолютом «негатив». В системе S_{ro} позитивные значения формул, образующих классы, соотнесены с позитивными значениями конъюнкции $\wedge\Gamma$ (или $\wedge\overline{\Gamma}$), т.е. соотнесены с позитивной системой посылок Γ (или $\overline{\Gamma}$); а негативные значения – с негативными значениями дизъюнкции $\vee\overline{\Gamma}$ (или $\vee\Gamma$), т.е. – с негативной системой посылок $\overline{\Gamma}$ (или Γ). Таким образом, в этой системе классов формул позитивная система посылок служит мерой для оценки позитивности формул, а негативная система посылок служит мерой для оценки негативности формул. Случаю $\Gamma = \overline{\Gamma} = \Lambda$ соответствует система классов формул S_{ao}, в которой мерой для оценки позитивности формул служит логический абсолют «позитив», а мерой для оценки негативности формул служит логический абсолют «негатив».

Все преобразования из группы G являются преобразованиями систем классов S, S_r, S_o, S_{ro}. Для систем классов S_a, S_{ao} преобразование транспозиции $\overline{}'$ является тождественным преобразованием, и группа G вырождается в подгруппу H_1. Для систем классов S_n, S_{rn}, S_o^-, S_o^+ преобразование трансверсии $'$ является тождественным преобразованием, и группа G вырождается в подгруппу H_3. Для системы S_{an} преобразования трансверсии $'$ и транспозиции $\overline{}'$ вырождаются в тождественное преобразование, а группа G вырождается в подгруппу C_1. При этом, в силу изоморфности систем S и S, а также групп $\mathcal{G}$ и G, из предложения 6 работы [2] следует

Предложение 17. (a) *Группа* G *есть группа автоморфизмов каждой из систем классов* S, S_r, S_o, S_{ro}. (b) *Группа* H_1 *– группа автоморфизмов каждой из систем классов* S_a, S_{ao}. (c) *Группа* H_3 *– группа автоморфизмов каждой из систем классов* S_n, S_{rn}, S_o^-, S_o^+. (d) *Группа* C_1 *– группа автоморфизмов системы классов* S_{an}.

РЕЗЮМЕ

Введена система класів пропозиційних формул і класів упорядкованих пар таких формул. Введені перетворення цих класів, котрі утворюють нециклічну абельову групу восьмого порядку. Розглянуті різні підсистеми введеної системи класів, які інваріантні відносно підгруп групи перетворень класів. Здобута геометрична інтерпретація цієї групи перетворень та інваріантності підсистем класів відносно її підгруп.

SUMMARY

The system of classes of propositional formula and classes of ordered couples of such formula is introduced. The transformations of these classes forming noncircular Abelian group of the eighth order are introduced. Different subsystems of introduced system of classes which are invariant in regard to subgroups of group of transformations of classes are considered. Geometrical interpretation of this group of transformations and that of invariance of subsystems of classes in regard to its subgroups is obtained.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лавренко Н.И. Групповая инвариантность двузначной логики. I // Вісник Донецького університету, Сер. А: Природничі науки, 2003, вип.1. – С.22-30.
2. Лавренко Н.И. Групповая инвариантность двузначной логики. II // Вісник Донецького університету, Сер. А: Природничі науки, 2004, вип.1. – С.7-17.
3. Курош А.Г. Теория групп. – М.: Наука, 1967. – 648 с.

Надійшла до редакції 10.03.2004 р.

УДК 517:519

НОВІ КЛАСИ МАСШТАБНО-ІНВАРІАНТНИХ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

П.В.Марко
інститут регіонального управління і економіки, Кіровоград Киевский государственный университет

Вступ

Цілий ряд фундаментальних фізичних процесів має суттєво нелінійний характер [1]. Як наслідок цього, математичні моделі, які описують фізичні процеси, теж є нелінійними, тобто з'являється необхідність вивчення нелінійних диференціальних рівнянь (ДР). Виникаючі при цьому значні ускладнення пов'язані з тим, що до нелінійних ДР, як правило, незастосовні методи класичної математичної фізики (метод розділення змінних, метод перетворень Фур'є і т. д.). Велика ефективність цих методів забезпечена, в основному, лінійністю рівнянь математичної фізики.

Те спільне, що властиве лінійним і нелінійним ДР у частинних похідних (ДРЧП) і звичайним ДР (ЗДР) сучасної теоретичної і математичної фізики, - це широка симетрія.

Симетрійний підхід і пов'язана з ним процедура редукції дозволяють будувати інваріантні розв'язки широких класів нелінійних рівнянь у частинних похідних.

Параболічні системи описують важливі еволюційні, теплові, хімічні, дифузійні процеси. Ці рівняння широко досліджуються [2], [3], проте їхнє вивчення все ще далеке від завершення.

Добре відомо [4], що максимальною групою симетрії, яку допускає нелінійне рівняння реакції-дифузії

$$u_{x_0} + \lambda\Delta_3 u = F(u),\quad u_0 \equiv u_{x_0} \equiv \frac{\partial u}{\partial x_0},\quad x_0 \equiv t \tag{0.1}$$

з довільною гладкою функцією $F(u)$, є 7-параметрична група Евкліда $E(1,3)$, задана наступними генераторами:

$$P_0 = \partial_0,\quad P_a = \partial_a,\quad I_{ab} = x_a P_b - x_b P_a, \tag{0.2}$$

$$\text{де}\quad \partial_0 \equiv \frac{\partial}{\partial x_0},\quad \partial_a \equiv \frac{\partial}{\partial x_a},\quad x_0 \equiv t,\quad a,\quad b = 1,\ 2,\ 3,$$

Розширення симетрії рівняння (0.1) були досліджені для дійсного простору у роботі [5], для комплексного – у роботі [6]. Як показано у роботі [5], усі системи рівнянь дифузії (нагрівання) у формі

$$u^1_{x_0} + \lambda\Delta_3 u^1 = u^1 F_1\left(\frac{u^1}{u^2}\right),\quad u^2_{x_0} + \lambda\Delta_3 u^2 = u^2 F_2\left(\frac{u^1}{u^2}\right) \tag{0.3}$$

інваріантні щодо алгебри Галілея $AG(1,3)$, заданої генераторами (0.2) та

$$G_a = 2tP_a + \frac{1}{\lambda} x_a M,\quad M = u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}. \tag{0.4}$$

Як виявлено в [5], рівняння (0.3) з нелінійністю

$$F_1 = C_1 u_1 \left(\frac{u^1}{u^2}\right)^{\frac{2}{a_2 - a_1}};\quad F_2 = C_2 u_2 \left(\frac{u^1}{u^2}\right)^{\frac{2}{a_2 - a_1}} \tag{0.5}$$

допускає однопараметричну групу масштабних перетворень $D(1)$, задану наступним генератором:

$$D = 2t\partial_0 + x_a\partial_a + a_1 u^1 \partial_{u^1} + a_2 u^2 \partial_{u^2}. \tag{0.6}$$

Група з генераторами (0.2), (0.4) та (0.6) називається розширеною групою Галілея $G_1(1,3)$.

У роботі [7] запропоновано повне розв'язання симетрійної класифікації системи двох дійсних рівнянь

$$u_0^j + \lambda\Delta u^j = F_j\left(u^1, u^2\right),\ j = 1{,}2,\ \text{де}\ u_0 = \frac{\partial u}{\partial x_0};\ x_0 \equiv t;\ u = u(x_0, x_1, x_2, x_3); \tag{0.7}$$

$$\Delta u = u_{11} + u_{22} + u_{33};\ u_{kk} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2};\ F_1, F_2 \text{ – деякі гладкі функції,}$$

що допускає розширені групи Евкліда і Галілея, з точністю до перетворень еквівалентності

$$u^j \to \tilde{u}^j = \sum_{k=1}^{2} \alpha_{jk} u^k + \beta^j,\ j = 1{,}2,\ \text{де } \alpha_{jk}, \beta^j \text{ - довільні константи і } \det\left\|\alpha_{jk}\right\| \neq 0. \qquad (0.8)$$

Симетрія системи $u_0^j + \lambda\Delta u^j = F_j\left(u^1,\ u^2,\ u^3,\ u^4\right),\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$

Тут ми пропонуємо повне розв'язання симетрійної класифікації системи чотирьох дійсних рівнянь

$$u_0^j + \lambda\Delta u^j = F_j(u^1,\ u^2,\ u^3,\ u^4), \qquad (1)$$

де $u_0 \equiv \dfrac{\partial u}{\partial x_0}$, $x_0 \equiv t$, $u = u\left(x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3\right)$, $\Delta u \equiv u_{11} + u_{22} + u_{33}$, $u_{kk} \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$,

F_j – деякі гладкі функції, $j = \overline{1,\ 4}$,

що допускає розширені групи Евкліда і Галілея, з точністю до перетворень еквівалентності

$$u^j \to \tilde{u}^j = \sum_{k=1}^{4} \alpha_{jk} u^k + \beta^j,\ j = \overline{1,\ 4}, \qquad (2)$$

де α_{jk}, β^j – довільні константи, $\det\left\|\alpha_{jk}\right\| \neq 0$.

Теорема 1. Система РЧП (1) інваріантна щодо розширеної групи Евкліда $\tilde{E}$ *(1, 3) = <E(1, 3), D>*, коли і лише коли еквівалентна одній із наступних систем (для всіх випадків $F_j = F_j(\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3)$; $j = \overline{1,\ 4}$):

1. $u_0^1 + \lambda\Delta u^1 = F_1 u_1^{\frac{\lambda_1 - 2}{\lambda_1}}$, $u_0^2 + \lambda\Delta u^2 = F_2 u_2^{\frac{\lambda_2 - 2}{\lambda_2}}$, $u_0^3 + \lambda\Delta u^3 = F_3 u_3^{\frac{\lambda_3 - 2}{\lambda_3}}$, $u_0^4 + \lambda\Delta u^4 = F_4 u_4^{\frac{\lambda_4 - 2}{\lambda_4}}$,

$$\omega_1 = \frac{u_1^{\lambda_2}}{u_2^{\lambda_1}},\quad \omega_2 = \frac{u_1^{\lambda_3}}{u_3^{\lambda_1}},\quad \omega_3 = \frac{u_1^{\lambda_4}}{u_4^{\lambda_1}},\quad \lambda_1 \neq 0;$$

2\.

$$u_0^1 + \lambda\Delta u^1 = F_1 \exp\left(-\frac{2}{b}u_1\right), u_0^2 + \lambda\Delta u^2 = F_2 \exp\left\{(\lambda_2 - 2)\frac{u_1}{b}\right\}, u_0^3 + \lambda\Delta u^3 = F_3 \exp\left\{(\lambda_3 - 2)\frac{u_1}{b}\right\},$$

$$u_0^4 + \lambda\Delta u^4 = F_4 \exp\left\{(\lambda_4 - 2)\frac{u_1}{b}\right\},\ \omega_1 = \lambda_2 u_1 - b\ln u_2,\ \omega_2 = \lambda_3 u_1 - b\ln u_3,\ \omega_3 = \lambda_4 u_1 - b\ln u_4;$$

3. $u_0^1 + \lambda\Delta u^1 = \left(F_1 u_2 + F_2 u_1\right)\exp\left(-2\dfrac{u_1}{u_2}\right)$, $u_0^2 + \lambda\Delta u^2 = F_2 u_2 \exp\left(-2\dfrac{u_1}{u_2}\right)$,

$$u_0^3 + \lambda\Delta u^3 = F_3 u_3 \exp\left(-2\frac{u_1}{u_2}\right), \qquad u_0^4 + \lambda\Delta u^4 = F_4 u_4 \exp\left(-2\frac{u_1}{u_2}\right),$$

$$\omega_1 = \frac{\exp\left(\lambda_1 \frac{u_1}{u_2}\right)}{u_2},\ \omega_2 = \frac{\exp\left(\lambda_2 \frac{u_1}{u_2}\right)}{u_3},\ \omega_3 = \frac{\exp\left(\lambda_3 \frac{u_1}{u_2}\right)}{u_4};$$

4. $u_0^1 + \lambda\Delta u^1 = \left(F_1 + F_2 u_2\right)\exp\left(-\dfrac{2}{b}u_2\right)$, $u_0^2 + \lambda\Delta u^2 = bF_2 \exp\left(-\dfrac{2}{b}u_2\right)$,

$$u_0^3 + \lambda\Delta u^3 = F_3 \exp\left\{(\lambda_1 - 2)\frac{u_2}{b}\right\}, \qquad u_0^4 + \lambda\Delta u^4 = F_4 \exp\left\{(\lambda_2 - 2)\frac{u_2}{b}\right\},$$

$$\omega_1 = 2bu_1 - u_2^2,\quad \omega_2 = \lambda_1 u_2 - b\ln u_3,\quad \omega_3 = \lambda_2 u_2 - b\ln u_4,$$

$$5.\ \ u_0^1+\lambda\Delta u^1=(F_1+F_2u_3)\exp\left\{(\lambda_1-2)\frac{u_3}{b}\right\},\ \ u_0^2+\lambda\Delta u^2=bF_2\exp\left\{(\lambda_1-2)\frac{u_3}{b}\right\},$$

$$u_0^3+\lambda\Delta u^3=F_3\exp\left(-\frac{2}{b}u_3\right),\qquad u_0^4+\lambda\Delta u^4=F_4\exp\left\{(\lambda_2-2)\frac{u_3}{b}\right\},$$

$$\omega_1=b\ln u_2-\lambda_1u_3,\omega_2=b\frac{u_1}{u_2}-u_3,\omega_3=b\ln u_4-\lambda_2u_3;$$

$$6.\ \ u_0^1+\lambda\Delta u^1=(u_3F_1+u_2F_2+u_1F_3)\exp\left(-2\frac{u_2}{u_3}\right),\quad u_0^3+\lambda\Delta u^3=u_3F_3\exp\left(-2\frac{u_2}{u_3}\right),$$

$$u_0^2+\lambda\Delta u^2=(u_3F_2+u_2F_3)\exp\left(-2\frac{u_2}{u_3}\right),\qquad u_0^4+\lambda\Delta u^4=u_4F_4\exp\left(-2\frac{u_2}{u_3}\right),$$

$$\omega_1=\frac{\exp\left(\lambda_1\frac{u_2}{u_3}\right)}{u_3},\ \omega_2=\frac{\exp\left(\lambda_2\frac{u_2}{u_3}\right)}{u_4},\ \omega_3=2\frac{u_1}{u_3}-\left(\frac{u_2}{u_3}\right)^2;$$

$$7.\ \ u_0^1+\lambda\Delta u^1=\left(F_1+F_2\omega_0+F_3\omega_0^2\right)\exp(-2\omega_0),\quad u_0^3+\lambda\Delta u^3=2F_3\exp(-2\omega_0),$$

$$u_0^2+\lambda\Delta u^2=(F_2+2F_3\omega_0)\exp(-2\omega_0),\qquad u_0^4+\lambda\Delta u^4=F_4\exp\{(\lambda-2)\omega_0\},$$

$$\omega_0=\frac{u_3}{b},\ \omega_1=2u_2-\frac{u_3^2}{b},\ \omega_2=u_1-\frac{u_2u_3}{b}+\frac{u_3^3}{3b^2},\ \omega_3=\lambda u_3-b\ln u_4;$$

$$8.\ \ u_0^1+\lambda\Delta u^1=(F_1u_2+F_2u_1)\exp\left(-\frac{2}{b}arctg\frac{u_1}{u_2}\right),\quad u_0^3+\lambda\Delta u^3=F_3u_3\exp\left(-\frac{2}{b}arctg\frac{u_1}{u_2}\right),$$

$$u_0^2+\lambda\Delta u^2=(F_2u_2-F_1u_1)\exp\left(-\frac{2}{b}arctg\frac{u_1}{u_2}\right),\quad u_0^4+\lambda\Delta u^4=F_4u_4\exp\left(-\frac{2}{b}arctg\frac{u_1}{u_2}\right),$$

$$\omega_1=\frac{\left(u_1^2+u_2^2\right)^{\lambda_1}}{u_3^{2a}},\ \omega_2=\frac{\exp\left(\frac{\lambda_1}{b}arctg\frac{u_1}{u_2}\right)}{u_3},\ \omega_3=\frac{\exp\left(\frac{\lambda_2}{b}arctg\frac{u_1}{u_2}\right)}{u_4};$$

$$9.\ \ u_0^1+\lambda\Delta u^1=\left\{F_1\cos\left(\frac{b}{c}u_3\right)+F_2\sin\left(\frac{b}{c}u_3\right)\right\}\exp\left(\frac{a-2}{c}u_3\right),\qquad \omega_1=\ln\left(u_1^2+u_2^2\right)-2a\frac{u_3}{c},$$

$$u_0^2+\lambda\Delta u^2=\left\{F_2\cos\left(\frac{b}{c}u_3\right)-F_1\sin\left(\frac{b}{c}u_3\right)\right\}\exp\left(\frac{a-2}{c}u_3\right),\qquad \omega_2=arctg\frac{u_1}{u_2}-b\frac{u_3}{c},$$

$$u_0^3+\lambda\Delta u^3=F_3\exp\left(-\frac{2}{c}u_3\right),\ u_0^4+\lambda\Delta u^4=F_4\exp\left\{(\lambda-2)\frac{u_3}{c}\right\},\ \omega_3=\lambda u_3-c\ln u_4;$$

$$10.\ u_0^1+\lambda\Delta u^1=(u_2F_1+u_1F_2)\exp\left(-2\frac{u_1}{u_2}\right),\ \ u_0^2+\lambda\Delta u^2=u_2F_2\exp\left(-2\frac{u_1}{u_2}\right),\qquad (3)$$

$$u_0^3+\lambda\Delta u^3=(u_4F_3+u_3F_4)\exp\left(-2\frac{u_3}{u_4}\right),\ \ u_0^4+\lambda\Delta u^4=u_4F_4\exp\left(-2\frac{u_3}{u_4}\right),$$

$$\omega_1=\frac{u_1}{u_2}-\frac{u_3}{u_4},\ \omega_2=\frac{\exp\left(\lambda_1\frac{u_1}{u_2}\right)}{u_2},\ \omega_3=\frac{\exp\left(\lambda_2\frac{u_3}{u_4}\right)}{u_4};$$

$$11.\ u_0^1+\lambda\Delta u^1=(u_4F_1+u_3F_2+u_2F_3+u_1F_4)\exp\left(-2\frac{u_3}{u_4}\right),\quad \omega_1=3\frac{u_1}{u_4}+\left(\frac{u_3}{u_4}\right)^3-3\frac{u_2u_3}{u_4^2},$$

$$u_0^2+\lambda\Delta u^2=(u_4F_2+u_3F_3+u_2F_4)\exp\left(-2\frac{u_3}{u_4}\right),\quad \omega_2=2\frac{u_2}{u_4}-\left(\frac{u_3}{u_4}\right)^2,\ \omega_3=\frac{\exp\left(\lambda\frac{u_3}{u_4}\right)}{u_4};$$

$$u_0^3+\lambda\Delta u^3=(u_4F_3+u_3F_4)\exp\left(-2\frac{u_3}{u_4}\right),\qquad u_0^4+\lambda\Delta u^4=u_4F_4\exp\left(-2\frac{u_3}{u_4}\right),$$

12. $u_0^1+\lambda\Delta u^1=(F_1u_2+F_2u_1)\exp\left(-\frac{2}{b}arctg\frac{u_1}{u_2}\right),\quad u_0^3+\lambda\Delta u^3=(u_4F_3+u_3F_4)\exp\left(-2\frac{u_3}{u_4}\right),$

$$u_0^2+\lambda\Delta u^2=(F_2u_2-F_1u_1)\exp\left(-\frac{2}{b}arctg\frac{u_1}{u_2}\right),\quad u_0^4+\lambda\Delta u^4=u_4F_4\exp\left(-2\frac{u_3}{u_4}\right),$$

$$\omega_1=\left(u_1^2+u_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-a\frac{u_3}{u_4}\right),\quad \omega_2=\frac{\exp\left(\lambda\frac{u_3}{u_4}\right)}{u_4},\quad \omega_3=arctg\frac{u_1}{u_2}-b\frac{u_3}{u_4};$$

13. $u_0^1+\lambda\Delta u^1=(F_1u_2+F_2u_1)\exp\left(-\frac{2}{b_1}arctg\frac{u_1}{u_2}\right),$

$$u_0^3+\lambda\Delta u^3=(F_3u_4+F_4u_3)\exp\left(-\frac{2}{b_2}arctg\frac{u_3}{u_4}\right),$$

$$u_0^2+\lambda\Delta u^2=(F_2u_2-F_1u_1)\exp\left(-\frac{2}{b_1}arctg\frac{u_1}{u_2}\right),u_0^4+\lambda\Delta u^4=(F_4u_4-F_3u_3)\exp\left(-\frac{2}{b_2}arctg\frac{u_3}{u_4}\right),$$

$$\omega_1=\frac{\exp\left(\frac{a_1}{b_1}arctg\frac{u_1}{u_2}\right)}{\left(u_1^2+u_2^2\right)^{\frac{1}{2}}},\ \omega_2=\frac{\exp\left(\frac{a_2}{b_2}arctg\frac{u_3}{u_4}\right)}{\left(u_3^2+u_4^2\right)^{\frac{1}{2}}},\ \omega_3=b_2arctg\frac{u_1}{u_2}-b_1arctg\frac{u_3}{u_4};$$

14. $u_0^1+\lambda\Delta u^1=\{C_1\sin(b\omega_0+\varphi_1)+C_2\omega_0\sin(b\omega_0+\varphi_2)\}e^{(a-2)\omega_0},$

$$u_0^2+\lambda\Delta u^2=\{\tilde{N}_1\cos(b\omega_0+\varphi_1)+\tilde{N}_2\omega_0\cos(b\omega_0+\varphi_2)\}e^{(a-2)\omega_0},$$

$$u_0^3+\lambda\Delta u^3=\tilde{N}_2\sin(b\omega_0+\varphi_2)e^{(a-2)\omega_0},\quad u_0^4+\lambda\Delta u^4=\tilde{N}_2\cos(b\omega_0+\varphi_2)e^{(a-2)\omega_0},$$

$$\omega_0=\frac{1}{b}arctg\frac{u_3}{u_4},\ \omega_1=\frac{\exp\left(\frac{a}{b}arctg\frac{u_3}{u_4}\right)}{\left(u_3^2+u_4^2\right)^{\frac{1}{2}}},\ \omega_2=\frac{u_1u_3+u_2u_4}{u_3^2+u_4^2}-\frac{1}{b}arctg\frac{u_3}{u_4},\ \omega_3=\frac{u_2u_3-u_1u_4}{u_3^2+u_4^2};$$

15. $u_0^1+\lambda\Delta u^1=\left(F_1+F_2\frac{u_2}{u_3}+F_3\frac{u_1}{u_3}\right)\exp\left\{(\lambda-2)\frac{u_2}{u_3}\right\},\quad u_0^3+\lambda\Delta u^3=F_3\exp\left\{(\lambda-2)\frac{u_2}{u_3}\right\},$

$$u_0^2+\lambda\Delta u^2=\left(F_2+F_3\frac{u_2}{u_3}\right)\exp\left\{(\lambda-2)\frac{u_2}{u_3}\right\},\qquad u_0^4+\lambda\Delta u^4=F_4\exp\left(-2\frac{u_2}{u_3}\right),$$

$$\omega_1=\lambda\frac{u_2}{u_3}-\ln u_3,\quad \omega_2=2\frac{u_1}{u_3}-\left(\frac{u_2}{u_3}\right)^2,\quad \omega_3=b\frac{u_2}{u_3}-u_4;$$

16. $u_0^1+\lambda\Delta u^1=(F_1+F_2u_4)\exp\left\{(\lambda-2)\frac{u_4}{b}\right\},\quad u_0^2+\lambda\Delta u^2=bF_2\exp\left\{(\lambda-2)\frac{u_4}{b}\right\},$

$$u_0^3+\lambda\Delta u^3=(F_3+F_4u_4)\exp\left(-\frac{2}{b}u_4\right),\qquad u_0^4+\lambda\Delta u^4=bF_4\exp\left(-\frac{2}{b}u_4\right),$$

$$\omega_1 = \lambda \frac{u_1}{u_2} - \ln u_2, \quad \omega_2 = b\frac{u_1}{u_2} - u_4, \omega_3 = 2bu_3 - u_4^2;$$

17. $u_0^1 + \lambda\Delta u^1 = \left(F_1 + F_2\omega_0 + F_3\frac{\omega_0^2}{2} + F_4\frac{\omega_0^2}{6} \right)\exp(-2\omega_0), \quad u_0^3 + \lambda\Delta u^3 = (F_3 + F_4\omega_0)\exp(-2\omega_0),$

$$u_0^2 + \lambda\Delta u^2 = \left(F_2 + F_3\omega_0 + F_4\frac{\omega_0^2}{2} \right)\exp(-2\omega_0), \qquad u_0^4 + \lambda\Delta u^4 = F_4\exp(-2\omega_0),$$

$$\omega_0 = \frac{u_4}{b}, \ \omega_1 = \frac{u_3}{b} - \frac{1}{2}\left(\frac{u_4}{b}\right)^2, \ \omega_2 = \frac{u_2}{b} - \frac{u_3u_4}{b^2} + \frac{1}{3}\left(\frac{u_4}{b}\right)^3, \ \omega_3 = \frac{u_1}{b} - \frac{u_2u_4}{b^2} + \frac{u_3u_4^2}{2b^3} - \frac{u_4^4}{8b^4};$$

18. $u_0^1 + \lambda\Delta u^1 = (F_1 + F_2u_2)\exp\left(-\frac{2}{b}u_2\right), \quad u_0^2 + \lambda\Delta u^2 = bF_2\exp\left(-\frac{2}{b}u_2\right),$

$$u_0^3 + \lambda\Delta u^3 = (F_3 + F_4u_4)\exp\left(-\frac{2}{c}u_4\right), \ u_0^4 + \lambda\Delta u^4 = \tilde{n}F_4\exp\left(-\frac{2}{c}u_4\right),$$

$$\omega_1 = 2bu_1 - u_2^2, \quad \omega_2 = 2cu_3 - u_4^2, \quad \omega_3 = bu_3 + cu_1 - u_2u_4;$$

19. $u_0^1 + \lambda\Delta u^1 = \left\{ F_1\cos\left(\frac{b}{c}u_4\right) + F_2\sin\left(\frac{b}{c}u_4\right) \right\}\exp\left(\frac{a-2}{c}u_4\right), \quad \omega_1 = \ln\left(u_1^2 + u_2^2\right) - 2a\frac{u_4}{c},$

$$u_0^2 + \lambda\Delta u^2 = \left\{ F_2\cos\left(\frac{b}{c}u_4\right) - F_1\sin\left(\frac{b}{c}u_4\right) \right\}\exp\left(\frac{a-2}{c}u_4\right), \quad \omega_2 = arctg\frac{u_1}{u_2} - b\frac{u_4}{c},$$

$$u_0^3 + \lambda\Delta u^3 = (F_3 + F_4u_4)\exp\left(-\frac{2}{\tilde{n}}u_4\right), \ u_0^4 + \lambda\Delta u^4 = -F_4\exp\left(-\frac{2}{\tilde{n}}u_4\right), \ \omega_3 = 2\tilde{n}u_3 - u_4^2;$$

20. $u_0^j + \lambda\Delta u^j = 0, \quad j = \overline{1, \ 4},$

де $F_1, \ F_2, \ F_3, \ F_4$ - довільні гладкі функції, *a, b, c* - довільні сталі.

Суттєво, що базисні генератори $P_t \equiv P_0$, P_a, I_{ab} даються формулами (0.2), а генератори відповідних груп масштабних перетворень такі:

1. $D = 2t\partial_0 + x_a\partial_a + \lambda_1u_1\partial_{u_1} + \lambda_2u_2\partial_{u_2} + \lambda_3u_3\partial_{u_3} + \lambda_4u_4\partial_{u_4};$
2. $D = 2t\partial_0 + x_a\partial_a + b\partial_{u_1} + \lambda_2u_2\partial_{u_2} + \lambda_3u_3\partial_{u_3} + \lambda_4u_4\partial_{u_4}, \quad b \neq 0;$
3. $D = 2t\partial_0 + x_a\partial_a + \lambda_1(u_1\partial_{u_1} + u_2\partial_{u_2}) + u_2\partial_{u_1} + \lambda_2u_3\partial_{u_3} + \lambda_3u_4\partial_{u_4};$
4. $D = 2t\partial_0 + x_a\partial_a + u_2\partial_{u_1} + bu_2 + \lambda_1u_3\partial_{u_3} + \lambda_2u_4\partial_{u_4}, \quad b \neq 0;$
5. $D = 2t\partial_0 + x_a\partial_a + \lambda_1(u_1\partial_{u_1} + u_2\partial_{u_2}) + u_2\partial_{u_1} + b\partial_{u_3} + \lambda_2u_4\partial_{u_4}, \quad b \neq 0;$
6. $D = 2t\partial_0 + x_a\partial_a + \lambda_1(u_1\partial_{u_1} + u_2\partial_{u_2} + u_3\partial_{u_3}) + u_2\partial_{u_1} + u_3\partial_{u_2} + \lambda_2u_4\partial_{u_4};$
7. $D = 2t\partial_0 + x_a\partial_a + u_2\partial_{u_1} + u_3\partial_{u_2} + b\partial_{u_3} + \lambda u_4\partial_{u_4}, \quad b \neq 0;$
8. $D = 2t\partial_0 + x_a\partial_a + a(u_1\partial_{u_1} + u_2\partial_{u_2}) + b(u_2\partial_{u_1} - u_1\partial_{u_2}) + \lambda_1u_3\partial_{u_3} + \lambda_2u_4\partial_{u_4};$
9. $D = 2t\partial_0 + x_a\partial_a + a(u_1\partial_{u_1} + u_2\partial_{u_2}) + b(u_2\partial_{u_1} - u_1\partial_{u_2}) + \tilde{n}\partial u_3 + \lambda u_4\partial_{u_4}, \ c \neq 0, \quad b \neq 0;$
10. $D = 2t\partial_0 + x_a\partial_a + \lambda_1(u_1\partial_{u_1} + u_2\partial_{u_2}) + u_2\partial_{u_1} + \lambda_2(u_3\partial_{u_3} + u_4\partial_{u_4}) + u_4\partial_{u_3};$
11. $D = 2t\partial_0 + x_a\partial_a + \lambda(u_1\partial_{u_1} + u_2\partial_{u_2} + u_3\partial_{u_3} + u_4\partial_{u_4}) + u_2\partial_{u_1} + u_3\partial_{u_2} + u_4\partial_{u_3};$ (4)
12. $D = 2t\partial_0 + x_a\partial_a + a(u_1\partial_{u_1} + u_2\partial_{u_2}) + b(u_2\partial_{u_1} - u_1\partial_{u_2}) + \lambda(u_3\partial_{u_3} + u_4\partial_{u_4}) + u_4\partial_{u_3}, \ b \neq 0;$
13. $D = 2t\partial_0 + x_a\partial_a + a_1(u_1\partial_{u_1} + u_2\partial_{u_2}) + b_1(u_2\partial_{u_1} - u_1\partial_{u_2}) +$
    $+ a_2(u_3\partial_{u_3} + u_4\partial_{u_4}) + b_2(u_4\partial_{u_3} - u_3\partial_{u_4}), \ b_1, \ b_2 \neq 0;$

14. $D=2t\partial_0+x_a\partial_a+a(u_1\partial_{u_1}+u_2\partial_{u_2}+u_3\partial_{u_3}+u_4\partial_{u_4})+b(u_2\partial_{u_1}-u_1\partial_{u_2}+u_4\partial_{u_3}-u_3\partial_{u_4})+$
$+u_3\partial_{u_1}+u_4\partial_{u_2},\ b\neq 0;$

15. $D=2t\partial_0+x_a\partial_a+\lambda(u_1\partial_{u_1}+u_2\partial_{u_2}+u_3\partial_{u_3})+u_2\partial_{u_1}+u_3\partial_{u_2}+b\partial_{u_4},\quad b\neq 0;$

16. $D=2t\partial_0+x_a\partial_a+\lambda(u_1\partial_{u_1}+u_2\partial_{u_2})+u_2\partial_{u_1}+u_4\partial_{u_3}+b\partial_{u_4},\quad b\neq 0;$

17. $D=2t\partial_0+x_a\partial_a+u_2\partial_{u_1}+u_3\partial_{u_2}+u_4\partial_{u_3}+b\partial_{u_4},\quad b\neq 0;$

18. $D=2t\partial_0+x_a\partial_a+u_2\partial_{u_1}+b\partial_{u_2}+u_4\partial_{u_3}+c\partial_{u_4},\quad b,\ \tilde{n}\neq 0;$

19. $D=2t\partial_0+x_a\partial_a+a(u_1\partial_{u_1}+u_2\partial_{u_2})+b(u_2\partial_{u_1}-u_1\partial_{u_2})+u_4\partial_{u_3}+\tilde{n}\partial_{u_4},\quad b,\ \tilde{n}\neq 0;$

20. $D=2t\partial_0+x_a\partial_a$.

<u>Теорема 2</u>. Система РЧП (1) інваріантна щодо групи Галілея $G(1,\ 3)\ =\ <E(1,\ 3),\ G_a,\ M>$,

коли і лише коли еквівалентна системі:

$$u_0^j+\lambda\Delta u^j=u^jF_j\left(\frac{u^1}{u^2},\ \frac{u^2}{u^3},\ \frac{u^3}{u^4}\right), \tag{5}$$

де F_j - довільні гладкі функції, $j=\overline{1,\ 4}$.

Суттєво, що базисні оператори P_0, P_a, I_{ab} даються формулами (0.2), а оператори Галілея G_a можуть мати лише такий вигляд:

$$G_a=t\partial_a+x_aM,$$

$$\text{де } M=\frac{1}{2\lambda}u^i\partial_{u_i},\ \ i=\overline{1,\ 4},\ \ a=1,\ 2,\ 3. \tag{6}$$

<u>Доведення теорем 1 - 2</u> виконані за допомогою алгоритму Лі [4]. У рамках підходу Лі оператор симетрії для системи (1) шукається у формі

$$X=\xi^{\mu}(x,u)\partial_{\mu}+\eta^k(x,u)\partial_{u^k},\ k=1,2,3,4, \tag{7}$$

де $\xi^{\mu}(x,u)$, $\eta^k(x,u)$ - деякі гладкі функції.

Для системи РЧП (1) необхідна і достатня умова бути інваріантною щодо групи, заданої інфінітезимальним оператором (7), записується так:

$$\left.\widetilde{X}(u_0^j+\lambda\Delta u^j-F_j)\right|_{u_0^j+\lambda\Delta u^j-F_j=0}=0,\quad j=1,2,3,4, \tag{8}$$

де $\widetilde{X}$ - вживається для другого продовження оператора X :

$$\widetilde{X}\equiv\underset{2}{X}=X+\tau^k_{\nu_1}\cdot\frac{\partial}{\partial u^k_{\nu_1}}+\tau^k_{\nu_1\nu_2}\frac{\partial}{\partial u^k_{\nu_1\nu_2}}, \tag{9}$$

$$\text{де } \tau^k_{\nu_1}=\eta^k_{\nu_1}+u^{l_1}_{\nu_1}\eta^k_{u^{l_1}}-u^k_{\nu}\left(\xi^{\nu}_{\nu_1}+u^{l_1}_{\nu_1}\xi^{\nu}_{u^{l_1}}\right), \tag{10}$$

$$\tau^k_{\nu_1\nu_2}=\eta^k_{\nu_1\nu_2}+u^l_{\nu_1}\eta^k_{\nu_2u^l}+u^l_{\nu_2}\eta^k_{\nu_1u^l}-u^k_{\nu}\xi^{\nu}_{\nu_1\nu_2}+u^{l_1}_{\nu_1}u^{l_2}_{\nu_2}\eta^k_{u^{l_1}u^{l_2}}-u^k_{\nu}\left(u^l_{\nu_1}\xi^{\nu}_{\nu_2u^l}+u^l_{\nu_2}\xi^{\nu}_{\nu_1u^l}\right)+ \tag{11}$$
$$+u^l_{\nu_1\nu_2}\eta^k_{u^l}-u^k_{\nu_1\nu}\xi^{\nu}_{\nu_2}-u^k_{\nu_2\nu}\xi^{\nu}_{\nu_1}-u^k_{\nu}u^{l_1}_{\nu_1}u^{l_2}_{\nu_2}\xi^{\nu}_{u^{l_1}u^{l_2}}-u^l_{\nu_1\nu_2}u^k_{\nu}\xi^{\nu}_{u^l}-u^k_{\nu_1\nu}u^l_{\nu_2}\xi^{\nu}_{u^l}-u^k_{\nu_2\nu}u^l_{\nu_1}\xi^{\nu}_{u^l}.$$

Внаслідок визначальних рівнянь:

$$\begin{cases}\xi^i=b^{ij}x_j+\dot{d}\cdot x_i+e^i;\xi^0=-2d\\ \eta^k=-\dfrac{1}{2\lambda}\left(\dfrac{1}{2}\ddot{d}x^2+\dot{e}x+\underset{k}{\overset{}{h^k_{\Sigma}}}\right)u_k+\underset{k\neq l}{R^{kl}u_l}+P^k\,,\end{cases} \tag{12}$$

де e^i, d, h^k, R^{kl} - функції від t, а $P^k = P^k(t,x)$, $b^{ij} = const$.

Функції ξ^μ та η^k повинні задовольняти рівняння:

$$\eta_0^k + \lambda\Delta\eta^k + \eta_{u_l}^k F^l - \eta^l F_{u_l}^k - F^k \xi_0^0 = 0. \qquad (13)$$

Із (12), (13) випливає, що система РЧП (1) інваріантна щодо групи Евкліда $E(1,3)$, заданої генераторами (0.2), при довільних $F^1 - F^4$. Описати всі функції $F^1 - F^4$ - такі, що система (1) допускає розширену групу Евкліда $\widetilde{E}(1,3) =< E(1,3), D >$, означає розв'язати наступні дві проблеми:

* описати всі генератори D у формі (12), які разом із операторами (0.2) задовольняють комутаційні співвідношення алгебри Лі групи $\widetilde{E}(1,3)$:

$$[P_a, J_{bc}] = \delta_{ab}P_c - \delta_{ac}P_b; \; [P_a, P_b] = [P_0, P_a] = [P_0, J_{bc}] = 0; \qquad (14)$$

$$[J_{ab}, J_{cd}] = \delta_{ad}J_{bc} + \delta_{bc}J_{ad} - \delta_{ac}J_{bd} - \delta_{bd}J_{ac}; [P_0, D] = 2P_0; [P_a, D] = P_a; [J_{ab}, D] = 0.$$

* розв'язати систему РЧП (13) для кожного одержаного оператора D.

Внаслідок КС (14) та визначальних рівнянь оператор масштабних перетворень D отримує вигляд:

$$D = 2t\partial_0 + x_i\partial_i + \left(R^{kl}u_e + P^k\right)\partial_{u_k}, \qquad (15)$$

а визначальне рівняння для F^j (13) стає таким:

$$\eta^k F_{u_k}^j + \xi_0^0 F^j - \eta_{u_e}^j F^l = 0, \text{ тобто } \left(R^{kl}u_e + P^k\right)F_{u_k}^j + 2F^j - R^{jl}F^l = 0. \qquad (16)$$

З точністю до перетворень (2) оператор D (15) належить до одного з класів (4), а розв'язки рівнянь (16) для кожного зображення (4) дають теорему 1.

Для доведення теореми 2 запишемо комутаційні співвідношення алгебри Лі групи Галілея $G(1,3) =< E(1,3), M, G_a >$, які повинні задовольняти оператори Галілея G_a і центр групи M:

$$[G_a, J_{bc}] = \delta_{ab}G_c - \delta_{ac}G_b; \; [G_a, G_b] = 0; \; [P_0, G_a] = P_a;$$

$$[P_b, G_a] = \delta_{ab}M; \; [M, J_{ab}] = [P_0, M] = [P_a, M] = [M, G_a] = 0. \qquad (17)$$

Внаслідок КС (19) G_a - фіксовані, а оператор M - єдиний:

$$G_a = t\partial_a + x_a M; \; a = 1, 2, 3, \; M = \frac{u_k}{2\lambda}\partial_{u_k}. \qquad (18)$$

Визначальні рівняння (13) перепишуться так:

$$u_l F_{u_l}^k - F^k = 0, \quad k, l = 1,2,3,4. \qquad (19)$$

Як розв'язок (21), отримуємо систему (5), що завершує доведення теореми 2.

Автор висловлює вдячність п. Роману Чернізі за увагу і корисну співпрацю.
Дане дослідження підтримане фондом наукового розвитку КІРУЕ.

РЕЗЮМЕ

Отримано нові класи систем нелінійних рівнянь у частинних похідних параболічного типу, які допускають групу Евкліда, розширену оператором масштабних перетворень.

SUMMARY

There are obtained the new classes of the parabolic systems of the partial differential equations, that are admitting the group of Euclide, extended with operator of the scale transformations.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нелинейная квантовая теория поля / Под ред. Д.Д.Иваненко. – М.: Изд-во иностр. лит., 1959. – 383 с.
2. Эйдельман С.Д. Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 443 с.
3. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.М. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
4. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. Симметрийный анализ и точные решения уравнений математической физики. – К.: Наук. думка, 1989. – 336 с.
5. W.I.Fushchych, R.M.Cherniha // J. Phys. A 28 (1995) 5569-5579.
6. W.I.Fushchych, I.A.Yegorchenko // Acta Appl. Math. 28 (1996) 69-52.
7. П.В.Марко. Симетрійний аналіз системи нелінійних рівнянь дифузії // Наукові записки. – Випуск 43. – Серія: Фізико-математичні науки. – Кіровоград: КДПУ, 2002. – 139 с.

Надійшла до редакції 12.02.2004 р.

УДК 519.21

ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ СКОРОСТИ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Б.В.Бондарев, А.В.Логачев

Введение. В данной работе изучены экспоненциальные оценки для скорости β - перемешивания и скорости сходимости к инвариантной мере для слабых решений стохастических дифференциальных уравнений.
Определение. Коэффициентом β - перемешивания, или полной регулярности называется:

$$\beta_t^x = \sup_{s \ge 0} E_x \operatorname*{var}_{\Im_{\ge t+s}^X} \left(P(B \,|\, \Im_{\le s}^X) - P(B) \right),$$

где $\Im_A^X = \sigma\{X(t) : t \in A\}$.

Для стохастических дифференциальных уравнений в R^d, $d \ge 1$ вида

$$dX(t) = b(X(t))dt + \sigma(X(t))dw(t), \qquad X(0) = x,$$

хорошо изучены [1] условия экспоненциального убывания коэффициента полной регулярности.

Мы будем рассматривать стохастические дифференциальные уравнения в R^d, $d \ge 1$ вида

$$dX(t) = b(X(t))dt + \sigma(X(t))dw(t) + \int f(X(t),u)\nu(dt,du), \qquad X(0) = x, \tag{1}$$

где $b(X) = (b_1(X),....,b_d(X))^*$ - борелевская d -мерная ограниченная функция, $w(t)$ - l -мерный винеровский процесс с $l \ge d$, а ограниченная матричная функция размера $d \times l$ невырождена, т.е.

$$\inf_X \inf_{|\xi|=1} \xi^* \sigma(X) \sigma^*(X) \xi > 0,$$

$f(X,u) = (f_1(X,u),....,f_d(X,u))^*$ - борелевская d -мерная ограниченная функция, $\nu(t,A)$ - пуассоновская мера в R^d , $E\nu(t,A) = t\Pi(A)$, Π - конечная мера в R^d , процесс $w(t)$ и мера $\nu(t,A)$ независимы.

Коэффициент полной регулярности имеет широкое применение. Условие сходимости β - перемешивания к 0 при $t \to \infty$ с экспоненциальной скоростью применяется в теории усреднений и теоремах больших уклонений для стохастических дифференциальных уравнений [5]. Имея оценку сверху коэффициента полной регулярности можно получить оценки скорости сходимости в некоторых предельных теоремах [6].

Основной результат. Введем некоторые обозначения. Пусть

$$a(X) = \sigma(X)\sigma^*(X), \qquad \Lambda = d^{-1} \sup_X tr\, a(X),$$

$$\lambda_+ = \sup_{X \ne 0} \left(\frac{a(X)X}{|X|}, \frac{X}{|X|} \right) = \sup_{X \ne 0} \frac{X^* a(X) X}{|X|^2}, \qquad \sup_{X,u} |f(X,u)| = H.$$

Заметим, что когда $d > 1$ λ_+, вообще говоря, не является максимумом собственных чисел матриц $a(X)$, а может оказаться и меньше.

Предположим, что выполнены следующие условия:

$$(b(X),X) \le -r|X|, \qquad r > 0, \quad |X| \ge M, \tag{2}$$

$$\int |f(X,u)| \Pi(du) < r, \qquad |X| \ge M. \tag{3}$$

Теорема 1. Пусть для стохастического дифференциального уравнения (1) выполнены условия (2), (3), тогда $\exists$ $c_1, c_2, c_3 > 0$ такие, что

$$\operatorname{var}\left(P(t,x,\cdot) - \mu_{inv}(\cdot)\right) \le c_1 \exp(c_2|x| - c_3 t),$$

где $P(t,x,A)$ и $\mu_{inv}(A)$ - вероятность перехода и инвариантная мера для решения уравнения (1).

Теорема 2. Пусть для стохастического дифференциального уравнения (1) выполнены условия (2), (3), тогда $\exists\ c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$ такие, что

$$\beta_t^x \le c_1 \exp(c_2|x| - c_3 t),$$

$$\overline{\beta}_t = \int \beta_t^x \mu_{inv}(dx) \le c_4 \exp(-c_3 t).$$

Вспомогательные результаты. Введем некоторые новые обозначения. Пусть

$$\tau(x) = \inf(t \ge 0 : |X(t)| \le R).$$

Лемма 1. Пусть для стохастического дифференциального уравнения (1) выполнены условия (2), (3), тогда для каждого достаточно большого R существуют $\delta, \varepsilon, R_1 > 0$ такие, что

$$E \exp(\delta\tau(x)) \le \exp\bigl(\varepsilon(|x| - R_1)\bigr).$$

Лемма 2. Пусть для стохастического дифференциального уравнения (1) выполнены условия (2), (3), тогда существуют $\varepsilon, R_2 > 0$ такие, что

$$\sup_t E \exp(\varepsilon|X(t)|) \le \max\bigl(\exp(\varepsilon|x|), \exp(\varepsilon R_2)\bigr).$$

Следствие 1. Случайный процесс $X(t)$ имеет единственную инвариантную меру такую, что

$$\int \exp\bigl(\varepsilon|x|\bigr)\mu_{inv}(dx) < \infty.$$

Рассмотрим еще одну независимую копию $\bigl(Y(t), w'(t), \nu'(t, A)\bigr)$ процесса $\bigl(X(t), w(t), \nu(t, A)\bigr)$ с начальным значением $Y(0) = y$, $w'(0) = 0$, $\nu'(0, R^d) = 0$.

Определим $\gamma = \inf\left\{t \ge 0 : \max\bigl(|X(t)|, |Y(t)|\bigr) \le \widetilde{R}\right\}$ для $\widetilde{R} > R$. Мы не меняем обозначений для P и E и используем двойные индексы для обозначения начальных данных.

Лемма 3. Для каждого достаточно большого $\widetilde{R}$ существуют $\delta, \varepsilon, \widetilde{R}_1 > 0$ такие, что

$$E_{x,y} \exp(\delta\gamma) \le \frac{\exp(\varepsilon|x|) - \exp(\varepsilon|y|)}{\exp(\varepsilon \widetilde{R}_1)}.$$

Доказательства. Доказательство леммы 1.

Рассмотрим функцию $g(t, X) = \exp\bigl(\delta t + \varepsilon|X|\bigr)$. Пусть $|x| > R$. Тогда к выражению $\exp\bigl(\delta t + \varepsilon|X(t)|\bigr)$ применим формулу Ито, и, полагая, $T_N = \inf\bigl(t \ge 0 : |X(t)| \ge N\bigr)$ получим:

$$\exp\bigl(\delta(t \wedge \tau \wedge T_N) + \varepsilon|X(t \wedge \tau \wedge T_N)|\bigr) - \exp\bigl(\varepsilon|x|\bigr) =$$

$$= \int_0^{t\wedge\tau\wedge T_N} \exp\bigl(\delta s + \varepsilon|X(s)|\bigr)\left[\delta + \frac{\varepsilon\bigl(b(X(s), X(s)\bigr)}{|X(s)|} + \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{d} \frac{\varepsilon^2 X_k(s) X_j(s) a_{kj}(X(s))}{|X(s)|^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d} \frac{\varepsilon\, a_{kk}(X(s))}{|X(s)|} - \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{d} \frac{\varepsilon X_k(s) X_j(s) a_{kj}(X(s))}{|X(s)|^3}\right] ds +$$

$$+ \int_0^{t\wedge\tau\wedge T_N} \exp\bigl(\delta s + \varepsilon|X(s)|\bigr)\varepsilon \sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{d} \frac{X_k(s)}{|X(s)|}\sigma_{ki}(X(s)) dw_i(s) +$$

$$+ \int_0^{t\wedge\tau\wedge T_N}\!\!\int \Bigl[\exp\bigl(\delta s + \varepsilon|X(s) + f(X(s), u)|\bigr) - \exp\bigl(\delta s + \varepsilon|X(s)|\bigr)\Bigr]\nu(ds, du) \le$$

Используя условие (2), а также выбирая $R \ge M + H$, имеем:

$$\le \int_0^{t\wedge\tau\wedge T_N} \exp\bigl(\delta s + \varepsilon|X(s)|\bigr)\left[\delta - \varepsilon r + \frac{1}{2}\lambda_+ \varepsilon^2 + \frac{d\varepsilon\Lambda}{R - H}\right] ds +$$

$$+\int\limits_0^{t\wedge\tau\wedge T_N} \exp\left(\delta s+\varepsilon|X(s)|\right)\varepsilon\sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{d}\frac{X_k(s)}{|X(s)|}\sigma_{ki}(X(s))dw_i(s)+$$

$$+\int\limits_0^{t\wedge\tau\wedge T_N}\int \exp\left(\delta s+\varepsilon|X(s)|\right)\left[\exp\left(\varepsilon|f(X(s),u)|\right)-1\right]\nu(ds,du). \qquad (4)$$

Возьмем математическое ожидание от левой и правой части неравенства (4), получим:

$$E\left(\exp\left(\delta(t\wedge\tau\wedge T_N)+\varepsilon|X(t\wedge\tau\wedge T_N)|\right)\right)-\exp\left(\varepsilon|x|\right)\le$$

$$\le E\left(\int\limits_0^{t\wedge\tau\wedge T_N} \exp\left(\delta s+\varepsilon|X(s)|\right)\left[\delta-\varepsilon r+\frac{1}{2}\lambda_+\varepsilon^2+\frac{d\varepsilon\Lambda}{R-H}\right]ds\right)+$$

$$+E\left(\int\limits_0^{t\wedge\tau\wedge T_N}\int \exp\left(\delta s+\varepsilon|X(s)|\right)\left[\exp\left(\varepsilon|f(X(s),u)|\right)-1\right]\Pi(du)ds\right)=$$

$$=E\left(\int\limits_0^{t\wedge\tau\wedge T_N} \exp\left(\delta s+\varepsilon|X(s)|\right)\left[\delta-\varepsilon r+\frac{1}{2}\lambda_+\varepsilon^2+\frac{d\varepsilon\Lambda}{R-H}+\int\left[\exp\left(\varepsilon|f(X(s),u)|\right)-1\right]\Pi(du)\right]ds\right)=$$

$$=E\left(\int\limits_0^{t\wedge\tau\wedge T_N} \exp\left(\delta s+\varepsilon|X(s)|\right)\left[\delta-\varepsilon r+\frac{1}{2}\lambda_+\varepsilon^2+\frac{d\varepsilon\Lambda}{R-H}+\int\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(\varepsilon|f(X(s),u)|\right)^k}{k!}-1\right]\Pi(du)\right]ds\right)\le$$

$$\le E\left(\int\limits_0^{t\wedge\tau\wedge T_N} \exp\left(\delta s+\varepsilon|X(s)|\right)\left[\delta-\varepsilon r+\frac{1}{2}\lambda_+\varepsilon^2+\frac{d\varepsilon\Lambda}{R-H}+\int\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(\varepsilon H)^k}{k!}\Pi(du)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int\frac{\varepsilon|f(X(s),u)|}{1!}\Pi(du)\right]ds\right).$$

В силу условия (3) найдется r_1 такое, что $r-\int|f(X,u)|\Pi(du)\ge r_1$ при $|X|\ge M$, тогда:

$$E\left(\exp\left(\delta(t\wedge\tau\wedge T_N)+\varepsilon|X(t\wedge\tau\wedge T_N)|\right)\right)-\exp\left(\varepsilon|x|\right)\le$$

$$\le E\left(\int\limits_0^{t\wedge\tau\wedge T_N} \exp\left(\delta s+\varepsilon|X(s)|\right)\left[\delta-\varepsilon r_1+\frac{1}{2}\lambda_+\varepsilon^2+\frac{d\varepsilon\Lambda}{R-H}+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(\varepsilon H)^k}{k!}\int\Pi(du)\right]ds\right)\le$$

$$\le E\left(\int\limits_0^{t\wedge\tau\wedge T_N} \exp\left(\delta s+\varepsilon|X(s)|\right)\left[\delta-\varepsilon r_1+\frac{1}{2}\lambda_+\varepsilon^2+\frac{d\varepsilon\Lambda}{R-H}+\varepsilon^2H^2\exp(\varepsilon H)\int\Pi(du)\right]ds\right).$$

Рассмотрим $\left[\frac{1}{2}\lambda_+\varepsilon+\frac{d\Lambda}{R-H}+\varepsilon H^2\exp(\varepsilon H)\int\Pi(du)-r_1\right]\varepsilon$. (5)

Выбираем R, таким, чтобы $\frac{d\Lambda}{R-H}$ было меньше чем r_1. Пусть $r_2=r_1-\frac{d\Lambda}{R-H}$. Тогда, выбрав $\varepsilon=\min\left(1,\frac{r_2}{0{,}5\lambda_++H^2\exp(H)\int\Pi(du)}-r_3\right)$, где $r_3\in\left(0,\frac{r_2}{0{,}5\lambda_++H^2\exp(H)\int\Pi(du)}\right)$ добьемся того, что (5) будет меньше 0. Выбираем δ меньше модуля от выражения (5).

Отсюда находим при выбранных выше ε,δ,R:

$$E\left(\exp\left(\delta(t\wedge\tau\wedge T_N)+\varepsilon|X(t\wedge\tau\wedge T_N)|\right)\right)-\exp\left(\varepsilon|x|\right)\le 0\,.$$

Поэтому в силу леммы Фату при $t,N\to\infty$ получаем:

$$E\exp(\delta\tau(x)) \le \exp(\varepsilon(|x| - (R - H))).$$

Лемма 1 доказана.

Замечание 1. Доказательство леммы 1, приведенное выше, является конструктивным в плане выбора постоянных $R, R_1, \delta, \varepsilon$.

Доказательство леммы 2.

$$E(\exp(\varepsilon|X(t)|)) - \exp(\varepsilon|x|) = E\Bigg(\int\limits_0^t \exp(\varepsilon|X(s)|)\Bigg[\frac{\varepsilon(b(X(s), X(s))}{|X(s)|} + \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{d} \frac{\varepsilon^2 X_k(s)X_j(s)a_{kj}(X(s))}{|X(s)|^2} +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}\frac{\varepsilon\, a_{kk}(X(s))}{|X(s)|} - \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{d}\frac{\varepsilon X_k(s)X_j(s)a_{kj}(X(s))}{|X(s)|^3}\Bigg]ds +$$

$$+\int\limits_0^t\int\left[\exp(\varepsilon|X(s) + f(X(s),u)|) - \exp(\varepsilon|X(s)|)\right]\nu(ds,du)\Bigg). \qquad (6)$$

Рассмотрим следующую последовательность:

$\tau_1 = \tau(x) = \inf(t \ge 0 : |X(t)| \le R)$, $\eta_1 = \min(\inf(t > \tau_1 : |X(t)| > R), \tau_1 + 1))$, $\tau_2 = \inf(t > \eta_1 : |X(t)| \le R)$, ...

.... $\eta_i = \min(\inf(t > \tau_i : |X(t)| > R), \tau_i + 1)$, $\tau_{i+1} = \inf(t > \eta_i : |X(t)| \le R)$,.....

Разобьем $[0,+\infty)$ на интервалы $[0,\tau_1)$, $[\tau_1,\eta_1)$, $[\eta_1,\tau_2)$,....

Тогда, если $t \in [0,\tau_1)$, то, как следует из доказательства леммы 1 левая часть выражения (6) меньше 0. Следовательно $\sup\limits_{t\in[0,\tau_1)} E(\exp(\varepsilon|X(t)|)) \le \exp(\varepsilon|x|)$.

Если $t \in [\tau_1,\eta_1)$, то по определению τ_1 и η_1 $\sup\limits_{t\in[\tau_1,\eta_1)} E(\exp(\varepsilon|X(t)|)) \le \exp(\varepsilon R)$.

Если $t \in [\eta_1,\tau_2)$, то по определению τ_2 и η_1, а также из доказательства леммы 1, учитывая, что $|X(\eta_1)| \le R + H$, получим $\sup\limits_{t\in[\eta_1,\tau_2)} E(\exp(\varepsilon|X(t)|)) \le \exp(\varepsilon(R + H))$.

Обратив внимание то, что $\sup\limits_{t\in[\tau_i,\eta_i)} E(\exp(\varepsilon|X(t)|)) \le \exp(\varepsilon R)$, $\sup\limits_{t\in[\eta_i,\tau_{i+1})} E(\exp(\varepsilon|X(t)|)) \le \exp(\varepsilon(R + H))$

получим: $\sup\limits_{t\in[0,+\infty)} E(\exp(\varepsilon|X(t)|)) \le \max(\exp(\varepsilon|x|), \exp(\varepsilon(R + H)))$.

Лемма 2 доказана.

Доказательство следствия 1.

Процесс $X(t)$ является неприводимым вследствие условий наложенных на уравнение (1) [2].

Рассмотрим $E\exp(\delta\tau_n) = E(\exp(\delta(\tau_1 - 0))\exp(\delta(\tau_2 - \tau_1)\ldots\exp(\delta(\tau_n - \tau_{n-1}))$.

Применяя лемму 1, получим:

$$E(\exp(\delta(\tau_n - \tau_{n-1})|\Im_{\tau_{n-1}}) = E(\exp(\delta(\tau_n - \eta_{n-1} + \eta_{n-1} - \tau_{n-1})|\Im_{\tau_{n-1}}) \le$$

$$\le \exp(\delta)E(\exp(\delta(\tau_n - \eta_{n-1})|\Im_{\tau_{n-1}}) \le \exp(\delta)\exp(\varepsilon(R + H)).$$

Следовательно, в силу строго марковского свойства процесса $X(t)$, а также доказанного выше, имеем:

$$E\exp(\delta\tau_n) \le \exp(n\delta)\exp(\varepsilon(n-1)(R + H))\exp(\varepsilon|x|)$$

Рассмотрев $n(t) = \sup\{n \ge 0 : \tau_n \le t\}$, $t \ge 0$, мы получим, что $P(n(t) \to \infty, t \to \infty) = 1$.

В самом деле: $P(\tau_n > t) \le \frac{E\exp(\delta\tau_n)}{\exp(\delta t)} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.

Таким образом, случайный процесс $X(t)$, является положительно возвратным. Из неприводимости и возвратности в силу теоремы Харриса [3] процесс $X(t)$ имеет единственную инвариантную меру.

Из леммы 2 и определения инвариантной меры следует, что $\int \exp(\varepsilon|x|)\mu_{inv}(dx) < \infty$.

Следствие 1 доказано.

Доказательство леммы 3.

Рассмотрим функцию $g(t,X,Y)=\exp\left(\delta t+\varepsilon|X|\right)+\exp\left(\delta t+\varepsilon|Y|\right)$. Пусть $|x|>\widetilde{R},|y|>\widetilde{R}$. Тогда к выражению $\exp\left(\delta t+\varepsilon|X(t)|\right)+\exp\left(\delta t+\varepsilon|Y(t)|\right)$ применим формулу Ито, и, полагая, $T_N=\inf\left(t\geq 0:|X(t)|\vee|Y(t)|\geq N\right)$ получим:

$$\exp\left(\delta(t\wedge\gamma\wedge T_N)+\varepsilon|X(t\wedge\gamma\wedge T_N)|\right)-\exp\left(\varepsilon|x|\right)+\exp\left(\delta(t\wedge\gamma\wedge T_N)+\varepsilon|Y(t\wedge\gamma\wedge T_N)|\right)-\exp\left(\varepsilon|y|\right)=$$

$$\begin{aligned}
&=\int_0^{t\wedge\gamma\wedge T_N}\exp\left(\delta s+\varepsilon|X(s)|\right)\left[\delta+\frac{\varepsilon\left(b(X(s),X(s)\right)}{|X(s)|}+\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{d}\frac{\varepsilon^2X_k(s)X_j(s)a_{kj}(X(s))}{|X(s)|^2}+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}\frac{\varepsilon\, a_{kk}(X(s))}{|X(s)|}-\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{d}\frac{\varepsilon X_k(s)X_j(s)a_{kj}(X(s))}{|X(s)|^3}\right]ds+\\
&\qquad+\int_0^{t\wedge\gamma\wedge T_N}\exp\left(\delta s+\varepsilon|X(s)|\right)\varepsilon\sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{d}\frac{X_k(s)}{|X(s)|}\sigma_{ki}(X(s))dw_i(s)+\\
&\quad+\int_0^{t\wedge\gamma\wedge T_N}\!\!\int\left[\exp\left(\delta s+\varepsilon|X(s)+f(X(s),u)|\right)-\exp\left(\delta s+\varepsilon|X(s)|\right)\right]\nu(ds,du)+\\
&=\int_0^{t\wedge\gamma\wedge T_N}\exp\left(\delta s+\varepsilon|X(s)|\right)\left[\delta+\frac{\varepsilon\left(b(Y(s),Y(s)\right)}{|Y(s)|}+\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{d}\frac{\varepsilon^2Y_k(s)Y_j(s)a_{kj}(Y(s))}{|Y(s)|^2}+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}\frac{\varepsilon\, a_{kk}(Y(s))}{|Y(s)|}-\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{d}\frac{\varepsilon Y_k(s)Y_j(s)a_{kj}(Y(s))}{|Y(s)|^3}\right]ds+\\
&\qquad+\int_0^{t\wedge\gamma\wedge T_N}\exp\left(\delta s+\varepsilon|Y(s)|\right)\varepsilon\sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{d}\frac{Y_k(s)}{|Y(s)|}\sigma_{ki}(Y(s))dw_i(s)+\\
&\quad+\int_0^{t\wedge\gamma\wedge T_N}\!\!\int\left[\exp\left(\delta s+\varepsilon|Y(s)+f(Y(s),u)|\right)-\exp\left(\delta s+\varepsilon|Y(s)|\right)\right]\nu(ds,du).
\end{aligned}\tag{7}$$

Возьмем математическое ожидание от левой и правой части выражения (7).

$$E\left(\exp\left(\delta(t\wedge\gamma\wedge T_N)+\varepsilon|X(t\wedge\gamma\wedge T_N)|\right)-\exp\left(\varepsilon|x|\right)+\exp\left(\delta(t\wedge\gamma\wedge T_N)+\varepsilon|Y(t\wedge\gamma\wedge T_N)|\right)-\exp\left(\varepsilon|y|\right)\right)=$$

$$\begin{aligned}
&=E\left(\int_0^{t\wedge\gamma\wedge T_N}\exp\left(\delta s+\varepsilon|X(s)|\right)\left[\delta+\frac{\varepsilon\left(b(X(s),X(s)\right)}{|X(s)|}+\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{d}\frac{\varepsilon^2X_k(s)X_j(s)a_{kj}(X(s))}{|X(s)|^2}+\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}\frac{\varepsilon\, a_{kk}(X(s))}{|X(s)|}-\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{d}\frac{\varepsilon X_k(s)X_j(s)a_{kj}(X(s))}{|X(s)|^3}\right]I\left(\min\left(|X(s)|,|Y(s)|\right)>R\right)ds\right)+\\
&+E\left(\int_0^{t\wedge\gamma\wedge T_N}\!\!\int\left[\exp\left(\delta s+\varepsilon|X(s)+f(X(s),u)|\right)-\exp\left(\delta s+\varepsilon|X(s)|\right)\right]I\left(\min\left(|X(s)|,|Y(s)|\right)>R\right)\nu(ds,du)\right)+\\
&\quad+E\left(\int_0^{t\wedge\gamma\wedge T_N}\exp\left(\delta s+\varepsilon|X(s)|\right)\left[\delta+\frac{\varepsilon\left(b(X(s),X(s)\right)}{|X(s)|}+\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{d}\frac{\varepsilon^2X_k(s)X_j(s)a_{kj}(X(s))}{|X(s)|^2}+\right.\right.
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}\frac{\varepsilon\, a_{kk}(X(s))}{|X(s)|}-\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{d}\frac{\varepsilon X_k(s)X_j(s)a_{kj}(X(s))}{|X(s)|^3}\Bigg]I\big(\min(|X(s)|,|Y(s)|)\le R\big)ds\Bigg)+$$

$$+E\left(\int_0^{t\wedge\gamma\wedge T_N}\!\!\int\left[\exp\left(\delta s+\varepsilon|X(s)+f(X(s),u)|\right)-\exp\left(\delta s+\varepsilon|X(s)|\right)\right]I\big(\min(|X(s)|,|Y(s)|)\le R\big)\nu(ds,du)\right)+$$

$$=E\Bigg(\int_0^{t\wedge\gamma\wedge T_N}\exp\left(\delta s+\varepsilon|Y(s)|\right)\Bigg[\delta+\frac{\varepsilon\big(b(Y(s)),Y(s)\big)}{|Y(s)|}+\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{d}\frac{\varepsilon^2Y_k(s)Y_j(s)a_{kj}(Y(s))}{|Y(s)|^2}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}\frac{\varepsilon\, a_{kk}(Y(s))}{|Y(s)|}-\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{d}\frac{\varepsilon Y_k(s)Y_j(s)a_{kj}(Y(s))}{|Y(s)|^3}\Bigg]I\big(\min(|X(s)|,|Y(s)|)>R\big)ds\Bigg)+$$

$$+E\left(\int_0^{t\wedge\gamma\wedge T_N}\!\!\int\left[\exp\left(\delta s+\varepsilon|Y(s)+f(Y(s),u)|\right)-\exp\left(\delta s+\varepsilon|Y(s)|\right)\right]I\big(\min(|X(s)|,|Y(s)|)>R\big)\nu(ds,du)\right)+$$

$$+E\Bigg(\int_0^{t\wedge\gamma\wedge T_N}\exp\left(\delta s+\varepsilon|Y(s)|\right)\Bigg[\delta+\frac{\varepsilon\big(b(Y(s)),Y(s)\big)}{|Y(s)|}+\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{d}\frac{\varepsilon^2Y_k(s)Y_j(s)a_{kj}(Y(s))}{|Y(s)|^2}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}\frac{\varepsilon\, a_{kk}(Y(s))}{|Y(s)|}-\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{d}\frac{\varepsilon Y_k(s)Y_j(s)a_{kj}(Y(s))}{|Y(s)|^3}\Bigg]I\big(\min(|X(s)|,|Y(s)|)\le R\big)ds\Bigg)+$$

$$+E\left(\int_0^{t\wedge\gamma\wedge T_N}\!\!\int\left[\exp\left(\delta s+\varepsilon|Y(s)+f(Y(s),u)|\right)-\exp\left(\delta s+\varepsilon|Y(s)|\right)\right]I\big(\min(|X(s)|,|Y(s)|)\le R\big)\nu(ds,du)\right). \qquad (8)$$

Если $\min(|X(s)|,|Y(s)|)>R$, то, используя доказательство леммы 1, получим, что математическое ожидание левой части выражения (8) меньше 0.

Если $\min(|X(s)|,|Y(s)|)\le R$, то либо $|X(s)|>\widetilde{R}$, либо $|Y(s)|>\widetilde{R}$.

Тогда, используя доказательство леммы 1, имеем:

$$E\big(\exp(\delta(t\wedge\gamma\wedge T_N)+\varepsilon|X(t\wedge\gamma\wedge T_N)|)-\exp(\varepsilon|x|)+\exp(\delta(t\wedge\gamma\wedge T_N)+\varepsilon|Y(t\wedge\gamma\wedge T_N)|)-\exp(\varepsilon|y|)\big)\le$$

$$\le E\left(-c\int_0^{t\wedge\gamma\wedge T_N}\exp\left(\delta s+\varepsilon|X(s)|\right)I\left(\left(|X(s)|>\widetilde{R}\right)\cap\left(|Y(s)|<R\right)\right)ds\right)+$$

$$+E\left(\left(\exp\left(\delta(t\wedge\gamma\wedge T_N)+\varepsilon R\right)-\exp\left(\varepsilon|y|\right)\right)I\left(\left(|X(s)|>\widetilde{R}\right)\cap\left(|Y(s)|<R\right)\right)\right)+$$

$$+E\left(-c\int_0^{t\wedge\gamma\wedge T_N}\exp\left(\delta s+\varepsilon|Y(s)|\right)I\left(\left(|Y(s)|>\widetilde{R}\right)\cap\left(|X(s)|<R\right)\right)ds\right)+$$

$$+E\left(\left(\exp\left(\delta(t\wedge\gamma\wedge T_N)+\varepsilon R\right)-\exp\left(\varepsilon|x|\right)\right)I\left(\left(|Y(s)|>\widetilde{R}\right)\cap\left(|X(s)|<R\right)\right)\right)\le$$

$$\le E\left(-c\int_0^{t\wedge\gamma\wedge T_N}\exp\left(\delta s+\varepsilon\widetilde{R}\right)I\left(\left(|X(s)|>\widetilde{R}\right)\cap\left(|Y(s)|<R\right)\right)ds\right)+$$

$$+E\left(\delta\int_0^{t\wedge\gamma\wedge T_N}\exp\left(\delta s+\varepsilon R\right)I\left(\left(|X(s)|>\widetilde{R}\right)\cap\left(|Y(s)|<R\right)\right)ds\right)+$$

$$+E\left(-c\int_{0}^{t\wedge\gamma\wedge T_N}\exp\left(\delta s+\varepsilon\widetilde{R}\right)I\left(\left(|Y(s)|>\widetilde{R}\right)\cap\left(|X(s)|<R\right)\right)ds\right)+$$

$$+E\left(\delta\int_{0}^{t\wedge\gamma\wedge T_N}\exp\left(\delta s+\varepsilon R\right)I\left(\left(|Y(s)|>\widetilde{R}\right)\cap\left(|X(s)|<R\right)\right)ds\right), \qquad (9)$$

где $c=c(\varepsilon,\delta,R)$ - положительная константа.

Выбрав достаточно большое $\widetilde{R}$, добьемся, того, что правая часть неравенства (9) будет меньше 0.

$$E\left(\exp\left(\delta(t\wedge\gamma\wedge T_N)+\varepsilon|X(t\wedge\gamma\wedge T_N)|\right)-\exp\left(\varepsilon|x|\right)+\exp\left(\delta(t\wedge\gamma\wedge T_N)+\varepsilon|Y(t\wedge\gamma\wedge T_N)|\right)-\exp\left(\varepsilon|y|\right)\right)\le 0$$

В силу леммы Фату при $t,N\to\infty$ получаем:

$$E_{x,y}\exp(\delta\gamma)\le\frac{\exp(\varepsilon|x|)-\exp(\varepsilon|y|)}{\exp(\varepsilon(\widetilde{R}-H))}.$$

Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы 1.

Пусть $X(t), X'(t)$ - две независимые копии решений уравнения (1) с независимыми винеровскими процессами $w(t)$ и $w'(t)$ и пуассоновскими мерами $\nu(t,A)$ и $\nu'(t,A)$, определенные на общем вероятностном пространстве и такие, что $X(0)=x$, а $X'(0)$ имеет инвариантное распределение μ_{inv}. Покажем, что пара $\left(X(t),X'(t)\right)$ возвратна и можно применять аргументы метода склейки. Пусть $s\ge 0$, а $\widetilde{R}$ - число, из леммы 3. Определим последовательность моментов остановки: $\gamma_0=s$,

$$\gamma_1=\inf\left(t\ge s:\max\left(|X(t)|,|X'(t)|\right)\le\widetilde{R}\right),\ \text{а для } n\ge 1$$

$$T_n=\inf\left(t\ge\gamma_n:\max\left(|X(t)|,|X'(t)|\right)\ge\widetilde{R}+1\right),$$

$$T_n^{/}=\min\left(T_n,\gamma_n+1\right),$$

$$\gamma_n=\inf\left(t\ge T_n^{/}:\max\left(|X(t)|,|X'(t)|\right)\le\widetilde{R}\right).$$

Согласно лемме 3,

$$E\left(\exp(\delta(\gamma_1-s))\middle|\Im_s^{X,X'}\right)\le CE\left(\exp\left(\varepsilon|X(s)|\right)+\exp\left(\varepsilon|X'(s)|\right)\middle|\Im_s^{X,X'}\right),$$

$$E\left(\exp\left(\delta(\gamma_{n+1}-T_n^{/})\right)\middle|\Im_{\gamma_n}^{X,X'}\right)\le 2C\exp\left(\varepsilon\max(\widetilde{R}+1,\widetilde{R}+H)\right),$$

$$E\left(\exp(\delta(\gamma_{n+1}-\gamma_n))\middle|\Im_{\gamma_n}^{X,X'}\right)=E\left(\exp\left(\delta(\gamma_{n+1}-T_n^{/}+T_n^{/}-\gamma_n)\right)\middle|\Im_{\gamma_n}^{X,X'}\right)=$$

$$=E\left(\exp\left(\delta(\gamma_{n+1}-T_n^{/})\right)\exp\left(\delta(T_n^{/}-\gamma_n)\right)\middle|\Im_{\gamma_n}^{X,X'}\right)\le\exp(\delta)E\left(\exp\left(\delta(\gamma_{n+1}-T_n^{/})\right)\middle|\Im_{\gamma_n}^{X,X'}\right)\le$$

$$\le 2C\exp(\delta)\exp\left(\varepsilon\max(\widetilde{R}+1,\widetilde{R}+H)\right)$$

Рассмотрим $E\exp(\delta(\gamma_n-s))=E\left(\exp(\delta(\gamma_1-s))\exp\left(\delta(\gamma_2-\gamma_1\right)\ldots\exp\left(\delta(\gamma_n-\gamma_{n-1}\right)\middle|\Im_s^{X,X'}\right)$.

В силу строго марковского свойства и доказанного выше получим:

$$E\exp(\delta(\gamma_n-s))\le 2C^n\exp(\delta n)\exp\left(n\varepsilon\max(\widetilde{R}+1,\widetilde{R}+H)\right)E\left(\exp\left(\varepsilon|X(s)|\right)+\exp\left(\varepsilon|X'(s)|\right)\middle|\Im_s^{X,X'}\right).$$

Следовательно, для $n(t)=\sup\left(n\ge 0:\gamma_n\le t\right), t\ge s$, мы получим в частности, что

$$P\left(n(t)\to\infty,t\to\infty\right)=1.$$

Значит, процесс $\left(X(t),X'(t)\right)$ положительно возвратен, и можно использовать метод склейки. А именно возможно определить новый случайный процесс $\widetilde{X}(t)$ и момент остановки $L_s\ge s$ на некотором расширении исходного вероятностного пространства такие, что $\widetilde{X}(t)$ удовлетворяет уравнению (1) с начальным условием $\widetilde{X}(0)=x$ и новым винеровским процессом $\widetilde{w}(t)$ и пуассоновской мерой $\widetilde{\nu}(t,A)$, а также

$$P\left(\widetilde{X}(t)=X(t), t\le L_s-1\right)=P\left(\widetilde{X}(t)=X'(t), t\ge L_s\right)=1.$$

Прежде чем описывать алгоритм склеивания получим еще один необходимый нам результат. Рассмотрим решение стохастического дифференциального уравнения:

$$dZ(t)=b(Z(t))dt+\sigma(Z(t))dw(t), \qquad Z(0)=z. \tag{10}$$

Пусть $B=\left\{z\in R^d : |z|\le\widetilde{R}\right\}$, положим, $\tau_0=0$, $\tau_{n+1}=\inf\{t>\tau_n : Z(t)\in B\}$. Определим «процесс на B», $Z_n=Z(\tau_n)$, и обозначим через $P(z,dy)$ его переходную функцию. В силу невырожденности диффузии случайный процесс Z_n удовлетворяет условию Деблина:

$$\inf_{x,x'}\int\min\{P(x,dy),P(x',dy)\}=k(\widetilde{R})>0; \tag{11}$$

это условие означает, в частности, что $\forall\, x,x'$ абсолютно непрерывная часть меры $P(x,dy)$ относительно $P(x',dy)$ не равна 0.

Пусть $Z(t), Z'(t)$ - две независимые копии решений уравнения (10) с независимыми винеровскими процессами $w(t)$ и $w'(t)$, определенные на общем вероятностном пространстве и такие, что $Z(0)=z$, а $Z'(0)=z'$. Определим последовательность моментов остановки: $\gamma_0=0$,

$$\gamma_1=\inf\left(t\ge 0:\max\left(|Z(t)|,|Z'(t)|\right)\le\widetilde{R}\right), \text{ а для } n\ge 1$$
$$T_n=\inf\left(t\ge\gamma_n:\max\left(|Z(t)|,|Z'(t)|\right)\ge\widetilde{R}+1\right),$$
$$T_n^{/}=\min(T_n,\gamma_n+1),$$
$$\gamma_n=\inf\left(t\ge T_n^{/}:\max\left(|Z(t)|,|Z'(t)|\right)\le\widetilde{R}\right).$$

Рассмотрим случайный процесс $\widetilde{Z}_n=Z(\gamma_n)$, и обозначим через $\widetilde{P}(z,dy)$ его переходную функцию. Покажем, что переходные функции процесса $\widetilde{Z}_n$ удовлетворяют условию (11).

$\widetilde{P}(z,dy)=\sum_{n=1}^{+\infty}P^n(z,dy)P(\tau_n=\gamma_n)$, в силу независимости случайных процессов $Z(t), Z'(t)$.

$$\inf_{x,x'}\int\min\left\{\widetilde{P}(x,dy),\widetilde{P}(x',dy)\right\}=\inf_{x,x'}\int\min\left\{\sum_{n=1}^{+\infty}P^n(x,dy)P(\tau_n=\gamma_n),\sum_{n=1}^{+\infty}P^n(x',dy)P(\tau_n=\gamma_n)\right\}\ge$$

$$\ge\inf_{x,x'}\int\sum_{n=1}^{+\infty}P(\tau_n=\gamma_n)\min\left\{P^n(x,dy),P^n(x',dy)\right\}.$$

Рассмотрим $\inf\limits_{x,x'}\int\min\left\{P^n(x,dy),P^n(x',dy)\right\}=\inf\limits_{x,x'}\int\min\left\{\int P^{n-1}(z,dy)P(x,dz),\int P^{n-1}(z,dy)P(x',dz)\right\}\ge$
$\ge\inf\limits_{x,x'}\int\int P^{n-1}(z,dy)\min\{P(x,dz),P(x',dz)\}=k(\widetilde{R})>0$.

Значит, $\inf\limits_{x,x'}\int\min\left\{\widetilde{P}(x,dy),\widetilde{P}(x',dy)\right\}\ge k(\widetilde{R})\sum\limits_{n=1}^{+\infty}P(\tau_n=\gamma_n)=k(\widetilde{R})$, в силу возвратности процесса $(Z(t),Z'(t))$ [1].

Опишем алгоритм склеивания процессов $X(t)$ и $X'(t)$.

1. Реализуем пуассоновские меры $\nu([s,\gamma_2],R^d)$ и $\nu'([s,\gamma_2],R^d)$.

А) Если $\max\left(\nu([s,\gamma_1],R^d),\nu'([s,\gamma_1],R^d)\right)>0$, то считаем процессы $X(t)$ и $X'(t)$ независимыми до момента остановки γ_1, а в момент времени γ_1 вновь возвращаемся к пункту 1 с заменой s на γ_1, γ_1 на γ_2.

Б) Если $\max\left(\nu([s,\gamma_1],R^d),\nu'([s,\gamma_1],R^d)\right)=0$, а вероятность этого события больше 0, в силу доказанного выше и определения пуассоновской меры, то рассматриваем случайные величины $X_1=X(\gamma_1)$, $X'_1=X'(\gamma_1)$. В этом случае распределения этих случайных величин совпадают с некоторыми распределениями случайных величин $\tilde{Z}_1$, т.е. переходная функция случайной величины X_1 равна $\tilde{P}(X(s),dy)$, переходная функция случайной величины X'_1 равна $\tilde{P}(X'(s),dy)$. Как было показано выше эти переходные функции удовлетворяют условию Деблина. Значит, $\exists$ вероятностная мера F, такая, что $\forall A,x$ выполнены неравенства: $P(x,A) > k(\tilde{R})F(A)$, в качестве меры F можно, например, взять $\dfrac{\inf\limits_{x,x'} \int\limits_A \min\left\{\tilde{P}(x,dy),\tilde{P}(x',dy)\right\}}{k(\tilde{R})}$. Тогда:

$$\tilde{P}(X(s),A) = k(\tilde{R})F(A) + (1-k(\tilde{R}))Q(X(s),A),$$

$$\tilde{P}(X'(s),A) = k(\tilde{R})F(A) + (1-k(\tilde{R}))Q(X'(s),A),$$

где $Q(x,A) = \dfrac{\tilde{P}(x,A) - k(\tilde{R})F(A)}{(1-k(\tilde{R}))}$.

Поступаем следующим образом: на некотором новом независимом вероятностном пространстве подбрасываем две "$k(\tilde{R})$-монеты".

Б.1. Если на обеих монетах выпал благоприятный исход, а это происходит с вероятностью $k^2(\tilde{R})$, то останавливаем случайный процесс $X(t)$ в момент времени s, реализуем случайную величину X'_1 в соответствии с распределением F и с момента времени γ_1 считаем процесс $\tilde{X}(t)$, совпадающим с процессом $X'(t)$. На некотором новом вероятностном пространстве достроим траекторию процесса $\tilde{X}(t)$, попадающую в уже найденную точку $X'(\gamma_1)$, так чтобы случайный процесс $\tilde{X}(t)$ был решением уравнения (1).

Б.2. Если на одной из монет выпал неблагоприятный исход, то считаем процессы $X(t)$ и $X'(t)$ независимыми до момента времени γ_1, а в момент времени γ_1 вновь возвращаемся к пункту 1 с заменой s на γ_1, γ_1 на γ_2.

Повторяем этот алгоритм до тех пор, пока в кокой-то момент времени γ_i процессы $X(t)$ и $X'(t)$ не будут склеены.

Формулировку этого эвристического подхода в точных математических терминах можно найти в [4]. Таким образом, допуская некоторую вольность речи, можно сказать, что процессы $X(t)$ и $X'(t)$ достаточно часто возвращаются в шар $\left\{x : |x| \le \tilde{R}\right\}$, а когда $t = \gamma_n$ они могут быть склеенными в момент $t = \gamma_{n+1}$, либо остаться независимыми, т.е. $\sup\limits_{s \ge 0} P\left(L_s > \gamma_n \middle| \Im_s^{X,X'} \right) \le q^n$. (12)

Применив неравенство склеивания, мы получим для каждого $B \in \Im_{\ge t+s}^{X,X'}$:

$$\left| P\left(B \middle| \Im_s^{X,X'} \right) - \mu_{inv}(B) \right| \le P\left(L_s > t+s \middle| \Im_s^{X,X'} \right). \tag{13}$$

Подставим в (13) значение $s = 0$ и запишем оценку через неравенство Гельдера с некоторыми $a,b > 1$, $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$:

$$\operatorname{var}\left(P(t,x,\cdot) - \mu_{inv}(\cdot)\right) \le P\left(L_0 > t\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} E_{x,\mu_{inv}} I(L_0 > t) I(\gamma_n < t < \gamma_{n+1}) \le \sum_{n=0}^{+\infty} P^{\frac{1}{a}}(L_0 > t) P^{\frac{1}{b}}(t < \gamma_{n+1}).$$

Из (10) следует, что $P^{\frac{1}{a}}(L_0 > t) \le q^{\frac{n}{a}}$. Из неравенства Чебышева и следствия 1имеем:

$$P(\gamma_{n+1} > t) \le \exp(-\delta t) E \exp(\delta \gamma_{n+1}) \le \exp(-\delta t) C^{n+1} \left(\exp(\varepsilon |x|) + E_{\mu_{inv}} \exp(\varepsilon |X'(0)|) \right) \le$$

$$\le \exp(-\delta t) C^{n+1} K \exp(\varepsilon |x|), \qquad K > 0.$$

Значит, $\operatorname{var}\left(P(t,x,\cdot)-\mu_{inv}(\cdot)\right)\le (CK)^{1/b}\exp\left(\frac{\varepsilon}{b}|x|-\frac{\delta}{b}t\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(q^{1/a}C^{1/b}\right)^n$.

Взяв значение a близким к единице, добьемся того, что $q^{1/a}C^{1/b}<1$, ряд сходится и

$$\operatorname{var}\left(P(t,x,\cdot)-\mu_{inv}(\cdot)\right)\le \widetilde{C}\exp\left(\frac{\varepsilon}{b}|x|-\frac{\delta}{b}t\right).$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2.

$$E\left|P\left(B\middle|\Im_s^X\right)-P(B)\right|\le\left|P(B)-\mu_{inv}(B)\right|+E\left|P\left(B\middle|\Im_s^X\right)-\mu_{inv}(B)\right|\le P(L_0>t)+EP\left(L_s>t+s\middle|\Im_s^{X,X'}\right).$$

В силу теоремы 1 $P(L_0>t)\le\widetilde{C}\exp\left(\frac{\varepsilon}{b}|x|-\frac{\delta}{b}t\right)$.

Применив следствие 1, получим: $EP\left(L_s>t+s\middle|\Im_s^{X,X'}\right)\le\widetilde{C}'\exp\left(\frac{\varepsilon}{b}|x|-\frac{\delta}{b}t\right)$.

Таким образом $E\left|P\left(B\middle|\Im_s^X\right)-P(B)\right|\le(\widetilde{C}+\widetilde{C}')\exp\left(\frac{\varepsilon}{b}|x|-\frac{\delta}{b}t\right),\quad \forall\, B,s.$ (14)

Проинтегрировав правую часть неравенства (14) по мере μ_{inv} получим:

$$\overline{\beta}_t\le K(\widetilde{C}+\widetilde{C}')\exp\left(-\frac{\delta}{b}t\right).$$

Теорема 2 доказана.

Заключение. Как уже говорилось во введении, полученная оценка для скорости β - перемешивания имеет широкое применение в различных предельных теоремах теории вероятностей.

Используя полученную оценку, можно обобщить ряд предельных теорем на случай однородного стохастического дифференциального уравнения (1).

Коэффициенты c_1, c_2, c_3, c_4 из теоремы 1 и теоремы 2 можно выбрать, используя приведенные выше доказательства лемм. Теоремы 1 и 2 можно было доказать, не используя метод склеивания, а применяя классическую технику, приведенную в [7].

РЕЗЮМЕ

В роботі розглянуті умови, накладені на коефіцієнти стохастичного диференційного рівняння, при яких для слабкого розв'язку коефіцієнт повної регулярності убуває з експоненційною швидкістю.

SUMMARY

The paper contains conditions, when the coefficient of the mixing has exponentional bounds.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Веретенников А.Ю. Об оценках скорости перемешивания для стохастических уравнений. – Теория вероятностей и ее применения – 1987. – Вып.2 – С.299-308.
2. Скороход А.В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. – К.: Наукова думка – 1987. – 328 с.
3. Meyn S.P., Tweedie R.L. Markov Chains and Stochastic Stability. – Berlin: Springer-Verlag. – 1993. – 550 p.
4. Нуммелин Е. Общие неприводимые цепи Маркова и неотрицательные операторы. – М: Мир. – 1989. – 207 с.
5. Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. – М: Наука. – 1979. – 424 с.
6. Вентцель А.Д. Уточнение функциональной центральной предельной теоремы для стационарных процессов. – Теория вероятностей и ее применения – 1989. – Вып.3 – С.451-464.
7. Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы. – М: ИЛ – 1956. – 606 с.

Надійшла до редакції 29.04.2005 р.

УДК 517.5

ТЕОРЕМЫ ТИПА МОРЕРЫ НА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

В.Е.Силенко
Донецкий государственный университет экономики и торговли

Введение. Пусть $\mathbf{C}$ – комплексная плоскость, $D=\{z\in\mathbf{C}:|z|<1\}$. Группа G конформных автоморфизмов круга D состоит из комплексных матриц $g=\begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a}\end{pmatrix}$, $|a|^2-|b|^2=1$ и действует транзитивно на D посредством отображений $g\circ z=\dfrac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}$ $(z\in D)$. Разложение Ивасавы группы G имеет вид $G=KAN$, где $K=\mathrm{SO}(2)$ – группа вращений $\mathbf{C}$, $A=\left\{a_t=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}\,t & \mathrm{sh}\,t \\ \mathrm{sh}\,t & \mathrm{ch}\,t\end{pmatrix}: t\in\mathbf{R}\right\}$, $N=\left\{n_s=\begin{pmatrix}1+is & -is \\ is & 1-is\end{pmatrix}: s\in\mathbf{R}\right\}$ (см., например, [1, с. 92]).

Рассмотрим следующую задачу. Пусть $f\in C(D)$ и для некоторой кусочно-гладкой замкнутой кривой $\gamma\in D$

$$\int_{g\gamma} f(z)dz=0 \qquad \text{для всех } g\in G \tag{1}$$

Следует ли отсюда, что f голоморфна в D? В общем случае ответ отрицательный (см., например, [2]), но при некоторых дополнительных предположениях голоморфность f имеет место. Одним из таких предположений является условие $f\in L^2(D)$, полученное М. Л. Аграновским в [3, теорема 1]. Это условие, являясь весьма общим, неточно для некоторых конкретных контуров. Например, в случае, когда γ – окружность, неулучшаемые условия получены В. В. Волчковым в [2, теорема 1].

Пусть $s_1,s_2,t_1,t_2\in\mathbf{R}$. Будем называть гиперболическими прямоугольниками множества $\{z=n_s a_t\circ 0\colon s_1\le s\le s_2,\, t_1\le t\le t_2\}$. Для $\alpha>0$ обозначим

$$Q_\alpha=\{z=n_s a_t\circ 0\colon 0\le s\le\alpha,\, 0\le t\le 1\}.$$

В данной работе в качестве контура γ берется граница гиперболического прямоугольника Q_α. Условие (1) ослабляется: оно предполагается выполненным лишь для g из подгруппы NA. При этом показано, что условие $f\in L^2(D)$, накладывающее ограничения на поведение функции вблизи всей границы круга D, можно заменить ограничениями на рост функции лишь в одной точке границы ∂D (см. теорему 1 ниже). Также в работе рассматривается обобщение вышеприведенной задачи на случай двух прямоугольников (см. теорему 2 ниже). По поводу других результатов, связанных с теоремой Мореры, см. [4] – [9] и обширную библиографию к этим работам.

1. Формулировки основных результатов. Будем трактовать круг D как плоскость Лобачевского $\mathbf{H}^2$ с неевклидовым расстоянием $d(z_1,z_2)$ между точками z_1, $z_2\in D$ (см., например, [1, с. 46]). Как обычно, далее гиперболическими прямыми называются дуги окружностей (и диаметры) в D, ортогональные границе ∂D, а орициклами – евклидовы окружности в D, касающиеся ∂D. Обозначим

$$\Xi_\tau=\{n_s a_t\circ 0\colon\ s\in\mathbf{R},\tau\le t\le\tau+1\};$$

$$\Lambda_\sigma=\{n_s a_t\circ 0\colon\ \sigma\le s\le\sigma+1,\, t\ge 0\}.$$

Нетрудно видеть, что множество Ξ_τ представляет собой часть круга D, заключенную между двумя орициклами с общей точкой $z_0=1$, а множество Λ_σ ограничено двумя гиперболическими прямыми, входящими в z_0, и дугой орицикла $|z-1/2|=1/2$.

Теорема 1. 1) Пусть $f\in C(D)$ и для некоторого $\alpha>0$

$$\int\limits_{\partial(gQ_\alpha)} f(z)dz=0 \qquad \text{для всех } g\in NA \tag{2}$$

Тогда если

$f(z)=o\left(\frac{1}{1-|z|}\right)$ при $z\to 1$ по гиперболическим прямым,

$f(z)=o\left(\frac{1}{1-|z|}\right)$ при $z\to 1$ по орициклам,

$$\forall\tau\in\mathbf{R}\quad f(z)=O\left(\frac{1}{1-|z|}\right) \quad \text{при } z\to 1,\quad z\in\Xi_\tau, \tag{3}$$

$$\forall\sigma\in\mathbf{R}\quad f(z)=O\left(\frac{1}{1-|z|}\right) \quad \text{при } z\to 1,\quad z\in\Lambda_\sigma, \tag{4}$$

то $f(z)$ голоморфна в D.

2) Существует неголоморфная функция $f\in C^1(D)$, удовлетворяющая (2), (3), (4) и такая, что

$f(z)=O\left(\frac{1}{1-|z|}\right)$ при $z\to 1$ по гиперболическим прямым,

$f(z)=o\left(\frac{1}{1-|z|}\right)$ при $z\to 1$ по орициклам.

3) Существует неголоморфная функция $f\in C^1(D)$, удовлетворяющая (2), (3), (4) и такая, что

$f(z)=o\left(\frac{1}{1-|z|}\right)$ при $z\to 1$ по гиперболическим прямым,

$f(z)=O\left(\frac{1}{1-|z|}\right)$ при $z\to 1$ по орициклам.

Теорема 2. 1) Пусть $f\in C(D)$ и для некоторых $\alpha_1,\alpha_2>0$

$$\int\limits_{\partial(gQ_{\alpha_1})} f(z)dz=\int\limits_{\partial(gQ_{\alpha_2})} f(z)dz=0 \qquad \text{для всех } g\in NA \tag{5}$$

Тогда если $\alpha_1/\alpha_2\notin\mathbf{Q}$,

$f(z)=o\left(\frac{1}{1-|z|}\right)$ при $z\to 1$ по гиперболическим прямым,

$\forall\sigma\in\mathbf{R}\quad f(z)=O\left(\frac{1}{1-|z|}\right)$ при $z\to 1,\quad z\in\Lambda_\sigma$,

то $f(z)$ голоморфна в D.

2) Если $\alpha_1/\alpha_2\in\mathbf{Q}$, то существует неголоморфная функция $f\in C^1(D)$, удовлетворяющая (5), (4) и такая, что

$f(z)=o\left(\frac{1}{1-|z|}\right)$ при $z\to 1$ по гиперболическим прямым.

3) Для любых $\alpha_1,\alpha_2>0$ существует неголоморфная функция $f\in C^1(D)$, удовлетворяющая (5), (4) и такая, что

$f(z)=O\left(\frac{1}{1-|z|}\right)$ при $z\to 1$ по гиперболическим прямым.

2. Примеры функций с нулевыми интегралами по границам гиперболических прямоугольников. Обозначим для $z \in D$

$t(z) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}\right)$, $s(z) = \frac{-\operatorname{Im} z}{|1-z|^2}$. Тогда $n_{s(z)}a_{t(z)} \circ 0 \equiv z$ для всех $z \in D$, и

$$\frac{\partial s(z)}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2i(1-\overline{z})^2}, \left|\frac{\partial s(z)}{\partial \overline{z}}\right| = \frac{e^{2t(z)}}{2(1-|z|^2)}, \frac{\partial t(z)}{\partial \overline{z}} = \frac{1-z}{2(1-|z|^2)(1-\overline{z})}, \left|\frac{\partial t(z)}{\partial \overline{z}}\right| = \frac{1}{2(1-|z|^2)}, \tag{6}$$

$$\frac{1}{1-\left|n_{s(z)}a_{t(z)} \circ 0\right|} = \frac{\left(e^{2t(z)}+1\right)^2 + 4s^2(z)}{4e^{2t(z)}} \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{\left(e^{2t(z)}-1\right)^2 + 4s^2(z)}{\left(e^{2t(z)}+1\right)^2 + 4s^2(z)}}\right), \tag{7}$$

$$\frac{1}{1-\left|n_{s(z)}a_{t(z)} \circ 0\right|^2} = \frac{1}{4}\left(e^{2t(z)} + 2 + e^{-2t(z)} + 4s^2(z)e^{-2t(z)}\right).$$

Приведем примеры неголоморфных функций $f(z)$, которые для всех $g \in NA$ удовлетворяют условию $\int\limits_{\partial(gQ_\alpha)} f(z)dz = 0$.

Лемма 1. Пусть $f(z) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}\ln\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}} \frac{e^{i2\pi\tau}}{\left(z-3+(1-z)e^{2\tau}\right)^2} d\tau$. Тогда

1) $f \in C^1(D)$ и для всех $g \in NA$ и $\alpha > 0$ $\int\limits_{\partial(gQ_\alpha)} f(z)dz = 0$,

2) $f(z) = O\left(\frac{1}{1-|z|}\right)$ при $z \to 1$ по гиперболическим прямым,

3) $f(z) = O(1)$ при $z \to 1$ по орициклам.

Доказательство. Так как $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = \frac{1}{\left(\frac{1-z\cdot\overline{z}}{1-\overline{z}}+z-3\right)^2} \cdot \exp\left(i\pi\ln\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}\right) \cdot \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\ln\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}\right)$, то

$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = \frac{(1-z)(1-\overline{z})}{2(1-z\cdot\overline{z})\left(2-z-3\overline{z}+z\cdot\overline{z}\right)^2} \cdot \exp\left(i\pi\ln\frac{1-z\cdot\overline{z}}{(1-z)(1-\overline{z})}\right)$. Отсюда

$$\left(1-|z|^2\right)^2 \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = -\frac{1-z\cdot\overline{z}}{2(1-z)(1-\overline{z})} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\overline{z}-z}{i(1-z)(1-\overline{z})}\right)^2} \cdot \exp\left(i\pi\ln\frac{1-z\cdot\overline{z}}{(1-z)(1-\overline{z})}\right),$$

$\left(1-|z|^2\right)^2 \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = -\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{\left(\frac{-\operatorname{Im} z}{|1-z|^2}+i\right)^2} \cdot \exp\left((1+i\pi)\ln\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}\right)$. Значит, обозначая для $\sigma, \tau \in \mathbf{R}$

$p_1(\sigma) = -1\Big/\left(8(\sigma+i)^2\right)$, $p_2(\tau) = \exp\left((2+i2\pi)\tau\right)$, получаем

$$\left(1-|z|^2\right)^2 \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = p_1\left(\frac{-\operatorname{Im} z}{|1-z|^2}\right) \cdot p_2\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}\right).$$

По формуле Грина $\int\limits_{\partial(gQ_\alpha)} f(z)dz = 2i \iint\limits_{gQ_\alpha} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} dxdy$. Так как для $g = n_u a_v$

$\iint\limits_{gQ_\alpha} \left(1-|z|^2\right)^2 \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \frac{dxdy}{\left(1-|z|^2\right)^2} = \int\limits_u^{u+\alpha e^{2v}} p_1(\sigma)d\sigma \int\limits_v^{v+1} p_2(\tau)e^{-2\tau}d\tau$, и $\int\limits_v^{v+1} e^{i2\pi\tau}d\tau = 0$ для всех $v \in \mathbf{R}$, то

$\int\limits_{\partial(gQ_\alpha)} f(z)dz = 0$ для всех $g \in NA$ и $\alpha > 0$.

Исследуем поведение функции при $z \to 1$. Так как

$f\left(n_{s(z)}a_{t(z)} \circ 0\right) = -\frac{1}{4}t(z)\left(e^{2t(z)} + 1 - 2is(z)\right)^2 \cdot \int\limits_0^1 \frac{e^{i2\pi t(z)\tau}}{\left(2s(z) + i(e^{2t(z)} - e^{2t(z)\tau} + 2)\right)^2} d\tau$, то

$$\left|f\left(n_{s(z)}a_{t(z)} \circ 0\right)\right| \le \frac{|t(z)|}{4}\left[\left(e^{2t(z)} + 1\right)^2 + 4s^2(z)\right] \cdot \int\limits_0^1 \frac{d\tau}{4s^2(z) + \left(e^{2t(z)} - e^{2t(z)\tau} + 2\right)^2} =$$

$$= \begin{cases} \frac{\operatorname{sign} t}{8} \cdot \frac{4s^2 + \left(e^{2t}+1\right)^2}{4s^2 + \left(e^{2t}+2\right)^2}\left[4t + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4s^2e^{-4t} + \left(e^{-2t}+1\right)^2}{4s^2+4}\right) + \frac{e^{2t}+2}{2s}\left(\operatorname{arctg}\frac{e^{2t}+1}{2s} - \operatorname{arctg}\frac{1}{s}\right)\right], & s \ne 0 \\ \frac{\operatorname{sign} t}{8} \cdot \left(\frac{e^{2t}+1}{e^{2t}+2}\right)^2\left[4t + \ln\left(\frac{1+e^{-2t}}{2}\right) + \frac{e^{2t}}{2} - \frac{1}{e^{2t}+1}\right], & s = 0 \end{cases}$$

С учетом равенства (7), получаем, что все утверждения леммы 1 справедливы.

Лемма 2. Пусть $\alpha > 0$, $f_\alpha(z) = \frac{\operatorname{Im} z}{\left(1-z^2\right)\left(1-|z|^2\right)} \sum\limits_{j=0}^{+\infty} \exp\left(-2j - i\frac{2\pi}{\alpha}e^{-2j}\frac{\operatorname{Im} z}{1-|z|^2}\right)$. Тогда

1) $f_\alpha \in C^1(D)$ и для всех $g \in NA$ и $n \in \mathbf{N}$ $\int\limits_{\partial(gQ_{n\alpha})} f_\alpha(z)dz = 0$,

2) $f_\alpha(z) = O(1)$ при $z \to 1$ по гиперболическим прямым,

3) $f_\alpha(z) = O\left(\frac{1}{1-|z|}\right)$ при $z \to 1$ по орициклам.

Доказательство. Так как $f_\alpha(z) = \frac{-i(z-\overline{z})}{2\left(1-z^2\right)\left(1-z\cdot\overline{z}\right)} \sum\limits_{j=0}^{+\infty} \exp\left(-2j - \frac{\pi}{\alpha}e^{-2j}\frac{z-\overline{z}}{1-z\cdot\overline{z}}\right)$,

$\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\left(\frac{z-\overline{z}}{1-z\cdot\overline{z}}\right) = -\frac{1-z^2}{\left(1-z\cdot\overline{z}\right)^2}$, то

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial\overline{z}}(z) = \frac{i}{2\left(1-z\cdot\overline{z}\right)^2} \sum_{j=0}^{+\infty} \exp\left(-2j - \frac{\pi}{\alpha}e^{-2j}\frac{z-\overline{z}}{1-z\cdot\overline{z}}\right) +$$

$$+ \frac{-i(z-\overline{z})}{2\left(1-z^2\right)\left(1-z\cdot\overline{z}\right)} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\pi}{\alpha}e^{-2j}\frac{1-z^2}{\left(1-z\cdot\overline{z}\right)^2}\exp\left(-2j - \frac{\pi}{\alpha}e^{-2j}\frac{z-\overline{z}}{1-z\cdot\overline{z}}\right) =$$

$$= \frac{i}{2\left(1-z\cdot\overline{z}\right)^2} \sum_{j=0}^{+\infty}\left(1 - \frac{\pi}{\alpha}e^{-2j}\frac{z-\overline{z}}{1-z\cdot\overline{z}}\right)\exp\left(-2j - \frac{\pi}{\alpha}e^{-2j}\frac{z-\overline{z}}{1-z\cdot\overline{z}}\right),$$

$$-4i\left(1-|z|^2\right)^2\frac{\partial f_\alpha}{\partial\overline{z}}=2\sum_{j=0}^{+\infty}e^{-2j}\left(1+i\frac{2\pi}{\alpha}e^{-2(t(z)+j)}s(z)\right)\exp\left(i\frac{2\pi}{\alpha}e^{-2(t(z)+j)}s(z)\right).$$

Из формулы Грина следует равенство $\int\limits_{\partial(gQ_{n\alpha})}f_\alpha(z)dz=2i\iint\limits_{gQ_{n\alpha}}\left(1-|z|^2\right)^2\frac{\partial f_\alpha}{\partial\overline{z}}\frac{dxdy}{\left(1-|z|^2\right)^2}$.

Применим утверждение 5 теоремы 2 из [10] к функциям $f_1(s,t)\equiv 0$, $h(s,t)=e^{-2t}\exp\left(i\frac{2\pi}{\alpha}e^{-2t}s\right)$ и $f(z)=-4i\left(1-|z|^2\right)^2\frac{\partial f_\alpha}{\partial\overline{z}}=-e^{2t(z)}\sum\limits_{j=0}^{+\infty}\frac{\partial h}{\partial t}\left(s(z),t(z)+j\right)$. Получаем

$$\int\limits_u^{u+n\alpha e^{2v}}\int\limits_v^{v+1}f(n_\sigma a_\tau\circ 0)e^{-2\tau}d\tau d\sigma=\int\limits_u^{u+n\alpha e^{2v}}h(\sigma,v)d\sigma.$$

Так как $\int\limits_u^{u+n\alpha e^{2v}}h(\sigma,v)d\sigma=\int\limits_u^{u+n\alpha e^{2v}}e^{-2v}\exp\left(i\frac{2\pi}{\alpha}e^{-2v}\sigma\right)d\sigma=-\frac{i\alpha}{2\pi}\exp\left(i\frac{2\pi}{\alpha}e^{-2v}u\right)\cdot\left[e^{i2\pi n}-1\right]\equiv 0$, то для всех $n\in\mathbf{N}$, $u,v\in\mathbf{R}$ и $g=n_u a_v$

$$\int\limits_{\partial(gQ_{n\alpha})}f_\alpha(z)dz=2i\iint\limits_{gQ_{n\alpha}}\left(1-|z|^2\right)^2\frac{\partial f_\alpha}{\partial\overline{z}}\frac{dxdy}{\left(1-|z|^2\right)^2}=-2\int\limits_u^{u+n\alpha e^{2v}}\int\limits_v^{v+1}f(n_\sigma a_\tau\circ 0)e^{-2\tau}d\tau d\sigma=0.$$

Исследуем поведение функции при $z\to 1$. Так как $f_\alpha\left(n_{s(z)}a_{t(z)}\circ 0\right)=-\frac{1}{4}\frac{\left(e^{2t(z)}+1-2is(z)\right)^2}{e^{2t(z)}-2is(z)}\cdot s(z)e^{-2t(z)}\sum\limits_{j=0}^{+\infty}e^{-2j}\exp\left(i\frac{2\pi}{\alpha}e^{-2(t(z)+j)}s(z)\right)$, то

$\left|f_\alpha\left(n_{s(z)}a_{t(z)}\circ 0\right)\right|\le\frac{1}{4}\frac{\left(e^{2t(z)}+1\right)^2+4s^2(z)}{\sqrt{e^{4t(z)}+4s^2(z)}}\cdot|s(z)|e^{-2t(z)}\sum\limits_{j=0}^{+\infty}e^{-2j}$. С учетом равенства (7), получаем, что все утверждения леммы 2 справедливы.

3. Вспомогательные утверждения.

Лемма 3. Пусть $f(z)\in C^1(D)$, и для некоторого $\alpha>0$ $\int\limits_{\partial(gQ_\alpha)}f(z)dz=0$ для всех $g\in NA$.

Тогда если

$\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}=o\left(\frac{1}{(1-|z|)^3}\right)$ при $z\to 1$ по гиперболическим прямым,

$\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}=o\left(\frac{1}{(1-|z|)^{5/2}}\right)$ при $z\to 1$ по орициклам,

то $f(z)$ голоморфна в D.

Доказательство. Используя формулу Грина и применяя теорему 1 из [11] к функции $F(z)=\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}\cdot(1-|z|^2)^2$, получаем требуемое.

Лемма 4. Пусть $f(z)\in C^1(D)$ и для некоторых $\alpha_1,\alpha_2>0$, $\alpha_1/\alpha_2\notin\mathbf{Q}$

$$\int\limits_{\partial(gQ_{\alpha_1})}f(z)dz=\int\limits_{\partial(gQ_{\alpha_1})}f(z)dz=0\quad\text{для всех } g\in NA.$$

Тогда если

$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = o\left(\frac{1}{(1-|z|)^3}\right)$ при $z \to 1$ по гиперболическим прямым,

то $f(z)$ голоморфна в D.

Доказательство. Используя формулу Грина и применяя теорему 1 из [12] к функции $F(z) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \cdot (1-|z|^2)^2$, получаем требуемое.

4. Доказательство основных результатов. Обозначим для $z \in D$ $p(z) = \frac{(1-z)(1-|z|^2)}{1-\bar{z}}$, $q(z) = f(z) \cdot p(z)$. Можно показать, что

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{1}{p(z)}\right) = \frac{-1}{(1-|z|^2)^2} \tag{8}$$

Доказательство теоремы 1. Если $\int\limits_{\partial(gQ_\alpha)} f(z)dz = 0$ для всех $g \in NA$, то в силу [13, лемма 2]

$$\int\limits_{\partial(gQ_\alpha)} f(n_u a_v \circ z) \cdot \frac{p(n_u a_v \circ z)}{p(z)} dz = 0, \quad \forall g \in NA, . \forall u, v \in \mathbf{R} \tag{9}$$

Домножим тождество (9) на произвольную функцию $\varphi_\varepsilon(u,v)$, удовлетворяющую условиям: $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$, $\varphi_\varepsilon \geq 0$, $supp\,\varphi_\varepsilon \subset P_{2\varepsilon} = [-\varepsilon;\varepsilon] \times [-\varepsilon;\varepsilon]$, $\int\limits_{\mathbf{R}^2} \varphi_\varepsilon(u,v)dudv = 1$. Интегрируя, получим

$$\int\limits_{\mathbf{R}^2} \left\{ \int\limits_{\partial(gQ_\alpha)} q(n_u a_v \circ z) \frac{dz}{p(z)} \right\} \varphi_\varepsilon(u,v)dudv = 0 \quad \forall g \in NA.$$

По теореме Фубини отсюда следует, что

$$\int\limits_{\partial(gQ_\alpha)} F_\varepsilon(z)dz = 0, \quad \forall g \in NA, \ \forall \varepsilon > 0,$$

где $F_\varepsilon(z) = \int\limits_{\mathbf{R}^2} q(n_u a_v \circ z) \frac{\varphi_\varepsilon(u,v)}{p(z)} dudv = \frac{1}{p(z)} \int\limits_{\mathbf{R}^2} q(n_u a_v \circ z) \cdot \varphi_\varepsilon(u,v) dudv$.

Обозначим для $z \in D$ $P_{2\varepsilon,z} = \left\{(u + s(z)e^{2v}, t(z)+v) : (u,v) \in P_{2\varepsilon}\right\}$.

Тогда $F_\varepsilon(z) = \frac{1}{p(z)} \int\limits_{P_{2\varepsilon}} q\left(n_{u+s(z)e^{2v}} a_{t(z)+v} \circ 0\right) \cdot \varphi_\varepsilon(u,v) dudv =$

$$= \frac{1}{p(z)} \int\limits_{P_{2\varepsilon,z}} q(n_u a_v \circ 0) \cdot \varphi_\varepsilon(u - s(z)e^{2(v-t(z))}, v - t(z))dudv.$$

Так как $supp\,\varphi_\varepsilon \subset P_{2\varepsilon}$, то

$$\frac{\partial F_\varepsilon(z)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left[\frac{1}{p(z)}\right] \cdot \int\limits_{P_{2\varepsilon,z}} q(n_u a_v \circ 0) \cdot \varphi_\varepsilon(u - s(z)e^{2(v-t(z))}, v - t(z)) dudv +$$

$$+ \frac{1}{p(z)} \int\limits_{P_{2\varepsilon,z}} q(n_u a_v \circ 0) \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left[\varphi_\varepsilon(u - s(z)e^{2(v-t(z))}, v - t(z))\right] dudv.$$

Учитывая (6) и (8), можно показать, что существуют $M_1(\varepsilon), M_2(\varepsilon), M_3(\varepsilon) > 0$ такие, что

$$\left(1-|z|^2\right)^2 \left|\frac{\partial F_\varepsilon(z)}{\partial \overline{z}}\right| \le \left[M_1(\varepsilon) + M_2(\varepsilon)\cdot e^{2t(z)} + M_3(\varepsilon)\cdot|s(z)|\right]\cdot \int\limits_{P_{2\varepsilon}} \left|q\left(n_{u+s(z)e^{2v}} a_{t(z)+v} \circ 0\right)\right| dudv .$$

Из этого неравенства и условий теоремы 1 с помощью теоремы Лебега о мажорируемой сходимости получаем, что функция $F_\varepsilon(z) = \dfrac{1}{p(z)} \displaystyle\int\limits_{P_{2\varepsilon}} q(n_u a_v \circ z)\varphi_\varepsilon(u,v)dudv$ удовлетворяет всем условиям леммы 3. Следовательно, $F_\varepsilon(z)$ голоморфна в D для любого $\varepsilon > 0$.

В силу [13, лемма 3] при $\varepsilon \to 0$ $F_\varepsilon(z)$ сходится равномерно к $f(z)$ на компактных подмножествах D. Отсюда получаем голоморфность функции $f(z)$ в круге D.

Докажем второе утверждение теоремы. Рассмотрим функцию $f(z) = \displaystyle\int\limits_0^{\frac{1}{2}\ln\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}} \frac{e^{i2\pi\tau}}{\left(z-3+(1-z)e^{2\tau}\right)^2}d\tau$. Применяя лемму 1, получаем требуемое.

Положим $f_\alpha(z) = \dfrac{\operatorname{Im} z}{\left(1-z^2\right)\left(1-|z|^2\right)} \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \exp\left(-2j - i\frac{2\pi}{\alpha}e^{-2j}\frac{\operatorname{Im} z}{1-|z|^2}\right)$. Тогда из леммы 2 вытекает справедливость третьего утверждения теоремы.

Доказательство теоремы 2. Повторяя доказательство теоремы 1, получаем, что

$$\int\limits_{\partial(gQ_{\alpha_1})} F_\varepsilon(z)dz = \int\limits_{\partial(gQ_{\alpha_2})} F_\varepsilon(z)dz = 0, \quad \forall g \in NA, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

где $F_\varepsilon(z) = \dfrac{1}{p(z)} \displaystyle\int\limits_{\mathbf{R}^2} h(n_u a_v \circ z)\cdot\varphi_\varepsilon(u,v)dudv$,

$\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$, $\varphi_\varepsilon \ge 0$, $supp\varphi_\varepsilon \subset P_{2\varepsilon} = [-\varepsilon;\varepsilon]\times[-\varepsilon;\varepsilon]$, $\displaystyle\int\limits_{\mathbf{R}^2} \varphi_\varepsilon(u,v)dudv = 1$.

Также аналогично получаем, что функция $F_\varepsilon(z)$ удовлетворяет всем условиям леммы 5, и, значит, $F_\varepsilon(z)$ голоморфна в D для любого $\varepsilon > 0$.

В силу [13, лемма 3] при $\varepsilon \to 0$ $F_\varepsilon(z)$ сходится равномерно к $f(z)$ на компактных подмножествах D. Следовательно, $f(z)$ голоморфна в D.

Докажем второе утверждение теоремы. Так как $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = \dfrac{m_1}{m_2}$, где $m_1, m_2 \in \mathbf{N}$, то обозначим $\alpha = \alpha_1 m_2 = \alpha_2 m_1$ и рассмотрим функцию $f_\alpha(z) = \dfrac{\operatorname{Im} z}{\left(1-z^2\right)\left(1-|z|^2\right)} \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \exp\left(-2j - i\frac{2\pi}{\alpha}e^{-2j}\frac{\operatorname{Im} z}{1-|z|^2}\right)$.

Применяя лемму 2, получаем требуемое.

Положим $f(z) = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\ln\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}} \frac{e^{i2\pi\tau}}{\left(z-3+(1-z)e^{2\tau}\right)^2}d\tau$. Тогда из леммы 1 вытекает справедливость третьего утверждения теоремы 2.

РЕЗЮМЕ

Наведено нові теореми типу Морери в одиничному крузі.

SUMMARY

New Morera type theorems are given in the unit disk.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ. – М.: Мир, 1987. – 736 с.
2. Волчков В.В. Об одной проблеме Зальцмана и ее обобщениях // Матем. заметки. – 1993. – 53, вып.2. – С.30 – 36.
3. Аграновский М.Л. Преобразование Фурье на $SL_2(R)$ и теоремы типа Морера // ДАН СССР. – 1978. – 243, № 6. – С.1353 – 1356.
4. Айзенберг Л.А. Вариации на тему теоремы Морера и проблемы Помпейю // Доклады АН России. – 1994. – 337, № 6. – С.709 – 712.
5. Волчков В.В. Преобразование Помпейю. – Донецк: ДонГУ, 1999. – 210 с.
6. Berenstein C.A., Chang D.C., Pascuas D., Zalcman L. Variations on the theorem of Morera // Contemp. Math. – 1992. – 137. – P.63 – 78.
7. Volchkov V.V. Morera type theorems on the unit disk // Anal. Math. – 1997. – 20. – P.49 – 63.
8. Volchkov V.V. Integral Geometry and Convolution Equations. – Boston-London-Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.
9. Zalcman L. Analyticity and the Pompeiu problem // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1972. – 47. – P.237 – 254.
10. Силенко В.Е. Описание функций с заданными интегральными средними по гиперболическим прямоугольникам // Вісник Донецького університету, сер. А: Природничі науки. – 2004. – №1. – С. 18 – 22.
11. Силенко В.Е. О функциях с нулевыми интегралами по гиперболическим квадратам // Труды по геометрии и анализу – Новосибирск: Изд-во Института математики, 2003. – С. 384 – 388.
12. Силенко В.Е. Задача о двух квадратах на гиперболической плоскости // Вісник Донецького університету, сер. А: Природничі науки. – 2001. – №1. – С. 20 – 23.
13. Силенко В.Е. Новая теорема типа Мореры в единичном круге // Український математичний журнал. – 2001. – 53, №2. – С. 278 – 281.

Надійшла до редакції 05.05.2005 р.

МЕХАНІКА*

УДК 539.3

ОСЕСИМЕТРИЧНІ КОНТАКТНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПРУЖНИХ БАГАТОШАРОВИХ ПЛИТ

А.К.Приварников, О.Г.Спиця
Запорізький національний університет

Більшість розв'язків контактних задач теорії пружності присвячено пружному півпростору або багатошаровій основі [1, 2]. У роботах, в яких розглядалися контактні задачі для багатошарових плит [1, 3], кількість шарів не перевищувала трьох. В цій статті пропонується метод розв'язання контактної задачі для багатошарових плит з будь-яким скінченим числом шарів. Наведені чисельні результати розв'язків конкретних контактних задач.

Постановка задачі. Нехай штамп, який розглядається як опукле тіло обертання, силою Q вдавлюється у верхній шар багатошарової плити зі зчепленими ізотропними необмеженими у радіальному напрямку шарами. Бічна поверхня штампа циліндрична радіуса R. Нумерацію шарів плити проводимо зверху вниз, починаючи з одиниці. Усі величини, що відносяться до k-го шару, позначимо нижнім індексом k. Так, E_k, ν_k, h_k – відповідно модуль пружності, коефіцієнт Пуассона матеріалу k-го шару, його товщина відповідно. Введемо циліндричну систему координат r, φ, z з початком на верхній межі плити. Вісь z спрямуємо вниз. Поза областю контакту (коло радіуса $a \le R$) навантаження на плиту відсутнє. В області контакту $\tau_{rz} = 0$. Підошва штампа вважається гладкою, опуклою й пологою. На нижню межу плити діє довільне нормальне навантаження $\sigma_z = q(r)$, що врівноважує плиту. Функція $f(r)$ в рівнянні підошви штампа $z = f(r)$, а також її перша і друга похідні – гладкі й неперервні функції в області $0 < r < R$. Точка $r = 0$ підошви штампа може бути кутовою. Потрібно визначити напруження σ_z в області контакту і радіус a цієї області, якщо він невідомий. Будемо називати занурення штампа в плиту повним, якщо $a = R$. Якщо ж $a < R$, то занурення штампа назвемо неповним.

Поставленій контактній задачі відповідають такі граничні умови на верхній межі плити:

$$u_{z1}(r,0) = f(r) + c,\ \ 0 \le r \le a;\quad \sigma_{z1}(r,0) = 0,\ \ r > a;\quad \tau_{rz}(r,0) = 0,\ \ r \ge 0. \tag{1}$$

На нижній межі:

$$\sigma_{zn} = q(r),\quad \tau_{rzn} = 0.$$

Тут n – число шарів у багатошаровій плиті, c – переміщення штампу у напрямку вісі z.

Метод розв'язання. Переміщення u_z точок верхньої межі багатошарової плити і напруження σ_z на цій межі можна виразити через допоміжні функції $\alpha_1(p)$ й $\alpha_{n+1}(p)$ за формулами [4]:

$$\sigma_{z1}(r,0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty p\alpha_1(p) J_0(pr)\,dp,$$

$$\frac{E_1}{2\left(1-\nu_1^2\right)} u_{z1}(r,0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left[-\alpha_1(p) A_1(p) + Q\alpha_{n+1}(p) A_n^n(p)\right] J_0(pr)\,dp, \tag{2}$$

де $\alpha_1(p) = \int_0^\infty r\sigma_z(r,0) J_0(pr)\,dr$, $\alpha_{n+1}(p) = \int_0^\infty r\tilde{q}(r) J_0(pr)\,dr$, $\tilde{q}(r) = \dfrac{q(r)}{Q}$ – навантаження з одиничним головним вектором, $A_1(p)$, $A_n^n(p)$ – функції податливості відповідно першого та n-го шарів,

---

*В разделе «Механика» этого выпуска журнала публикуются тексты докладов, доложенных на III Международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы механики твердого деформируемого тела» (г.Донецк, 28-30 июня 2005 г.). В конце раздела (начиная со статьи авторов Шалдырван В.А., Васильев Т.А) публикуются также 4 статьи, не доложенные на конференции.

$J_0(x)$ – функція Бесселя.

Замінимо в умовах (1) $u_{z1}(r,0)$ і $\sigma_{z1}(r,0)$ інтегралами (2) і продиференціюємо обидві частини першого рівняння по *r*, прийдемо до парних рівнянь відносно невідомої функції $\alpha_1(p)$

$$\int_0^\infty p\alpha_1(p)J_1(pr)dp = F(r),\ \ 0 \le r < a;\ \ \int_0^\infty p\alpha_1(p)J_0(pr)dp = 0,\ \ r > a, \tag{3}$$

де

$$F(r) = \frac{\pi E_1 f'(r)}{1-\nu_1^2} + \int_0^\infty p\alpha_1(p)\left[1 - A_1(p)\right]J_1(pr)dp + Q\int_0^\infty p\alpha_{n+1}(p)A_n^n(p)J_1(pr)dp\,.$$

Нагадаємо, що $\lim\limits_{p\to\infty} A_1(p) = 1,\ \lim\limits_{p\to\infty} A_n^n(p) = 0$.

Ідея розв'язання рівнянь (3) полягає у відшуканні функції загального виду $\alpha_1(p)$, що задовольняє другому рівнянню (2). Потім її вид уточнюється таким чином, щоб вона задовольняла й першому рівнянню. Тому розв'язок парних рівнянь (3) будемо шукати у вигляді [4]:

$$p\alpha_1(p) = \int_0^a \chi(x)\sin px\,dx + B\sin pa\,, \tag{4}$$

де $\chi(x)$ – неперервна в області $[0,a]$ функція, а *B* – довільна константа.

Виразимо контактні напруження безпосередньо через функцію $\chi(r)$. Нормальні напруження на верхній межі плити зв'язані з функцією $\alpha_1(p)$ співвідношенням (2). Замінимо тут $p\alpha_1(p)$ згідно з (4), одержимо шукане співвідношення

$$\sigma_{z1}(r,0) = \frac{B}{\sqrt{a^2 - r^2}} + \int_r^a \frac{\chi(x)dx}{\sqrt{x^2 - r^2}},\ \ 0 \le r < a\,. \tag{5}$$

Для визначення константи *B* (при повному контакті) чи радіуса a області контакту штампа з плитою (при неповному зануренні штампа) потрібна формула, що зв'язує величини a і *B* із силою *Q*, що притискає штамп до плити. З умови рівноваги штампа випливає, що

$$Q = -2\pi\int_0^a r\sigma_{z1}(r,0)dr\,.$$

Підставимо сюди замість $\sigma_{z1}(r,0)$ праву частину рівності (5), одержимо

$$-\frac{Q}{2\pi} = Ba + \int_0^a x\chi(x)dx\,. \tag{6}$$

Формули (5) і (6) дозволяють знайти розв'язок поставленої задачі, тобто контактні напруження $\sigma_{z1}(r,0)$ під штампом, радіус площадки контакту a при неповному зануренні і константу *B* при повному зануренні (при неповному зануренні штампа в плиту $B = 0$), якщо буде відома функція $\chi(r)$.

За відомою процедурою парні інтегральні рівняння (3) зводяться до інтегрального рівняння Фредгольма відносно функції $\chi(r)$

$$\chi(r) = \frac{E_1}{\left(1-\nu_1^2\right)}\int_0^{\pi/2}\frac{d}{dr}\left[rf'(r)\right]_{r=r\sin\varphi}d\varphi + \int_0^a \chi(x)\left[\mathrm{K}(r,x) - 4x\mathrm{K}_1(r)\right]dx +$$

$$+B\left[\mathrm{K}(r,a) - 4a\mathrm{K}_1(r)\right]. \tag{7}$$

Тут

$$\mathrm{K}(r,x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty a_1(p)e^{-2ph_1}\sin pr\sin px\,dp,$$

$$\mathrm{K}_1(r)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty pa_n^n(p)e^{-ph_n}\sin pr\,dp; \tag{8}$$

$$a_1(p)=\left[1-A_1(p)\right]e^{2ph_1},\quad a_n^n(p)=A_n^n(p)e^{ph_n}.$$

Наведемо алгоритм розв'язання поставленої контактної задачі.

Визначаємо функції податливості $A_1(p)$ і $A_1^n(p)$ багатошарової плити за рекурентними формулами [4]

$$D_kA_k(p)=N_k\left[(3-4\nu_k)sc-u_k\right]+\Delta_k\left(B_{\tau k+1}s^2+A_{k+1}c^2\right)+$$

$$+\frac{\tilde{\Delta}_k}{2}\left[A_{\tau k+1}+B_{k+1}\right]\left[(1-2\nu_k)sc-u_k\right]+H_k(sc+u_k),$$

$$D_kA_k^n(p)=e^{-p_k}\Delta_k\left[p_ks\Delta_k\left(A_{k+1}^nB_{k+1}+B_{k+1}^nA_{k+1}\right)+A_{k+1}^n\frac{p_ks+2(1-\nu_k)c}{2(1-\nu_k)}+\right.$$

$$\left.+\Delta_k(p_kc+s)\left(A_{k+1}^nB_{\tau k+1}+B_{k+1}^nA_{\tau k+1}\right)+B_{k+1}^n\frac{p_kc-(1-2\nu_k)s}{2(1-\nu_k)}\right],$$

де

$$p_k=ph_k,\quad e_k=e^{-2p_k},\quad u_k=p_ke_k,\quad c=\frac{1+e_k}{2},\quad s=\frac{1-e_k}{2},\quad N_k=\frac{1}{2^2(1-\nu_k)^2},$$

$$\Delta_k=\frac{E_k\left(1-\nu_{k+1}^2\right)}{E_{k+1}\left(1-\nu_k^2\right)},\quad \tilde{\Delta}_k=\frac{\Delta_k}{(1-\nu_k)},\quad H_k=\Delta_k^2\left[A_{k+1}B_{\tau k+1}-A_{\tau k+1}B_{k+1}\right],$$

$$D_k=N_k\left[(3-4\nu_k)c^2+u_kp_k+(1-2\nu_k)^2e_k\right]+\Delta_kA_{k+1}(sc-u_k)+\Delta_kB_{\tau k+1}\times$$

$$\times(sc+u_k)+\frac{\tilde{\Delta}_k}{2}\left[A_{\tau k+1}+B_{k+1}\right]\left[(1-2\nu_k)s^2+u_kp_k\right]+H_k\left(s^2-u_kp_k\right).$$

Щоб побудувати функції податливості багатошарової плити за рекурентними формулами, потрібні функції податливості n-го шару плити

$$A_n(p)=\frac{cs+p_n}{s^2-p_n^2},\quad A_{\tau n}(p)=\frac{(1-2\nu_n)s^2+p_n^2}{2(1-\nu_n)\left(s^2-p_n^2\right)},$$

$$B_{\tau n}(p)=\frac{cs-p_n}{s^2-p_n^2},\quad B_n(p)=\frac{(1-2\nu_n)s^2+p_n^2}{2(1-\nu_n)\left(s^2-p_n^2\right)},$$

$$A_n^n(p)=\frac{s+p_nc}{s^2-p_n^2},\quad A_{\tau n}^n(p)=\frac{p_ns}{s^2-p_n^2},\quad B_n^n(p)=-\frac{p_ns}{s^2-p_n^2},\quad B_{\tau n}^n(p)=\frac{s-p_nc}{s^2-p_n^2}.$$

Далі будуємо ядра $\mathrm{K}(r,x)$ і $\mathrm{K}_1(r)$ інтегрального рівняння (7) за формулами (8). Після цього, визначаємо з умови задачі одну з двох констант a чи B (при неповному контакті $a=R$, при повному – $B=0$), знаходимо розв'язок інтегрального рівняння (7), визначаємо невідому константу a чи B з умови рівноваги штампа (6), а потім значення шуканих контактних напружень за формулою (5).

Підінтегральні функції ядер $K(r,x)$ і $K_1(r)$ є неперервно-диференційованими будь-яке число разів. Функцію $F(r)$ вважаємо диференційованою потрібне число разів. Тому для наближеного розв'язання рівняння (7) доцільно застосовувати метод скінчених сум [5]. Замінивши інтеграл по проміжку $[0,a]$ в рівнянні квадратурною формулою Гаусса [5], одержимо наближену рівність:

$$\chi(r) \approx F(r) + \frac{a}{2}\sum_{k=1}^{n} A_k \chi(t_k)\left[K(r,t_k) - 4t_k K_1(r)\right] + B\left[K(r,a) - 4aK_1(r)\right]. \tag{9}$$

Тут n – число вузлів, A_k – вагові коефіцієнти, x_k – вузли для проміжку $[-1,1]$, $t_k = \frac{a}{2}(x_k + 1)$,

$$F(r) = \frac{E_1}{\left(1-\nu_1^2\right)} \int_0^{\pi/2} \frac{d}{dr}\left[rf'(r)\right]_{r=r\sin\varphi} d\varphi .$$

Якщо послідовно підставляти у (9) замість r вузли $t_1, t_2, ..., t_n$ отримаємо систему n лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих значень функції $\chi(t_k)$, $k = 1,...,n$. Після знаходження значень $\chi(t_k)$ отримаємо згідно з (9) наближений вираз розв'язку інтегрального рівняння (7).

Якщо має місце випадок неповного занурення штампа в плиту константа $B = 0$. Радіус області контакту a вважається шуканим (величина сили Q, що діє на штамп відома за умовою задачі). Умову рівноваги штампа (6) можна використовувати для визначення по заданій величині Q відповідного значення a. При повному зануренні штампа в плиту радіус області контакту $a = R$. Невідому константу B можна знайти з рівняння рівноваги (6).

За допомогою наближеного виразу (9) функції $\chi(r)$ обчислимо інтеграл

$$\int_r^a \frac{\chi(x)dx}{\sqrt{x^2 - r^2}} = \int_r^a \frac{\chi(x)dx}{\sqrt{x-r}\sqrt{x+r}} \approx \sqrt{a-r}\sum_{k=1}^{m} \frac{B_k \cdot \chi(x_k)}{\sqrt{x_k + r}}, \tag{10}$$

де $x_k = (a-r)t_k + r$, B_k і t_k – табличні вагові коефіцієнти й вузли квадратурної формули гаусового типу [5]

$$\int_0^1 \frac{f(t)dt}{\sqrt{t}} \approx \sum_{k=1}^{m} B_k f(t_k).$$

Аналіз результатів чисельних досліджень. На рис. 1 та 2 представлено розподіл контактних напружень під підошвою опуклого штампа з профілем $f(r) = -\lambda r^2$, $\lambda > 0$, для випадку неповного та повного контакту штампа з плитою відповідно. Штамп вдавлюється в двошарову плиту силою

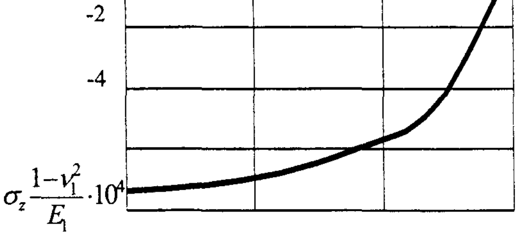


Рис. 1. Контактні напруження під опуклим штампом (випадок неповного контакту)

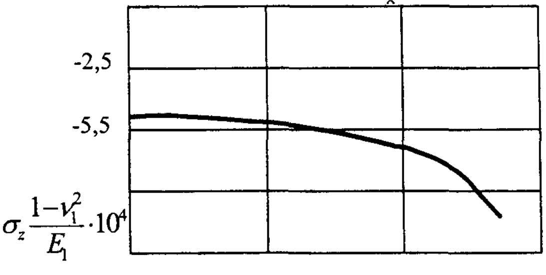


Рис. 2. Контактні напруження під опуклим штампом (випадок повного контакту)

$Q\left(1-\nu_1^2\right)/E_1h_1^2=1$. На нижню межу діє навантаження $q(r)=-2\pi Q\delta(r)/r$, $\delta(r)$ – функція Дірака. Модулі пружності шарів $E_2/E_1=2$, коефіцієнти Пуассона $\nu_1=0.3$, $\nu_2=0.3$, товщини $h_2/h_1=1$. Шари зчеплені. Отримані результати не суперечать фізичному змісту задачі.

РЕЗЮМЕ

Предложен метод решения контактной задачи для упругих многослойных плит с произвольным конечным числом слоев. Получены интегральные уравнения задачи. Приведены результаты численных исследований.

SUMMARY

The method of the solution of a contact problem for elastic multilayered plates with any final number of layers is offered. The integrated equations are received. Numerical results are resulted.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Аргатов И.И.* Давление штампа в форме эллиптического параболоида на упругий слой конечной толщины // Прикладная математика и механика. – 2001. – Т.65. – Вып.3. – С.511–524.
2. *Манько Н.І.-В.* Осесиметрична контактна задача про односторонній контакт пружгого шару з багатошаровою основою // Задачи механики многослойных сред и их численная реализация. – Запоріжжя, 2002. – С.54-63.
3. *Матузко Ю.О., Приварников А.К.* Деформирование гладким штампом неограниченной упругой плиты, спаяной с упругим полупространством // Теорет. и прикладная механика. – 2003. – Вып.38. – С.15-19.
4. *Величко И.Г., Приварников А.К., Спица О.Г.* Матричный алгоритм аналитического определения напряженно-деформированного состояния упругой многослойной плиты. // Теорет. и прикладная механика. – 2001. – Вып.34. – С.38-43.
5. *Крылов В.И., Шульгина Л.Т.* Справочная книга по численному интегрированию. – М.: Наука, 1966. – 370 с.

Надійшла до редакції 10.02.2005 р.

ВІСНИК ДОНЕЦЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ, Сер. А: Природничі науки, 2005, вип. 1

УДК 539.3

ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ТЕРМОМЕХАНІЧНИХ ПРОЦЕСІВ В БАГАТОКОМПОНЕНТНИХ ТІЛАХ ЗА УМОВ ДІЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ

О.Р.Гачкевич, Р.Ф.Терлецький, А.Пеер-Касперська
Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України, м. Львів
Політехніка Опольська, м. Ополє, Польща

Електромагнітне випромінювання (ЕМВ) різного частотного діапазону (від радіочастот до світлових) знаходить широке застосування в сучасних технологіях обробки елементів конструкцій та приладів з неметалевих матеріалів (скла, кераміки, пластмас, різного типу будівельних матеріалів) в багатьох галузях промисловості. Метою таких обробок є нагрів чи стимуляція дифузійних процесів як при дегазації вакуумних матеріалів, очищенні від домішок, сушінні, нанесенні зміцнюючих покрить, легуванні і т.п. Безконтактний (глибинний) спосіб передачі енергії до тіла та локальний характер дії ЕМВ на підобласті тіла чи на складові його компоненти, можливість широкої автоматизації технологічних процесів, відносно високий коефіцієнт корисної дії нагріву зумовлюють перспективність обробки з використанням ЕМВ виробів як з традиційних, так і з нових неметалевих електромагнітних матеріалів. Однак високі швидкості нагріву та його локальний характер у тілі при дії ЕМВ, необхідність досягнення високих температур в багатьох технологіях, наявність домішок, умови тепло- і масообміну, розміри виробу можуть спричинювати високі рівні механічних напружень в тілах, що піддаються обробці. Ці рівні можуть перевищувати допустимі і приводити до руйнування тіл. Тому, для побудови раціональних режимів обробки з використанням ЕМВ виробів з неметалевих матеріалів низької електропровідності виникає необхідність моделювання та дослідження у взаємозв'язку спричинених дією ЕМВ механічних процесів та процесів іншої фізичної природи (електромагнітних, теплових, дифузійних) в таких виробах, зокрема в багатокомпонентних тілах, за конкретних електромагнітних навантажень. Важливим при моделюванні термомеханічної поведінки розглядуваних тіл при дії ЕМВ є врахування їх будови, відмінності електрофізичних властивостей складових компонент, а також специфіки силової та енергетичної міжкомпонентних взаємодій в них.

У літературі відомі конкретні моделі багатокомпонентних середовищ, що взаємодіють з ЕМВ радіочастотного діапазону, які враховують взаємозв'язок електромагнітних, теплових, деформаційних процесів в тілі з процесами переносу маси. Це моделі електропровідних і напівпровідникових твердих сумішей [1–5 та ін.], моделі магнітотермодифузії в діа- та парамагнетиках [6, 7]. Вони базуються на відомих теоріях електромеханічної взаємодії [8, 9] та термодинамічній теорії суміші чи термодинамічній теорії твердих розчинів [10, 11 та ін.] Однак більшість з цих моделей дозволяють дослідити лише часткові випадки термомеханічної поведінки багатокомпонентних електропровідних тіл при дії ЕМВ радіочастотного діапазону. Особливості масопереносу, зумовлені глибинним характером введення електромагнітної енергії в багатокомпонентні тіла і відмінністю електрофізичних властивостей компонент, в цих моделях не враховувалися. В літературі невідомі термодинамічно обгрунтовані моделі, що описують термомеханічну поведінку багатокомпонентних тіл низької електропровідності з врахуванням відмінності дії ЕМВ на різні за електрофізичними властивостями (здатностями до поляризації та намагнічення) компоненти.

Дана стаття присвячена формулюванню балансових співвідношень механіки та другого закону термодинаміки для багатокомпонентних твердих тіл (гомогенних твердих сумішей N хімічно нереагуючих компонент) з врахуванням глибинного характеру введення енергії ЕМВ в такі тіла. Використовуємо підходи механіки багатошвидкісних континуумів [10], згідно з якими кожній з компонент тіла ставиться у відповідність окремий матеріальний континуум, а модель тіла будується як сукупність таких взаємопроникних континуумів (що взаємодіють між собою шляхом обміну імпульсом та енергією). Багатокомпонентне тверде тіло розглядається як просторово неоднорідна нерівноважна відкрита термодинамічна система, що може обмінюватися масою (масообмін) та енергією (теплообмін, дія зовнішнього ЕМВ) із зовнішнім середовищем.

Постановка і метод розв'язку задачі. Вважається, що зовнішнє ЕМВ (джерела якого є задані в областях простору, що не включають конфігурацію розглядуваного багатокомпонентного твердого тіла) діє на компоненти тіла через об'ємні (пондеромоторні) сили та об'ємні пари сил (пондеромоторні моменти), а також спричинює притік енергії до компонент. Частина цієї енергії запасається у вигляді енергії зв'язаних зарядів і струмів (енергії поля). Інша частина, яка внаслідок внутрішньої дисипації переходить в енергію теплових коливань у твердому тілі, визначає об'ємні тепловиділення. Вважається, що чинники дії ЕМВ, розраховані на одиницю маси окремих компонент, можуть суттєво відрізнятися. Це викликає зростання дифузійних потоків (явище дифузії, стимульованої ЕМВ). При цьому спричинена ЕМВ неоднорідність енергетичного стану компонент супроводжується (при встановленні теплової рівноваги) нерівноважними процесами обміну енергією в фізично малих елементах (макрочастинах) тіла.

Рух тіла визначається законами руху матеріальних точок його компонент $x_i = x_i^{(k)}(X_\alpha^{(k)}, t)$ зі швидкостями $\dot{x}_i^{(k)} = \frac{\partial}{\partial t}[x_i^{(k)}(X_\alpha^{(k)}, t)]$ $(i, \alpha = \overline{1, 3})$. Тут x_i, $X_\alpha^{(k)}$ – декартові просторові та матеріальні координати точок k-ї компоненти, які визначають відповідно її актуальну $R_t^{(k)}$ і вихідну (відлікову) $R_R^{(k)}$ конфігурації. Розглядається тіло з домінантною компонентою (каркасом чи основною матрицею), яка визначає конфігураційні та деформаційні характеристики тіла ($\vec{u} = \vec{x} - \vec{X}$ – вектор переміщення, $\vec{X} \equiv \vec{X}^{(L)}$, індекс " L " тут і надалі стосується характеристик точок каркаса), а швидкість $\dot{\vec{x}}^{(L)}$ точок цієї компоненти вибирається за характеристичну. Всі інші компоненти тіла вважаються домішковими, а їх рух відносно каркаса розглядається як дифузійний ($\vec{w}^{(k)} = \dot{\vec{x}}^{(k)} - \dot{\vec{x}}^{(L)}$ – дифузійна швидкість).

Механіку багатокомпонентного твердого тіла при дії ЕМВ будуємо на основі фізичних законів збереження маси, кількості руху, моменту кількості руху та енергії, які в інтегральній формі при просторовому описі формулюються для кожної компоненти окремо. При цьому за характеристики компонент приймаються парціальні величини: ρ_k, U_k – густини маси та внутрішньої енергії; $t_{ij}^{(k)}$ – складові тензора напружень Коші, що відповідають у багатокомпонентному тілі складовим $\vec{P}_n^{(k)}$ вектора поверхневих зусиль (які визначають передачу зусиль компонентами); $\vec{q}^{(k)}$ – вектори теплових потоків, а також кількості руху $\vec{g}^{(k)}$ та енергії U_k^*, яку одиниці маси компонент отримують при взаємодії з іншими компонентами. Дія зовнішнього ЕМВ на компоненти враховується густинами пондеромоторних сил $\vec{f}^{(k)}$ і моментів $\vec{L}^{(k)}$ та притоками енергій ψ_k. З використанням узагальненої теореми переносу Рейнольдса, принципів локальності та суперпозиції властивостей суміші [5, 8, 10] отримано систему балансових рівнянь механіки для багатокомпонентного твердого тіла з домінантною компонентою в наступній локальній (диференціальній) формі

$$\rho_L \frac{d^{(L)} c_k}{dt} + I_{i,i}^{(k)} = 0, \quad J\rho_L(X_\alpha, t) = \rho_{0L}\ (X_\alpha); \tag{1}$$

$$\rho_L \frac{d^{(L)}[(\sum_{k=1}^{N} c_k)\, \dot{x}_i^{(L)}]}{dt} = t_{ij,j} + \rho_L f_i - \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial I_i^{(k)}}{\partial t},$$

$$t_{[ij]} = \frac{1}{2}\rho_L \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_{ijl}\, c_k\, L_l^{(k)}\ ; \tag{2}$$

$$\rho_L \frac{d^{(L)} U}{dt} = t_{ij}\, \dot{x}_{i,j}^{(L)} - q_{j,j} - q_{j,j}^{(m)} + \sum_{k=1}^{N} (f_i^{(k)} I_i^{(k)} + \rho_L c_k \psi_k) -$$

$$- \frac{1}{2} \dot{x}_i^{(L)} \dot{x}_i^{(L)} \sum_{k=1}^{N} I_{j,j}^{(k)} - \dot{x}_i^{(L)} \sum_{k=1}^{N} (I_j^{(k)} \dot{x}_i^{(L)})_{,j} - \frac{d^{(L)} \dot{x}_i^{(L)}}{dt} \sum_{k=1}^{N} I_i^{(k)}\ , \tag{3}$$

а також (моделюючи фізичну поверхню тіла (каркаса) сингулярною поверхнею в областях конфігурацій домішкових компонент) умови в стрибках (окремі граничні умови), зокрема умови, що відповідають масообміну домішковими компонентами. В рівняннях (1) – (3): $c_k = \rho_k / \rho_L$ – концентрації, а $\vec{I}^{(k)} = \rho_k \vec{w}^{(k)}$ – потоки маси домішкових компонент; ρ_{0L} – густина каркаса у вихідній конфігурації;

$J = \det\,(\frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha})$; $\frac{d^{(L)}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}_i^{(L)} \frac{\partial}{\partial x_i}$ – субстанціональна похідна за часом для області каркаса; ε_{ijl} – тензор Леві-Чівіта; індексами в квадратних дужках позначені несиметричні тензори, а кома перед індексом означає диференціювання. Характеристики для багатокомпонентного твердого тіла – густина внутрішньої енергії U, тензор напружень Коші t_{ij}, потік тепла q_i та потік енергії $q_i^{(m)}$, зумовлений переносом маси – означаються в (1) – (3) наступним чином

$$t_{ij} = \sum_{k=1}^{N} [\, t_{ij}^{(k)} - \rho_k (\, w_i^{(k)} w_j^{(k)} + \dot{x}_i^{(L)} w_j^{(k)} + w_i^{(k)} \dot{x}_j^{(L)} \,)\,],$$

$$U = \sum_{k=1}^{N} c_k \left(U_k + w_i^{(k)} w_i^{(k)} / 2 \right), \quad q_j = \sum_{k=1}^{N} q_j^{(k)}, \quad q_j^{(m)} = \sum_{k=1}^{N} \mu_{ij}^{(k)} I_i^{(k)}, \tag{4}$$

де

$$\mu_{ij}^{(k)} = (-\dot{x}_n^{(L)} \dot{x}_n^{(L)} + w_n^{(k)} w_n^{(k)} + 2U_k)\delta_{ij} / 2 - \rho_k^{-1} t_{ij}^{(k)} - \dot{x}_i^{(k)} \dot{x}_j^{(k)} \tag{5}$$

– тензорні кінетичні потенціали компонент, δ_{ij} – символ Кронекера. Величини густин об'ємних сил $\vec{f}$, об'ємних пар сил $\vec{L}$ і притоку енергії ψ до тіла (чинники дії ЕМВ на багатокомпонентне тіло) пов'язані з відповідними чинниками дії ЕМВ на окремі компоненти співвідношеннями

$$f_i = \sum_{k=1}^{N} c_k f_i^{(k)}, \quad L_i = \sum_{k=1}^{N} c_k L_i^{(k)}, \quad \psi = \sum_{k=1}^{N} c_k \psi_k . \tag{6}$$

При цьому $\psi = \psi_s + Q$, де ψ_s, Q – густини запасеної в тілі енергії ЕМВ і тепловиділень.

У випадку малих концентрацій домішкових компонент ($c_k << 1$) багатокомпонентне тверде тіло розглянуто в наближенні слабкого твердого розчину (СТР). Балансові рівняння в цьому випадку отримуються з (1) – (3) при $\sum_{k=1}^{N} \vec{I}^{(k)} \approx 0$, $\sum_{k=1}^{N} c_k \approx 1$. Для СТР, при достатньо малих концентраціях домішкових компонент, матеріальні частинки (матеріальні точки) даної компоненти вважаються невзаємодіючими як між собою ($t_{ij}^{(k)} \approx 0$, $q_i^{(k)} \approx 0$), так і з частинками інших компонент ($U_k^* \approx U_{(kL)}$, $\vec{g}^{(k)} \approx \vec{g}^{(kL)}$). Тоді вираз для потоку енергії $q_i^{(m)}$ подається у вигляді $q_i^{(m)} = \sum_{k=1}^{N} \mu_k I_i^{(k)}$ ($\mu^{(k)} = U_k + w_n^{(k)} w_n^{(k)} / 2$ – скалярний кінетичний потенціал). Рівняння балансу енергій домішкових компонент будуть

$$\frac{d^{(L)} U_k}{dt} = \psi_k + U_{(kL)} + \dot{x}_i^{(L)} g_i^{(kL)} . \tag{7}$$

При цьому енергетичний стан домішкової компоненти в СТР при дії зовнішнього ЕМВ визначається притоком енергії ψ_k до одиниці маси компоненти та її характеристиками $U_{(kL)}$, $\vec{g}^{(kL)}$ обміну енергією та кількістю руху з каркасом.

Для опису локально-нерівноважних станів в фізично малих елементах СТР (при спричиненій дією ЕМВ неоднорідності енергетичного стану компонент) використано підходи нерівноважної (раціональної) термодинаміки континууму. Другий закон термодинаміки сформульовано у формі нерівності Клаузіуса-Дюгема

$$\rho_L \frac{d^{(L)} \eta}{dt} + (\frac{q_i}{T})_{,i} - \rho_L \frac{Q}{T} \geq 0 . \tag{8}$$

Тут η, T – густина ентропії та температура в СТР. Отримано дисипативну нерівність, в якій враховано роз-

розсіювання електромагнітної енергії (тепловиділення).

Система балансових співвідношень механіки та другий закон термодинаміки для слабкого твердого розчину сформульовані в матеріальному поданні на області вихідної конфігурації каркаса (конфігурації багатокомпонентного твердого тіла).

РЕЗЮМЕ

Получены балансовые соотношения механики для взаимодействующего с электромагнитным излучением многокомпонентного деформируемого твердого тела при наличии доминантной компоненты. Учтены, вызванная электромагнитным излучением, неоднородность энергетического состояния компонент в физически малых объемах тела и сопровождающие ее неравновесные процессы обмена импульсом и энергией между компонентами.

SUMMARY

The balance equations of mechanics for multicomponent solid with dominant component subjected to electromagnetic radiation are obtained. They account for different energetic state of the components in physically small domains of a solid and nonequilibrium momentum and energy exchange caused by electromagnetic radiation.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ:

1. *Бурак Я.Й., Галапац Б.П., Гнідець Б.М.* Фізико-механічні процеси в електропровідних тілах. – К.: Наук. думка, 1978. – 232 с.
2. *Чапля Є.Я.* Континуально-термодинамічний опис відкритих деформівних систем. Вихідні положення. – Львів, 1995. – 56 с. – (Препр. / АН України. Центр мат. моделювання Ін-ту прикладних проблем механіки і математики НАН України; №12-95).
3. *Бурак Я.И., Чекурин В.Ф.* Физико-механические поля в полупроводниках: математические основы теории. – К.: Наук. думка, 1987. – 264 с.
4. *Lorenzi H.G., Tiersten H.F.* On the interaction of the electromagnetic field with heat conducting deformable semiconductors // J.Math. Phys. – 1975. – Vol.16. – №4. – P.938-957.
5. *Петров Н., Бранков Й.* Современные проблемы термодинамики. – М.: Мир, 1991. – 288 с.
6. *Maruszewski B.* Termodynamiczne podstawy magnetotermodyfuzji i elektrotermodyfuzji w ośrodku ciągłym. Rozprawy. – Poznań: Pol. Poznańska, 1986. – 178 s.
7. *Stefaniak J.* The effect of an electromagnetic field on thermodiffusion in an isotropic medium. – Warszawa: Polish Academy of Sciences Press, Ser. Mechanika i Budownictwo, 1982. – Vol.IX. – P.1-32.
8. *Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф.* Электротермовязкоупругость. – К: Наук. думка, 1988. – 320 с (Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5 т. Т.4)
9. *Hutter K., van de Ven A.A.* Field-matter interaction in thermoelastic solids. – Lecture Notes in Physics. – 88. – Berlin: Springer-Verlag, 1978. – 234 p.
10. *Нигматулин Р.И.* Основы механики гетерогенных сред. – М.: Наука, 1978. – 336 с.
11. *Подстригач Я.С.* Диффузионная теория деформации изотропной сплошной среды // Вопросы механики реального твердого тела. – 1964. – №2. – С.71-99.

Надійшла до редакції 28.02.2005 р.

ВІСНИК ДОНЕЦЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ, Сер. А: Природничі науки, 2005, вип. 1

УДК 539.3: 538.3: 536.21: 518.12: 517.96

ПРО ОДИН ПІДХІД ДО ЧИСЕЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ІНДУКЦІЙНОГО НАГРІВАННЯ ЕЛЕКТРОПРОВІДНИХ ТІЛ

О.Р.Гачкевич, Б.Д.Дробенко, З.І.Касперський
Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України, м. Львів
Політехніка Опольська, м. Ополє, Польща

У сучасних технологіях обробки широко використовують електромагнітні поля (ЕМП). Розробка раціональних режимів такої обробки вимагає побудови математичних моделей, які адекватно описують фізико-механічні процеси у тілах за умов дії зовнішніх ЕМП з урахуванням реальних електричних, магнітних і механічних властивостей матеріалу та особливостей взаємодії електромагнітного, температурного і механічного полів.

Питанням побудови математичних моделей процесів індукційного нагрівання твердих тіл із врахуванням залежності фізико-механічних властивостей матеріалів від температури, пружно-пластичного характеру деформування виробів і нелінійної залежності індукцій електричного й магнітного полів від відповідних напруженостей присвячені роботи [1-4]. Аналітичне дослідження процесів в рамках таких моделей викликає значні математичні труднощі. Застосування числових методів без врахування особливостей взаємодії трьох розглядуваних взаємопов'язаних полів різної фізичної природи навіть за наявності сучасних комп'ютерних систем теж є достатньо проблематичним [1, 5].

У роботі на основі запропонованої у [2, 4] авторами математичної моделі опису фізико-механічних процесів в термочутливих пружно-пластичних тілах при нелінійних залежностях між індукціями і напруженостями електричного й магнітного полів за умов дії гармонійного квазіусталеного ЕМП розглянуто підхід до числового моделювання електромагнітного, теплового й механічного полів під час індукційної обробки тіл, який дозволяє оптимізувати процес обчислень (за часом розрахунку) і суттєво скоротити час розв'язування відповідних задач математичної фізики. У процесі обчислень передбачено використання різних кроків часового інтегрування рівнянь електродинаміки, теплопровідності і пружно-пластичності.

Постановка і метод розв'язування задачі. Розглянемо електропровідне тіло за умов дії зовнішнього гармонійного квазіусталеного ЕМП з частотою, яка лежить за межами резонансної. У початковий момент часу ЕМП у тілі й середовищі відсутнє і заданий розподіл T_0 температури у тілі, яке перебуває за умов конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем. ЕМП у системі тіло – зовнішнє середовище та температурне й механічне поля у тілі описуємо системою рівнянь Максвела [6], теплопровідності та співвідношеннями неізотермічної термопружно-пластичної течії [7].

Задачу розв'язуємо за два етапи [2]. На першому розв'язуємо зв'язану задачу електродинаміки і теплопровідності. На другому етапі на основі обчислених значень температури і пондеромоторних сил визначаємо напружений стан тіла.

Застосувавши стандартну процедуру скінченно-елементної дискретизації у варіанті методу зважених залишків [8] до рівнянь Максвела (в яких за ключову функцію вибрано вектор напруженості електричного поля [2]) і теплопровідності, задачу про визначення електромагнітного і температурного полів зводимо до системи звичайних диференційних рівнянь [2]

$$\mathbf{L}_1\,\dot{\mathbf{T}}_h(t)+\mathbf{L}_0\,\mathbf{T}_h(t)=\mathbf{f}_T\,,\quad \mathbf{T}_h(0)=\mathbf{T}_h^0\,; \tag{1}$$

$$\mathbf{M}_2\ddot{\mathbf{E}}_h(t)+\mathbf{M}_1\dot{\mathbf{E}}_h(t)+\mathbf{M}_0\mathbf{E}_h(t)=\mathbf{f}_E\,,\quad \mathbf{E}_h(0)=\dot{\mathbf{E}}_h(0)=0 \tag{2}$$

відносно невідомих значень вектора напруженості $\mathbf{E}_h$ електричного поля і температури $\mathbf{T}_h$ у вузлах скінченно-елементного поділу. Матрично-векторні характеристики задачі Коші (1) – (2) обчислені шляхом підсумовування відповідних характеристик окремих скінченних елементів [2, 4].

Методика розв'язування такої задачі з допомогою сім'ї однокрокових алгоритмів у випадку, коли кроки інтегрування рівнянь електродинаміки й теплопровідності за часом рівні між собою, описана у [9]. Однак, такий підхід з точки зору обчислювальних затрат, як правило, не є раціональним.

У більшості використовуваних на практиці процесів термообробки зміна температури у тілі на один градус відбувається після десятків, сотень, а то й тисяч періодів T_ω електромагнітних коливань. У зв'язку з цим розглянемо алгоритм розв'язування задачі, згідно з яким за електрофізичними характеристиками матеріалу, які відповідають початковій температурі, розв'язуємо задачу Коші (2) з кроком $\Delta t_E = T_\omega / N$ ($N \geq 16$) до виходу на усталений режим, після чого переходимо до розв'язування задачі (1) з кроком $\Delta t_T > \Delta t_E$. Критерієм виходу ЕМП на усталений режим і переходу до визначення температури є виконання умови:

$$\left|\frac{Q_*((k+1)\mathrm{T}_\omega)-Q_*(k\mathrm{T}_\omega)}{Q_*(k\mathrm{T}_\omega)}\right|<\chi_Q,\quad k=0,1,\ldots \tag{3}$$

у кожному вузлі скінченного-елементного поділу, де $Q_*(k\mathrm{T}_\omega)$ - усереднені за k-ий період тепловиділення [1]; χ_Q – "параметр збіжності".

За виконання умови (3) переходимо до розв'язування задачі Коші (1) з усередненими джерелами, потужність яких визначена упродовж останнього, ($k+1$)-го періоду. Обчислення температурного поля з цими джерелами тепла продовжуємо доти, доки виконуються умови

$$\left|\frac{\gamma(T^{i+1})-\gamma(T^i)}{\gamma(T^i)}\right|<\chi_\gamma,\quad \left|\frac{\mu(T^{i+1})-\mu(T^i)}{\mu(T^i)}\right|<\chi_\mu,\quad \left|\frac{\varepsilon(T^{i+1})-\varepsilon(T^i)}{\varepsilon(T^i)}\right|<\chi_\varepsilon \tag{4}$$

для кожного вузла. Тут T^i, T^{i+1} – вузлові значення температури у момент часу t_i (момент переходу від розв'язування задачі (2) до задачі (1)) та в поточний момент часу; χ_γ - електропровідність, магнітна й діелектрична проникності тіла; χ_ε, χ_μ, χ_γ - "параметри збіжності". Якщо максимальні відносні зміни якоїсь із характеристик досягли заданого порогу (умови (4) не виконуються хоча б в одній точці), попередньо обчислені тепловиділення вже не відповідають поточному значенню температури і необхідно переходити на обчислення параметрів ЕМП при нових значеннях електрофізичних характеристик, які відповідають поточній температурі.

На основі обчислених на першому етапі значень температури й пондеромоторних сил проводимо аналіз напруженого стану тіла. Відповідно до теорії пружно-пластичної течії процес деформування розглядаємо покроково [2, 10]. Пондеромоторні сили й розподіл температури у тілі, починаючи із заданих величин при $t=0$, змінюються на відповідні прирости на кожному кроці навантаження. На кожному кроці за цими приростами визначаємо прирости переміщень, деформацій та напружень, які підсумовуємо з отриманими на попередніх кроках. Так крок за кроком, як наслідок, отримуємо історію зміни термомеханічного стану тіла.

Черговий крок пружно-пластичного аналізу проводимо тоді, коли

$$\left|T^j-T^{j-1}\right|>\chi_T,\quad \left|\mathbf{F}_*^j-\mathbf{F}_*^{j-1}\right|\left|\mathbf{F}_*^j\right|^{-1}>\chi_F, \tag{5}$$

хоча б в одній точці тіла. Тут T^j, T^{j-1}, $\mathbf{F}_*^j$, $\mathbf{F}_*^{j-1}$ – значення температури й усереднених за період пондеромоторних сил у даний момент часу і в момент попереднього розрахунку напруженого стану; χ_T, χ_F – параметри, які характеризують допустиму величину зростання температури і пондеромоторних сил за крок. Зазначимо, що всі числові параметри визначаємо на основі обчислювального експерименту.

Як приклад застосування методики розглянемо процес високотемпературної індукційної обробки з метою наскрізного гартування вільного від механічного навантаження циліндричного тіла завдовжки $2L$ з радіусом R ($\{r\le R,\ |z|\le L\}$), виготовленого із сталі С30, характеристики якої та їх залежності від температури приведені в [5, 6, 11-13]. Тіло перебуває в коаксіальному з ним індукторі, який моделює циліндрична поверхня з радіусом R_i завдовжки $2L_i$. Індуктором тече струм (частотою ω) густиною

$$\mathbf{j}^{(0)}(r,\,z,\,t)=(0,\,J_0(1-e^{-\xi t})\sin 2\pi\omega t,\,0),\quad r=R_i,\quad |z|\le L_i \tag{6}$$

де параметр ξ характеризує плавність виходу на усталений режим.

Коли січення $z=0$ тіла нагрівається до температури $T\ge T_g$, струм вимикаємо, і тіло охолоджується через конвективний теплообмін із середовищем, температура якого T_S.

Аналіз результатів чисельних досліджень. Кількісні дослідження проводили при наступних значеннях параметрів:

R=0,01м; $L=0.03$=0,03м; R_i=0,012м; L_i=0,001м;

$J_0=10^6$=10⁶ А/м²; $\omega=8$=8 кГц; $T_g=970$°С; $T_0=T_S=20^\circ\mathrm{C}$;

$\beta = 13\ (10^4)$ Вт/(м^{2}К) – при нагріві (охолодженні);

$\xi = 10^{-5}$; $\Delta t_E = \mathrm{T}_\omega / 32$; $\Delta t_E = \mathrm{T}_\omega / 32 = 0{,}05$ с;

$\chi_T = 10$°C; $\chi_Q = \chi_\gamma = \chi_\mu = 0{,}05$.

На рис. 1 приведені зміни температури в часі на поверхні тіла в області перерізу $L = 0{,}03$ (крива *1*) та на торці циліндра (*2*) у точці з координатами (R, L). Як бачимо, при наближенні до температури Кюрі T_K (770°С) нагрівання тіла суттєво сповільнюється (за незмінної потужності індуктора). Після нагрівання тіла до температури $T > T_K$ встановлюється постійна швидкість нагрівання, значно менша за початкову. Повний час процесу нагрівання тіла до необхідної температури T_K складає 5752,4с.

На рис. 2 показані розподіли залишкових напружень у перерізі z=0 тіла після повного його охолодження. Як бачимо, на поверхні циліндра утворилась зона стискальних напружень. Вплив країв на залишкові напруження відчувається на віддалі порядку $\Delta t_T \neq \Delta t_E$. В решті частині тіла встановлюються напруження практично не залежні від координати z.

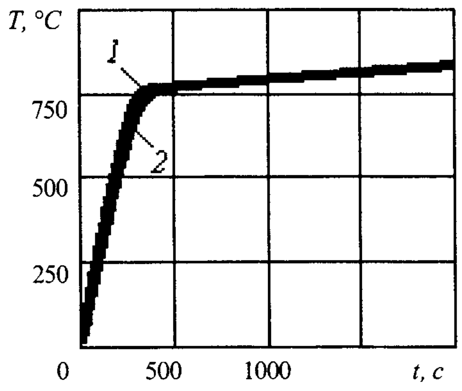


Рис. 1

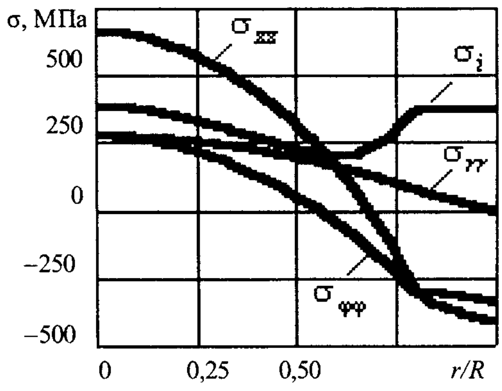


Рис. 2

Час розв'язування задачі (1)–(2) за запропонованою методикою на комп'ютері з процесором ATHLON-2000 складав 20 год. 24 хв. При розв'язуванні цієї ж задачі з кроком $\Delta t_T = \Delta t_E$ за 20 год. 24 хв. процесорного часу отримали розв'язок лише до моменту часу 0,001с. Якщо врахувати, що нагрівання тривало 5752,4с, можливість розв'язати дану задачу з таким кроком стає малоймовірною.

Таким чином, запропонована методика чисельного моделювання дозволяє розглядати процеси індукційної обробки електропровідних тіл з врахуванням реальних електричних, магнітних та механічних властивостей матеріалу та особливостей взаємодії електромагнітного, температурного й механічного полів і отримувати розподіли параметрів процесів для просторово двовимірних тіл, що за організації обчислювального процесу з використанням цих же числових методів при постійних кроках інтегрування за часом було б практично неможливим.

РЕЗЮМЕ

На основе предложенной математической модели описания физико-механических процессов в электропроводных телах при воздействии внешних электромагнитных полей разработан подход численного моделирования процессов индукционного нагрева тел с использованием метода конечных элементов и простых одношаговых разностных схем.

SUMMARY

An approach to numerical simulation of induction heating of solids is considered on the basis of proposed earlier mathematical model of thermo-mechanical processes in electrically conductive solids subjected to external electromagnetic fields. The finite element method and family of simple one-step finite difference algorithms solve the problem.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Bay F., Labbe V., Favennec Y., Chenot J.L.* A numerical model for Induction heating processes coupling electromagnetism and thermomechanics // Intern. J. Numer. Meth. Eng. – 2003. – Vol.58. – №6. – P.839-867.
2. *Гачкевич О.Р., Дробенко Б.Д.* Математичне моделювання індукційного нагріву електропровідних тіл// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикладної математики та інформатики. – 2004. – №8. – С.97-111.
3. *Гачкевич О.Р., Дробенко Б.Д.* Фізико-механічні процеси у феромагнетних тілах під час індукційної обробки// Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – №2. – С.29-35.
4. *Гачкевич О.Р., Дробенко Б.Д., Казарян К.Б.* Математичне моделювання термомеханічних процесів в осесиметричних електропровідних тілах за електромагнітних навантажень// Машинознавство. – 2003. – №4. – С.3-7.
5. *Skoczkowski T., Kalus M.* The mathematical model of induction heating of ferromagnetic pipes// IEEE Trans. on magnetics. – 1989. – Vol.25. – №3. – P.2745-2750.
6. *Turowski J.* Elektrodynamika techniczna.– Warszawa: WNT, 1993. – 463 s.
7. *Allen D.H. Heisler W.E.* A theory for analysis of thermoplastic materials // Computers & Structures. – 1981. – Vol.13. – P.129-135
8. *Зенкевич О., Морган К.* Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986. – 319 с.
9. *Гачкевич О.Р., Дробенко Б.Д.* Методика чисельного дослідження електромагнітних і температурних полів при індукційному нагріві електропровідних циліндричних тіл // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2001. – Т.44. – №4. – С.140-148.
10. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* Finite Element Method: V.1. The Basis. – London: Butterworth Heinemann. – 2000. – 688 p.
11. Преображенский А.А. Магнитные материалы и элементы. – М.: Высш. шк., 1976. – 336 с.
12. Сосуды и трубопроводы высокого давления. Справ. / Под. ред. Е.Р.Хисматулина. – М.: Машиностроение, 1990. – 384 с.
13. Таблицы физических величин. Справ. / Под ред. акад. И.К. Кикоина.– М.: Атомиздат, 1976.– 1008 с.

Надійшла до редакції 28.02.2005

ВІСНИК ДОНЕЦЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ, Сер. А: Природничі науки, 2005, вип. 1

УДК 539.3

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ С ОТВЕРСТИЯМИ ИЛИ ТРЕЩИНАМИ

С.А.Калоеров, Е.В.Авдюшина, А.И.Баева

Несмотря на практическую важность решения задач теории упругости об узкой полосе с отверстиями и трещинами, до сих пор исследований в этом направлении выполнено недостаточно. Особенно мало исследований для случая, когда в полосе имеется множество отверстий и трещин, например, их бесконечный продольный ряд. Для изотропной полосы такая задача была решена для случая центральных круговых отверстий [1] или трещин [2]. При этом в случае круговых отверстий использовались комплексные потенциалы, на контурах отверстий граничные условия удовлетворялись методом рядов, на прямолинейных границах методом коллокаций. Но такой подход дает удовлетворительные результаты, когда полоса изотропная, а концентраторы напряжений не весьма близки к ее сторонам. Ниже предложен подход, позволяющий решать периодическую задачу для полосы с отверстиями и трещинами. Он основан на методе, предложенном ранее для решения задачи теории упругости в случае изотропной [3] или анизотропной полосы, а также задачи электроупругости [4] для полосы с одним или конечным числом отверстий. Такой подход позволяет рассматривать полосу любой ширины с любым количеством и расположением отверстий и трещин, в том числе выходящих на одну из прямолинейных границ.

Постановка задачи. Рассмотрим анизотропную полосу, ослабленную одинаковыми и одинаково ориентированными эллиптическими отверстиями с контурами $(l=0,\pm 1,\pm 2,...)$ и полуосями a и b (рис. 1). Обозначим область, занятую полосой с отверстиями, и прямолинейные границы полуплоскости через S и L^+, L^-, углы между полуосями a и осью Ox и расстояние между центрами соседних отверстий – через φ и h_x, расстояния от центров отверстий до границ L^+, L^- – через h^+, h^-. На бесконечности полоса растягивается усилиями интенсивности $\sigma_x^\infty = p$, на контурах отверстий действуют самоуравновешенные усилия. Как частный случай при $b=0$ будем рассматривать периодическую задачу о полосе с трещинами.

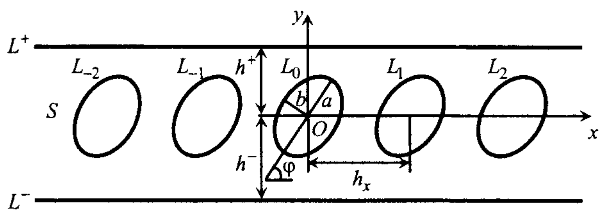


Рис. 1

Для определения напряженного состояния рассматриваемой полосы будем использовать обобщенные комплексные потенциалы [4]. Производные этих потенциалов удовлетворяют граничным условиям

$$2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{2} g_{ki}\,\delta_k\Phi'_k(t_k)=f_i(t) \text{ на } L_l,\ L^+, L^- \quad \left(i=\overline{1,2}\right), \tag{1}$$

где $g_{k1}=-\mu_k$, $g_{k2}=1$ $(k=1,2)$; $\delta_k=\dfrac{dt}{ds}$; s – длина дуги соответственного контура; $f_i(t)$ – самоуравновешенные внешние усилия, действующие на контурах отверстий.

Для рассматриваемого случая $\Phi'_k(z_k)$ определены и голоморфны в областях S_k, получаемых из S аффинными преобразованиями $z_k=x+\mu_k y$, где μ_k – корни известного характеристического уравнения [4]. В этих областях прямолинейным границам L^+, L^- и контурам L_l соответствуют прямолинейные границы L_k^+, L_k^- и контуры L_{kl}. Можно показать, что для данного случая производные комплексных потенциалов имеют вид [4, 5]

$$\Phi'_k(z_k)=\Gamma_k+\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{a_{kln}\,\varphi'_{kln}(z_k)-\overline{r_k^+}\,\bar b_{kln}\overline{\varphi'}^{+}_{kln}(z_k)-$$

$$-\overline{s_{k+1}^+}\,\bar b_{k+1,ln}\overline{\varphi'}^{+}_{k+1,ln}(z_k)-\overline{r_k^-}\,\bar c_{kln}\,\overline{\varphi'}^{-}_{kln}(z_k)-\overline{s_{k+1}^-}\,\bar c_{k+1,ln}\,\overline{\varphi'}^{-}_{k+1,ln}(z_k)\Big\}. \tag{2}$$

Здесь Γ_k – постоянные, определяемые из системы

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{2}\left(\lambda_{1k},\lambda_{2k},\lambda_{6k},\ q_k-\mu_k p_k\right)\Gamma_k=\left(\sigma_x^{\infty},0,0,0\right);\tag{3}$$

λ_{1k}, λ_{2k}, λ_{6k}, q_k, p_k $\bar{r}_k^{\,+}$, $\bar{s}_{k+1}^{\,+}$, $\bar{r}_k^{\,-}$, $\bar{s}_{k+1}^{\,-}$, – известные величины, зависящие от упругих свойств материала [5]; верхние знаки «+» и «–» соответствуют границам L^+ и L^-;

$$\varphi'_{kln}\left(z_k\right)=-\frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1}R_{kl}\left(\zeta_{kl}^{2}-m_{kl}\right)};\tag{4}$$

$$\overline{\varphi'}^{\,+}_{k+j,ln}\left(z_k\right)=-\frac{n}{\bar{\zeta}^{+\,n-1}_{\;k+j,l}\,\bar{R}_{k+j,l}\left(\bar{\zeta}^{+\,2}_{\;k+j,l}-\bar{m}_{k+j,l}\right)},$$

$$\overline{\varphi'}^{\,-}_{k+j,ln}\left(z_k\right)=-\frac{n}{\bar{\zeta}^{-\,n-1}_{\;k+j,l}\,\bar{R}_{k+j,l}\left(\bar{\zeta}^{-\,2}_{\;k+j,l}-\bar{m}_{k+j,l}\right)}\quad\left(j=\overline{0,1}\right);\tag{5}$$

$\zeta_{kl}(z_k)$ – переменные, определяемые из неявных зависимостей

$$z_k=z_{0k}+l\,h_x+R_k\left(\zeta_{kl}+m_k/\zeta_{kl}\right);\tag{6}$$

$\bar{\varsigma}^{+}_{k+j,l}$, $\bar{\varsigma}^{-}_{k+j,l}$ – переменные, вычисляемые из конформных отображений внешности единичного круга на внешности эллипсов L_{kl}^{+} и L_{kl}^{-} симметричных L_{kl} относительно прямых L^+, L^-:

$$z_k=\bar{z}^{\,0}_{k+j,l}+l\,h_x+(\mu_k-\bar{\mu}_{k+j})h^{+}+\bar{R}_{k+j}\left(\bar{\zeta}^{+}_{k+j,l}+\bar{m}_{k+j}/\bar{\zeta}^{+}_{k+j,l}\right),$$

$$z_k=\bar{z}^{\,0}_{k+j,l}+l\,h_x-(\mu_k-\bar{\mu}_{k+j})h^{-}+\bar{R}_{k+j}\left(\bar{\zeta}^{-}_{k+j,l}+\bar{m}_{k+j}/\bar{\zeta}^{-}_{k+j,l}\right).\tag{7}$$

В силу периодичности напряженного состояния, а следовательно и комплексных потенциалов (2) имеем

$$\Phi'_k\left(z_k+h_x\right)=\Phi'_k\left(z_k\right)\tag{8}$$

Из (7) легко получить, что

$$\zeta_{kl}\left(z_k+h_x\right)=\zeta_{k,l+1}\left(z_k\right),\quad \bar{\zeta}^{+}_{k+j,l}\left(z_k+h_x\right)=\bar{\zeta}^{+}_{k+j,l+1}\left(z_k\right),$$

$$\bar{\zeta}^{-}_{k+j,l}\left(z_k+h_x\right)=\bar{\zeta}^{-}_{k+j,l+1}\left(z_k\right);\quad \varphi'_{kln}\left(z_k+h_x\right)=\varphi'_{k,l+1,n}\left(z_k\right),$$

$$\overline{\varphi'}^{\,+}_{k+j,ln}\left(z_k+h_x\right)=\overline{\varphi'}^{\,+}_{k+j,l+1,n}\left(z_k+h_x\right),$$

$$\overline{\varphi'}^{\,+}_{k+j,ln}\left(z_k+h_x\right)=\overline{\varphi'}^{\,+}_{k+j,l+1,n}\left(z_k+h_x\right).\tag{9}$$

Тогда

$$\Phi'_k\left(z_k\right)=\Gamma_k+\sum_{l=1}^{L}\sum_{n=1}^{\infty}\{a_{kln}\,\varphi'_{kln}\left(z_k+h_x\right)-\overline{r_k^{+}}\,\bar{b}_{kln}\overline{\varphi'}^{\,+}_{kln}\left(z_k+h_x\right)-$$

$$-\overline{s_{k+1}^{+}}\,\bar{b}_{k+1,ln}\overline{\varphi'}^{\,+}_{k+1,ln}\left(z_k+h_x\right)-\overline{r_k^{-}}\,\bar{c}_{kln}\,\overline{\varphi'}^{\,-}_{kln}\left(z_k+h_x\right)-\overline{s_{k+1}^{-}}\,\bar{c}_{k+1,ln}\times$$

$$\times\overline{\varphi'}^{\,-}_{k+1,ln}\left(z_k+h_x\right)\Big\}=\Gamma_k+\sum_{l=1}^{L}\sum_{n=1}^{\infty}\{a_{kln}\,\varphi'_{k,l+1,n}\left(z_k\right)-\overline{r_k^{+}}\,\bar{b}_{kln}\overline{\varphi'}^{\,+}_{k,l+1,n}\left(z_k\right)-$$

$$-\overline{s_{k+1}^{+}}\,\bar{b}_{k+1,ln}\overline{\varphi'}^{+}_{k+1,l+1,n}(z_k)-\overline{r_k^{-}}\,\bar{c}_{kln}\overline{\varphi'}^{-}_{k,l+1,n}(z_k)-\overline{s_{k+1}^{-}}\,\bar{c}_{k+1,ln}\overline{\varphi'}^{-}_{k+1,l+1,n}(z_k)\Big\}=$$

$$=\Gamma_k+\sum_{l=1}^{L}\sum_{n=1}^{\infty}\{a_{kln}\varphi'_{k,l-1,n}(z_k)-\overline{r_k^{+}}\,\bar{b}_{kln}\overline{\varphi'}^{+}_{k,l-1,n}(z_k)-\overline{s_{k+1}^{+}}\,\bar{b}_{k+1,ln}\times$$

$$\times\overline{\varphi'}^{+}_{k+1,l-1,n}(z_k)-\overline{r_k^{-}}\,\bar{c}_{kln}\overline{\varphi'}^{-}_{k,l-1,n}(z_k)-\overline{s_{k+1}^{-}}\,\bar{c}_{k+1,ln}\overline{\varphi'}^{-}_{k+1,l-1,n}(z_k)\Big\}. \tag{10}$$

Сравнивая последнее представление с (2), будем иметь

$$a_{kln}=a_{k,l-1,n},\quad \bar{b}_{kln}=\bar{b}_{k,l-1,n},\quad \bar{b}_{k+1,ln}=\bar{b}_{k+1,l-1,n},$$

$$\bar{c}_{kln}=\bar{c}_{k,l-1,n},\quad \bar{c}_{k+1,ln}=\bar{c}_{k+1,l-1,n}.$$

Для комплексных потенциалов (2) окончательно получаем

$$\Phi'_k(z_k)=\Gamma_k+\sum_{p=1}^{\infty}\{a_{kp}\psi'_{kp}(z_k)-\overline{r_k^{+}}\,\bar{b}_{kp}\overline{\psi'}^{+}_{kp}(z_k)-\overline{s_{k+1}^{+}}\,\bar{b}_{k+1,p}\overline{\psi'}^{+}_{k+1,p}(z_k)-$$

$$-\overline{r_k^{-}}\,\bar{c}_{kp}\overline{\psi'}^{-}_{kp}(z_k)-\overline{s_{k+1}^{-}}\,\bar{c}_{k+1,p}\overline{\psi'}^{-}_{k+1,p}(z_k)\Big\}. \tag{11}$$

Здесь

$$\psi'_{kp}(z_k)=-\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{p}{\zeta_{kl}^{p-1}R_k\left(\zeta_{kl}^{2}-m_k\right)}; \tag{12}$$

$$\overline{\psi'}^{+}_{k+j,p}(z_k)=-\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{p}{\bar{\zeta}^{+\,p-1}_{k+j,l}\bar{R}_{k+j}\left(\bar{\zeta}^{+\,2}_{k+j,l}-\bar{m}_{k+j}\right)},$$

$$\overline{\psi'}^{-}_{k+j,p}(z_k)=-\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{p}{\bar{\zeta}^{-\,p-1}_{k+j,l}\bar{R}_{k+j}\left(\bar{\zeta}^{-\,2}_{k+j,l}-\bar{m}_{k+j}\right)}\quad (j=\overline{0,1}); \tag{13}$$

a_{kp}, b_{kp}, c_{kp} – постоянные, вычисляемые из граничных условий, причем в силу использованной периодичности граничным условиям нужно удовлетворить на контуре основного отверстия L_0 и на отрезках границ L^+, L^-, для которых $-h_x/2\le x\le h_x/2$. Для удовлетворения этим условиям был использован метод наименьших квадратов, что приводит к системе линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов a_{kp}, b_{kp}, c_{kp}. После решения указанной системы комплексные потенциалы (11) становятся известными, что позволяет вычислять основные характеристики напряженного состояния и плотность внутренней энергии в любых точках тела, а также коэффициенты интенсивности напряжений в случае трещин.

Результаты численных исследований. Численные исследования проведены для растягиваемой на бесконечности усилиями $\sigma_x^{\infty}=p$ полосы с периодическим рядом круговых отверстий (рис. 2, *а*) или трещин (рис. 2, *б*). Контуры отверстий и берега трещин считались свободными от загружений и подкреплений. В качестве материалов полосы выбирались М1 (композит на эпоксидном связующем, армированном однонаправленными графитовыми волокнами) и М2 (гранит изотропный) [5]. При проведении исследований в зависимости от расположения отверстий и трещин относительно друг друга и прямолинейных границ количество членов в рядах (11) изменялось от 5 до 15, количество точек на контуре основного отверстия и на «коллокационных отрезках» прямолинейных границ – от 30 до 60. Значения этих параметров увеличивались до тех пор, пока граничные условия не удовлетворялись с достаточной высокой степенью точности (погрешность граничных значений основных характеристик по отношению к интенсивности приложенной нагрузки составляла не более 10^{-3}). «Коллокационные отрезки» выбирались симметрично относительно основного отверстия длиной, равной периоду. Приводимые ниже значения напряжений и КИН даны с точностью до интенсивности приложенной нагрузки p в качестве множителя.

В табл. 1 приведены значения напряжений для полосы из различных материалов с рядом центральных круговых отверстий (рис. 2,*а*) единичного радиуса в зависимости от значений длин перемычек c между контурами отверстий и прямолинейными границами, а также значения расстояний h_x между центрами соседних отверстий. В качестве характерных выбирались точки с координатами $A(0;-1)$, $B(1;0)$, $D(0;1+c/2)$, $O(0;1+c)$.

В табл. 2 для полосы с рядом центральных вертикальных трещин (рис. 2,*б*) единичной длины в зависимости от длин перемычек c между вершинами трещин и прямолинейными границами указаны значения напряжений и КИН в точках $A(0;-1)$, $B(0;0)$, $D(0;1+c/2)$, $O(0;1+c)$. При этом значения расстояний h_x между центрами соседних трещин принималось равным 0,5.

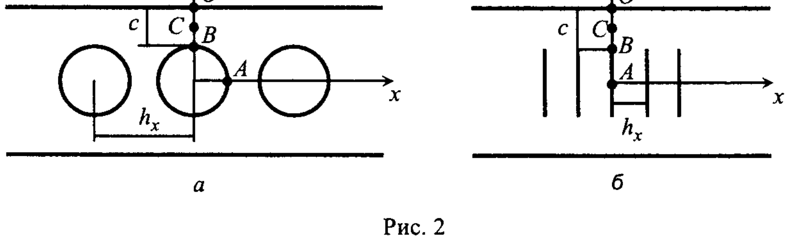
Из данных табл. 1, 2 следует, что уменьшение ширины полосы приводит к росту значений напряжений вблизи контуров отверстий в зоне перемычки между контурами отверстий и прямолинейными границами и к уменьшению напряжений в точках прямолинейной границы. Значения напряжений в точках вблизи горизонтального диаметра малы по сравнению с максимальными напряжениями. При этом значения указанных величин в случае полосы с рядом трещин получаются большими, чем в случае полосы с рядом отверстий. Значения напряжений около прямолинейной границы с увеличением расстояния от контуров

Таблица 1

h_x	Материал	c	Точки				
			A	B	C		O
			σ_y	σ_x	σ_x	σ_y	σ_x
2,5	M1	1,0	0,000	3,153	1,081	0,11	1,043
		0,5	-0,001	3,242	1,101	0,017	0,959
		0,25	-0,001	3,624	1,225	0,020	0,749
		0,1	0,001	4,796	1,730	0,020	0,592
	M2	1,0	0,008	1,937	1,063	0,107	0,825
		0,5	0,038	2,040	1,170	0,091	0,714
		0,25	0,012	2,401	1,337	0,067	0,365
		0,1	0,069	2,600	1,827	0,008	1,359
2,1	M1	1,0	-0,002	3,076	1,137	0,069	1,112
		0,5	-0,004	3,117	1,143	0,016	1,033
		0,25	-0,017	3,042	1,136	0,016	0,887
		0,1	0,081	3,033	1,422	0,008	1,165
	M2	1,0	-0,001	1,821	1,059	0,095	0,901
		0,5	0,042	1,960	1,051	0,085	0,739
		0,25	0,064	1,976	1,118	0,051	0,482
		0,1	0,068	2,012	1,903	0,010	1,883

Таблица 2

Материал	c	Точки				
		A	B	C		O
		σ_y	k_1	σ_x	σ_y	σ_x
M1	1,0	-0,004	0,0027	0,766	0,001	0,788
	0,5	-0,002	0,0540	1,262	0,000	1,262
	0,25	-0,002	0,2027	1,364	0,009	1,347
	0,1	-0,002	0,3283	1,391	0,028	0,606
M2	1,0	0,000	0,2675	0,946	0,004	0,948
	0,5	0,003	0,3236	1,121	0,058	1,131
	0,25	0,002	0,3240	1,126	0,162	0,972
	0,1	0,001	0,3283	1,241	0,292	0,606



а б

Рис. 2

отверстий до прямолинейных границ уменьшаются. Уменьшение расстояния между контурами отверстий h_x приводит к уменьшению характеристик напряженного состояния. Степень анизотропии материала существенно в точках вблизи вертикального диаметра для отверстий и на значения КИН для трещин. Заметим, что полученные результаты хорошо согласуются с приведенными в работах [1-4].

РЕЗЮМЕ

Запропоновано наближений метод визначення напруженого стану анізотропної смуги з періодичним рядом отворів або тріщин. Розв'язування грунтується на загальних представленнях комплексних потенціалів та методі найменших квадратів. Наведено результати досліджень для смуги з різних анізотропних матеріалів з періодичним рядом отворів або тріщин в залежності від відстані між контурами отворів та відстані до прямолінійних границь.

SUMMARY

The approached method of stressed state definition of an anisotropic strip with a periodic number of holes or cracks is offered. The solution is built using the generalized complex potentials and the least squares method. Results of numerical researches for a strip from various anisotropic materials with a periodic number of circular holes or cracks from dependence on distance between contours of holes and distances up to rectilinear borders are given.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Калоеров С.А. , Гуревич З.Л.* Напряженное состояние полосы с бесконечным рядом круговых отверстий // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1975. – Вып.26. – С.48-54.
2. *Саврук М.П.* Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – К.: Наук. думка, 1988. – 620 с. (Механика разрушения и прочность материалов, Т.2).
3. *Калоеров С.А.* Приближенный метод исследования напряженного состояния изотропной полуплоскости и полосы с отверстиями и трещинами // Теорет. и прикладная механика. – 2004. – Вып.39. – С.83-93.
4. *Калоеров С.А., Авдюшина Е.В., Хорошев К.Г.* Приближенный метод определения напряженного состояния анизотропных слоя и полосы с отверстиями и трещинами // Теорет. и прикладная механика. – 2003. – Вып.38. – С.44-52.
5. *Калоеров С.А., Глущенко Ю.А.* Периодическая задача электроупругости для слоя и полосы с рядом отверстий или трещин вдоль границ // Теорет. и прикладная механика. – 2004. – Вып.40. – С.117-126.

Надійшла до редакції 02.02.2005 р.

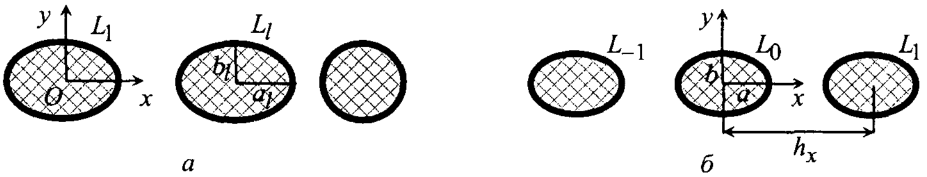
УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЯЗКОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ ПЛАСТИНКИ С ЖЕСТКИМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ИЛИ ЛИНЕЙНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

С.А.Калоеров, А.Б.Мироненко

Как известно [1, 2], фактор времени играет существенную роль в процессе деформации тел из вязкоупругих материалов. Поэтому разработка методов определения напряженно-деформированного состояния тел из таких материалов и решение на их основе практических задач представляют большой интерес. Этой проблеме посвящено большое количество работ, и прежде всего, работ, связанных с исследованиями напряженно-деформированного состояния вязкоупругих тел с трещинами и криволинейными отверстиями [3, 4]. Для многосвязных изотропных пластинок с жестко подкрепленными контурами при определении напряженного состояния можно воспользоваться методом [5], основанным на разложении комплексных потенциалов в ряды по малому параметру, в качестве которого принимается отклонение коэффициента Пуассона от его мгновенно-упругого значения. При этом для удовлетворения граничным условиям в случае жестких круговых включений [6] можно использовать метод рядов. Но для криволинейных включений и включений вдоль одной прямой такой подход не применим. В работах [7, 8] разработан метод, позволяющий исследовать напряженно-деформированное состояние изотропной пластинки с произвольными отверстиями и трещинами. В данной статье этот метод распространен на решение задач вязкоупругости для изотропной пластинки с жесткими включениями, решены задачи для пластинки с конечным или бесконечным рядом эллиптических (в частном случае круговых или линейных) включений вдоль одной прямой.

1. Постановка задачи. Рассмотрим бесконечную изотропную пластинку с конечным или бесконечным рядом жестких эллиптических включений вдоль прямой, принимаемой за ось Ox прямоугольной системы координат Oxy. В случае конечного числа включений обозначим их контуры, полуоси, абсциссы центров через L_l, a_l, b_l, x_{0l} $(l=\overline{1, L})$ (рис. 1, *а*). В случае бесконечного ряда будем считать включения одинаковыми, имеющими полуоси a, b и контуры L_l $(l=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ (рис. 1, *б*). Для последнего случая расстояния между центрами соседних отверстий одинаковы и равны h_x. На бесконечности пластинка находится под действием растягивающих усилий $\sigma_x^\infty = p$, $\sigma_y^\infty = q$, касательные напряжения и жесткое вращение равны нулю $(\tau_{xy}^\infty = 0, \varepsilon^\infty = 0)$. Будем считать, что материал пластинки обладает свойствами, описываемыми линейной теорией вязкоупругости.



а *б*

Рис. 1

2. Краевые условия для комплексных потенциалов. В упругой постановке определение напряженно-деформированного состояния рассматриваемой пластинки сводится к нахождению комплексных потенциалов $\Phi(z)$, $\Omega(z)$, удовлетворяющих на контурах включений граничным условиям [7]

$$æ\delta\Phi(t)-(\delta-\bar{\delta})\overline{\Phi(t)}-(t-\bar{t})\bar{\delta}\overline{\Phi'(t)}-\bar{\delta}\overline{\Omega(t)}=0. \tag{2.1}$$

При этом в случае конечного числа включений условиям (2.1) нужно удовлетворять на контуре каждого из них, для периодического ряда – на контуре одного из включений, например, основного включения с контуром L_0. В условиях (2.1) [9]

$$\Phi(z)=\Gamma+\Phi^*(z), \quad \Omega(z)=\Gamma'+\Omega^*(z); \tag{2.2}$$

$$\Gamma=\frac{\sigma_x^\infty+\sigma_y^\infty}{4}, \quad \Gamma'=\frac{3\sigma_y^\infty-\sigma_x^\infty}{4}, \quad æ=\frac{3-\nu}{1+\nu}, \quad \delta=\frac{dt}{ds}; \tag{2.3}$$

$\Phi^*(z)$, $\Omega^*(z)$ – функции, голоморфные вне контуров всех включений; ν – коэффициент Пуассона; dt/ds – производная по дуге контура.

Учитывая значение параметра æ, граничные условия (2.1) представим в виде

$$(3-\lambda-\nu_0)\delta\,\Phi(t)-(1+\lambda+\nu_0)\left[(\delta-\bar{\delta})\overline{\Phi(t)}+(t-\bar{t})\bar{\delta}\,\overline{\Phi'(t)}+\bar{\delta}\,\overline{\Omega(t)}\right]=0, \qquad (2.4)$$

где $\lambda=\nu-\nu_0$ – малый параметр; ν_0 – мгновенное значение коэффициента Пуассона.

Разложим исходные функции в ряды по степеням малого параметра λ

$$\left(\Phi^*(z),\ \Omega^*(z)\right)=\sum_{j=0}\lambda^j\left(\Phi_j(z),\ \Omega_j(z)\right), \qquad (2.5)$$

в которых каждая из функций $\Phi_j(z)$, $\Omega_j(z)$ голоморфна вне контуров всех включений.

Подставив разложения (2.5) в граничные условия (2.4), будем иметь

$$\sum_{j=0}\Big[\lambda^j\left\{(3-\nu_0)\delta\Phi_j(t)-(1+\nu_0)\left[(\delta-\bar{\delta})\overline{\Phi_j(t)}+(t-\bar{t})\,\bar{\delta}\,\overline{\Phi'_j(t)}+\bar{\delta}\,\overline{\Omega_j(t)}\right]\right\}-$$

$$-\lambda^{j+1}\left\{\delta\Phi_j(t)+(\delta-\bar{\delta})\overline{\Phi_j(t)}+(t-\bar{t})\bar{\delta}\ \overline{\Phi'_j(t)}+\bar{\delta}\ \overline{\Omega_j(t)}\right\}\Big]=$$

$$=\lambda\left(\Gamma\delta+(\delta-\bar{\delta})\bar{\Gamma}+\bar{\delta}\bar{\Gamma}'\right)-(3-\nu_0)\delta\Gamma+(1+\nu_0)\left[(\delta-\bar{\delta})\bar{\Gamma}+\bar{\delta}\bar{\Gamma}'\right].$$

Приравняв в последнем равенстве коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра λ, получим

$$\text{æ}_0\delta\,\Phi_0(t)-(\delta-\bar{\delta})\overline{\Phi_0(t)}-(t-\bar{t})\bar{\delta}\,\overline{\Phi'_0(t)}-\bar{\delta}\ \overline{\Omega_0(t)}=$$

$$=-\text{æ}_0\delta\Gamma+(\delta-\bar{\delta})\bar{\Gamma}+\bar{\delta}\bar{\Gamma}',$$

$$\text{æ}_0\delta\Phi_j(t)-(\delta-\bar{\delta})\overline{\Phi_j(t)}-(t-\bar{t})\bar{\delta}\,\overline{\Phi'_j(t)}-\bar{\delta}\,\overline{\Omega_j(t)}=f_j(t), \qquad (2.6)$$

где

$$\text{æ}_0=(3-\nu_0)/(1+\nu_0),$$

$$f_j(t)=\frac{1}{1+\nu_0}\left\{\delta\Phi_{j-1}(t)+(\delta-\bar{\delta})\overline{\Phi_{j-1}(t)}+(t-\bar{t})\bar{\delta}\,\overline{\Phi'_{j-1}(t)}+\right.$$

$$\left.+\bar{\delta}\ \overline{\Omega_{j-1}(t)}+\delta_j^1\left[\Gamma\delta+(\delta-\bar{\delta})\bar{\Gamma}+\bar{\delta}\bar{\Gamma}'\right]\right\}\quad (j=1,2,3,\ldots). \qquad (2.7)$$

3. Определение комплексных потенциалов. Функции $\Phi_j(z)$, $\Omega_j(z)$, голоморфные вне контуров всех включений, в случае их конечного числа представим в виде [7]

$$\Phi_j(z)=\sum_{l=1}^{L}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{l\mathrm{n}}(z)a_{jl\mathrm{n}},$$

$$\Omega_j(z)=\sum_{l=1}^{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\psi_{l\mathrm{n}}(z)a_{jl\mathrm{n}}+\varphi_{l\mathrm{n}}(z)\bar{b}_{jl\mathrm{n}}\right). \qquad (3.1)$$

Здесь

$$\varphi_{ln}(z)=\frac{1}{\zeta_l^{n-1}\left(\zeta_l^2-m_l\right)},$$

$$\psi_{ln}(z)=-\frac{1}{\zeta_l^{n-1}\left(\zeta_l^2-m_l\right)^3}\left\{c_{l2}\zeta_l^2+n\left[d_{l4}\zeta_l^4+d_{l2}\zeta_l^2+d_{l0}\right]\right\}; \qquad (3.2)$$

$$c_{l2}=-2\left(m_l-1\right)^2,\quad d_{l4}=1-m_l,$$

$$d_{l2} = m_l^2 - 1\,, \quad d_{l0} = m_l(1 - m_l)\,; \tag{3.3}$$

ζ_l – переменные, вычисляемые из неявных зависимостей

$$z = x_{0l} + R_l\left(\zeta_l + \frac{m_l}{\zeta_l}\right); \tag{3.4}$$

$$R_l = \frac{a_l + b_l}{2}\,, \quad m_l = \frac{a_l - b_l}{a_l + b_l}\,; \tag{3.5}$$

$a_{jl\text{n}}$, $b_{jl\text{n}}$ – постоянные, определяемые из граничных условий на контурах включений.

В случае периодического ряда включений для $\Phi_j(z)$, $\Omega_j(z)$ имеем [7]

$$\Phi_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z) a_{jn}\,, \quad \Omega_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\psi_n(z) a_{jn} + \varphi_n(z)\bar{b}_{jn}\right). \tag{3.6}$$

При этом

$$\varphi_n(z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\zeta_l^{n-1}\left(\zeta_l^2 - m\right)}\,,$$

$$\psi_n(z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\zeta_l^{n-1}\left(\zeta_l^2 - m\right)^3}\left\{c_2\zeta_l^2 + n\left[d_4\zeta_l^4 + d_2\zeta_l^2 + d_0\right]\right\}; \tag{3.7}$$

$$c_2 = -2(m-1)^2\,, \quad d_4 = 1 - m\,, \quad d_2 = m^2 - 1\,, \quad d_0 = m(1-m)\,; \tag{3.8}$$

ζ_l – переменные, вычисляемые из неявных зависимостей

$$z = l\,h_x + R\left(\zeta_l + \frac{m}{\zeta_l}\right); \tag{3.9}$$

$R = (a+b)/2$, $m = (a-b)/(a+b)$; $a_{j\text{n}}$, $b_{j\text{n}}$ – постоянные, определяемые из граничных условий на контуре основного включения L_0, для нахождения которых используем метод наименьших квадратов.

В случае конечного числа включений составим функционал

$$J = \sum_{m=1}^{M} \left|F(t_m)\right|^2\,, \tag{3.10}$$

в котором

$$F(t_m) = æ_0\delta\,\Phi_j(t_m) - (\delta - \bar{\delta})\overline{\Phi_j(t_m)} - \bar{\delta}(t_m - \overline{t_m})\overline{\Phi'_j(t_m)} - \bar{\delta}\,\overline{\Omega_j(t_m)} - f_j(t_m)\,; \tag{3.11}$$

t_m – система точек, выбираемых на контурах L_l $(l = \overline{1,L})$. Имеем

$$\frac{\partial F(t_m)}{\partial a_{jl\text{n}}} = \varphi_{1l\text{n}}(t_m)\,, \quad \frac{\partial \overline{F(t_m)}}{\partial a_{jl\text{n}}} = \psi_{1l\text{n}}(t_m)\,,$$

$$\frac{\partial F(t_m)}{\partial \bar{b}_{jl\text{n}}} = 0\,, \quad \frac{\partial \overline{F(t_m)}}{\partial \bar{b}_{jl\text{n}}} = \psi_{2l\text{n}}(t_m)\,;$$

$$\varphi_{1l\text{n}}(t_m) = æ_0\delta\varphi_{l\text{n}}(t_m)\,, \quad \psi_{1l\text{n}}(t_m) = (\delta - \bar{\delta})\varphi_{l\text{n}}(t_m) +$$

$$+\delta(t_m - \overline{t_m})\varphi'_{l\text{n}}(t_m) - \delta\psi_{l\text{n}}(t_m)\,, \quad \psi_{2l\text{n}}(t_m) = -\delta\varphi_{l\text{n}}(t_m)\,. \tag{3.12}$$

Удовлетворяя условиям минимума $\partial J/\partial a_{jl\text{n}} = 0$, $\partial J/\partial \bar{b}_{jl\text{n}} = 0$ функционала (3.10), для определения неизвестных постоянных $a_{j\ln}$, $b_{j\ln}$ получаем

$$\sum_{m=1}^{M}\Big\{r_{i\ln 1}\Phi_j(t_m)+r_{i\ln 2}\Phi'_j(t_m)+r_{i\ln 3}\overline{\Phi_j(t_m)}+r_{i\ln 4}\overline{\Phi'_j(t_m)}+r_{i\ln 5}\Omega_j(t_m)+$$
$$+r_{i\ln 6}\overline{\Omega_j(t_m)}-\psi_{i\ln}(t_m)f_j(t_m)-\varphi_{i\ln}(t_m)\overline{f_j(t_m)}\Big\}=0, \qquad (3.13)$$

где

$$r_{i\ln 1}=(\delta-\overline{\delta})\varphi_{i\ln}(t_m)+\text{æ}_0\delta\psi_{i\ln}(t_m),\quad r_{i\ln 2}=\delta(t_m-\overline{t_m})\varphi_{i\ln}(t_m),$$
$$r_{i\ln 3}=\text{æ}_0\overline{\delta}\varphi_{i\ln}(t_m)-(\delta-\overline{\delta})\psi_{i\ln}(t_m),\quad r_{i\ln 4}=-\overline{\delta}(t_m-\overline{t_m})\psi_{i\ln}(t_m),$$
$$r_{i\ln 5}=-\delta\varphi_{i\ln}(t_m),\quad r_{i\ln 6}=-\overline{\delta}\psi_{i\ln}(t_m),\quad \varphi_{2\ln}(t_m)=0\quad\left(i=\overline{1,2}\right). \qquad (3.14)$$

Подставив выражения (3.1) в уравнения (3.13), для определения $a_{j\ln}$ и $b_{j\ln}$ получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{r=1}^{L}\sum_{p=1}^{\infty}\Big(\Big\{r_{i\ln 1}\varphi_{rp}(t_m)+r_{i\ln 2}\varphi'_{rp}(t_m)+r_{i\ln 5}\psi_{rp}(t_m)\Big\}a_{jrp}+\Big\{r_{i\ln 3}\overline{\varphi_{rp}(t_m)}-$$
$$-r_{i\ln 4}\overline{\varphi'_{rp}(t_m)}+r_{i\ln 6}\overline{\psi_{rp}(t_m)}\Big\}\overline{a_{jrp}}+\Big\{r_{i\ln 6}\overline{\varphi_{rp}(t_m)}\Big\}b_{jrp}+\Big\{r_{i\ln 5}\varphi_{rp}(t_m)\Big\}\overline{b_{jrp}}\Big)=$$
$$=\sum_{m=1}^{M}\Big\{\psi_{i\ln}(t_m)f_j(t_m)+\varphi_{i\ln}(t_m)\overline{f_j(t_m)}\Big\}\quad(i=\overline{1,\,2},\ l=\overline{1,\,L},\ n=1,\,2,\dots). \qquad (3.15)$$

Аналогично приведенному выше в случае периодической задачи для определения неизвестных постоянных a_{jn} и b_{jn} получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{p=1}^{\infty}\Big(\Big\{r_{in1}\varphi_p(t_m)+r_{in2}\varphi'_p(t_m)+r_{in5}\psi_p(t_m)\Big\}a_{jp}+\Big\{r_{in3}\overline{\varphi_p(t_m)}-$$
$$-r_{in4}\overline{\varphi'_p(t_m)}+r_{in6}\overline{\psi_p(t_m)}\Big\}\overline{a_{jp}}+\Big\{r_{in6}\overline{\varphi_p(t_m)}\Big\}b_{jp}+\Big\{r_{in5}\varphi_p(t_m)\Big\}\overline{b_{jp}}\Big)=$$
$$=\sum_{m=1}^{M}\Big\{\psi_{in}(t_m)f_j(t_m)+\varphi_{in}(t_m)\overline{f_j(t_m)}\Big\}\quad(i=\overline{1,2},\quad n=1,2,\dots). \qquad (3.16)$$

Здесь

$$r_{in1}=(\delta-\overline{\delta})\varphi_{in}(t_m)+\text{æ}_0\delta\psi_{in}(t_m),\quad r_{in2}=\delta(t_m-\overline{t_m})\varphi_{in}(t_m),$$
$$r_{in3}=\text{æ}_0\overline{\delta}\varphi_{in}(t_m)-(\delta-\overline{\delta})\psi_{in}(t_m),\quad r_{in4}=-\overline{\delta}(t_m-\overline{t_m})\psi_{in}(t_m),$$
$$r_{in5}=-\delta\varphi_{in}(t_m),\quad r_{in6}=-\overline{\delta}\psi_{in}(t_m),\quad \varphi_{2n}(t_m)=0,$$
$$\psi_{1n}(t_m)=(\delta-\overline{\delta})\varphi_n(t_m)+\delta(t_m-\overline{t_m})\varphi'_n(t_m)-\delta\psi_n(t_m),$$
$$\varphi_{1n}(t_m)=\text{æ}_0\delta\varphi_n(t_m),\quad \psi_{2n}(t_m)=-\delta\varphi_n(t_m);$$

t_m – точки, выбираемые на контуре только основного включения L_0.

После решения систем (3.15) или (3.16) функции (3.1) или (3.6) будут известными и по ним, используя принцип Вольтерра, для любого момента времени можно найти функции (2.2) и вычислять напряжения. При этом для нахождения функций и напряжений в момент времени t на основе принципа Вольтерра нужно в соотношениях (2.5) степени λ^j $(j\geq 1)$ заменить значениями временных функций $T_j(t)$, т.е. положить

$$\lambda^j=T_j(t)=\lambda^{*j}\cdot 1=\left(\nu^*-\nu_0\right)^j\cdot 1, \qquad (3.17)$$

где ν^* – операторный коэффициент Пуассона, который, следуя [2], будем аппроксимировать выражением

$$\nu^* = \nu_0\left(1 + \delta_* \, Э_\alpha^*(-\beta)\right), \tag{3.18}$$

причем для вычисления значений воздействия оператора Работнова [1] на единицу нужно использовать формулу

$$Э_\alpha^*(-\beta)\cdot 1 = \frac{1}{\beta}\left[1 - \exp\left\{-\beta\left[(1-\alpha)t\right]^{1-\alpha}\right\}\right]; \tag{3.19}$$

α, β, δ_* – реологические постоянные материала.

Учитывая (3.18) и свойство возведения резольвентных операторов в степень, временные функции (3.17) запишем в виде

$$T_j(t) = \nu_0^j \delta_*^j Э_\alpha^{*\,j}(-\beta)\cdot 1 = \nu_0^j \delta_*^j \frac{(-1)^{j-1}}{(1-j)!}\frac{\partial^{j-1}}{\partial \beta^{j-1}}\left[Э_\alpha^*(-\beta)\cdot 1\right],$$

или окончательно получим

$$\lambda^j = T_j(t) = \frac{\nu_0^j \delta_*^j}{\beta^j}\left[1 - e^{-\beta\tau}\sum_{r=0}^{j-1}\frac{(\beta\tau)^r}{r!}\right]. \tag{3.20}$$

Здесь

$$\tau = \left[(1-\alpha)t\right]^{1-\alpha}. \tag{3.21}$$

Подставляя значения λ^j по формуле (3.20) в (2.5) и учитывая полученные выражения в (2.2), найдем окончательный вид функций $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$, а по ним вычислим [9] основные напряжения

$$\begin{gathered} \sigma_x + \sigma_y = 4\operatorname{Re}\Phi(z), \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2\left[(\bar{z} - z)\Phi'(z) - \Phi(z) + \Omega(z)\right], \end{gathered} \tag{3.22}$$

а также напряжения

$$\begin{gathered} \sigma_n = \sigma_x \cos^2 nx + \sigma_y \cos^2 ny + 2\tau_{xy}\cos nx \cos ny, \\ \sigma_s = \sigma_x \cos^2 ny + \sigma_y \cos^2 nx - 2\tau_{xy}\cos nx \cos ny, \\ \tau_{ns} = \left(\sigma_y - \sigma_x\right)\cos nx \cos ny + \tau_{xy}\left(\cos^2 nx - \cos^2 ny\right) \end{gathered} \tag{3.23}$$

на произвольной площадке с нормалью n и касательной s.

Если некоторое включение L_l переходит в прямолинейное жесткое включение (эллипс с малой полуосью $b_l = 0$), то можно вычислить и особенности напряжений в концах линейных включений [9]

$$k_1^{\pm} = \lim_{r\to 0}\left(\sqrt{2r}\sigma_y\right), \quad k_2^{\pm} = \lim_{r\to 0}\left(\sqrt{2r}\tau_{xy}\right). \tag{3.24}$$

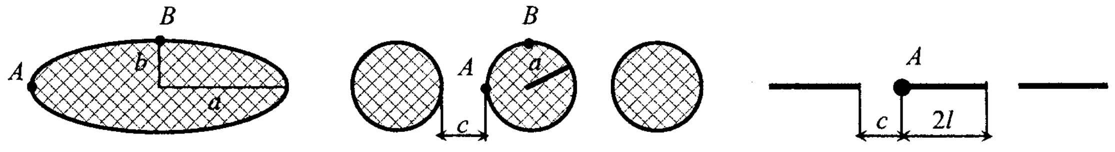
Эти величины по аналогии с теорией трещин назовем коэффициентами интенсивности напряжений (КИН).

Проведены численные исследования распределения напряжений и изменения КИН в пластинке в зависимости от геометрических параметров жестких включений и их количества. Пластинка считалась изготовленной из алюминия, для которого [2] $\nu = 0.25$, $\alpha = -0.5$, $\beta = 6.65\cdot 10^{-3}$, $\delta_* = 6.15\cdot 10^{-3}$. При проведении расчетов количество приближений j по степеням малого параметра λ увеличивалось до тех пор, пока последующее приближение изменяло значения напряжений в предыдущем приближении более чем на 0,01%. Для удовлетворения этому условию в рассмотренных случаях необходимо было оставлять степени малого параметра λ от 6 до 10. Для удовлетворения граничным условиям с достаточно высокой степенью точности в зависимости от расстояний между включениями в рядах (3.1) для каждого включения оставлялось от 10 до 70 членов и бралось от 100 до 200 коллокационных точек t_m, в которых вычислялась невязка функционала (3.10). Ниже с точностью до интенсивности приложенной нагрузки (p или q) как множителя приведены некоторые из полученных результатов для напряжений и КИН, причем они даны для двух значений времени отсчета, для $t = 0$ и $t = 100$ час. Это связано с тем, что, как показали проведенные расчеты, практически для всех рассмотренных случаев уже через 80 час. после приложения нагрузки напряжения в пластинке не изменяются с течением времени, т.е. в пластинке устанавливается стационарное состояние.

В табл. 1 даны значения напряжений в некоторых характерных точках пластинки с одним эллиптическим включением (рис 2, a) в зависимости от отношения его полуосей b/a и времени приложения нагрузки. Из табл. 1 видно, что с уменьшением отношения b/a значения напряжений в окрестностях концов большой полуоси резко возрастают, при $b/a < 10^{-3}$ такое включение можно считать прямолинейным и для него вычислять КИН. С течением времени (с ростом t) значения напряжений около включения уменьшаются, КИН при действии усилий $\sigma_x^\infty = p$ также уменьшаются, но в случае действия усилий $\sigma_y^\infty = q$ наблюдается незначительное его увеличение.

Таблица 1

Способ загружения	Точка	Величина	t, час.	b/a							
				1	0,5	0,1	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
$\sigma_x^\infty = p$	A	σ_x	0	1,527	2,109	6,764	59,130	–	–	–	–
			100	1,469	2,005	6,294	54,540	–	–	–	–
		K_1	0	–	–	–	–	0,014	0,034	-0,213	-0,218
			100	–	–	–	–	0,012	0,041	-0,134	-0,134
	B	σ_y	0	0,073	0,145	0,204	0,217	0,218	0,218	0,218	0,218
			100	-0,119	0,010	0,113	0,136	0,139	0,139	0,139	0,139
$\sigma_y^\infty = q$	A	σ_x	0	0,073	-0,073	-1,236	-14,330	–	–	–	–
			100	-0,119	-0,377	-2,441	-25,660	–	–	–	–
		K_1	0	–	–	–	–	-0,002	0,055	0,055	0,055
			100	–	–	–	–	-0,006	0,059	0,065	0,067
	B	σ_y	0	1,527	1,236	1,004	0,951	0,946	0,945	0,945	0,945
			100	1,469	1,201	0,987	0,939	0,934	0,933	0,933	0,933



а б в

Рис. 2

В табл. 2, для пластины с конечным или бесконечным числом одинаковых круговых жестких включений радиуса a вдоль оси Ox (рис.2, $б$) приведены значения нормальных напряжений σ_r на площадках, касательных к контуру центрального включения в зависимости от количества включений L, отношения расстояний между ними к радиусу включения c/a и времени приложения нагрузки. Случай $L = \infty$ соответствует пластинке с бесконечным числом включений (периодическая задача). Как следует из табл. 2, с увеличением количества включений и уменьшением расстояний между ними значения напряжений около точки A увеличиваются, около B уменьшаются. В этих точках с течением времени приложения нагрузки t напряжения могут и возрастать и убывать в зависимости от расстояний между включениями и их количества. В некоторых случаях они с течением времени даже меняют знак.

Таблица 2

Точки	c/a	t, час.	Количество отверстий, L					
			2	3	5	15	25	∞
			Действие усилий $\sigma_x^\infty = p$					
A	2	0	1,757	1,836	1,929	2,040	2,064	2,091
		100	1,725	1,811	1,915	2,042	2,070	2,102
	1	0	2,087	2,244	2,479	2,811	2,891	2,994
		100	2,091	2,261	2,525	2,916	3,014	3,141
	0,5	0	2,662	2,958	3,465	4,355	4,616	4,994
		100	2,716	3,040	3,607	4,669	4,926	5,498
	0,1	0	5,212	6,173	8,098	13,380	15,870	21,200
		100	5,346	6,351	8,405	14,460	17,520	25,010
	0,01	0	14,840	18,290	25,930	53,220	72,430	181,600
		100	14,690	18,050	25,520	53,150	69,960	211,100
B	2	0	0,064	0,056	0,046	0,031	0,028	0,024
		100	-0,126	-0,133	-0,145	-0,163	-0,168	-0,173
	1	0	0,071	0,070	0,057	0,030	0,023	0,014
		100	-0,114	-0,108	-0,124	-0,158	-0,168	-0,182
	0,5	0	0,084	0,099	0,087	0,051	0,038	0,019
		100	-0,094	-0,064	-0,076	-0,124	-0,159	-0,171
	0,1	0	0,106	0,156	0,157	0,122	0,099	0,045
		100	-0,062	0,015	0,024	-0,015	-0,046	-0,127
	0,01	0	0,118	0,189	0,205	0,203	0,186	0,076
		100	-0,048	0,054	0,081	0,087	0,038	-0,074
			Действие усилий $\sigma_y^\infty = q$					
A	2	0	-0,044	-0,078	-0,118	-0,166	-0,176	-0,188
		100	-0,301	-0,357	-0,426	-0,508	-0,526	-0,548
	1	0	-0,184	-0,244	-0,332	-0,457	-0,487	-0,525
		100	-0,538	-0,641	-0,802	-1,038	-1,096	-1,172
	0,5	0	-0,365	-0,462	-0,630	-0,926	-1,014	-1,132
		100	-0,883	-1,065	-1,385	-1,986	-2,311	-2,436
	0,1	0	-0,786	-1,049	-1,579	-3,056	-3,757	-5,088
		100	-1,899	-2,407	-3,448	-6,545	-9,097	-11,650
	0,01	0	-2,132	-3,000	-4,930	-12,000	-17,230	-45,090
		100	-5,074	-6,692	-10,300	-23,860	-27,030	-101,100
B	2	0	1,491	1,456	1,443	1,430	1,428	1,425
		100	1,447	1,426	1,422	1,422	1,422	1,422
	1	0	1,464	1,402	1,380	1,361	1,358	1,355
		100	1,422	1,375	1,366	1,368	1,370	1,373
	0,5	0	1,442	1,357	1,327	1,303	1,300	1,298
		100	1,397	1,323	1,306	1,308	1,315	1,322
	0,1	0	1,421	1,314	1,272	1,240	1,241	1,243
		100	1,369	1,261	1,227	1,216	1,246	1,256
	0,01	0	1,416	1,302	1,255	1,211	1,206	1,222
		100	1,361	1,241	1,196	1,161	1,162	1,225

В табл. 3 для пластины с конечным или бесконечным рядом жестких линейных включений вдоль оси Ox (рис 2, $в$) при действии усилий $\sigma_y^\infty = q$ приведены значения КИН k_1^- для левой вершины центрального включения в зависимости от количества включений L, отношения расстояния между включениями к полудлине одного из них c/l и времени. На рис. 3 изображены графики изменения k_1^- в зависимости от c/l. Как следует из табл. 3 и рис. 3 с увеличением количества включений и уменьшением расстояний между ними значения k_1^- растут. Эти значения увеличиваются и с течением времени.

Таблица 3

L	t, час	c/l					
		∞	2,00	1,00	0,50	0,10	0,01
1	0	0,0546	–	–	–	–	–
	100	0,0670	–	–	–	–	–
2	0	–	0,0573	0,0608	0,0671	0,0980	0,2096
	100	–	0,0702	0,0745	0,0823	0,1202	0,2571
3	0	–	0,0589	0,0638	0,0721	0,1100	0,2500
	100	–	0,0721	0,0782	0,0885	0,1360	0,3070
5	0	–	0,0598	0,0662	0,0771	0,1290	0,3190
	100	–	0,0734	0,0812	0,0946	0,1580	0,3910
7	0	–	0,0603	0,0674	0,0794	0,1380	0,3590
	100	–	0,0740	0,0826	0,0974	0,1690	0,4230
15	0	–	0,0610	0,0689	0,0826	0,1445	0,3759
	100	–	0,0749	0,0845	0,1013	0,1791	0,4482
∞	0	–	0,0616	0,0701	0,0850	0,1618	0,4882
	100	–	0,0755	0,0858	0,1043	0,1984	0,5988

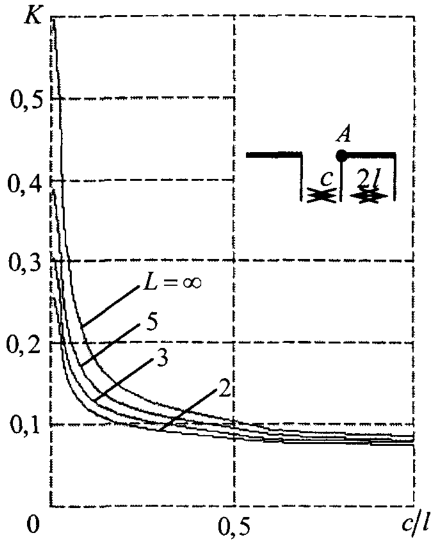


Рис. 3

РЕЗЮМЕ

Запропонован метод дослідження напруженого стану в'язкопружної багатозв'язної ізотропної пластинки з жорсткими включеннями уздовж однієї прямої. Проведені дослідження в'язкопружного стану пластинки з кінцевим або нескінченним числом кругових і лінійних включень.

SUMMARY

The method of research of a stress stage the multiconnected viscoelastic isotropic plate with rigid inclusions along one straight line is proposed. Researches of a viscoelastic condition of a plate with final or infinite number of circular and linear inclusions are carried out.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Работнов Ю.Н.* Равновесие упругой среды с последействием // Прикладная математика и механика. – 1948. – Т.12. – №1. – С.53-62.
2. *Савин Г.Н.* Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с.
3. *Каминский А.А.* Механика разрушения вязкоупругих тел. – К.: Наук. думка, 1980. – 160 с.
4. *Каминский А.А.* Разрушение вязкоупругих тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1990. – 310 с.
5. *Іванов Г.М., Космодаміанський А.С.* Напружно-деформований стан в'язкопружних багатозв'язних середовищ // ДАН УРСР. – А, 1970. – Вып.9. – С.813-816
6. *Иванов Г.М., Космодамианский А.С., Шкодина Л.Н.* Напряженно-деформированное состояние вязкоупругих многосвязных плит // Тр. X Всесоюз. Конф. по теории оболочек и пластин. – Тбилиси: Мецниереба, 1975. – Т.1. – С.435-440
7. *Калоеров С.А., Вакуленко С.В.* Об общих представлениях комплексных потенциалов для изотропных пластинок с отверстиями, трещинами и включениями // Теорет. и прикладная механика. – 2001. – Вып.32. – С.79-93.
8. *Вакуленко С.В., Калоеров С.А.* Приближенный метод определения напряженного состояния многосвязной изотропной полуплоскости с отверстиями и трещинами // Теорет. и прикладная механика. – 2002. – Вып.36. – С.65-76.
9. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.

Надійшла до редакції 26.02.2005 р.

ВІСНИК ДОНЕЦЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ, Сер. А: Природничі науки, 2005, вип. 1

УДК 539.3

ВЯЗКОУПРУГАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ АНИЗОТРОПНОГО МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД С ВЫРАБОТКОЙ

Н.М.Нескородев, Р.Н.Нескородев

Многими исследователями [1] при решении задачи о напряженно-деформированном состоянии массива горных пород по вязкоупругой модели Фойгта с учетом ползучести использовался принцип Вольтерра, по которому решение задачи теории упругости трансформируется в решение соответствующей задачи вязкоупругости заменой в окончательном результате упругих постоянных соответствующими временными интегральными операторами, что приводит исходную задачу к решению интегральных уравнений. В предлагаемой работе одномерная вязкоупругая модель Фойгта обобщена на трехмерную анизотропную модель зависимостей между напряжениями и деформациями и для ее решения использован метод разделения переменных.

1. Обобщенная плоская деформация для горного массива с горизонтальными выработками. Рассмотрим массив горных пород, моделируемый полупространством, ограниченным горизонтальной плоскостью. Отнесем его к прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ с началом на глубине H и осью Ox_2, направленной вертикально вверх. Плоскость Ox_1x_3 совместим с горизонтальной плоскостью. Пусть в массиве в направлении оси Ox_3, на глубине H пройдены протяженные параллельные выработки. Необходимо определить компоненты напряженно-деформированного состояния в окрестности выработок под действием гравитационных сил.

Пусть свойства горных пород различны в разных направлениях и для описания их поведения можно использовать модель, описываемую обобщенным законом Гука [2]:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{a}\boldsymbol{\sigma} \tag{1.1}$$

или $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}$, где $\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1}$, причем $\mathbf{a}$ и $\mathbf{A}$ – симметричные матрицы размером 6×6 коэффициентов деформаций и модулей упругости, а тензоры напряжений и деформаций представлены компонентами:

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6) = (\sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}, \sigma_{x_3}, \tau_{x_2x_3}, \tau_{x_1x_3}, \tau_{x_1x_2});$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6) = (\varepsilon_{x_1}, \varepsilon_{x_2}, \varepsilon_{x_3}, \gamma_{x_2x_3}, \gamma_{x_1x_3}, \gamma_{x_1x_2}).$$

Будем считать, что толща пород является однородной по плотности ($\rho = const$). Описанную модель горных пород будем рассматривать как тяжелое упругое анизотропное полупространство свободное от внешних усилий при $x_2 = H$.

В принятой системе координат (ось Ox_2 направлена вертикально вверх) объемные силы принимают вид [3]: $X = Z = 0$, $Y = -\rho g$, а уравнения равновесия запишутся так:

$$\partial_1\sigma_1 + \partial_2\sigma_6 + \partial_3\sigma_5 = 0, \quad \partial_1\sigma_6 + \partial_2\sigma_2 + \partial_3\sigma_4 = \rho g,$$
$$\partial_1\sigma_5 + \partial_2\sigma_4 + \partial_3\sigma_3 = 0, \tag{1.2}$$

где g – ускорение силы тяжести, $\partial_i = \partial/\partial x_i$ $\left(i = \overline{1,3}\right)$.

На некотором расстоянии от протяженных выработок в анизотропном теле, у которого в каждой точке существует плоскость упругой симметрии, нормальная к образующей выработок, поперечные сечения остаются плоскими и деформации являются плоскими. Если же нет в теле плоскости упругой симметрии, параллельной плоскости Ox_1x_2, то деформации не будут плоскими. Поперечные сечения будут искривляться, но все одинаково. Такую деформацию называют обобщенной плоской, так как нельзя удовлетворить всем уравнениям теории упругости, приняв $u_3 = 0$ [2]. В этом случае компоненты перемещения u_i и напряжения σ_k зависят только от двух пространственных координат x_1 и x_2. В этом случае связи между составляющими деформации и проекциями перемещения запишутся так:

$$\varepsilon_1 = \partial_1 u_1, \quad \varepsilon_2 = \partial_2 u_2, \quad \varepsilon_3 = 0, \quad \varepsilon_4 = \partial_2 u_3,$$

$$\varepsilon_5 = \partial_1 u_3, \quad \varepsilon_6 = \partial_1 u_2 + \partial_2 u_1. \tag{1.3}$$

Тогда уравнения равновесия (1.2) с учетом соотношений (1.1) и (1.3) примут вид

$$L_{11}u_1 + L_{12}u_2 + L_{13}u_3 = 0, \quad L_{12}u_1 + L_{22}u_2 + L_{23}u_3 = \rho g,$$
$$L_{13}u_1 + L_{23}u_2 + L_{33}u_3 = 0, \tag{1.4}$$

где

$$\begin{aligned}
L_{11} &= A_{11}\partial_1^2 + 2A_{16}\partial_1\partial_2 + A_{66}\partial_2^2,\\
L_{12} &= A_{16}\partial_1^2 + (A_{12} + A_{66})\partial_1\partial_2 + A_{62}\partial_2^2,\\
L_{22} &= A_{66}\partial_1^2 + 2A_{26}\partial_1\partial_2 + A_{22}\partial_2^2,\\
L_{13} &= A_{15}\partial_1^2 + (A_{14} + A_{65})\partial_1\partial_2 + A_{64}\partial_2^2,\\
L_{33} &= A_{55}\partial_1^2 + 2A_{45}\partial_1\partial_2 + A_{44}\partial_2^2,\\
L_{23} &= A_{65}\partial_1^2 + (A_{64} + A_{25})\partial_1\partial_2 + A_{24}\partial_2^2.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Напряженно-деформированное состояние ненарушенного породного массива, обусловленное силой тяжести вышележащих пород, находится в природном равновесии. При создании выработок происходит нарушение этого равновесия, что приводит к появлению процессов, которые изменяют геометрическое состояние и стремятся восстановить равновесие. Такими процессами являются горное давление и смещение пород. Горное давление – это напряжения, возникающие в массиве, окружающем выработки. Смещение горных пород (ползучесть) – это перемещение элементов породного массива в выработку. Горные породы ползут, заполняя выработанное пространство. Состояние горного массива представим состоящим из трех составляющих: из смещений и напряжений в нетронутом массиве; смещений и напряжений, возникающих за счет выработок в момент их создания (упругое решение) и смещений и напряжений, учитывающих ползучесть горных пород, возникающих при эксплуатации выработок (вязкоупругое решение). Найдем решения, соответствующие указанным состояниям горного массива.

2. Перемещения и напряжения в сплошном анизотропном массиве. Отсутствие границ полупространства в направлении осей Ox_1 и Ox_3 накладывает ограничения на компоненты напряжений и перемещений, которые возникают в нетронутом массиве: они не должны зависеть от этих координат. Для определения напряжений и перемещений в таком массиве надо проинтегрировать уравнения равновесия (1.2) и уравнения закона Гука в форме $\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}^0$ или

$$\varepsilon_k^0 = \sum_{i=1}^{6} a_{ki}\sigma_i^0 \quad \left(k = \overline{1,6}\right) \tag{2.1}$$

при отсутствии усилий на границе полупространства:

$$\sigma_2^0 = \sigma_4^0 = \sigma_6^0 = 0 \quad \text{при} \quad x_2 = H. \tag{2.2}$$

В результате получим [4]

$$\sigma_i^0 = -\tau_i \rho g H\left(1 - x_2 / H\right) \quad \left(i = \overline{1,\ 6}\right), \tag{2.3}$$

$$u_k^0 = -\alpha_k \rho g H\left(x_2 - \frac{x_2^2}{2H}\right) + v_k \quad \left(k = \overline{1,3}\right). \tag{2.4}$$

Здесь $\tau_2 = 1$, $\tau_4 = \tau_6 = 0$, а величины τ_1, τ_3, τ_5 и α_k определяются из системы уравнений

$$a_{i1}\tau_1 + a_{i3}\tau_3 + a_{i5}\tau_5 = -a_{i2}\tau_2 \quad \left(i = 1,3,5\right), \tag{2.5}$$

и соотношений

$$\alpha_1 = \sum_{i=1}^{6} a_{6i}\tau_i, \quad \alpha_2 = \sum_{i=1}^{6} a_{2i}\tau_i, \quad \alpha_3 = \sum_{i=1}^{6} a_{4i}\tau_i. \tag{2.6}$$

Решения (2.3) и (2.4), полученные для случая общей анизотропии, имеют место и для полупространства, когда оно является изотропным, трансверсально-анизотропным или анизотропным, имеющим плоскость упругой симметрии [2, 5].

3. Перемещения и напряжения в массиве с выработками. Перемещения и напряжения в массиве за счет появления в нем выработок опишем функциями $\overset{*}{u}_k(x_1,x_2)$, возникающими в результате интегрирования однородной системы (1.4). Общее представление решения выражается через три аналитические функции обобщенных комплексных переменных $z_j = x_1 + \mu_j x_2$ и имеет вид [4]

$$\overset{*}{u}_k = 2\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{3} R_{kj}\,\Phi_j\left(z_j\right). \tag{3.1}$$

Выражения напряжений через функции $\Phi_j\left(z_j\right)$ запишутся в форме

$$\overset{*}{\sigma}_i = 2\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{3} P_{ij}\,\Phi'_j\left(z_j\right), \tag{3.2}$$

или

$$\begin{gathered}
\overset{*}{\sigma}_1 = 2\operatorname{Re}\left(\mu_1^2\Phi'_1 + \mu_2^2\Phi'_2 + \mu_3^2\lambda_3\Phi'_3\right), \quad \overset{*}{\sigma}_2 = 2\operatorname{Re}\left(\Phi'_1 + \Phi'_2 + \lambda_3\Phi'_3\right), \\
\overset{*}{\sigma}_3 = 2\operatorname{Re}\left(P_{31}\Phi'_1 + P_{32}\Phi'_2 + P_{33}\Phi'_3\right), \quad \overset{*}{\sigma}_6 = -2\operatorname{Re}\left(\mu_1\Phi'_1 + \mu_2\Phi'_2 + \mu_3\lambda_3\Phi'_3\right), \\
\overset{*}{\sigma}_4 = 2\operatorname{Re}\left(\lambda_1\Phi'_1 + \lambda_2\Phi'_2 + \Phi'_3\right), \quad \overset{*}{\sigma}_5 = -2\operatorname{Re}\left(\lambda_1\mu_1\Phi'_1 + \lambda_2\mu_2\Phi'_2 + \mu_3\Phi'_3\right),
\end{gathered} \tag{3.3}$$

где

$$\lambda_1 = P_{41}, \quad \lambda_2 = P_{42}, \quad \lambda_3 = P_{23}, \quad \Phi'_j = d\Phi_j / dz_j .$$

При этом функции $\Phi_j(z_j)$ определяются из граничных условий на поверхностях выработок. В случае неподкрепленных выработок эти условия имеют вид

$$n_1\sigma_1 + n_2\sigma_6 = 0, \quad n_1\sigma_6 + n_2\sigma_2 = 0, \quad n_1\sigma_5 + n_2\sigma_4 = 0 .$$

Здесь $\sigma_i = \sigma_i^0 + \overset{*}{\sigma}_i$, где σ_i^0 – напряжения от сил гравитации (2.3), а $\overset{*}{\sigma}_i$ – компоненты напряжений (3.2) или (3.3), которые учитывают влияние выработок; $n_1 = \cos\left(n,x_1\right)$, $n_2 = \cos\left(n,x_2\right)$, n – внешняя нормаль к контуру. Учитывая выражения для $\overset{*}{\sigma}_i$ и σ_k^0, после преобразований получаем граничные условия для нахождения функций $\Phi_j\left(z_j\right)$ [4]:

$$\begin{gathered}
2\operatorname{Re}\left[\mu_1\Phi_1 + \mu_2\Phi_2 + \mu_3\lambda_3\Phi_3\right] = \rho g H\left[\tau_1 x_2 - \tau_6 x_1 + p_1\right] + c_1, \\
2\operatorname{Re}\left[\Phi_1 + \Phi_2 + \lambda_3\Phi_3\right] = -\rho g H\left[\tau_6 x_2 - \tau_2 x_1 + p_2\right] + c_2, \\
2\operatorname{Re}\left[\lambda_1\Phi_1 + \lambda_2\Phi_2 + \Phi_3\right] = -\rho g H\left[\tau_5 x_2 - \tau_4 x_1 + p_3\right] + c_3,
\end{gathered} \tag{3.4}$$

где

$$p_1 = -\frac{\tau_1}{H}\frac{x_2^2}{2} + \frac{\tau_6}{H}\int_0^s x_2 dx_1, \quad p_2 = -\frac{\tau_6}{H}\frac{x_2^2}{2} + \frac{\tau_2}{H}\int_0^s x_2 dx_1, \quad p_3 = -\frac{\tau_5}{H}\frac{x_2^2}{2} + \frac{\tau_4}{H}\int_0^s x_2 dx_1 .$$

4. Ползучесть горных пород. В момент образования выработки (момент времени $t = 0$) упругие постоянные материала нетронутых горных пород характеризуются матрицей $\mathbf{A}$ – модулей упругости или $\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1}$ – коэффициентов деформаций. После образования выработки (время $t > 0$) она может оставаться незакрепленной и материал пород начинает ползти, заполняя выработанное пространство. При подкреплении выработки в породах, обладающих ползучестью, происходит релаксация напряжений, т.е. уменьшение их с течением времени при постоянной деформации. Для описания процесса деформирования горных пород используем модель, учитывающую свойство ползучести пород, т.е. их способность деформироваться во времени. Уравнения состояния среды выберем в виде вязкоупругой модели Фойгта [1, 6], согласно которой напряжения $\mathbf{s}$ зависят от деформаций $\mathbf{e}$ и их скоростей $\dot{\mathbf{e}} = d\mathbf{e}/dt$:

$$\mathbf{s} = \mathbf{Re} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{e}}. \tag{4.1}$$

Другую форму соотношений между напряжениями и деформациями можно получить, поменяв в соотношениях (4.1) ролями деформации и напряжения

$$\mathbf{e} = \mathbf{Ps} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{s}}. \tag{4.2}$$

Будем считать, что матрицы вязкоупругих постоянных $\mathbf{G}(t)$ и $\mathbf{D}(t)$ пропорциональны матрицам упругих постоянных $\mathbf{R}(t)$ и $\mathbf{P}(t)$, т.е.

$$\mathbf{G} = \mathbf{R}\eta, \quad \mathbf{D} = \mathbf{P}\delta, \tag{4.3}$$

где η и δ – коэффициенты пропорциональности. Компоненты матриц $\mathbf{R}(t)$ и $\mathbf{P}(t)$ назовем функциями релаксации и ползучести [6]. Они характеризуют механические свойства материала.

Матрицы $\mathbf{R}(t)$ и $\mathbf{P}(t)$ представим как некоторые функции времени

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}r(t), \quad \mathbf{P} = \mathbf{a}p(t). \tag{4.4}$$

Полагая, что в момент времени $t = 0$ функции $r(0) = p(0) = 1$, найдем мгновенные значения функций релаксации $\mathbf{R}(0) = \mathbf{A}$ и ползучести $\mathbf{P}(0) = \mathbf{a}$, что соответствует значениям модулей упругости и коэффициентам деформации в нетронутом массиве. Установлено [1, 6, 7], что функция релаксации материала $r(t)$ должна быть монотонно убывающей во времени, а функция ползучести $p(t)$ – монотонно возрастающей, т.е. $r(\infty) < 1$, $p(\infty) > 1$.

Напряжения $\mathbf{s}(t)$ и деформации $\mathbf{e}(t)$ представим в виде соотношений с разделяющимися переменными

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} r_1(t), \quad \mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} p_1(t). \tag{4.5}$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ – напряжения и деформации в начальный момент времени $t = 0$, а функции ползучести $p_1(t)$ и релаксации $r_1(t)$ будут обладать такими же свойствами, как и функции $p(t)$ и $r(t)$: $p_1(0) = r_1(0) = 1$, $p_1(\infty) > 1$, $r_1(\infty) < 1$.

Рассмотрим случай, когда выработка не закреплена. Будем считать, что напряжения $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} r_1(t)$ от времени не зависят, т.е. $r_1(t) \equiv 1$. Тогда из уравнения (4.2) находим $p_1(t) = p(t)$. Рассмотрим затухающую ползучесть, которая протекает со стремящейся к нулю скоростью, когда $\dot{\mathbf{e}} = d\mathbf{e}/dt \to 0$ при $t \to \infty$. При этом матрицы $\mathbf{P}(\infty) = \mathbf{a}p(\infty)$, $\mathbf{R}(\infty) = \mathbf{A}r(\infty)$ и вектор $\mathbf{e}(\infty) = \boldsymbol{\varepsilon} p(\infty)$ стремятся к постоянному по времени значению и представляют собой матрицы длительных коэффициентов деформации $\mathbf{a}_\infty$, модулей упругости $\mathbf{A}_\infty$ и вектор длительной деформации $\boldsymbol{\varepsilon}_\infty$.

Таким образом, задача определения напряженно-деформированного состояния горных пород с учетом их ползучести в окрестности выработки приводится к решению упругой задачи в момент времени $t = 0$, что соответствует началу образования выработки и, далее, к решению дифференциального уравнения (4.1) с начальными условиями

$$\mathbf{e}(0) = \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1}, \tag{4.6}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\sigma}$ – решение упругой задачи.

С учетом принятых обозначений, из уравнения (4.1) и начальных условий (4.6), найдем дифференциальное уравнение и начальные условия для определения функций $p(t)$ и $r(t)$:

$$(p + \eta\ \dot{p})\ r = 1, \quad r(0) = p(0) = 1. \tag{4.7}$$

Решение уравнения (4.7), удовлетворяющее начальным условиям имеет вид

$$p(t) = 1 + \alpha - \alpha e^{-\beta t}\left(1 + \beta t + a_2 t^2/2 + a_3 t^3/6 + \ldots\right), \quad \beta = 1/\eta, \tag{4.8}$$

$$r(t)=1/\left[1+\alpha-\alpha e^{-\beta t}\left(1+\frac{a_2}{\beta}t+\frac{a_3}{\beta}t^2/2+\ldots\right)\right], \qquad (4.9)$$

где α и β положительные постоянные, a_k – постоянные.

Из соотношений (4.5) с учетом (4.8) находим

$$\mathbf{e}(0)=\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{e}(\infty)=\boldsymbol{\varepsilon}_\infty=\boldsymbol{\varepsilon}(1+\alpha).$$

Введем максимальные значения мгновенной ε_0 и длительной ε_∞ деформаций

$$\varepsilon_0=\max\{e_k(t=0)\}, \quad \varepsilon_\infty=\max\{e_k(t=\infty)\}. \qquad (4.10)$$

Тогда из соотношений (4.10) определим

$$\alpha=(\varepsilon_\infty-\varepsilon_0)/\varepsilon_0. \qquad (4.11)$$

Для нахождения α, β, a_k воспользуемся представлением функции ползучести в виде экспериментальной кривой $\mathbf{e}(t)\div t$ для конкретного образца горной породы. Для алевролита такая кривая приведена в работе [7] и по ней получаются данные, приведенные в таблице

Время t_i в сутках	0	2	4	6	8	10	12	14	16
$\mathbf{e}(t_i)10^4=\max\{e_k(t_i)\}10^4$	1.8	4.2	6.7	8	8.5	8.8	8.9	8.98	9

По формуле (4.11) находим $\alpha=4$. Величины β и a_k, входящие в (4.8) и (4.9), получим дискретным методом наименьших квадратов, аппроксимируя кривую, заданную таблицей 1, функцией $p(t)$, определенной соотношением (4.8). Минимизация функционала

$$w=\sum_{i=1}^{9}\left[\mathbf{e}(t_i)10^4-p(t_i)\right]^2, \qquad (4.12)$$

дает значения искомых постоянных: $\beta=1/\eta=0.5833$; $a_2=a_3=\ldots=0$.

Результат аппроксимации приведен на рис. 1. Сплошная линия 1 соответствует теоретической кривой, кружочками отмечена экспериментальная кривая. Как видно, теоретическая кривая ползучести хорошо описывает эксперимент. На рис. 1 приведена также кривая релаксации материала (4.9) (линия 2).

Отметим, что кривая ползучести, определенная приведенной таблицей получена для значения внешней нагрузки $\sigma_2=0.55$ *МПа*. [7]. На наш взгляд, кривые ползучести для других нагрузок подобны, т. е. описываются этой же функцией [1].

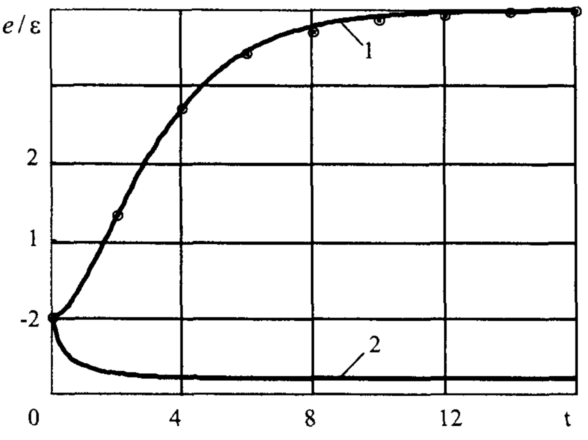


Рис.1 Кривые ползучести и релаксации алевролита

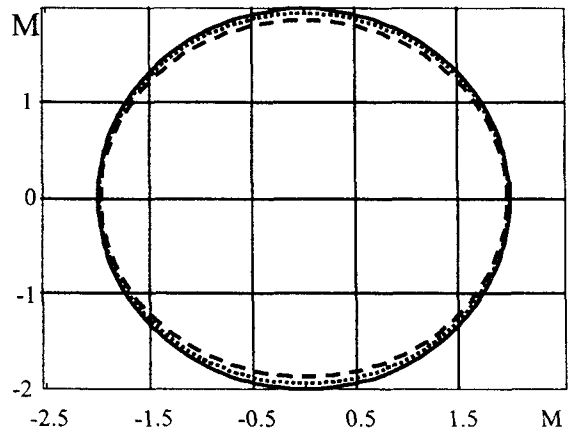


Рис. 2. Изменение конфигурации круговой выработки

диуса 2*м*. в момент времени $t = 0$. Пунктирной линией отмечено сечение выработки через двое, а штриховой – через 16 суток. Как следует из рис. 2, наибольшие перемещения контурной линии выработки наблюдаются в кровле и почве. Они достигают 0.06*м* (2 ⇒ 1.94) через двое, и 0.13*м* (2 ⇒ 1.87) через шестнадцать суток, что составляет 2.8% и 6.3% соответственно от высоты выработки.

РЕЗЮМЕ

Для опису процесу деформування анізотропного масиву гірничих порід біля виробки при дії сил гравітації запропонована модель, що враховує властивість повзучості порід, тобто їхня здатність деформуватися в часі. Рівняння стану середовища запропоновано вибрати у виді в'язко – пружної моделі Фойгта. Приведено приклад чисельного дослідження зміни конфігурації незакріпленої виробки кругового перерізу в перебігу часу її експлуатації.

SUMMARY

For the description of process of deformation of an anisotropic massif of rocks about excavation at action of forces of gravitation the model which is taking into account property of creep of rocks, i.e. their ability to be deformed in time is offered. The equations of a condition of medium are offered for choosing as viscous - elastic model Foigt. The example of numerical research of change of a configuration of free excavation of circular section is resulted during time of its operation.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
2. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 415 с.
3. *Савин Г.Н.* Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наук. думка, 1968. – 887 с.
4. *Нескородев Н.М., Нескородев Р.Н.* Напряжения вокруг выработок в анизотропном горном массиве. – Донецк: ДонНУ, 2003. – 148 с.
5. *Ержанов Ж.С., Айталиев Ш.М., Масанов Ж.К.* Сейсмонапряженное состояние подземных сооружений в анизотропном слоистом массиве. – Алма-Ата: Наука, 1980. – 212 с.
6. *Кристенсен Р.* Введение в теорию вязкоупругости. – М.: Мир, 1974. – 338 с.
7. *Булычев Н.С.* Механика подземных сооружений в примерах и задачах. – М.: Недра, 1988. – 270 с.

Надійшла до редакції 13.02.2005 р.

ВІСНИК ДОНЕЦЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ, Сер. А: Природничі науки, 2005, вип. 1

УДК 539.3.

ДВОСТОРОННІЙ ЗГИН ПЛАСТИНИ З КРУГОВИМ ОТВОРОМ ТА ТРІЩИНОЮ З ВРАХУВАННЯМ КОНТАКТУ ЇЇ БЕРЕГІВ

В.К.Опанасович, М.С.Слободян
Львівський національний університет

Пластини широко застосовуються у різних галузях техніки та промисловості. Тріщиноподібні дефекти та отвори значно знижують діапазон зовнішнього навантаження, під яким вони можуть експлуатуватися. Як показують дослідження [1-3], взаємодія поверхонь тріщини істотно впливає на перерозподіл напружено-деформованого стану в околі дефектів. Тому актуальною проблемою є вивчення напружено-деформованого стану пластини в умовах згину з врахуванням контакту берегів тріщиноподібних дефектів. Постановка задач згину пластин з отворами та тріщинами і методи їх розв'язування подано в монографіях [4-6]. Проте в них не враховувався контакт берегів тріщиноподібних дефектів. В роботах [1-3] розглянуто згин пластини з тріщиноподібними дефектами з врахуванням контакту їх берегів, але відсутні дослідження, пов'язані із взаємодією кругового отвору з прямолінійними тріщинами, береги яких контактують. В даній роботі досліджується двосторонній згин ізотропної пластини з круговим отвором та тріщиною з врахуванням контакту її берегів.

Постановка задачі. Розглянемо нескінченну ізотропну пластину завтовшки $2h$, яка містить круговий отвір радіуса R та тріщину, яка розташована, як показано на рис. 1, завдовжки $2l$ і які вільні від зовнішнього навантаження. Вважатимемо, що під дією зовнішнього навантаження на нескінченності береги тріщини приходять у гладкий контакт по лінії на верхній основі пластини. Виберемо в серединній площині пластини початок декартової системи координат $Oxy\tilde{z}$, направивши вісь $O\tilde{z}$ перпендикулярно до неї, причому початок координат O співпадає з центром кругового отвору. В площині Oxy введемо полярну систему координат r і θ з полюсом в точці O і полярною віссю Ox. Вважатимемо, що тріщина знаходиться на відстані x_0 від точки O, так що $x_0 > R + l\cos\alpha$, де α – кут між віссю Ox та тріщиною. Пов'яжемо з тріщиною декартову систему координат $O_1x_1y_1$. Точки площини Oxy, що співпадають з кінцями тріщини позначимо через a і b, область в середині кругового отвору – через S^+, ззовні – через S^-, лінію, де розміщена тріщина – через L_1, а коло – через L. Вважатимемо, що пластина згинається на нескінченності рівномірно розподіленими моментами M_x^∞ і M_y^∞ (див. рис. 1).

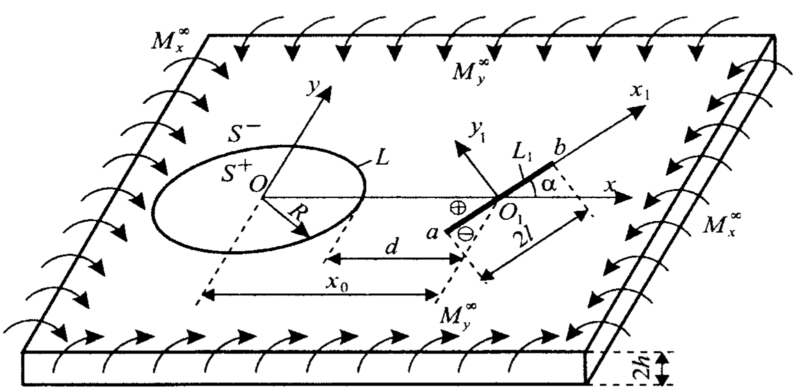


Рис. 1.

Оскільки береги тріщини контактують, то розв'язок задачі подамо у вигляді розв'язків двох задач: плоскої задачі та задачі згину пластини; при таких крайових умовах:

$$\sigma_{y_1y_1}^{\pm} = -N/(2h), \quad \sigma_{x_1y_1}^{\pm} = 0, \quad P^{\pm} = 0, \quad M_{y_1}^{\pm} = hN,$$

$$\partial[v_\Pi]/\partial x_1 + h\cdot\left[\partial^2 w/(\partial x_1 \partial y_1)\right] = 0, \ x_1 \in L_1, \tag{1}$$

$$M_r = 0, \ \sigma_r = 0, \ \sigma_{r\theta} = 0, \ P_r = 0, \ x \in L, \tag{2}$$

де N – контактне зусилля між берегами тріщини; $\sigma_{x_1y_1}$, $\sigma_{y_1y_1}$, σ_r і $\sigma_{r\theta}$ – компоненти тензора напружень, а u_Π і v_Π – компоненти вектора переміщень в плоскій задачі, M_r і M_{y_1} – згинальні моменти,

w – прогин пластини в задачі згину пластини, P і P_r – узагальнені в сенсі Кірхгофа перерізувальні сили, $[f]=f^{+}-f^{-}$; значками "+" і "–" позначені граничні значення функції при прямуванні точки площини до тріщини при $y_1 \to \pm 0$.

Комплексні потенціали задачі. Комплексні потенціали плоскої задачі будуть мати вигляд

$$\Phi_{\Pi}(z)=\Phi_{1\Pi}(z)+\Phi_{2\Pi}(z),$$

$$\Phi_{1\Pi}(z_1)=\frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l}\frac{g_1'(t)}{t-z_1}dt,\quad \Omega_{1\Pi}(z)=\Phi_{1\Pi}(z),\quad \Phi_{2\Pi}(z)=B_{\Pi}+\Phi_{1\Pi}(z_1),\ \ z\in S^{+},$$

$$\Phi_{2\Pi}(z)=B_{\Pi}-(1+z_3)\cdot\bar{\Phi}_{1\Pi}(z_2)+z_3\cdot\left\{\Phi_{1\Pi}(z_2)+(z_1-z_2)\cdot\bar{\Phi}_{1\Pi}'(z_2)\right\},\ \ z\in S^{-},$$

де

$$z=x+iy,\quad i=\sqrt{-1},\quad z_1=(z-x_0)\cdot e^{-i\alpha},$$

$$z_2=\left(R^2/z-x_0\right)\cdot e^{i\alpha},\quad z_3=\frac{R^2e^{2i\alpha}}{z^2},$$

$$B_{\Pi}=\frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l}\frac{\overline{g_1'(t)}}{t+x_0e^{i\alpha}}dt,\quad B=\frac{\bar{\Gamma}'R^2}{z^2}-\tilde{\kappa}\cdot\Gamma+\frac{i}{2\pi}\int_{-l}^{l}\frac{\overline{y_1(t)}}{t+x_0e^{i\alpha}}dt,$$

$$g_1'(x_1)=-i2\mu\left[\partial_{x_1}u_{\Pi}+i\partial_{x_1}v_{\Pi}\right]/(1+\kappa),\quad y_1(x)=[\partial_x g]/(1+\tilde{\kappa}),$$

$$g=\partial_x w+i\partial_y w,\quad \kappa=(3-\upsilon)/(1+\upsilon),\quad \tilde{\kappa}=(3+\upsilon)/(1-\upsilon),$$

μ – модуль зсуву, E – модуль Юнга, υ – коефіцієнт Пуассона.

Комплексні потенціали задачі згину пластини подамо у вигляді

$$\Phi(z)=\Phi_1(z)+\Phi_2(z);\quad \Omega_1(z)=\Phi_1(z)/\tilde{\kappa},$$

$$\Phi_1(z_1)=\frac{1}{2\pi\cdot i}\int_{-l}^{l}\frac{y_1(t)}{t-z_1}dt;\quad \Phi_2(z)=B-\tilde{\kappa}\cdot\Phi_1(z_1)+ic',\ \ z\in S^{+},$$

$$\Phi_2(z)=\tilde{\kappa}^{-1}\left\{-B+(1+z_3)\bar{\Phi}_1(z_2)+z_3\left\{\tilde{\kappa}\cdot\Phi_1(z_2)-(z_1-z_2)\bar{\Phi}_1'(z_2)\right\}\right\},\ \ z\in S^{-},$$

де сталі Γ і Γ' наведені в монографії [6], вираз для функції $\Omega_{1\Pi}(z)$ $(\Omega_1(z))$ через $\Phi_{1\Pi}(z)$ $(\Phi_1(z))$ наведено в монографії [7] ([6]), а вираз для функції $\Phi_{2\Pi}(z)$ $(\Phi_2(z))$ в області S^{+} – у монографії [8] ([6]).

Система інтегральних рівнянь. За допомогою комплексних потенціалів [6-8] розв'язок задачі зведений до системи сингулярних інтегральних рівнянь відносно невідомих функцій $Y_1(\eta)$ і $G_1(\eta)$ та дійсної сталої c'

$$\int_{-1}^{1}\left\{G_1(\eta)R(\eta,\xi)+\overline{G_1(\eta)}S(\eta,\xi)\right\}d\eta=-\frac{\pi\cdot h\tilde{N}}{2},\ \ \xi\in[-1,1];\tag{3}$$

$$\int_{-1}^{1}\left\{Y_1(\eta)\cdot K(\eta,\xi)+\overline{Y_1(\eta)}\cdot L(\eta,\xi)\right\}d\eta-\frac{\varepsilon^2e^{-2i\alpha}ic'}{\bar{X}^2}=$$

$$= -\frac{i}{2\pi}\mathrm{Re}\left(\int_{-1}^{1}\frac{\lambda\cdot e^{i\alpha}Y_1(\eta)d\eta}{T}\right) + mh\widetilde{N} + P(\xi),\ \ \xi\in[-1,1], \qquad (4)$$

де

$$R(\eta,\xi) = \frac{1}{\eta-\xi} + \gamma_\alpha\left(\frac{1}{\bar{Q}X} + \frac{P}{TQ^2} - \frac{PF - T\bar{X}Q^2}{T\bar{X}^2Q^3}\cdot t_\alpha\right),$$

$$S(\eta,\xi) = \bar{\gamma}_\alpha\left(\frac{P}{\bar{T}\cdot\bar{Q}^2} + \frac{1}{\bar{X}Q} + \left(\frac{1}{\bar{T}\cdot\bar{X}^2} - \frac{J}{\bar{X}^3Q^2}\right)\cdot t_\alpha\right),$$

$$K(\eta,\xi) = -\frac{i}{\pi}\cdot\left\{\frac{\tilde{\kappa}}{\eta-\xi} + \gamma_\alpha\left(\left(\frac{\tilde{\kappa}}{X\bar{Q}} + \frac{t_\alpha\tilde{\kappa}}{\bar{X}Q}\right) + \frac{P}{TQ^2\tilde{\kappa}} - \frac{PF}{T\bar{X}^2Q^3\tilde{\kappa}}\cdot t_\alpha\right)\right\},$$

$$L(\eta,\xi) = -iS(\eta,\xi)/\pi\ ,\ P(\xi) = -\tilde{\kappa}\cdot A + \frac{\varepsilon^2 B}{X^2} + A - \frac{\varepsilon^2 B}{\tilde{\kappa}\cdot\bar{X}^2} - e^{-2i\alpha}\times$$

$$\times\left\{\frac{\varepsilon^4 B}{\tilde{\kappa}\cdot\bar{X}^4} - \frac{\varepsilon^2 A}{\bar{X}^2} - \frac{2B\varepsilon^2}{\tilde{\kappa}}\cdot\frac{X\bar{X}-\varepsilon^2}{\bar{X}^4} - B + \frac{\tilde{\kappa}\cdot\varepsilon^2 A}{\bar{X}^2}\right\};$$

$$Q = T\bar{X} - \varepsilon^2,\ \ P = \varepsilon^2 - T\bar{T},\ \ F = 2TX\bar{X}^2 - 3\varepsilon^2 T\bar{X} + \varepsilon^4,$$

$$\gamma_\alpha = 0.5\lambda\varepsilon^2 e^{i\alpha},\ \ t_\alpha = e^{-2i\alpha},\ \ J = 2TX\bar{X}^2 - X\bar{X}\varepsilon^2 - 3\varepsilon^2 T\bar{X} + 2\varepsilon^4,$$

$$t = l\eta,\ \ x_1 = l\xi,\ \ \lambda = l/d,\ \ \varepsilon = R/d,\ \ T = 1 + \varepsilon + \lambda\eta\cdot e^{i\alpha},$$

$$X = 1 + \varepsilon + \lambda\xi\cdot e^{i\alpha},\ \ G_1(t) = h^2 g_1'(t)/M_y^\infty,\ \ Y_1(t) = Eh^3 y_1(t)/M_y^\infty,$$

$$B = 0.5m(1-\rho),\ \ D = 1.5 - 1.5\cdot\upsilon^2,\ \ \rho = M_x^\infty/M_y^\infty,\ \ \widetilde{N} = N/M_y^\infty,$$

$$A = -0.25(\rho+1)D/(1+\upsilon),\ \ m = -D/(1-\upsilon),\ \ Y_1(t) = Y_{11}(t) + iY_{12}(t);$$

$G_1(t) = G_{11}(t) + iG_{12}(t)$, $Y_{11}(t)$, $Y_{12}(t)$, $G_{11}(t)$ і $G_{12}(t)$ – дійсні функції, причому контактний тиск визначається за формулою

$$\widetilde{N}(\xi) = -\frac{2}{\pi\cdot h}\mathrm{Re}\left(\int_{-1}^{1}\left\{G_1(\eta)R(\eta,\xi) + \overline{G_1(\eta)}S(\eta,\xi)\right\}d\eta\right),\ \ \xi\in[-1,1]. \qquad (5)$$

Зауважимо, що ядра $R(\eta,\xi)$ і $S(\eta,\xi)$ співпадають з відповідними ядрами, отриманими в монографії [9] іншим підходом.

Систему рівнянь (3), (4) доповнюємо додатковими умовами:

$$\int_{-1}^{1}G_1(\eta)d\eta = 0,\ \ \int_{-1}^{1}Y_1(\eta)d\eta = 0,\ \ \int_{-1}^{1}\eta\cdot Y_{11}(\eta)d\eta = 0, \qquad (6)$$

які виражають собою відповідно однозначність переміщень при обході контуру тріщини, однозначність кутів повороту і прогину пластини при обході контуру тріщини.

Зауважимо, що на основі співвідношень (1) функції $G_{11}(\eta)$ і $Y_{12}(\eta)$ пов'язані співвідношенням

$$G_{11}(\eta) + (1+\tilde{\kappa})\cdot Y_{12}(\eta)/((1+\kappa)\cdot(1+\upsilon)) = 0,\ \eta\in[-1,1]. \qquad (7)$$

Числовий аналіз задачі та висновки. Отримана система інтегральних рівнянь розв'язана чисельно за допомогою методу механічних квадратур [9]. Був проведений числовий аналіз задачі, який поданий на рис. 2-5. Якщо вважати, що круговий отвір відсутній $(\varepsilon = 0)$ або тріщина знаходиться на нескінченності $(\lambda = 0, \varepsilon = 0)$, то при $\alpha = 0$ приходимо до результатів роботи [1]; якщо $R \to \infty$, то при $\alpha = 0$ отримаємо результати роботи [2].

На рис. 2 і 3 подається графічна залежність приведеного контактного тиску $N^* = hN/M_y^\infty$ між берегами тріщини від безрозмірної координати $\xi = x_1/l$ при $\upsilon = 0.3$ та $M_x^\infty/M_y^\infty = 1$, причому рис. 2 побудований при $\alpha = \pi/4$ і $R = l$, а рис. 3 при $\varepsilon = 2$ і $\lambda = 0.8$. На рис. 2 кривим *1-7* відповідають контактні тиски N^* при λ, рівним $1/0.8$, 1, $1/1.25$, $1/1.5$, $1/2$, $1/5$, 0. Як бачимо з рис. 2, величина контактного тиску N^* в ближній до отвору вершині a $(\xi = -1)$ є меншою ніж у дальній вершині b $(\xi = 1)$. На рис. 3 кривим *1-4* відповідають контактні тиски N^* при α, рівним 0, $\pi/6$, $\pi/3$, $\pi/2$. З рис. 3 видно, що крива *4* є симетричною відносно прямої $\xi = 0$. Числовий аналіз показав, що при $\alpha < 26{,}3\pi/180$ контактний тиск у ближній вершині є більшим, а вже при $26{,}3\pi/180 < \alpha < \pi/2$ контактний тиск більший у дальній вершині.

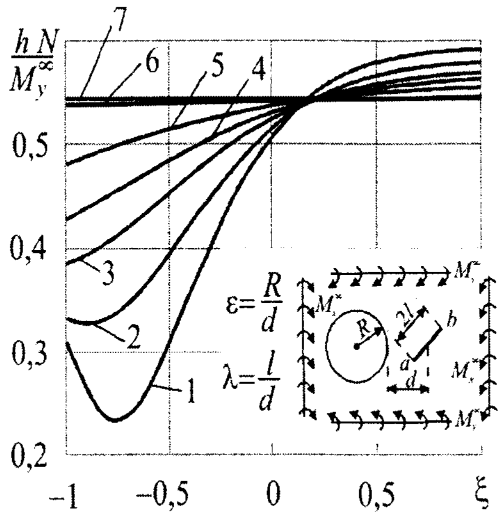


Рис. 2.

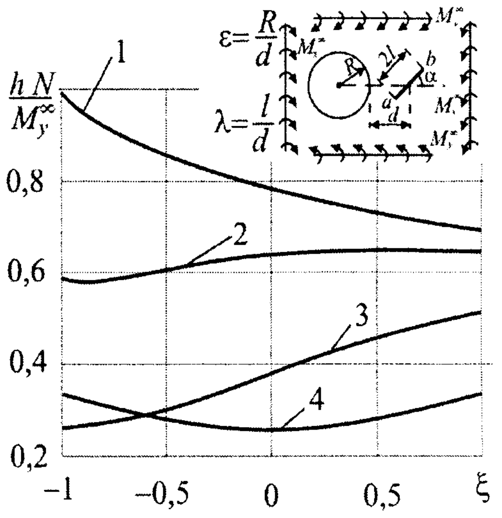
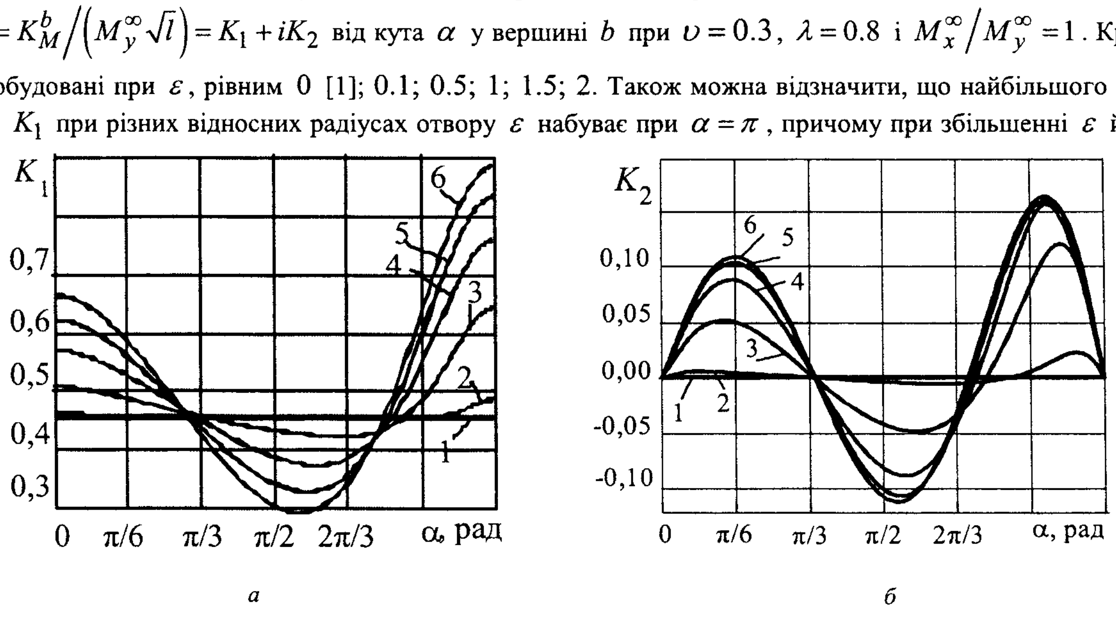


Рис. 3.

На рис. 4 зображені графічні залежності приведених коефіцієнтів інтенсивності моментів (КІМ) $K_M^{*b} = K_M^b / \left(M_y^\infty \sqrt{l}\right) = K_1 + iK_2$ від кута α у вершині b при $\upsilon = 0.3$, $\lambda = 0.8$ і $M_x^\infty / M_y^\infty = 1$. Криві *1-6* побудовані при ε, рівним 0 [1]; 0.1; 0.5; 1; 1.5; 2. Також можна відзначити, що найбільшого значення K_1 при різних відносних радіусах отвору ε набуває при $\alpha = \pi$, причому при збільшенні ε його



а *б*

Рис. 4.

максимальне значення зростає. Теж можна відзначити, що при збільшенні ε максимальне значення K_2 зростає. Зауважимо, що приведені коефіцієнти інтенсивності зусиль (КІЗ) $k_N^{*b} = k_N^b \Big/ \left(M_y^\infty \sqrt{l}\right) = k_1 + ik_2$ у вершині b і моментів K_M^{*b} пов'язані між собою співвідношенням $k_1/K_1 = 3(1+\upsilon)/(3+\upsilon)$.

На рис. 5 зображена графічна залежність k_2 у вершині b від кута α при $\upsilon = 0.3$, $\lambda = 0.8$ і $M_x^\infty \Big/ M_y^\infty = 1$. Крива *1–6* побудовані при ε, рівних відповідно 0; 0,1; 0,5; 1,0; 1,5; 2,0. З рис. 5 бачимо, що при збільшенні ε максимальне значення k_2 зростає.

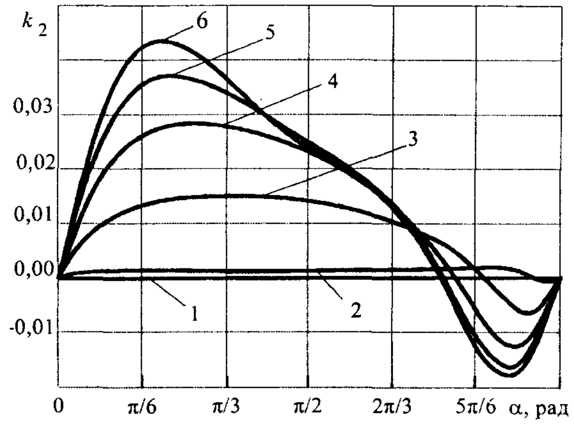


Рис. 5.

РЕЗЮМЕ

Исследован двухсторонний изгиб изотропной пластинки с круговым отверстием и трещиной с учетом контакта ее берегов. С использованием комплексных потенциалов решение задачи сведено к системе интегральных уравнений, которая решалась методом механических квадратур. Проведены численные исследования по распределению контактного давления, изменению коэффициентов интенсивности моментов и усилий.

SUMMARY

The bilateral bending of an isotropic plate with a circular orifice and crack with allowance for of contact it of shores is investigated. With application of methods of the theory of functions of complex variable and complex potentials the solution of a problem is shown to a system of integral equations, which is solved by a numerical method with the help of method of mechanical quadratures. The numerical analysis of a problem is conducted, because of which are constructed of graphic dependence of contact pressure, coefficients intensity moment and gains.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Шацький І.П.* Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами // Доп. АН УРСР. Сер. А. Фіз.-мат. та техн. науки. - 1988. - №7. - С.49-51.
2. *Шацький І.П., Перепічка В.В.* Згин напівнескінченної пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – Т.28. – №2. – 1992. – С.54-58.
3. *Шацький І., Перепічка В., Даляк Т., Щербій А.* Задачі теорії пластин та оболонок із взаємопов'язаними крайовими умовами на розрізах// Мат. проблеми механіки неоднорідних структур. – 2000. – Т.2. – С.51-54.
4. *Бережницький Л.Т., Делявський М.В., Панасюк В.В.* Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. – К.: Наук. думка, 1979. – 400 с.
5. *Саврук М.П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
6. *Прусов И.А.* Метод сопряжения в теории плит. – Минск: Изд-во БГУ, 1975. – 256 с.
7. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
8. *Прусов И.А.* Некоторые задачи термоупругости. – Минск: Изд-во БГУ, 1962. – 200 с.
9. *Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П.* Распространение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.

Надійшла до редакції 12.02.2005 р.

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ АНИЗОТРОПНОГО ДИСКА С ПРЯМОЛИНЕЙНЫМИ ТРЕЩИНАМИ

Ю.С.Антонов

К настоящему времени многочисленные исследования термонапряженного состояния для тел с отверстиями и трещинами выполнены лишь для изотропных пластинок [1, 2]. Для анизотропных материалов в работе [3] предложена методика решения задач термоупругости для пластинок с отверстиями и трещинами, основанная на использовании обобщенных комплексных потенциалов термоупругости и метода наименьших квадратов. В данной статье на основе этой методики исследовано термонапряженное состояние анизотропного диска с конечным числом произвольно расположенных трещин.

1. Постановка задачи. Рассмотрим анизотропный эллиптический или круговой диск (рис. 1) с внешним контуром L_0 с произвольно расположенными трещинами, рассматриваемыми как предельные случаи эллипсов с контурами L_l $\left(l=\overline{1, L}\right)$, у которых большие полуоси равны a_l, малые полуоси $b_l=0$. На контурах пластинки поддерживается постоянная температура, разная на разных контурах.

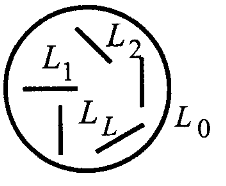


Рис. 1

Исследование температурного поля в рассматриваемой пластинке сводится к определению комплексного потенциала стационарного температурного поля $F_3\left(z_3\right)$, а исследование ее термонапряженного состояния – к нахождению комплексных потенциалов $\Phi'_k\left(z_k\right)$ $(k=1, 2)$, из граничных условий [3]:

$$2\operatorname{Re} F_3\left(z_3\right)=T_l . \tag{1.1}$$

$$2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3} g_{ki}\delta_k\Phi'_k\left(t_k\right)=0 \quad (i=1,2), \tag{1.2}$$

Здесь g_{ki} – известные постоянные; $\delta_k=dz_k/ds=dx/ds+\mu_k\,dy/ds$.

Комплексные потенциалы в данном случае примут вид

$$F_3\left(z_3\right)=c_0+\sum_{l=1}^{L} D_{3l}\ln\zeta_{3l}+\sum_{l=0}^{L}\sum_{n=1}^{\infty} c_{3ln}\varphi_{3ln}\left(z_3\right); \tag{1.3}$$

$$\Phi'_k\left(z_k\right)=\Gamma_k+\sum_{l=1}^{L}\left[A_{kl}\ln\zeta_{kl}+\frac{\left(A_{kl}z_k+B_{kl}\right)\zeta_{kl}}{R_{kl}\left(\zeta_{kl}^2-1\right)}\right]+\sum_{l=0}^{L}\sum_{n=1}^{\infty} a_{kln}\varphi'_{kln}\left(z_k\right) \quad (k=1, 2),$$

$$\Phi'_3\left(z_3\right)=r_3F_3\left(z_3\right), \tag{1.4}$$

где c_0, D_{3l} – вещественные, c_{3ln}, a_{kln} – комплексные постоянные, определяемые из граничных условий на контурах; A_{kl}, B_{kl} – постоянные, вычисляемые через D_{3l}, c_{3l1} r_3 – известная постоянная;

$$\varphi_{k0n}\left(z_k\right)=R_{k0}^{-n}z_k^n, \quad \varphi_{kln}\left(z_k\right)=\zeta_{kl}^{-n} \quad \left(l=\overline{1,L}\right); \tag{1.5}$$

$$\varphi'_{k0n}\left(z_k\right)=n\,R_{k0}^{-n}\,z_k^{n-1}, \quad \varphi'_{kln}\left(z_k\right)=-n\Big/\left[\zeta_{kl}^{\,n-1}R_{kl}\left(\zeta_{kl}^2-1\right)\right] \quad \left(l=\overline{1,L}\right); \tag{1.6}$$

ζ_{kl} – величины определяемые исходя из следующих конформных отображений

$$z_k=x+\mu_k y=z_{0kl}+R_{kl}\left(\zeta_{kl}+1/\zeta_{kl}\right), \tag{1.7}$$

$$z_{0kl}=x_{0l}+\mu_k\,y_{0l}, \quad R_{kl}=a_l\left(\cos\varphi_l+\mu_k\sin\varphi_l\right)/2 . \tag{1.8}$$

2. Определение постоянных, входящих в комплексные потенциалы. Неизвестные постоянные c_0, D_{3l}, c_{3ln}, a_{kln}, входящие в комплексные потенциалы (1.3) и (1.4), определяются из граничных условий (1.1) и (1.2) на контурах отверстий. При этом для удовлетворения этим условиям будем использовать метод наименьших квадратов. Исходя из этих условий, составим функционалы

$$I_T = \sum_{m=1}^{M} \left[2\operatorname{Re} F_3\left(t_{3m}\right) - T_l \right]^2 ; \tag{2.1}$$

$$I_\sigma = \sum_{m=1}^{M} \sum_{i=1}^{2} \left[2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{3} \delta_{km} g_{ki} \Phi'_k \left(t_{km}\right) \right]^2 . \tag{2.2}$$

Здесь M – количество точек t_m на контурах области S, для которых составляется квадрат невязки между значением функции и заданной правой частью граничных условий; T_l – значение температуры на контуре L_l. Удовлетворяя условиям минимума $\partial I_T / \partial c_0 = 0$, $\partial I_T / \partial D_{3l} = 0$, $\partial I_T / \partial c_{3ln} = 0$ функционала (2.1) и $\partial I_\sigma / a_{kln} = 0$ $\left(k = 1,\, 2;\ l = \overline{0,\, L};\ n = 1,\, 2, ...\right)$ функционала (2.2), найдем системs линейных алгебраических уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов. После решения этих систем функции (1.3), (1.4) станут известными и можно вычислять температуру, напряжения и КИН

$$T(x,\, y) = 2\operatorname{Re} F_3\left(z_3\right); \tag{2.3}$$

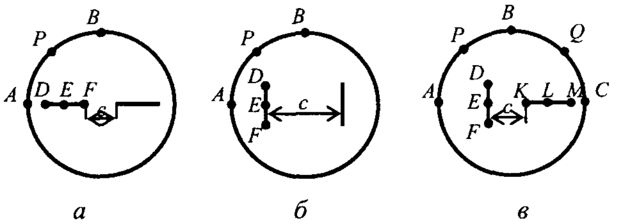
$$\left(\sigma_x,\, \sigma_y,\, \tau_{xy}\right) = 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{3} \left(\lambda_{1k},\, \lambda_{2k},\, \lambda_{6k}\right) \Phi'_k\left(z_k\right); \tag{2.4}$$

$$k_1^{\pm} = \lim_{r \to 0} \sqrt{2r} \left[\sigma_x \sin^2 \varphi_l + \sigma_y \cos^2 \varphi_l - 2\tau_{xy} \cos\varphi_l \sin\varphi_l \right],$$

$$k_2^{\pm} = \lim_{r \to 0} \sqrt{2r} \left[\left(\sigma_y - \sigma_x\right) \cos\varphi_l \sin\varphi_l + \tau_{xy} \left(\cos^2 \varphi_l - \sin^2 \varphi_l \right) \right]. \tag{2.5}$$

Здесь λ_{1k}, λ_{2k}, λ_{6k} – постоянные приведенные в [3].

3. Анализ результатов численных исследований. Были проведены подробные численные исследования распределения напряжений в анизотропном круговом диске единичного радиуса с внешним контуром L_0 и трещинами полудлины $l = 0{,}1$ с контурами L_1 и L_2 (рис. 2). На контуре L_0 значение температуры равно T_0, на L_1 и L_2 задана одинаковая температура, равная T_1. Контур диска и берега трещин не подкреплены. Ниже описаны некоторые из полученных результатов. Пластинка считалась изготовленной из материалов M1 (КАСТ–В изотропный [6]), M2 (КАСТ–В [6]), M3 (дигидрофосфат аммония [7]). Тепловые и упругие характеристики этих материалов приведены в табл. 1. Данные для изотропного материала были получены на основе изотропного материала КАСТ–В из работы [6]. При этом a_{12} и k_{22} были увеличены на $0{,}005 \cdot 10^{-3}$ МПа$^{-1}$ и $0{,}005 \cdot 10^{-3}$ Вт/(м·К) (в указанной работе $k_{22} = k_{11}$). Все значения характеристик с точностью до множителя $T_0 - T_1$.



а *б* *в*

Рис. 2

Таблица 1

Материал	a_{11}, МПа$^{-1}$	a_{22}, МПа$^{-1}$	a_{12}, МПа$^{-1}$	a_{66}, МПа$^{-1}$	α_1, МПа$^{-1}$	α_2, МПа$^{-1}$	k_{11}, Вт/(м·К)	k_{22}, Вт/(м·К)
M1	$7{,}21 \cdot 10^{-3}$	$7{,}21 \cdot 10^{-3}$	$-0{,}860 \cdot 10^{-3}$	$16{,}15 \cdot 10^{-3}$	$3{,}0 \cdot 10^{-5}$	$3{,}0 \cdot 10^{-5}$	0,2095	0,2100
M3	$1{,}75 \cdot 10^{-5}$	$4{,}35 \cdot 10^{-5}$	$-1{,}150 \cdot 10^{-5}$	$1{,}15 \cdot 10^{-4}$	$3{,}7 \cdot 10^{-5}$	$0{,}4 \cdot 10^{-5}$	1,2570	0,7123

В табл. 2 для диска с двумя трещинами на одной прямой (рис. 2, а) приведены значения напряжений и КИН k_1 (k_2 в данном случае равен нулю). В табл. 3 для диска с двумя параллельными трещинами (рис. 2, б) приведены значения напряжений и КИН в некоторых характерных точках, а на рис. 2 изображены графики изменения КИН. Сплошные линии соответствуют k_1^-, штриховые – k_2^-. При

Таблица 2

Мате-риал	Точ-ка	Вели-чина	c								
			0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0,01
M1	A	$\sigma_y \cdot 10^2$	-0,114	-0,133	-0,155	-0,181	-0,216	-0,267	-0,357	-0,369	-0,399
	P	$\sigma_\theta \cdot 10^2$	-0,097	-0,101	-0,098	-0,088	-0,074	-0,055	-0,035	-0,029	0,002
	B	$\sigma_x \cdot 10^2$	-0,087	-0,086	-0,077	-0,064	-0,049	-0,033	-0,020	-0,019	0,009
	D	$k_1^- \cdot 10^2$	0,115	0,107	0,103	0,100	0,094	0,082	0,050	-0,002	-0,077
	E	$\sigma_x \cdot 10^2$	0,093	0,096	0,095	0,092	0,090	0,089	0,094	0,114	0,155
	F	$k_1^+ \cdot 10^2$	0,118	0,109	0,107	0,107	0,106	0,103	0,093	0,077	0,058
M4	A	σ_y	-0,286	-0,322	-0,358	-0,399	-0,421	-0,519	-0,639	-0,582	-0,532
	P	σ_θ	-0,075	-0,075	-0,070	-0,063	-0,060	-0,049	-0,042	-0,054	0,012
	B	σ_x	-0,021	-0,029	-0,035	-0,038	-0,039	-0,033	-0,023	-0,063	0,082
	D	k_1^-	0,178	0,158	0,128	0,090	0,090	0,025	-0,008	-0,105	-0,142
	E	σ_x	0,483	0,495	0,511	0,530	0,540	0,573	0,603	0,730	0,885
	F	k_1^+	0,283	0,172	0,141	0,114	0,114	0,078	0,065	0,024	0,014

Таблица 3

Мате-риал	То чка	Вели-чина	c						
			0,01	0,1	0,5	1	1,5	1,7	1,9
M1	A	$\sigma_y \cdot 10^2$	-0.066	-0.075	-0.108	-0.153	-0.219	-0.257	-0.374
	P	$\sigma_\theta \cdot 10^2$	-0.070	-0.080	-0.104	-0.097	-0.044	-0.017	-0.002
	B	$\sigma_x \cdot 10^2$	-0.073	-0.085	-0.095	-0.063	-0.023	-0.012	0.000
	D	$k_1^- \cdot 10^2$	0.099	0.120	0.144	0.130	0.105	0.088	0.042
		$k_2^- \cdot 10^2$	0.027	0.011	-0.004	-0.003	-0.005	-0.008	-0.017
	E	σ_x	0.107	0.122	0.012	0.034	0.058	0.061	0.054
M4	A	σ_y	-0,186	-0,206	-0,272	-0,335	-0,382	-0,407	-0,642
	P	σ_θ	-0,070	-0,080	-0,096	-0,082	-0,048	-0,036	-0,023
	B	σ_x	-0,024	-0,029	-0,040	-0,044	-0,034	-0,027	-0,016
	D	k_1^-	0,269	0,319	0,397	0,364	0,277	0,215	0,058
		k_2^-	0,056	0,031	-0,010	-0,015	-0,024	-0,033	-0,063
	E	σ_x	-0,050	-0,038	-0,073	-0,079	-0,058	-0,033	0,102

этом $k_1^- = k_1^+$, $k_2^- = -k_2^+$. Из приведенных данных видно, что при увеличении расстояния между трещинами растут значения напряжений на внешнем контуре вблизи точки перемычки – A.

Для диска с двумя трещинами лежащими на перпендикулярных прямых (рис. 2, в) в табл. 4 приведены значения напряжений и КИН в некоторых характерных точках (для левой трещины $k_1^- = k_1^+$, $k_2^- = -k_2^+$, для правой $k_2^{\pm} = 0$). Из этих данных видно, что при увеличении расстояния между трещинами растут коэффициенты интенсивности и значения напряжений в середине левой (вертикальной) трещины.

Таблица 4

Точка	Величина	c/a_0						
		0,01	0,1	0,5	0,9	1	1,1	1,5
A	σ_y	-0,193	-0,213	-0,274	-0,320	-0,331	-0,280	-0,223
P	σ_θ	-0,082	-0,083	-0,093	-0,080	-0,075	-0,029	-0,048
B	σ_x	-0,033	-0,025	-0,036	-0,038	-0,036	-0,017	-0,014
Q	σ_θ	-0,080	-0,074	-0,077	-0,064	-0,059	-0,057	-0,060
C	σ_y	-0,226	-0,249	-0,336	-0,417	-0,437	-0,116	-0,155
D	k_1^-	0,419	0,439	0,426	0,378	0,364	6,087	5,911
	k_2^-	0,004	-0,018	-0,016	-0,015	-0,015	1,652	1,361
E	σ_x	-0,075	-0,070	-0,089	-0,080	-0,077	-15,083	-14,477
K	k_1^-	0,047	0,180	0,145	0,111	0,102	0,141	0,154
L	σ_x	0,002	0,159	0,458	0,536	0,552	0,490	0,481
M	k_1^+	0,160	0,174	0,130	0,086	0,072	0,149	0,157

РЕЗЮМЕ

Запропоновано розв'язок задачі термопружності для скінченої багатозв'язної анізотропної платівки з тріщинами, з використанням узагальнених комплексних потенціалів. Описано отримані результати чисельних досліджень розподілу напружень та зміни КІН.

SUMMARY

Thermoelasticity problem solution for finite multiconnected anizotropic plate with cracks are proposed with using generalized complex potentials. Obtained results of numerical investigations of stresses distribution and SIF changing are described.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кит Г.С., Кривцун М.Г.* Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1983. – 280 с.
2. *Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П.* Распределение напряжений около трещин в пластинках и оболочках. – К. Наук. думка, 1976. – 444 с.
3. *Калоеров С.А., Антонов Ю.С.* Термонапряженное состояние конечной многосвязной анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами // Вісн. Донец. нац. ун-та. Сер. А. Природ. науки. – 2004. – №1. – С.103-110.
4. *Космодамианский А.С., Калоеров С.А.* Температурные напряжения в многосвязных пластинках. – К.; Донецк: Вища шк., 1983. – 160 с.
5. *Калоеров С.А. Горянская Е.С.* Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела // Концентрация напряжений. – К.: «А.С.К.», 1997. – С.10-26. (Механика композитов: В 12 т., Т.7).
6. *Амбарцумян С.А., Дургарьян С.М.* Некоторые нестационарные температурные задачи для ортотропной пластинки // Изв. АН СССР, Механика и машиностроение. – 1962. – №3. – С.120-127.
7. Акустические кристаллы. Справ. / А.А.Блистанов, В.С.Бондаренко, В.В.Чкалова и др.; Под ред. М.П.Шаскольской. – М.: Наука, 1982. – 632 с.

Надійшла до редакції 20.02.2005 р.

ВІСНИК ДОНЕЦЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ, Сер. А: Природничі науки, 2005, вип. 1

УДК 593.3

СИНГУЛЯРНІ ІТЕРАЦІЇ В НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧАХ ЗГИНУ ПЛАСТИН З ОТВОРОМ

Я.Ф.Каюк, Л.М.Кривоблоцька
Інститут механіки НАН України, м. Київ

Відомо, що при розв'язуванні ітераційними методами нелінійних задач згину гнучких пластин з отвором числові значення ітерації при відході від отвору і з ростом номера наближення істотно зростають (в кожній точці пластинки). Для регуляризації вказаних сингулярностей авторами розроблені і математично обґрунтовані в [3, 4] нові спеціальні методи. В цій статті дана постановка і метод розв'язку нелінійної задачі про згин круглої пластинки з отвором під дією рівномірно розподілених на зовнішньому краї моментів; вважається, що цей край віддалений у "нескінченність".

Мета досліджень: розв'язати цю задачу в порівняно високих наближеннях, встановити аналітичну природу сингулярних наближень, продемонструвати ефективність запропонованих методів, отримати конкретні числові дані і механічні ефекти.

1. Постановка задачі. Можна встановити, що ця задача в осесиметричному випадку зводиться до розв'язування наступної системи нелінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{d\rho}\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho\theta)=12\left(1-\nu^2\right)T_\rho\theta, \quad \frac{d}{d\rho}\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2T_\rho\right)=-\frac{1}{2\rho}\theta^2+\frac{d_1}{r} \tag{1.1}$$

при граничних умовах на вільному контурі

$$T_\rho\Big|_{\rho=1}=0, \quad \left.\left(\frac{d\theta}{d\rho}+\frac{\nu}{\rho}\theta\right)\right|_{\rho=1}=0 \tag{1.2}$$

і умовах на "нескінченності $\rho\to\infty$

$$T_\rho=0, \quad \frac{d\theta}{d\rho}+\frac{\nu}{\rho}\theta=-\frac{b^2}{Dh}M\,. \tag{1.3}$$

Тут всі співвідношення представлені у безрозмірному виді: $\rho=\frac{r}{b}$ $\theta=\frac{dw}{d\rho}$, $w=\frac{\overline{w}}{h}$, D – циліндрична жорсткість, h – товщина пластинки, b – радіус отвору, $T_r=\frac{b^2}{Eh^3}\overline{T_r}\cdot\overline{w}$, $\overline{T_r}$ – розмірні значення прогину і радіального зусилля, d_1 – стала інтегрування.

З рівнянь (1.1), (1.2) одержуємо:

$$\theta=12\left(1-\nu^2\right)\frac{1}{\rho}\int\limits_1^\rho\left[\rho_2\int\limits_1^{\rho_2}T_\rho(\rho_1)\theta(\rho_1)d\rho_1\right]d\rho_2+\frac{1}{2}c_2\rho+\frac{c_3^*}{\rho}; \tag{1.4}$$

$$T_\rho=\frac{1}{2}\frac{1}{\rho^2}\int\limits_1^\rho\left[\rho_2\int\limits_1^{\rho_2}\frac{\theta^2(\rho_1)}{\rho_1}d\rho_1\right]d\rho_2+\frac{1}{2}d_1\ln\rho+\frac{d_3^*}{\rho^2}+d_2^*, \tag{1.5}$$

де C_2, C_3^*, d_2^*, d_3^* – нові сталі інтегрування.

Задачу, згідно [3], розв'язуємо методом розкладу по параметру ε зовнішнього навантаження ($\varepsilon=\frac{b^2}{Dh}M$). Покладаємо

$$\theta=\theta_1\varepsilon+\theta_3\varepsilon^3+\theta_5\varepsilon^5+\ldots, \quad T_\rho=T_{\rho,2}\varepsilon^2+T_{\rho,4}\varepsilon^4+T_{\rho,6}\varepsilon^6+\ldots; \tag{1.6}$$

$$C_2=C_{2,1}\varepsilon+C_{2,3}\varepsilon^3+C_{2,5}\varepsilon^5+\ldots, \quad C_3^*=C_{3,1}^*\varepsilon+C_{3,3}^*\varepsilon^3+C_{3,5}^*\varepsilon^5+\ldots,$$

$$d_1 = d_{1,2}\varepsilon^2 + d_{1,4}\varepsilon^4 + d_{1,6}\varepsilon^6 + \ldots,\quad d_2^* = d_{2,2}^*\varepsilon^2 + d_{2,4}^*\varepsilon 4 + d_{2,6}^*\varepsilon^6 + \ldots,$$
$$d_3^* = d_{3,2}^*\varepsilon^2 + d_{3,4}^*\varepsilon 4 + d_{3,6}^*\varepsilon^6 + \ldots. \tag{1.7}$$

Якщо підставити розвинення (1.6), (1.7) у співвідношення (1.4), (1.5), врахувати граничні умови на контурі отвору

$$T_{\rho,2k}\Big|_{\rho=1} = 0, \quad \left.\left(\frac{d\theta_{2k-1}}{d\rho} + \frac{\nu}{\rho}\theta_{2k-1}\right)\right|_{\rho=1} = 0 \tag{1.8}$$

і умови на “нескінченності”

$$T_{\rho,2k}\Big|_{\rho\to\infty} = 0, \quad \left.\left(\frac{d\theta_1}{d\rho} + \frac{\nu}{\rho}\theta_1\right)\right|_{\rho\to\infty} = -1,$$
$$\left.\left(\frac{d\theta_{2k+1}}{d\rho} + \frac{\nu}{\rho}\theta_{2k+1}\right)\right|_{\rho\to\infty} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{1.9}$$

обчислити сталі інтегрування в (1.7), то одержимо явні аналітичні вирази для функцій, що входять в (1.6).

Після досить громіздких обчислень отримуємо:

$$\begin{aligned}
T_\theta = {} & \varepsilon^2\left\{g_2^{(2)}\rho^2 + g_{-2}^{(2)}\frac{1}{\rho^2} + g_{l1,-2}^{(2)}\frac{\ln\rho}{\rho^2}\right\} + \varepsilon^4\left\{24\left(1-\nu^2\right)\times\right. \\
& \times\left[g_6^{(4)}\rho^6 + g_4^{(4)}\rho^4 + g_2^{(4)}\rho^2 + g_{-2}^{(4)}\frac{1}{\rho^2} + \ln\rho\left(g_{l1,2}^{(4)}\rho^2 + g_{l1,-2}^{(4)}\frac{1}{\rho^2}\right)\right. \\
& \left.\left. + \ln^2\rho\left(g_{l2,0}^{(4)} + g_{l2,-2}^{(4)}\frac{1}{\rho^2}\right) + \ln^3\rho\left(g_{l3,0}^{(4)} + g_{l3,-2}^{(4)}\frac{1}{\rho^2}\right)\right]\right\} + \varepsilon^6\left\{72\left(1-\nu^2\right)^2\times\right. \\
& \times\left[g_{10}^{(6)}\rho^{10} + g_8^{(6)}\rho^8 + g_6^{(6)}\rho^6 + g_4^{(6)}\rho^4 + g_2^{(6)}\rho^2 + g_{-2}^{(6)}\frac{1}{\rho^2} + \right. \\
& + \ln\rho\left(g_{l1,6}^{(6)}\rho^6 + g_{l1,4}^{(6)}\rho^4 + g_{l1,2}^{(6)}\rho^2 + g_{l1,-2}^{(6)}\frac{1}{\rho^2}\right) + \ln^2\rho\left(g_{l2,6}^{(6)}\rho^6 + g_{l2,4}^{(6)}\rho^4 + \right. \\
& \left. + g_{l2,2}^{(6)}\rho^2 + g_{l2,0}^{6} + g_{l2,-2}^{(6)}\frac{1}{\rho^2}\right) + \ln^3\rho\left(g_{l3,4}^{(6)}\rho^4 + g_{l3,2}^{(6)}\rho^2 + g_{l3,0}^{6} + g_{l3,-2}^{(6)}\frac{1}{\rho^2}\right) + \\
& \left.\left. + \ln^4\rho\left(g_{l4,2}^{(6)}\rho^2 + g_{l4,0}^{6} + g_{l4,-2}^{(6)}\frac{1}{\rho^2}\right) + \ln^5\rho\, g_{l5,0}^{(6)}\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned}
M_\theta = {} & -\left[\varepsilon\left\{\frac{1}{2}C_{2,1} + \frac{C_{3,1}}{\rho^2} + \nu\left(\frac{1}{2}C_{2,1} - \frac{C_{3,1}}{\rho^2}\right)\right\} + \varepsilon^3 12\left(1-\nu^2\right)\left\{d_4^{(3)}\rho^4 + d_2^{(3)}\rho^2 + \right.\right. \\
& + d_{-2}^{(3)}\frac{1}{\rho^2} + \ln\rho\left(d_{l1,0}^{(3)} + d_{l1,-2}^{(3)}\frac{1}{\rho^2}\right) + + \ln^2\rho\left(d_{l2,0}^{(3)} + d_{l2,-2}^{(3)}\frac{1}{\rho^2}\right) + \nu\left(C_4^{(3)}\rho^4 + C_2^{(3)}\rho^2 + \right. \\
& \left.\left. + C_0^{(3)} + C_{-2}^{(3)}\frac{1}{\rho^2} + \ln\rho\left(C_{l1,0}^{(3)} + C_{l1,-2}^{(3)}\frac{1}{\rho^2}\right) + \ln^2\rho\left(C_{l2,0}^{(3)} + C_{l2,-2}^{(3)}\frac{1}{\rho^2}\right)\right)\right\} + \\
& + \varepsilon^5 144\left(1-\nu^2\right)^2\left\{d_8^{(5)}\rho^8 + d_6^{(5)}\rho^6 + d_4^{(5)}\rho^4 + d_2^{(5)}\rho^2 + d_{-2}^{(5)}\frac{1}{\rho^2} + \right.
\end{aligned}$$

$$+\ln\rho\left(d_{l1,4}^{(5)}\rho^4+d_{l1,2}^{(5)}\rho^2+d_{l1,0}^{(5)}+d_{l1,-2}^{(5)}\frac{1}{\rho^2}\right)+\,+\ln^2\rho\left(d_{l2,4}^{(5)}\rho^4+d_{l2,2}^{(5)}\rho^2+\right.$$

$$\left.+d_{l2,0}^{(5)}+d_{l2,-2}^{(5)}\frac{1}{\rho^2}\right)+\ln^3\rho\left(d_{l3,2}^{(5)}\rho^2+d_{l3,0}^{(5)}+d_{l3,-2}^{(5)}\frac{1}{\rho^2}\right)+\ln^4\rho\left(d_{l4,0}^{(5)}+\right.$$

$$\left.+d_{l4,-2}^{(5)}\frac{1}{\rho^2}\right)+\nu\left(C_8^{(5)}\rho^8+C_6^{(5)}\rho^6+C_4^{(5)}\rho^4+C_2^{(5)}\rho^2+C_0^{(5)}+C_{-2}^{(5)}\frac{1}{\rho^2}+\right.$$

$$+\ln\rho\left(C_{l1,4}^{(5)}\rho^4+C_{l1,2}^{(5)}\rho^2+C_{l1,0}^{(5)}+C_{l1,-2}^{(5)}\frac{1}{\rho^2}\right)+$$

$$+\ln^2\rho\left(C_{l2,4}^{(5)}\rho^4+C_{l2,2}^{(5)}\rho^2+C_{l2,0}^{(5)}+C_{l2,-2}^{(5)}\frac{1}{\rho^2}\right)$$

$$\left.\left.\left.+\ln^3\rho\left(C_{l3,2}^{(5)}\rho^2+C_{l3,0}^{(5)}+C_{l3,-2}^{(5)}\frac{1}{\rho^2}\right)+\ln^4\rho\left(C_{l4,0}^{(5)}+C_{l4,-2}^{(5)}\frac{1}{\rho^2}\right)\right)\right\}\right]. \tag{1.11}$$

Нами отримані явні вирази для зусилля T_ρ і моменту M_ρ, а також для коефіцієнтів , що входять у ці вирази; з зрозумілих причин тут немає змоги їх навести.

2. Метод розв'язку задачі. З аналізу формул (1.10), (1.11) бачимо, що вони містять сингулярні при $\rho\to\infty$ доданки, явні вирази для яких легко розпізнати. Тому виникає задача підсумовування рядів (1.6) при наявності цих доданків. Для цього застосовуємо запропонований в [4] метод.

Стосовно отриманої кількості наближень суть метода викладаємо наступним чином.

Одержані розв'язки (1.10), (1.11) будемо в загальному описувати деякою функцією $u=(\rho,\varepsilon)$, розклад якої в ряд по параметру ε має вид

$$u(\rho,\varepsilon)=\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k u_k(\rho). \tag{2.1}$$

Апроксимацію цієї функції по параметру ε з точністю до $O(\varepsilon^6)$ будемо позначати так

$$u_6(\rho,\varepsilon)=S_6(\rho,\varepsilon)=\sum_{k=1}^{6}\varepsilon^6 u_k(\rho), \tag{2.2}$$

де $S_n(n=1,2,...)$ – частинні суми ряду (2.1).

На основі (2.2) будуємо нові апроксимації

$$S_6^*[\rho,\sigma_u,\lambda,\varepsilon]=\sum_{k=1}^{6}\varepsilon^k\delta_k(6,\sigma_u,\lambda)u_k(\rho)=$$

$$=\sum_{k=1}^{6}\varepsilon^k\delta_k(6,\sigma_u,\lambda)u_k^{(r)}(\rho)+\sum_{k=1}^{6}\varepsilon^k\delta_k(6,\sigma_u,\lambda)u_k^{(ir)}(\rho)\ , \tag{2.3}$$

де регуляризуючі коефіцієнти $\delta_k(\sigma,\sigma_u,\lambda)$ визначаються за формулами

$$\delta_1=\frac{\beta}{p}\left(1+\frac{\sigma}{p}+\frac{\sigma^2}{p^2}+\frac{\sigma^3}{p^3}+\frac{\sigma^4}{p^4}+\frac{\sigma^5}{p^5}\right),\quad \delta_2=\frac{\beta^2}{p^2}\left(1+2\frac{\sigma}{p}+3\frac{\sigma^2}{p^2}+4\frac{\sigma^3}{p^3}+5\frac{\sigma^4}{p^4}\right),$$

$$\delta_3=\frac{\beta^3}{p^3}\left(1+3\frac{\sigma}{p}+6\frac{\sigma^2}{p^2}+10\frac{\sigma^3}{p^3}\right),\quad \delta_4=\frac{\beta^4}{p^4}\left(1+4\frac{\sigma}{p}+10\frac{\sigma^2}{p^2}\right),$$

$$\delta_5=\frac{\beta^5}{p^5}\left(1+5\frac{\sigma}{p}\right),\quad \delta_6=\frac{\beta^6}{p^6}. \tag{2.4}$$

Тут $\beta = 2\lambda$, $p = 2\lambda + \sigma_u(\rho)$, $\sigma = \sigma_u(\rho)$, $\sigma_u(\rho) > 0$, $\forall \rho \in [1, \infty)$ $\lambda > 0$, $\sigma_u(\rho)$ – довільні параметр і функція.

Згідно метода [4] у новій апроксимації (2.3) виділено регулярні і іррегулярні (при $\rho \to \infty$) частини. Тоді в (2.3) слід підбирати такі функції $\sigma_u(\rho)$ і параметр λ, щоб іррегулярна частина стала малою з наперед заданою фіксованою точністю (асимптотична апроксимація).

Оскільки у розглядуваній задачі всі функції і параметри безрозмірні, то для забезпечення "практичної придатності" одержаних апроксимацій для розв'язків поставленої задачі будемо вимагати , щоб виконувались нерівності

$$\left| \varepsilon^6 \begin{matrix} T^{(ir)}_{\rho,6} \\ T^{(ir)}_{\theta,6} \end{matrix}, \delta_6\left[6, \sigma_T(\rho,\lambda)\right] \right| < \xi_1, \quad \left| \varepsilon^5 \begin{matrix} M^{(ir)}_{\rho,5} \\ M^{(ir)}_{\theta,5} \end{matrix}, \delta_5\left[5, \sigma_M(\rho,\lambda)\right] \right| < \xi_2 . \tag{2.5}$$

У цих нерівностях: ξ_1, ξ_2 – достатньо малі, які повинні задаватись наперед; $\sigma_T(\rho,\lambda)$, $\sigma_M(\rho,\lambda)$ – регуляризуючі функції відповідно для зусиль і моментів. Встановлено, що для зусиль і моментів їх слід задавати у такому виді

$$\sigma_u(\rho) = \sigma_T(\rho) = \rho^{5/3} \ln \rho, \quad \sigma_u(\rho) = \sigma_M(\rho) = \rho^{8/5} \ln \rho, \tag{2.6}$$

Щоб побудовані функції задовольняли (з певною похибкою) граничним умовам і рівнянням рівноваги, слід покладати в (2.6) $\rho = \rho_0$, де ρ – довільне число з напівінтервалу $[1, \infty)$.

3. Результати чисельних досліджень. На основі відповідних формул приведені обчислення величин T_θ, M_θ для різних ρ, при цьому для ρ_0 вибрано значення $\rho_0 = 10$. Дані обчислень наведені в таблиці для різних ε. Результати обчислень при різних ρ та ε представлені у таблиці і на графіках функцій T_θ (рис. 1), M_θ (рис. 2).

ε	T, M	ρ					
		1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
0,6	T_θ	0,382	0,1596	0,105	0,075	0,552	0,042
	M_θ	1,201464	1,022	0,8888	0,82	0,7783	0,749
1,0	T_θ	0,637	0,266	0,175	0,12409	0,092	0,071
	M_θ	2	1,70397	1,481289	1,36726	1,29714	1,249

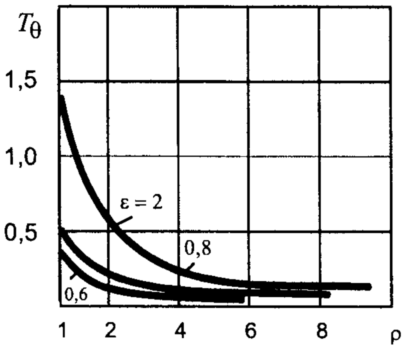


Рис 1. Графік зміни кільцевого моменту в залежності від ρ і ε

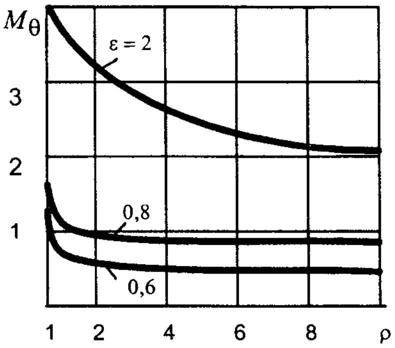


Рис 2. Графік зміни кільцевого зусилля в залежності від ρ і ε .

З аналізу даних таблиці і графіків бачимо, що зусилля T_θ і M_θ вже прямують при $\rho \to \infty$ до скінчених значень (відповідно до нуля і сталої величини). Це відповідає фізичним міркуванням і усталеним представленням про концентрацію зусиль і моментів. З графіків також бачимо, що з ростом моментного навантаження кільцеві зусилля і моменти зростають; в околі вільного отвору має місце концентрація зусиль і моментів. Наведені дані підтверджують достовірність і ефективність запропонованих в [3], [4], [5] методів підсумовування сингулярних ітерацій.

РЕЗЮМЕ

Задача об изгибе моментами на “бесконечности” круглой пластинки с центральным отверстием. Поскольку обнаружено существенное нарастание итераций при отходе от отверстия и с ростом номера приближений, использован разработанный авторами метод суммирования и регуляризации. Получены числовые и графические данные о концентрации усилий и моментов и их изменение по радиальной координате.

SUMMARY

The axis-symmetrical non-linear problem about the bending with moments on “infinity” of round plate with central hole is analytically solved. As is found out the substantial growth of the iteration at the distance from hole and with growth of approximation number, the developed by authors method of summing and regularization is used. The numeric and graphic data about the concentration of forces and moments and their changes on the radial co-ordinate are got.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.

1. *Савин Г.Н.* Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наук. думка. – 1968. – 887 с.
2. *Каюк Я.Ф.* Некоторые вопросы методов разложения по параметру. – К.: Наук. думка, 1980. – 165 с.
3. *Каюк Я.Ф., Кривоблоцкая Л.Н.* Сингулярные итерации в нелинейных задачах концентрации напряжений // Теорет. и прикладная механика. – 2002. – Вып.36. – С.98-108.
4. *Каюк Я.Ф., Кривоблоцкая Л.Н.* Метод регуляризации сингулярных итераций в нелинейных задачах изгиба пластин с отверстием // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. – 2002. – Вип.1. – С.83-90.
5. *Каюк Я.Ф., Кривоблоцкая Л.Н.* Концентрация моментов в окрестности круглого отверстия пластины при больших прогибах // Там же. – 2002. – Вип.2. – С.187-191.

Надійшла до редакції 12.02.2005 р.

ВІСНИК ДОНЕЦЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ, Сер. А: Природничі науки, 2005, вип. 1

УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ОРЕБРЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ

А.С.Каиров
Национальный университет кораблестроения, г. Николаев

Особое место в расчетах несущих элементов тонкостенных конструкций занимают задачи о вынужденных колебаниях конструктивно неоднородных оболочек при импульсном нагружении. Поэтому во многих работах [1–5] проведены исследования динамического поведения гладких и подкрепленных оболочек. Основные современные тенденции развития этой проблемы отражены обзорах [2, 5]. В данной работе решена задача о нестационарных колебаниях и несущей способности цилиндрических оболочек с учетом дискретного размещения продольно-поперечных подкрепляющих ребер. Изучено влияние начальных несовершенств в виде прогибов на динамическую устойчивость и напряженно-деформированное состояние.

Постановка задачи. Рассмотрим ортотропную оболочку-обшивку с жестко соединенными с ней по линиям контакта стрингерами и шпангоутами. Напряженно-деформированное состояние такой оболочечной системы будем определять в рамках геометрически нелинейной теории оболочек и стержней типа С. П. Тимошенко с учетом поперечных деформаций сдвига. В качестве критерия потери оболочкой несущей способности примем условие возникновения пластических деформаций (критерий текучести Мизеса).

Математической моделью динамического деформирования рассматриваемой конструкции является гиперболическая система нелинейных дифференциальных уравнений. Деформированное состояние оболочки определяется через компоненты обобщенного вектора $\overline{U}_0 = (u_1, u_2, u_3, \varphi_1, \varphi_2)$ перемещений обшивки, а подкрепляющих ребер – через компоненты аналогичных обобщенных векторов $\overline{U}_i$ и $\overline{U}_j$ перемещений центров тяжести их поперечных сечений.

Пусть начальные несовершенства носят чисто изгибной характер, тогда отклонение формы срединной поверхности задается полем нормального перемещения . При этом начальные деформации гладкой оболочки ε_{11}^0, ε_{22}^0, ε_{12}^0, ε_{13}^0, ε_{23}^0 определяются через начальный прогиб w^0 . Компоненты тензора деформаций оболочки и ребер с начальными прогибами имеют вид

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w^0}{\partial x}\right)^2, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{u_3 - w^0}{R} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial y}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w^0}{\partial y}\right)^2,$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial x}\left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{u_2}{R}\right) - \theta_1^0 \theta_2^0, \quad \theta_1^0 = \frac{\partial w^0}{\partial x}, \quad \theta_2^0 = \frac{\partial w^0}{\partial y},$$

$$\varepsilon_{13} = \varphi_1 + \frac{\partial}{\partial x}(u_3 + w^0), \quad \varepsilon_{23} = \varphi_2 + \frac{\partial}{\partial y}(u_3 + w^0) - \frac{u_2}{R}, \quad k_{11} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \quad k_{22} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y},$$

$$k_{12} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \quad \varepsilon_{11i} = \frac{\partial u_{1i}}{\partial x} \pm z_{1i}\frac{\partial \varphi_{1i}}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\theta_{1i}^2 + \theta_{2i}^2\right) - \frac{1}{2}\left(\theta_{1i}^0\right)^2, \quad \varepsilon_{12i} = \theta_{2i},$$

$$\varepsilon_{13i} = \varphi_{1i} + \theta_{1i} - \theta_{1i}^0, \quad \theta_{1i} = \frac{\partial u_{3i}}{\partial x}, \quad \theta_{2i} = \frac{\partial u_{2i}}{\partial x} \pm z_{1i}\frac{\partial \varphi_{2i}}{\partial x}, \quad \theta_{1i}^0 = \frac{\partial w^0}{\partial x}, \quad k_{11i} = \frac{\partial \varphi_{1i}}{\partial x},$$

$$k_{12i} = \frac{\partial \varphi_{2i}}{\partial x}, \quad \varepsilon_{22j} = \frac{\partial u_{2j}}{\partial y} \pm z_{2j}\frac{\partial \varphi_{2j}}{\partial y} + \frac{u_{3j} - w^0}{R_j} + \frac{1}{2}\left(\theta_{1j}^2 + \theta_{2j}^2\right) - \frac{1}{2}\left(\theta_{2j}^0\right)^2,$$

$$\varepsilon_{21j} = \theta_{1j}, \quad \varepsilon_{23j} = \varphi_{2j} + \theta_{2j} - \theta_{2j}^0, \quad \theta_{1j} = \frac{\partial u_{1j}}{\partial y} \pm z_{2j}\frac{\partial \varphi_{1j}}{\partial y},$$

$$\theta_{2j} = \frac{\partial u_{3j}}{\partial y} - \frac{1}{R_j}\left(u_{2j} \pm z_{2j}\varphi_{2j}\right), \quad \theta_{2j}^0 = \frac{\partial w^0}{\partial y}, \quad k_{22j} = \frac{\partial \varphi_{2j}}{\partial y}, \quad k_{21j} = \frac{\partial \varphi_{1j}}{\partial y}, \tag{1}$$

где R, R_j – радиусы срединной поверхности оболочки и соответствующего шпангоута; z_{1i}, z_{2j} – эксцентриситеты ребер; φ_1, φ_2 – углы поворота нормали к срединной поверхности оболочки относительно координатных осей. Здесь и ниже приняты те же обозначения, что и в работе [4]. Тензор деформаций оболочечной системы дополняется соотношениями между усилиями-моментами и деформациями.

Будем считать, что начальные прогибы оболочки не вызывают напряжений. Поэтому в момент времени $t = 0$ при начальных условиях на перемещения и отсутствии внешних воздействий на оболочку все напряжения должны быть равны нулю. Уравнения равновесия при этом удовлетворяются тождественно.

Метод решения. Для вывода уравнений движения дискретно подкрепленной оболочки используем вариационный принцип Остроградского-Гамильтона. После стандартных преобразований с учетом интегральных характеристик напряжений для обшивки оболочки и соответствующих ребер и соотношений деформаций-перемещений получим три системы уравнений колебаний: для гладкой оболочки, продольных и поперечных ребер. Таким образом, нестационарные колебания оболочечной системы описываются дифференциальными уравнениями вида [4]

$$L_n(\overline{U}_0, \overline{U}_i, \overline{U}_j) + P_n = Q_n\left(\frac{\partial^2 \overline{U}_0}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 \overline{U}_i}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 \overline{U}_j}{\partial t^2}\right) \quad (n = \overline{1, 5}), \tag{2}$$

где $L_n(\overline{U}_0, \overline{U}_i, \overline{U}_j)$ – дифференциальные операторы эллиптичной части уравнений движения нелинейной теории оболочек и стержней; $Q_n\left(\partial^2 \overline{U}_0/\partial t^2, \partial^2 \overline{U}_i/\partial t^2, \partial^2 \overline{U}_j/\partial t^2\right)$ – дифференциальные операторы, учитывающие перемещения и инерционные составляющие уравнений движения оболочечной системы; P_n – компоненты обобщенного вектора поверхностной нагрузки.

Основной особенностью уравнений движения (2) является их геометрическая нелинейность и наличие разрывных коэффициентов по пространственным координатам, что обусловлено дискретностью расположения продольного и поперечного подкрепляющих ребер и переменной жесткостью скачкообразного характера. Линиями разрывов в указанных уравнениях являются линии проецирования центров тяжести поперечных сечений подкрепляющих ребер на срединную поверхность оболочки. Полученная математическая модель представляет собой гиперболическую нелинейную систему дифференциальных уравнений в частных производных, которые дополняются соответствующими граничными и начальными условиями.

Численный алгоритм решения рассматриваемой нестационарной динамической задачи состоит в нахождении решения в гладкой области и на линиях пространственных разрывов. В основу построения алгоритма была положена конечно-разностная аппроксимация уравнений движения (2) по пространственным координатам и явная конечно-разностная по временной координате, что влечет за собой ограничения на шаги разностной сетки [6]. Такой подход позволил сохранить дивергентную форму разностного представления разрешающих уравнений и обеспечить выполнение закона сохранения полной механической энергии оболочечной системы на разностном уровне.

В матрично-векторном виде разностные уравнения (2) представляются зависимостью

$$[C]\overline{U} - [M]\frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial t^2} = \overline{F}(t), \tag{3}$$

где $[M]$ и $[C]$ – матрицы масс и жесткости дискретной разностной системы; $\overline{U}$ и $\overline{F}(t)$ – векторы дискретных перемещений и внешней нагрузки.

Переход от исходной системы дифференциальных уравнений к дискретной выполнялся в два этапа. Первый состоит в конечно-разностной аппроксимации дивергентных уравнений движения в усилиях-моментах, второй – в выборе дискретно согласованных конечно-разностных аппроксимаций величин усилий-моментов и соответствующих деформаций.

Применяемая здесь явная конечно-разностная схема приводит к ограничению применяемого дискретного временного шага разностной сетки. Необходимое условие устойчивости разностных схем выражается зависимостью [6]

$$\Delta t \geq 2/\omega, \tag{4}$$

где $\omega = \max(\omega_0, \omega_{1i}, \omega_{2j})$ – максимальные частоты собственных колебаний соответственно гладкой оболочки, i-го и j-го подкрепляющих ребер $\left(i = \overline{1, N_1},\ j = \overline{1, N_2}\right)$; Δt – величина шага по временной координате. Максимальная собственная частота отвечает поперечным сдвиговым колебаниям оболочечной системы. При толщине оболочки и высоте соответствующих подкрепляющих ребер меньше размера пространственных разностных шагов условия устойчивости (4) приводит к снижению эффективности использования явной разностной схемы и требует повышения шага интегрирования методом регуляризации [6].

Результаты численных исследований. Были проведены численные исследования колебаний шарнирно опертой при $x = 0$ и жестко защемленной при $x = L$ оболочки при следующих геометрических и физико-механических параметрах:

$$R/h = 20;\ \ L/R = 4;\ \ H_{1i} = H_{2j} = 4h;\ \ h_{1i} = h_{2j} = h;$$

$$F_{1i} = F_{2j} = H_{1i}h_{1i};\ \ i = \overline{1, I};\ \ j = \overline{1, J};$$

$$E_1 = E_2 = 70\ \text{ГПа};\ \ \nu_{12} = \nu_{21} = 0{,}3;\ \ \rho = 2{,}7 \cdot 10^3\ \text{кг/м}^3;$$

$$E_{1i} = E_{2j} = E_1;\ \ G_{1i} = G_{2j} = G;\ \ \rho_{1i} = \rho_{2j} = \rho,$$

где R, h – радиус срединной поверхности и толщина обшивки; L – длина оболочки; h_{1i}, h_{2j}, F_{1i}, F_{2j}, H_{1i}, H_{2j} – геометрические характеристики ребер. Рассмотрен случай продольно-поперечного дискретного подкрепления ребрами при $I = 4$ и $J = 3$, когда дискретные элементы равномерно расположены по пространственным координатам. Начальный прогиб $w^0 = h_0 \sin(4\pi x/L)$, где h_0 – амплитуда начального прогиба. Продольная импульсная нагрузка задавалась в виде $F(y, t) = -A_1 \sin(\pi t/T)[\eta(t) - \eta(t - T)]$, где A_1 – амплитуда нагружения; T – продолжительность нагрузки; $\eta(t)$ – функция Хевисайда; t – текущее время. Для параметров нагрузки бралось $A_1 = 0{,}1$ МПа·м, $T = 50 \cdot 10^{-6}$ с.

При исследовании динамической устойчивости оболочечной конструкции без учета начальных прогибов было установлено, что конструкция работает при указанных геометрических и силовых параметрах в упругой области. Однако при рассмотрении задачи с начальными прогибами пластические деформации появляются в первую очередь между продольными ребрами в гладкой области, что подтверждается теоретическими и экспериментальными исследованиями [1], а минимальные значения интенсивности напряжений наблюдаются в области расположения подкрепляющих ребер.

На рис. 1 приведена зависимость интенсивности напряжений σ_i по оси симметрии между стрингерами вдоль продольной координаты в период времени $t = 11T$. Максимальные значения напряжений по абсолютной величине соответствуют началу пластических деформаций. Как показали численные расчеты, начиная с момента времени $t = 11T$ начинают развиваться пластические деформации по всей исследуемой области ($\sigma_i \geq \sigma_T$), т.е. данное время можно считать моментом времени потери динамической устойчивости оболочки, где σ_T – предел текучести материала.

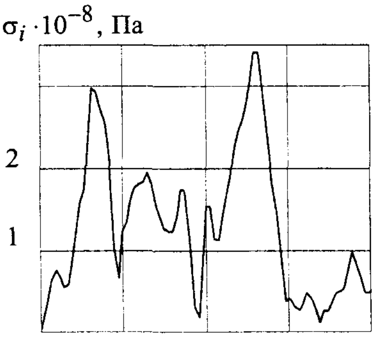


Рис. 1

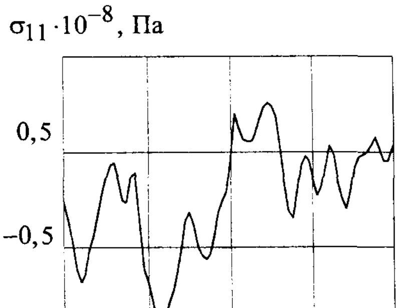


Рис. 2

На рис. 2 изображена графически зависимость величины продольных напряжений σ_{11} в вышеуказанной области при $t = 11T$, которая носит тот же характер, что и параметр деформаций ε_{11}.

Как показывают результаты исследований, общей потере устойчивости ребристых оболочек при нестационарном динамическом нагружении, как правило, предшествует местная потеря устойчивости обшивки между ребрами вследствие возникающих пластических деформаций.

РЕЗЮМЕ

На основі геометрично нелінійної теорії оболонок і стержнів типу С. П. Тимошенка розглянуто задача динамічного поводження циліндричних оболонок с дискретним поздовжньо-поперечним підкріпленням при імпульсному навантаженні. Досліджено вплив недосконалостей форми оболонок на їхню динамічну стійкість та напружено-деформований стан. Наведено результати чисельних досліджень.

SUMMARY

A problem of dynamic behavior of cylindrical shells with discrete stiffened ribs under impulse loading is considered in the framework of the S.P.Timoshenko's type geometrically non-linear theory of shells and roads. An influence of shape imperfections at shells dynamic stability and stress-strained state has been examined. The numerical results are presented.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. *Андреев Л.В., Дышко А.Л., Павленко И.Д.* Динамика пластин и оболочек с присоединенными массами. – М., 1988. - 195 с.
2. *Богданович А.Е.* Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. – Рига, 1987. – 295 с.
3. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М., 1972. – 432 с.
4. *Каиров А.С., Мейш В.Ф.* Динамическое поведение дискретно подкрепленных цилиндрических оболочек при импульсном распределенном нагружении // Збірн. наук. праць Укр. держ. морського технічн. ун-ту. – 2002. – №4. – С.118-128.
5. *Луговой П.З.* Динамика тонкостенных конструкций при нестационарных нагрузках // Прикладная механика. – 2001. – Т.37. – №5. – С.44-73.
6. *Рихтмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач. – М., 1972. – 420 с.

Надійшла до редакції 20.02.2005 р.

ВІСНИК ДОНЕЦЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ, Сер. А: Природничі науки, 2005, вип. 1

УДК 539.3

ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДЛЯ ЦИЛИНДРА С ПОЛОСТЯМИ ПРИ ЕГО ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ.

В.Г.Житняя

Несмотря на актуальность исследований напряженно-деформированного состояния тел с полостями при действии динамических нагрузок, до сих пор нет достаточно эффективных методов их проведения. В статье предлагается приближенный метод решения задачи для цилиндра с конечным числом продольных полостей. Метод основан на применении теории функций двух комплексных переменных.

Постановка задачи. Рассмотрим изотропный цилиндр с M продольными полостями, занимающий в трехмерном пространстве область D с границей S. Обозначим через D и Γ область поперечного сечения цилиндра и ее границу. Контур Γ состоит из гладких контуров Γ_0 и Γ_m $(m=\overline{1, M})$, ограничивающих внутреннюю D_0 и внешние D_m области поперечного сечения. Поверхность S также представляется суммой $S=S_{00}+S_{01}+...+S_{0M}+S_1+S_2$, где S_1 и S_2 – поверхности верхнего и нижнего оснований цилиндра.; S_{00} и S_{0m} $(m=\overline{1,M})$ – внешняя и внутренняя боковые поверхности. Цилиндр деформируется усилиями $\sigma_{nj}^0(x_1,x_2,x_3,t)$ $(j=n, k)$, распределенными по поверхности S, где $t\in\left[t_0,\hat{t}\,\right]$, n и k – орты внешней нормали и касательной в любой точке S. Объемные силы отсутствуют. Пусть плоскость $x_3=0$ совпадает с одним из поперечных сечений цилиндра и $x_{i0}=x_i$ $(i=1,2)$. С каждой цилиндрической поверхностью S_{0m} свяжем локальную систему координат $Ox_{1m}x_{2m}x_3$.

Определение напряженно-деформированного состояния цилиндра сводится к интегрированию системы уравнений, состоящей из уравнений движения

$$\partial_{x_j}\sigma_{ij}=\rho\partial_t^2 u_i,\quad \partial_y=\partial/\partial y\quad \left(i=\overline{1,\ 3}\right), \tag{1}$$

уравнений обобщенного закона Гука, уравнений связи перемещений с малыми деформациями при заданных для $t=t_0$ начальных условиях

$$\overline{u}(x_1,x_2,x_3,t_0)=\overline{u^0}(x_1,x_2,x_3),\quad \partial_t\overline{u}\big|_{t=t_0}=\overline{u}_t^0(x_1,x_2,x_3), \tag{2}$$

а также граничных условиях в напряжениях на части поверхности S^σ

$$\sigma_{nj}(x_1,x_2,x_3,t)=\sigma_{nj}^0(x_1,x_2,x_3,t)$$

и перемещениях на части поверхности S^u

$$\overline{u}(x_1,x_2,x_3,t)=\overline{u_0}(x_1,x_2,x_3,t),$$

Здесь $\overline{u}_0\left(x_1,x_2,x_3,t_0\right)=\overline{u}^0\left(x_1,x_2,x_3\right)$, $\partial_t\,\overline{u}_0\big|_{t=t_0}=\overline{u}_t^0\left(x_1,x_2,x_3\right)$.

С помощью представления вектора перемещений $\overline{u}$ в форме Ламе [1]

$$\overline{u}=grad\Phi(x_1,x_2,x_3,t)+rot\overline{\Psi}(x_1,x_2,x_3,t), \tag{3}$$

где $\Phi=F_1^{(1)}$, $\overline{\Psi}=\overline{\Psi}(F_2^{(1)},F_3^{(1)},F_4^{(1)})$ – волновые потенциалы, уравнения движения (1) преобразуем к следующему виду:

$$\left(\partial_{x_1}^2+\partial_{x_2}^2+\partial_{x_3}^2-c_j^{-2}\partial_t^2\right)F_j^{(1)}(x_1,x_2,x_3,t)=0\quad (j=\overline{1,4}). \tag{4}$$

Здесь c_1 и $c_2=c_j$, $(j=\overline{2,4})$ – скорости распространения волн расширения и сдвига.

Метод решения. Решение волновых уравнений (4) будем искать в области G^* четырехмерного пространства с точками $\xi = \xi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 = \tau)$, где $\xi_l = x_l \big| d^*$ $(l = 1,2,3)$, $\tau = t/t^*$, d^* и t^* – характерные линейный размер области D и момент времени.

Функции $F_j^{(1)}$ представим суммами

$$F_j^{(1)} = F_{j0}^{(1)} + \ldots + F_{jm}^{(1)} + \ldots + F_{jM}^{(1)},$$

каждое слагаемое которых удовлетворяет уравнению вида (4).

Введем в рассмотрение вместо вещественных переменных ξ_j $(j = \overline{1,4})$ и функций $F_j^{(m)}$, $F_j^{(1)}$, комплексные переменные

$$z_{1m} = \xi_{1m} + i\xi_{2m}, \quad z_2 = \xi_3 + i\xi_4, \quad \overline{z}_{1m} = \xi_{1m} - i\xi_{2m}, \quad \overline{z}_2 = \xi_3 - i\xi_4$$

и комплекснозначные функции

$$F_{jm} = F_{jm}^{(1)} + iF_{jm}^{(2)}, \quad F_j = F_j^{(1)} + iF_j^{(2)}.$$

Вещественные $F_{jm}^{(2)}$ и комплекснозначные F_{jm} функции удовлетворяют уравнениям (4) и [2]:

$$\left[4\partial_{z_{1m}}\partial_{\overline{z}_{1m}} + \left(1+\alpha_j^2\right)\left(\partial_{z_2}^2 + \partial_{\overline{z}_2}^2\right) + \left(1-\alpha_j^2\right)2\partial_{z_2}\partial_{\overline{z}_2}\right]F_{jm} = 0, \tag{5}$$

в которых $\alpha_j = \hat{c}/c_j$, $\hat{c} = d^*/t^*$.

Функции F_{jm} будем искать в виде линейных комбинаций

$$F_{jm} = B_1 F_{jm_1} + B_2 F_{jm_2}, \tag{6}$$

где B_l $(l = 1,2)$ – постоянные;

$$F_{jm_1} = \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\left[\overline{z}_1^{n_1}\overline{z}_2^{n_2}\varphi_{n_1 n_2 jm} + (1-\delta_{m0})z_1^{n_1}z_2^{n_2}\overline{g}_{n_1 n_2 jm}\right],$$

$$F_{jm_2} = \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\left[z_1^{n_1}z_2^{n_2}\overline{\varphi}_{n_1 n_2 jm} + (1-\delta_{m0})\overline{z}_1^{n_1}\overline{z}_2^{n_2}g_{n_1 n_2 jm}\right];$$

$\delta_{00} = 1$, $\delta_{m0} = 0$ при $m \succ 0$; $\varphi_{n_1 n_2 0}$ – функции, голоморфные в области G_0; $\varphi_{n_1 n_2 jm}(z_1, z_2)$ – функции, аналитические в области G_m; G_m – области Хартогса [3] с плоскостью симметрии $z_2 = 0$. Функции $g_{n_1 n_2 jm}(z_1, z_2)$ обеспечивают однозначность F_{jm} при обходе m–той полости. Функции $\varphi_{0 n_2 jm}(z_1, z_2)$, $g_{0 n_2 jm}(z_1, z_2)$ представим так:

$$\varphi_{0n_2 j0}(z_1, z_2) = \sum_{k_2=0}^{M^*} z_2^{k_2} \sum_{k_1=0}^{M_0} a_{k_1 k_2 jo}^{0n_2} z_1^{k_1},$$

$$\varphi_{0n_2 jm}(z_{1m}, z_2) = \sum_{k_2=0}^{M^*} z_2^{k_2} \left[\sum_{k_1=1}^{M_m} a_{k_1 k_2 jm}^{0n_2} z_{1m}^{-k_1} + a_{0k_2 jm}^{0n_2} \ln z_{1m}\right],$$

$$\varphi_{0n_2 jm}(z_{nm}, z_2) = \sum_{k_2=0}^{M^*} z_2^{k_2} \sum_{k_1=0}^{M_m} \gamma_{k_1 k_2 jm}^{0n_2} \frac{z_{1m}^{k_1}}{k_1!}\left(\ln z_{1m} - \sum_{l_1=1}^{k_1}\frac{1}{l_1}\right). \tag{7}$$

Здесь $M^* \le \infty$, $M_m \le \infty$; $a_{k_1 k_2 j0}^{0n_2}$, $a_{k_1 k_2 jm}^{0n_2}$, $\gamma_{k_1 k_2 jm}^{0n_2}$ – неизвестные постоянные.

С учетом уравнения (5) и формул (6), (7) таким же образом, как и в работе [2], можно получить

$$F_{j01}=\sum_{n_3=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{M^*}\sum_{k_1=0}^{M_0}a_{k_1k_2j0}^{0n_3}f_{1k_1k_2n_3}\left(\alpha_j,z_1,z_2,\overline{z}_1,\overline{z}_2\right),$$

$$F_{jm1}=\sum_{n_3=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{M^*}\sum_{k_1=0}^{M_m}a_{k_1k_2jm}^{0n_3}f_{2k_1k_2n_3}\left(\alpha_j,z_{1m},z_2,\overline{z}_{1m},\overline{z}_2\right), \qquad (8)$$

$$f_{1k_1k_2n_3}=M_{1k_1k_2n_3j}\sum_{n_1=0}^{\left[\frac{k_2+n_3}{2}\right]}\frac{\overline{z}_1^{n_1}z_1^{k_1+n_1}}{n_1!(k_1+n_1)!}\frac{(-1)^{n_1}}{4^{n_1}}\times b_{k_2.n_3.n_1}$$

$$b_{k_2.n_3.n_1}=\sum_{n_2=\max\{0,n_3-2n_1\}}^{\min\{n_3,n_3+k_2-2n_1\}}\frac{\overline{z}_2^{n_2}}{n_2!}\frac{z_2^{k_2-(2n_1-(n_3-n_2))}}{\left(k_2-\left(2n_1-\left(n_3-n_2\right)\right)\right)!}\times A_{n_1.l.j},$$

$$l=n_3-n_2,\ \ A_{n_10j}=\left(C_j^+\right)^{n_1},\ \ A_{n_11j}=C_j^+A_{n_1-1.1j}+2C_j^-A_{n_1-1.0j};$$

$$A_{n_1lj}=C_j^+\left[\left(1-\delta_l^{2n_1-1}\right)A_{n_1-1.lj}+A_{n_1-1.l-2.j}\right]+\left(1-\delta_l^{2n_1}\right)2C_j^-A_{n_1-1.l-1.j},$$

$l=\overline{2,2n_1-2}$, $\delta_i^j=1$ при $i\geq j$, $\delta_i^j=0$ при $i\prec j$;

$$A_{n_12n_1-1.j}=C_j^+A_{n_1-1.2n_1-3.j}+2C_j^-A_{n_1-1.2n_1-2.j},$$

$$A_{n_1.2n_1.j}=C_j^+A_{n_1-1.2n_1-2.j},\ \ C_j^+=1+\alpha_j^2,\ \ C_j^-=1-\alpha_j^2;$$

$$f_{2k_1k_2n_3}=M_{2k_1k_2n_3j}M_{k_14}^{-1}\left\{\frac{(-1)^{n_1}}{4^{n_1}n_1!}b_{k_2n_3n_1}\sum_{n_1=0}^{\min\left\{k_1-1,\left[\frac{k_2+n_3}{2}\right]\right\}}\frac{\left(-\overline{z}_1\right)^{n_1}\left(k_1-n_1-1\right)!}{z_{1m}^{k_1-n_1}}+\right.$$

$$\left.+\lambda_{k_1}\sum_{n_1=0}^{\left[\frac{k_z+n_3-2k_1}{2}\right]}\frac{\left(-\overline{z}_{1m}\right)^{n_1+k_1}}{4^{n_1+k_1}\left(n_1+k_1\right)!}\frac{z_{1m}^{n_1}}{n_1!}\left(\ln z_{1m}+\ln\overline{z}_{1m}-\sum_{l_1=1}^{n_1}\frac{1}{l_1}-\sum_{l_1=1}^{n_1+k_1}\frac{1}{l_1}\right)b_{k_2n_3n_1+k_1}\lambda_{k.n}\right\};$$

$\lambda_0=1$, $\lambda_{k_1}=(-1)^{k_1-1}$ при $k_1\geq 1$; $M_{04}=1$, $M_{k_14}=(k_1-1)!$ при $k_1\geq 1$; $\lambda_{k.n}=1$ при $k_1\leq\left[\frac{k_2+n_3}{2}\right]$,

$\lambda_{k.n}=0$ при $k_1>\left[\frac{k_2+n_3}{2}\right]$ $M_{1k_1k_2n_3j}$, $M_{2k_1k_2n_3j}$ – параметры. Постоянные, входящие в формулы (8), будем находить методом наименьших квадратов с использованием начальных и граничных условий.

Если тело находится в обобщенном плоском напряженном состоянии или испытывает плоскую деформацию в плоскости параллельной Ox_1x_2, то в равенствах (8) надо положить $n_3=0$. При этом

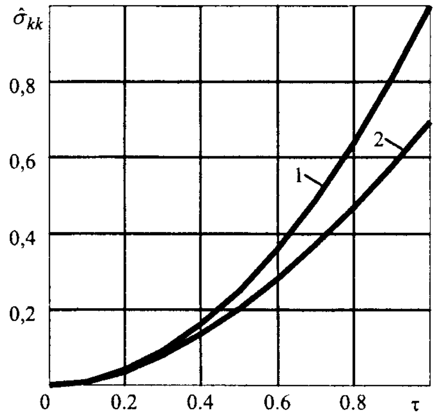
$$f_{1k_1k_2}=M_{1k_1k_2j}\sum_{n_1=0}^{\left[\frac{k_2}{2}\right]}\frac{\left(-\alpha_j^2\right)^{n_1}}{n_1!}\frac{\overline{z}_1^{n_1}z_1^{k_1+n_1}}{\left(k_1+n_1\right)!}\times b_{k_2n_1},$$

$$f_{2k_1k_2}=M_{2k_1k_2j}M_{k_14}^{-1}\left\{\overline{z}_{1m}^{n_1}b_{k_2n_1}\sum_{n_1=0}^{\min\left\{k_1-1,\left[\frac{k_2}{2}\right]\right\}}\frac{\left(\alpha_j^2\right)^{n_1}\left(k_1-n_1-1\right)!}{n_1!z_{1m}^{k_1-n_1}}+\right.$$

$$+\lambda_{k_1}\sum_{n_1=0}^{\left[\frac{k_2-2k_1}{2}\right]}\frac{\left(-\alpha_j^2\right)^{n_1+k_1}}{n_1!\left(n_1+k_1\right)!}z_1^{n_1}\overline{z}_1^{n_1+k_1}\left(\ln z_{1m}+\ln\overline{z}_{1m}-\sum_{l_1=1}^{n_1}\frac{1}{l_1}-\sum_{l_1=1}^{n_1+k_1}l_1^{-1}\right)b_{k_2n_1+k_1}\lambda_{k.n}\Bigg\};$$

$M_{1k_1k_2j}$, $M_{2k_1k_2j}$ – параметры.

Анализ результатов численных исследований. Численные исследования проводились для цилиндра, у которого длина значительно меньше его диаметра. Рассматривался круговой цилиндр радиуса R_0 с центральной круговой полостью радиуса R_1 в случае однородных начальных условий, когда $t_0=0$, $\sigma_{nk}^0=0$, $\sigma_{nn}^0=-pf(t)$, $p=const$. Предполагалось, что $E=1{,}1E_0$ Па, $E_0=10^{11}$; $\nu=0{,}33$; $\rho=8900$ кг/м^3; $R_0=5R_1$; $d^*=R_1$, $R_1=1$ м.



На рисунке представлены графики изменения значений $\hat{\sigma}_{kk}=\sigma_{kk}\left(pE_0\right)^{-1}$ напряжений σ_{kk} в точке $z_1=R_1$ контура Γ_1 в зависимости от $\tau=t/t^*$, $t^*=d^*/v$, $\upsilon=\upsilon_0$ – скорость распространения волны возмущения. Кривые *1* и *2* относятся к нагружению цилиндра, для которого $f(t)=a^2t^2$, $a=1/t^*$ и $f(t)=at\ln(1+at)$, $a=1/t^*$ соответственно.

Расчеты проводились также для случая, когда $f(t)=b_0+b_1t^2$; $b_0=0$, $b_1=\left(\frac{100}{t^*}\right)^2$ при $0\le\tau<0{,}01$ и $b_0=1$, $b_1=0$ при $\tau\ge0{,}01$. Результаты расчетов, полученные для этого случая, согласуются с данными работы [3]: расхождения около 4 %. При нагружении цилиндра постоянными усилиями ($f(t)=1$) получаются известные результаты эластостатики: при любом τ в точках контура Γ_1 $\hat{\sigma}_{kk}=1$. Из рисунка видно, что напряжения растут быстрее в случае, когда цилиндр деформируется усилиями, зависящими от времени по квадратичному закону.

РЕЗЮМЕ

Побудовано наближений метод розв'язування задач теорії пружності для ізотропних циліндрів з повздовжніми порожнинами. Наведені результати чисельних розрахунків.

SUMMARY

For the solution of a problem the theory elasticity for a isotropic cylinder with the cavities by there dynamic loading is build a approximate method. The results of numerical is reduce.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новацкий В.* Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
2. *Житняя В.Г.* Упруго-динамическое состояние пластин с полостями // Матеріали. вуз. наук. конф. проф.-викл. складу за підс. наук.-дос. роботи: мат., физ., екол. – Донецьк, 1997. - С.70-73.
3. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. – М.: Наука, 1969. – 576 с.
4. *Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А.* Дифракция упругих волн. – К.: Наук. думка, 1978. – 307 с.

Надійшла до редакції 19.02.2005 р.

УДК 534.1

МОДЫ КРАЕВЫХ РЕЗОНАНСОВ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ПЛАНАРНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПОПЕРЕЧНО-АНИЗОТРОПНЫХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН

Ю.В.Мысовский, О.Д.Фесенко

Исследование явления краевого резонанса при осесимметричных колебаниях изотропных круговых пластин пространственной геометрии представлено в достаточно большом количестве публикаций. Современное обобщение полученных результатов в этом направлении дано в работах [1, 2]. В статьях [4, 5] изучено влияние фактора поперечной анизотропии осесимметрично колеблющихся сплошных пластин на характеристики краевого резонанса. Вместе с тем фундаментальный и прикладной интерес представляют дальнейшие исследования явления краевого резонанса в анизотропных телах иной геометрии. В данной статье дан общий анализ явления краевого резонанса в концентрических кольцевых поперечно-анизотропных пластинах.

1. Постановка задачи. Рассмотрим упругое тело пространственной геометрии (рис. 1) в виде короткого концентрического полого цилиндра (пластины). Отнесем пластину к прямоугольной декартовой системе безразмерных координат $Ox_1x_2x_3$, в которой она занимает область $\{R_1 \le x_1^2 + x_2^2 \le R_2,\ |x_3| \le 2h\}$, и к цилиндрической системе координат $Or\theta z$: $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$, $z = x_3$ с занимаемой областью $\{R_1 \le r \le R_2,\ 0 \le \theta < 2\pi,\ |z| \le 2h\}$. Будем считать, что рассматриваемое тело является трансверсально-изотропным (поперечно-анизотропным) с осью изотропии, параллельной Oz. Плоские грани пластины ($z = \pm h$) свободны от нагрузок, а на боковых поверхностях $\Gamma_j = \{r = R_j,\ \theta \in [0, 2\pi],\ |z| \le h\}$ приложены осесимметрично распределенные динамические внешние усилия с гармоническим законом изменения во времени, инициирующие симметричные по толщине колебания пластины.

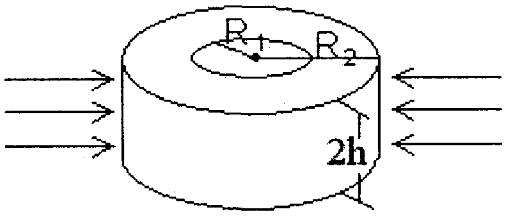


Рис. 1

Введем обозначения $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}$ ($\alpha\beta = rr,\ r\theta,\ rz,\ \theta\theta,\ \theta z$) для компонент тензора динамических напряжений и $\sigma_{\alpha\beta}$ для их комплексных амплитудных характеристик. Тогда краевые условия на граничных поверхностях пластины можно записать в виде

$$\sigma_{3j}\Big|_{x_3=\pm h} = 0 \quad (j = 1, 2, 3); \tag{1.1}$$

$$\sigma_{rr}\Big|_{\Gamma_j} = \varphi_j(z), \quad \sigma_{rz}\Big|_{\Gamma_j} = \psi_j(z), \quad \sigma_{r\theta}\Big|_{\Gamma_j} \equiv 0, \tag{1.2}$$

причем

$$\varphi_j(-z) = \varphi_j(z), \quad \psi_j(-z) = -\psi_j(z).$$

2. Построение решения. Принимая концепцию использования метода однородных решений для теоретического анализа колебаний рассматриваемой пластины [3], введем следующие разложения амплитудных компонент напряженно-деформированного состояния по базисной системе бегущих и краевых стоячи нормальных волн:

$$u_r = \sum_{(j)} f_{1j}(z) \frac{\partial}{\partial r} C_j(r), \quad u_z = \sum_{(j)} f_{3j}(z) C_j(r), \quad u_\theta \equiv 0; \tag{2.1}$$

$$\sigma_{rr}=\sum_{(j)}\Phi_j(r,z),\quad \sigma_{rz}=\sum_{(j)}\Psi_j(r,z),$$

$$\sigma_{zz}=\sum_{(j)}\Lambda_j(r,z),\quad \sigma_{\theta\theta}=\sum_{(j)}\mathrm{X}_j(r,z),\quad \sigma_{r\theta}=\sigma_{\theta z}\equiv 0, \tag{2.2}$$

где

$$\Phi_j(r,z)=((c_{12}-c_{11})r^{-1}\frac{\partial}{\partial r}C_j(r)-c_{11}\gamma_j^2C_j(r))f_{1j}(x_3)+c_{13}C_j(r)f_{3j}^{/}(z),$$

$$\Psi_j(r,z)=c_{44}(f_{1j}^{/}(z)+f_{3j}(z))\frac{\partial}{\partial r}C_j(r),$$

$$\Lambda_j(r,z)=(c_{33}f_{3j}^{/}(z)-\gamma_j^2c_{13}f_{1j}(z))C_j(r),$$

$$\mathrm{X}_j(r,z)=((c_{11}-c_{12})r^{-1}\frac{\partial}{\partial r}C_j(r)-c_{12}\gamma_j^2C_j(r))f_{1j}(z)+c_{13}C_j(r)f_{3j}^{/}(z); \tag{2.3}$$

$$f_{1j}(z)=\alpha_{2j}\cos(\sigma_{1j}z)-\alpha_{1j}\cos(\sigma_{2j}z),$$

$$f_{3j}(z)=\kappa_{1j}\alpha_{2j}\sin(\sigma_{1j}z)-\kappa_{2j}\alpha_{1j}\sin(\sigma_{2j}z),$$

$$\alpha_{1j}=(\kappa_{1j}-\sigma_{1j})\sin(\sigma_{1j}h),\quad \alpha_{2j}=(\kappa_{2j}-\sigma_{2j})\sin(\sigma_{2j}h),$$

$$C_j(r)=B_jJ_0(r)+G_jH_0^{(1)}(r),$$

$J_0(r)$, $H_0^{(1)}(r)$ - цилиндрические функции Бесселя и Ханкеля первого рода; B_j,G_j - неизвестные коэффициенты. $\{\gamma_j\}$ - множество корней трансцендентного дисперсионного уравнения для симметричных нормальных P-SV волн в поперечно-анизотропном слое [4], в которое входят действительные γ_j, упорядоченные по возрастанию модуля мнимые γ_j и пары комплексных корней $\{\gamma_j,\overline{\gamma}_j\}$ для волн заданной приведенной частоты Ω. Параметр приведенной частоты вычислялся формуле $\Omega=2\omega h/\pi v_{sv}$. На основе комбинации метода наименьших квадратов [5] из граничных условий (1.4) получаем систему алгебраических уравнений для определения и последующего уточнения значений искомых коэффициентов B_j,G_j.

3. Анализ численных результатов. В процессе численных исследований резонансные частоты планарных колебаний кольцевых поперечно-анизотропных пластин из керамики $BaTiO_3$ вычислялись путем анализа результатов решения задачи о вынужденных колебаниях пластин при внешних нагружениях с амплитудными характеристиками $\varphi_i(x_3)=p=const$, $\psi_i(x_3)=0$ и варьируемой частотой. Исследовано влияние внутренней отражающей поверхности кольцевой пластины на возникновение, формы и частотный уровень колебаний, характеризуемых как моды краевых резонансов. Дано сравнение полученных результатов с известными для сплошных круговых пластин. Анализировались эффекты, обусловленные появлением в круглой пластине внутренней полости фиксированного исчезающе малого радиуса $R_1=0{,}001h$. Сопоставительную характеристику частотных спектров для сплошной и

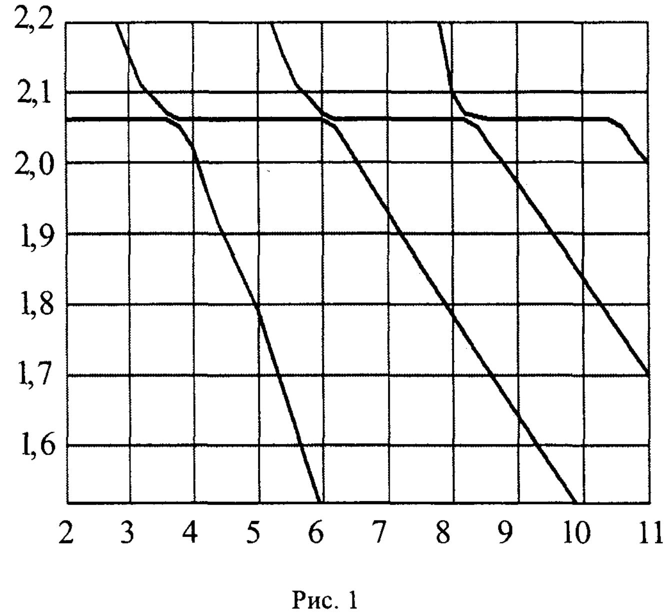


Рис. 1

кольцевой пластины с такой внутренней полостью иллюстрируют рис. 1, 2. Обнаруживаются существенные количественные и качественные изменения в структуре спектров для сплошного диска и диска с малым внутренним отверстием. При варьируемых относительных внешних радиусах пластины $R_2 < 6.0h$ сохраняется характерная «платообразная» структура спектра, однако ширина платообразных участков уменьшается по сравнению со случаем сплошного диска; частотный уровень $\Omega = 2.06$ платообразного участка в этом диапазоне варьирования практически не изменяется относительно сплошной пластины. Однако даже при весьма малых R_1 при $R_2 > 6.0h$ спектр качественно трансформируется. Возникает «осциллирующий» участок частотного спектра, для которого формы колебаний диска имеют вид, характерный для краевого резонанса. с концентрацией максимальных амплитуд колебаний у внешнего края кольцевой пластины. Далее этот «осциллирующий» участок трансформируется в выраженный платообразный на $\Omega = 1.96$ с формами колебаний, также свойственными краевому резонансу у внешней поверхности пластины.

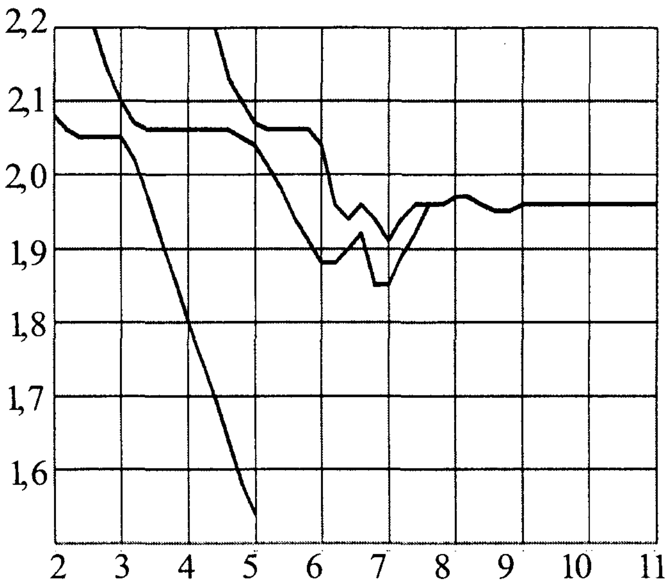


Рис. 2

Анализ частотных спектров кольцевых пластин из керамики $BaTiO_3$ с фиксированными внутренними радиусами $R_1 = 0.01h$, $R_1 = 0.3h$, $R_1 = 0.9h$ и варьируемыми внешними показывает, что принципиальные изменения в спектре за счет появления внутренней отражающей поверхности качественно сохраняются: в любом из рассмотренных случаев платообразный участок спектра, соответствующий краевому резонансу, формируется на двух частотных уровнях – для относительно малых R_2 на частотном уровне $\Omega = 2.06$, свойственном краевому резонансу в сплошном диске, а при относительно больших R_2 - на пониженном, но не зависящем от R_1 уровне $\Omega = 1.96$. Между этими диапазонами изменения R_2 имеется интервал «средних» значений, при которых распределение ветвей спектра существенно зависит от R_1, но колебания на этих частотах носят характер краевых.

Интервал «средних» значений R_2 с ростом R_1 расширяется: если при $R_1 = 0.001h$ он примерно составляет $6.0 < R_2 < 9.0$, то при $R_1 = 0.9h$ его диапазон примерно $4.5 < R_2 < 10.2$.

РЕЗЮМЕ

Побудовано алгоритм рішення задачі про визначення резонансних частот осесиметричних коливань стиснення-розтягання концентричних кільцевих трансверсально-ізотропних пластин просторової геометрії в рядах по базисних безлічах біжучих і крайових стоячих нормальних хвиль. Проведеними чисельними дослідженнями встановлено, що явище крайового резонансу має місце й у кільцевих пластинах, але має для цих пластин свою специфіку. Реалізовано розрахунок частотних спектрів для кільцевих пластин з кераміки $BaTiO_3$ зі змінюючимися внутрішніми й зовнішніми радіусами.

SUMMARY

Annual transversally isotropic spatial plates axisymmetric compression – tension oscillations resonance frequencies determination problem solving algorithm is built in rows by streaming and edge standing normal waves basis sets. By numerical researches was established, that the edge resonance phenomenon also takes place in annual plates and has own specificity for such plates. Frequency spectra for annual ceramics $BaTiO_3$ plates with varied inner and outer radiuses calculation is realized.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К.: Наук. думка, 1981. – 284 с.
2. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. Анализ динамической напряженности и частотных характеристик круглой плиты в рамках трехмерной теории упругости // Теория оболочек и пластин. – 1973. – С.436-442.
3. Космодамианский А.С., Сторожев В.И. Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред. – К.: Наук. думка, 1985. – 176 с.
4. Мысовский Ю.В., Соколова О.Д., Бай Ю.П. Исследование спектра собственных колебаний дисковидной поперечно-анизотропной пластины // Весн. Донец. ун-та. Сер. А. – 2002. – Вип.1. – С.364-366.
5. Сторожев В.И., Мысовский Ю.В., Соколова О.Д. Особенности спектра собственных колебаний транстропной дисковидной пластины в окрестности краевого резонанса // Теорет. и прикладная механика. – 2003. – Вып.37. – С.184-189.

Надійшла до редакції 10.01.05

УДК 539.3

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В КВАРЦЕВЫХ ПЛАСТИНАХ

А.В.Бай

В работах [1-3] получены основные дисперсионные соотношения и рассчитаны полные дисперсионные спектры нормальных электроупругих волн в пластинах различных срезов монокристалла α-кварца. Кинематические характеристики волн указанного типа приведены в работе [2]. В данной статье представлены результаты исследования энергетических характеристик нормальных волн, распространяющихся вдоль произвольного направления в плоскости пластины NT-среза α-кварца.

Постановка и построение решения задачи. Рассмотрим бесконечный слой (пластину) толщины $2h$ из среза монокристалла α-кварца, занимающий в декартовой системе координат область

$$V=\left\{ |x_3|\le h,\ x_1,x_2\in R^2 \right\}. \tag{1}$$

Будем считать, что внешние грани слоя покрыты тонкими безынерционными короткозамкнутыми электродирующими электродами и свободны от внешних усилий. Распространение нормальных электроупругих волн вдоль произвольно ориентированного в плоскости Ox_1x_2 направления $\vec{n}$ описывается решениями задачи, включающей уравнения движения

$$\partial_i\sigma_{ji}=\rho\ddot{U}_j \quad \left(i,\ j=\overline{1,3}\right), \tag{2}$$

соотношения обобщенного закона Гука

$$\sigma_{ij}=c^E_{ijkl}\varepsilon_{kl}+e_{kij}\partial_k\varphi,$$
$$D_i=e_{ikl}\varepsilon_{kl}-\varepsilon^S_{ij}\partial_j\varphi \quad \left(i,\ j,\ k,\ l=\overline{1,3}\right), \tag{3}$$

соотношения связи упругих деформаций и перемещений

$$\varepsilon_{ii}=\partial_iU_i,\quad \varepsilon_{ij}=\partial_iU_j+\partial_jU_i \quad (i\ne j), \tag{4}$$

квазистатическое уравнение Максвелла

$$\partial_iD_i=0, \tag{5}$$

граничные условия на внешних поверхностях слоя

$$\sigma_{3j}\big|_{x_3=\pm h}=0,\quad \varphi\big|_{x_3=\pm h}=0. \tag{6}$$

Здесь U_j, σ_{ij}, ε_{ij}, D_i, φ – соответственно комплексные характеристики вектора упругих перемещений, тензора напряжений, тензора деформаций, вектора электрической индукции и квазистатического потенциала электрического поля в исследуемых волновых движениях; c^E_{ijkl}, e_{ikl}, ε^S_{ij} – компоненты тензора упругих постоянных, измеренные при постоянной напряженности электрического поля, тензора пьезоэлектрических постоянных и тензора диэлектрических проницаемостей среды, измеренных при постоянных деформациях; ρ - плотность материала.

Для компонент вектора волновых перемещений U_j и квазистатического потенциала электрического поля φ введем представления

$$U_j=f_j(x_3)\exp\left(i(k(n_1x_1+n_2x_2)-\omega t)\right),$$
$$\varphi=f_4(x_3)\exp\left(i(k(n_1x_1+n_2x_2)-\omega t)\right), \tag{7}$$

где k - волновое число; ω - круговая частота волны, $n_1=\cos\theta$, $n_2=\sin\theta$ - компоненты вектора волновой нормали $\vec{n}$; θ - угол между направлением распространения волны и осью Ox_1 ; $f_j(x_3)$ $\left(j=\overline{1,4}\right)$ - комплекснозначные амплитудные функции вида

$$f_j(x_3)=\sum_{m=1}^{8}\left[\beta_{jm}A_m\exp(i\,p_m x_3)\right]. \tag{8}$$

В уравнениях (8) p_m - корни характеристического уравнения Кристоффеля для рассматриваемой среды; A_m - произвольные постоянные интегрирования, определяемые из системы однородных алгебраических уравнений восьмого порядка, получаемой в результате подстановки представлений (7) в граничные условия (6). Искомое дисперсионное уравнение выражает условие существования нетривиальных решений указанной системы и имеет вид

$$\Delta(\omega,k)=0. \tag{9}$$

На основе результатов работ [1–3], где изложены методология качественного анализа дисперсионного уравнения и методика численного нахождения корней уравнения (9), исследуем закономерности изменения компонент вектора плотности среднего за период потока мощности (вектора Умова – Пойтинга) $\overline{P}$ в связанных электроупругих нормальных волнах

$$\tilde{P}_j=\frac{\omega}{2\pi}\int_{0}^{2\pi/\omega}\left(\varphi\dot{D}_j-\sigma_{ij}\dot{U}_i\right)dt,\ \left(j=\overline{1,3}\right). \tag{10}$$

Для волн, распространяющихся вдоль направления $\vec{n}$, рассматриваются характеристики $\left(\tilde{P}_l,\ \tilde{P}_t,\ \tilde{P}_3\right)$, где

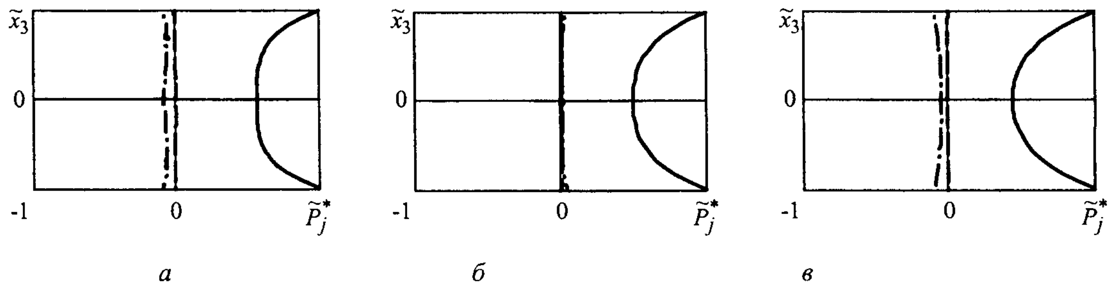
$$\tilde{P}_l=n_1\tilde{P}_1+n_2\tilde{P}_2,\quad \tilde{P}_t=-n_2\tilde{P}_1+n_1\tilde{P}_2; \tag{11}$$

$\tilde{P}_l$ - плотность среднего за период потока мощности энергии, переносимой волной в направлении $\vec{n}$; $\tilde{P}_t$ - плотность потока мощности в перпендикулярном $\vec{n}$ направлении.

Результаты численных исследований. Анализ указанных выше характеристик $\tilde{P}_l$, $\tilde{P}_t$, $\tilde{P}_3$ проведен применительно к пластине NT-среза α-кварца для волн, принадлежащих низшим модам при различных значениях углового параметра направления распространения θ и различных приведенных частотах $\Omega=\omega h\left(\rho/C_*\right)^{1/2}$, где $C_*=10^{10}$ Па – нормирующий параметр для величин с размерностями механических напряжений. Вычислялись значения нормированных компонент $\tilde{P}_j^*\left(\tilde{x}_3\right)=\mathrm{Re}\left[\tilde{P}_j\left(\tilde{x}_3\right)/\max\limits_{j,\tilde{x}_3}\left|\tilde{P}_j\left(\tilde{x}_3\right)\right|\right]$, $j\in\{l,t,3\}$, $\tilde{x}_3=x_3/h$. Результаты расчетов даны на рис. 1–3.

На рисунках сплошные линии соответствуют компонентам $\tilde{P}_l^*$, пунктирные – $\tilde{P}_t^*$, штриховые – $\tilde{P}_3^*$.

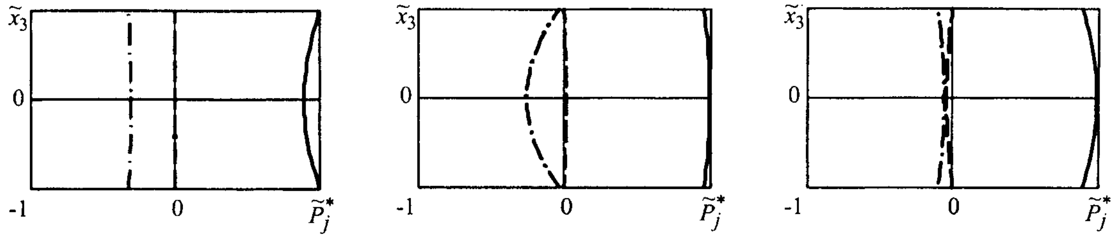
На рис. 1–2 изображены распределения компонент $\tilde{P}_l^*$, $\tilde{P}_t^*$, $\tilde{P}_3^*$ для волн относительной длины



а *б* *в*

Рис. 1. Распределение компонент вектора Умова-Пойтинга для случаев $\theta=\pi/180$, $\Omega=2{,}365$ (*а*), $\theta=\pi/6$, $\Omega=2{,}310$ (*б*), $\theta=89\pi/180$, $\Omega=2{,}315$ (*в*)

$\lambda/h = 2\pi$, принадлежащих двум низшим модам спектра. Из них видно, что эти компоненты от углового параметра направления распространения θ зависят незначительно. Для относительно длинных волн

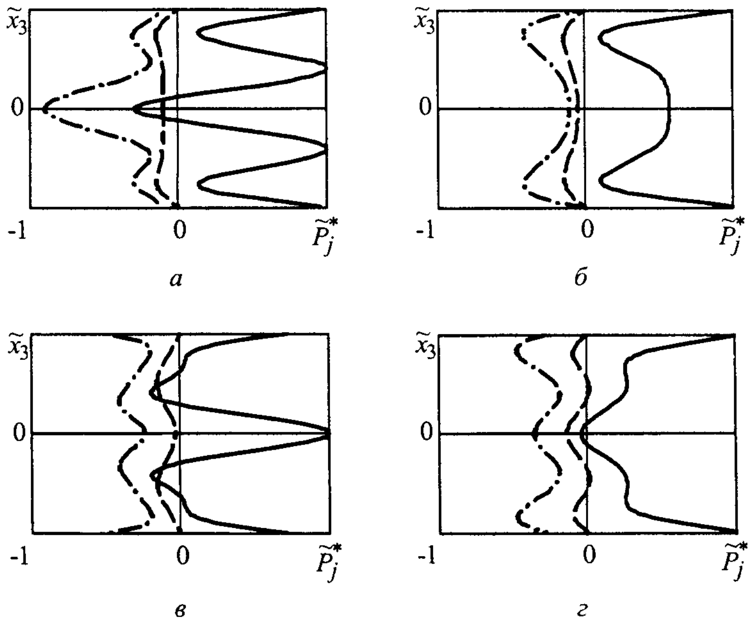


а *б* *в*

Рис. 2. Распределение компонент вектора Умова-Пойтинга для случаев $\theta = \pi/180$, $\Omega = 6{,}207$ (*а*), $\theta = \pi/6$, $\Omega = 5{,}231$ (*б*), $\theta = 89\pi/180$, $\Omega = 5{,}382$ (*в*)

низшей моды основной компонентой потока является $\tilde{P}_l^*$ (см. рис. 1). Для волн более высоких мод зависимость отдельных компонент $\tilde{P}_j^*$ от углового параметра становится существенной. Например, в волнах второй моды (рис. 2) при значениях $\theta = \pi/180$ и $\theta = \pi/6$ потоки с компонентой $\tilde{P}_t^*$ существенно увеличиваются. При $\theta = 89\pi/180$ в волне этой моды поток с компонентой $\tilde{P}_t^*$, как и для волн низшей моды, становится гораздо меньшим по отношению к потоку в направлении распространения. Для всех указанных волн второй моды распределение $\tilde{P}_l^*$ по толщине слоя является почти равномерным с незначительными вариациями.

Рис. 3 иллюстрирует некоторые особенности энергетических характеристик нормальных электроупругих волн низших четырех мод спектра с характеризуемым углом $\theta = \pi/6$ направлением распространения в высокочастотном коротковолновом диапазоне. Относительная длина рассматриваемых волн составляет $\lambda/h = \pi/4$. Вычисленные значения компонент $\tilde{P}_l^*$, $\tilde{P}_t^*$, $\tilde{P}_3^*$ для рассматриваемого NT-среза α-кварца обладают, как и в предшествующих описанных случаях, выраженной симметрией по толщинной координате слоя. В волнах второй и четвертой мод наблюдается локализация у плоских граней слоя в распределениях потока $\tilde{P}_l^*$, этот поток является доминирующим для указанных волн. В волнах первой моды компонента $\tilde{P}_t^*$ для данного частотного уровня по максимальному значению сопоставима с потоком $\tilde{P}_l^*$. Наконец, для более высокочастотных и коротких волн, как показывают рис. 3, возникают все более интенсивные потоки $\tilde{P}_3^*$ в толщинном направлении слоя.



а *б* *в* *г*

Рис. 3. Распределение компонент вектора Умова-Пойтинга для случаев $\theta = \pi/6$, когда $\Omega = 34{,}57$ (*а*), $\Omega = 35{,}23$ (*б*), $\Omega = 36{,}082$ (*в*), $\Omega = 36{,}510$ (*г*)

Таким образом, полученные результаты свидетельствуют о том, что варьирование углового параметра и порядка моды позволяет получать волны в кристаллическом слое с различными необходимыми энергетическими свойствами.

РЕЗЮМЕ

Проведено аналіз енергетичних характеристик нормальних електропружних хвиль в п'єзоактивній пластині NT-зрізу α-кварца. Наведені результати числових розрахунків компонент вектора Умова у хвилях нижчих чотирьох мод дисперсійних спектрів для різних напрямків поширення хвиль в площині пластини.

SUMMARY

Analysis of normal energy characteristics of electroelastic wave in a piezoactive plate of NT-cut of α-quartz has been conducted. Numerical calculations of Umov's vector components for four lower disperse spectra modes for various wave propagation directions in plate's plane are presented.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сторожев В.И., Бай А.В. Нормальные электроупругие волны в слое произвольного среза пьезокристалла кварца // КОНСОНАНС-2003: Зб. наук. пр. акуст. симпозіума, Київ, 1-3 жовтня 2003 р. – К., 2003. – С.252-257.
2. Бай А.В. Полные дисперсионные спектры электроупругих волн в пластинах из сложных срезов пъезокристалла кварца // Теорет. и прикладная механика. – 2003. – Вып.38. – С.148-152.
3. Сторожев В.И., Бай А.В., Шпак В.А. Спектр нормальных электроупругих волн в слое из пъезокристалла кварца // Теорет. и прикладная механика. – 2002. – Вып.36. – С.125-130.
4. Смагин А.Г., Ярославский М.И. Пьезоэлектричество кварца и кварцевые резонаторы. – М.: Наука, 1970. – 488 с.
5. Мэзон У Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультраакустике: Пер. с англ. – М.: Гостеоретиздат, 1952. – 448 с.

Надійшла до редакції 02.02.2005 р.

ВІСНИК ДОНЕЦЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ, Сер. А: Природничі науки, 2005, вип. 1

УДК 539.3

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ТЕРМОУПРУГОГО ИЗГИБА ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ПО ИТЕРАЦИОННОЙ ТЕОРИИ

А.С.Гольцев, Т.О.Филимонова

Фундаментальное решение термоупругого изгиба для ортотропных пластин по классической теории построено в работе [1]. В данной статье представлена методика построения фундаментального решения по итерационной теории [2].

Постановка задачи. Рассмотрим тонкую ортотропную пластинку толщиной $2h$, находящуюся под действием сосредоточенных источников тепла объемной плотности $W_0(x,y,z)$. Будем предполагать, что закон распределения объемных источников тепла по толщине пластины описывается нечетной функцией. Также предполагаем линейное распределение температуры t по толщине пластинки. Рассмотрим случай симметричного теплообмена с внешней средой по закону Ньютона и равенство нулю температуры внешней среды.

Введем безразмерную систему координат x,y,z, определенную с точностью до величины h. В данной системе координат уравнение теплопроводности для температурного изгиба ортотропных пластин при симметричном теплообмене имеет вид [3]:

$$\Delta_\lambda T_2 - 3(1+\mu_1)T_2 = -3W_2; \tag{1}$$

где

$$\Delta_\lambda = \lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad W_2 = \frac{1}{2\lambda_{33}} \int_{-1}^{1} zW_0(x,y,z)dz,$$

$$\mu_1 = Bi, \quad \lambda_1 = \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{33}}, \quad \lambda_2 = \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{33}};$$

$T_2(x,y)$–температурный момент, W_2 – плотность распределения «изгибных» источников тепла, Bi – критерий Био на поверхностях $z=\pm 1$; λ_{11}, λ_{22}, λ_{33} – главные коэффициенты теплопроводности.

Уравнение термоупругости с учетом гипотез итерационной теории в безразмерной системе координат имеет вид [2]:

$$D_1 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + D_3 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = -\beta_1 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} - \beta_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} -$$

$$-\frac{4}{15}\left\{ a_{55} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[B_{11}^2 \frac{\partial^4 W_C}{\partial x^4} + 2B_{11}B_3 \frac{\partial^4 W_C}{\partial x^2 \partial y^2} + B_3^2 \frac{\partial^4 W_C}{\partial y^4} \right] + \right.$$

$$\left. + a_{44} \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[B_{22}^2 \frac{\partial^4 W_C}{\partial y^4} + 2B_{22}B_3 \frac{\partial^4 W_C}{\partial x^2 \partial y^2} + B_3^2 \frac{\partial^4 W_C}{\partial x^4} \right] \right\}, \tag{2}$$

где W – прогиб,

$$D_1 = \frac{2}{3}B_{11}, \quad D_2 = \frac{2}{3}B_{22}, \quad D_3 = 2(D_{12} + 2D_{66}), \quad D_{12} = \frac{2}{3}B_{12}, \quad D_{66} = \frac{2}{3}B_{66};$$

$$\beta_1 = \frac{2}{3}\{\alpha_1 B_{11} + \alpha_2 B_{12}\}, \quad \beta_2 = \frac{2}{3}\{\alpha_1 B_{12} + \alpha_2 B_{22}\}; \quad a_{44} = \frac{1}{G_{23}}, \quad a_{55} = \frac{1}{G_{13}},$$

$$B_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2}, \quad B_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2}, \quad B_3 = B_{12} + 2B_{66}, \quad B_{12} = \frac{\nu_1 E_2}{1-\nu_1\nu_2}, \quad B_{66} = G_{12};$$

W_C – прогиб, найденный из решения классической задачи, т. е. из решения уравнения:

$$D_1\frac{\partial^4 W_C}{\partial x^4}+D_3\frac{\partial^4 W_C}{\partial x^2\partial y^2}+D_2\frac{\partial^4 W_C}{\partial y^4}=-\beta_1\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}-\beta_2\frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2};$$

α_1, α_2 –температурные коэффициенты линейного расширения для главных направлений; E_1, E_2 – модули упругости для главных направлений, G_{12}, G_{23}, G_{13} – модули сдвига, a_{44}, a_{55} – упругие постоянные (коэффициенты деформации).

Фундаментальное решение термоупругого изгиба определяется наличием δ – функции Дирака в правой части уравнения теплопроводности (1). Она модифицирует действие сосредоточенного «изгибного» источника тепла.

$$W_2=(x,y)=W_2^*\delta(x,y), \tag{3}$$

где W_2^* – интенсивность «изгибного» источника тепла.

Метод решения. Применим двумерное интегральное преобразование Фурье к системе дифференциальных уравнений (1),(2) с правыми частями (3). Получим решение уравнений теплопроводности и термоупругости в пространстве трансформант :

$$\tilde{T}_2=\frac{3W_2^*}{2\pi}\frac{1}{\Delta_t}; \tag{4}$$

$$\tilde{W}=\frac{\beta_1\xi^2+\beta_2\eta^2}{\Delta_d}\tilde{T}_2+\frac{4}{15}\frac{\tilde{W}_C}{\Delta_d}\Big\{a_{55}\Big[B_{11}^2\xi^6+2B_{11}B_3\xi^4\eta^2+B_3^2\xi^2\eta^4\Big]+$$
$$+a_{44}\Big[B_{22}^2\eta^6+2B_{22}B_3\xi^2\eta^4+B_3^2\xi^4\eta^2\Big]\Big\}, \tag{5}$$

где

$$\Delta_d=D_1\xi^4+D_3\xi^2\eta^2+D_2\eta^4,\quad \Delta_t=\lambda_1\xi^2+\lambda_2\eta^2+\mu_0,\quad \mu_0=3(1+\mu_1);$$

$$\tilde{W}_C=\frac{3W_2^*}{2\pi}\frac{\beta_1\xi^2+\beta_2\eta^2}{\Delta_d\Delta_t}; \tag{6}$$

ξ,η – переменные в пространстве трансформант.

Подставив выражения (4) и (6) в (5), найдем фундаментальное решение уравнений термоупругости в пространстве трансформант:

$$\tilde{W}=\frac{3W_2^*}{2\pi}\frac{1}{\Delta_t}\frac{\beta_1\xi^2+\beta_2\eta^2}{\Delta_d}+\frac{4}{15}\frac{3W_2^*}{2\pi}\frac{\beta_1\xi^2+\beta_2\eta^2}{\Delta_d^2\Delta_t}\times$$
$$\times\Big\{a_{55}\Big[B_{11}^2\xi^6+2B_{11}B_3\xi^4\eta^2+B_3^2\xi^2\eta^4\Big]+a_{44}\Big[B_{22}^2\eta^6+2B_{22}B_3\xi^2\eta^4+B_3^2\xi^4\eta^2\Big]\Big\}. \tag{7}$$

Методика обращения выражения (7) разработана в [4]. Она основана на использовании разложений, полученных с помощью формулы Якоби-Ангера, и представлении значений несобственных интегралов через значение специальной G – функции. В результате применения методики обращения, получим:

$$W(r,\varphi)=\frac{3W_2^*}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\varepsilon_n\cos 2n\varphi\int_0^{\pi/2}\frac{d_3(\theta)}{l(\theta)q(\theta)c^2(\theta)}\cos 2n\theta\,d\theta\times$$
$$\times\begin{Bmatrix}-\ln\frac{r}{2}, n=0,\\ \frac{1}{2n}, n=1,2\ldots\end{Bmatrix}-\frac{3W_2^*}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon_n\cos 2n\varphi\int_0^{\pi/2}\frac{d_3(\theta)}{l(\theta)q(\theta)c^2(\theta)}G_{n,n}(c(\theta)r)\times$$

$$\times \cos 2n\theta d\theta + \frac{4W_2^*}{5\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n \cos 2n\varphi \int_0^{\pi/2} \frac{d_3(\theta)\left(d_1(\beta\theta)+d_2(\theta)\right)}{l(\theta)q^2(\theta)} G_{n,n}\left(c(\theta)r\right)\cos 2n\theta d\theta, \tag{8}$$

где

$$d_1(\theta) = a_{55}\left(B_{11}^2 \cos^6\theta + 2B_{11}B_3\cos^4\theta\sin^2\theta + B_3^2\cos^2\theta\sin^4\theta\right),$$

$$d_2(\theta) = a_{44}\left(B_{22}^2 \sin^6\theta + 2B_{22}B_3\cos^2\theta\sin^4\theta + B_3^2\cos^4\theta\sin^2\theta\right),$$

$$d_3(\theta) = \beta_1\cos^2\theta + \beta_2\sin^2\theta;$$

$$l(\theta) = \lambda_1\cos^2\theta + \lambda_2\sin^2\theta; \quad c(\theta) = \sqrt{\frac{\mu_0}{l(\theta)}};$$

$$q(\theta) = D_1\cos^4\theta + D_3\cos^2\theta\sin^2\theta + D_2\sin^4\theta;$$

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n=0; \\ 2, & n>0; \end{cases}$$

$G_{n,n}(z)$ – специальная функция, введенная в [4].

Полученное решение (8) состоит из двух частей: первые два слагаемых являются решением по классической теории, а третье слагаемое определяет поправку, вносимую итерационной теорией.

Для определения ассимтотического поведения полученного решения необходимо использовать свойства специальной функции $G_{n,m}(z)$ при $z \to 0$. С учетом этих свойств получаем логарифмическую особенность для температурного прогиба $W \simeq C\ln r$, где C – const, зависящая от термомеханических параметров материала.

Анализ численных исследований. Численные исследования были проведены для материала, обладающего сильной анизотропией. Значения термомеханических параметров взяты из монографии [5]. Недостающие значения для модулей сдвига G_{13}, G_{23} взяты таким образом, что они соотносятся с модулем сдвига G_{12} также, как аналогичные величины для ортотропного материала СВАМ 15:1 [2]. Расчеты проведены для следующих исходных данных: $E_1 = 0{,}3745$, $E_2 = 0{,}1$, $\nu_1 = 0{,}2798$; $G_{12} = 0{,}0400$, $G_{23} = 0{,}0307$, $G_{13} = 0{,}0236$, $\nu_2 = 0{,}0747$; $\alpha_1 = 0{,}7\cdot 10^{-5}\ K^{-1}$; $\alpha_2 = 3{,}8\cdot 10^{-5}\ K^{-1}$; $\lambda_1 = 2{,}306$; $\lambda_2 = 1{,}000$. Предполагалось наличие сосредоточенного источника тепла единичной мощности $(W_2^* = 1^0 K)$. По результатам численных исследований построены графики зависимости температурного прогиба W от радиальной координаты r (рис. 1). Сплошными линиями показаны графики для температурного прогиба по итерационной теории, штриховыми – по классической. Цифрой 1 обозначены графики для прогиба вдоль оси x_1, цифрой 2 – вдоль оси x_2. Из графика видно, что значение температурного прогиба по итерационной теории дает существенное уточнение результатов в непосредственной близости от «изгибного» источника тепла $(r \le 2)$. Особо следует отметить разницу в ассимптотическом поведении: для итерационной теории

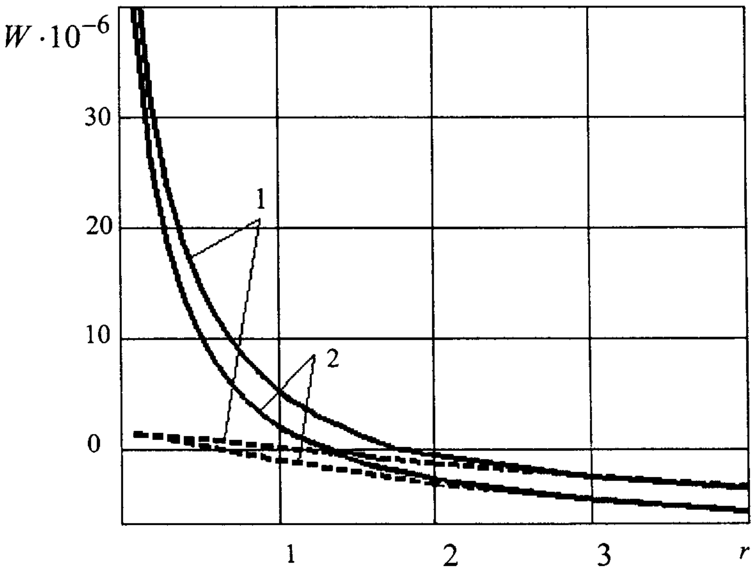


Рис. 1

это $\ln r$, а для классической теории – r^0 [1].

Проведенные численные исследования позволяют сделать вывод, что использование итерационной теории существенно в непосредственной близости от сосредоточенного источника тепла.

РЕЗЮМЕ

Побудовано фундаментальне рішення рівнянь термопружного вигину ортотропних платівок за ітераційною теорією. Воно складається з трьох доданків: перші два є рішенням за класичною теорією, а третє визначає виправлення, внесене ітераційною теорією. Чисельні дослідження дозволили зробити висновок про те, що виправлення ітераційної теорії істотне в безпосередній близькості від зосередженого теплового впливу.

SUMMARY

The fundamental decision of the equations of thermoelastic bend of orthotropic plates by the iterative theory is constructed. It will consist of three items: first two are the decision by the classical theory, and the third determines the amendment, brought by the iterative theory. Numerical researches have allowed to draw a conclusion, that the amendment of the iterative theory is essential in immediate proximity from the concentrated thermal influence.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гольцев А.С.* Фундаментальное решение уравнений термоупругости для тонких ортотропных пластин в случае теплообмена // Современные проблемы концентрации напяжений. Труды международной научной конференции. – Донецк: ДонГУ, «Кассиопея», 1998. – С.56-60.
2. *Амбарцумян С.А.* Теория анизотропных пластин: Прочность, устойчивость, колебания. – М.: Наука, 1987. – 360 с.
3. *Подстригач Я.С., Коляно Ю.М.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. – К.: Наукова думка, 1972. – 308 с.
4. *Хижняк В.К., Шевченко В.П.* Смешанные задачи теории пластин и оболочек: Учебное пособие. – Донецк: 1980. – 128 с.
5. *Космодамианский А.С., Калоеров С.А.* Температурные напряжения в многосвязных пластинках. – Киев; Донецк: Вища школа, 1983. – 160 с.

Надійшла до редакції 03.02.2005 р.

ВІСНИК ДОНЕЦЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ, Сер. А: Природничі науки, 2005, вип. 1

УДК 539.517.3

ВЛИЯНИЕ ФРАКТАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ ДЕФОРМАЦИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ НА ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР ДИСЛОКАЦИИ

О.П.Абрамова, С.В.Абрамов

Пластичность материалов определяется движением ансамбля дислокаций [1]. Теория дислокаций позволяет объяснить механизм пластической деформации, в основном на качественном уровне. В реальных материалах поля деформаций и напряжений вокруг оси отдельной линейной дислокации могут носить фрактальный характер. В настоящее время возникла необходимость разрабатывать новые теоретические подходы обобщенного описания связи параметров деформации и разрушения с характеристиками структуры самых разнообразных по природе материалов. В работах [2,3] на основе дробного исчисления были получены модельные уравнения динамики для пластической подсистемы фрактальной среды. Построенная модель основана на использовании математического формализма дробного исчисления и физической интерпретации показателей операторов дробных производных, как фрактальных размерностей вдоль осей координат. В данной статье модель фрактальной среды применена к описанию энергетического спектра отдельной дислокации.

Постановка и построение решения задачи. Изучение влияния фрактальных полей деформаций и напряжений на энергетический спектр дислокации сводится к задаче о поиске векторов собственных значений E и функций Φ оператора плотности энергии $\hat{H}$ (гамильтониана) отдельной дислокации, т.е. к решению операторного уравнения

$$\hat{H}\Phi = E\Phi . \tag{1}$$

В рамках полевого подхода [2] модельный гамильтониан $\hat{H}$ записывается в виде скалярного произведения операторов векторных полей напряжений $\vec{B}$ и деформаций $\vec{\psi}$

$$\hat{H} = \vec{B} \cdot \vec{\psi} . \tag{2}$$

Здесь $\vec{B}$ и $\vec{\psi}$ - поля напряжений и деформаций, причем

$$\vec{B} = \hat{B}_i \, \vec{e}_i = \hat{B}_1 \vec{e}_1 + \hat{B}_2 \vec{e}_2 + \hat{B}_3 \vec{e}_3 , \quad \hat{B}_i = \vec{\psi} \cdot \vec{A}_i , \quad \vec{A}_i = A_{ji} \vec{e}_j ; \tag{3}$$

$$\vec{\psi} = \hat{\psi}_i \, \vec{e}_i = \hat{\psi}_1 \vec{e}_1 + \hat{\psi}_2 \vec{e}_2 + \hat{\psi}_3 \vec{e}_3 , \quad \hat{\psi}_1 = D_z^{\alpha} , \quad \hat{\psi}_2 = D_z^{1-\alpha} , \quad \hat{\psi}_3 = \hat{z} ; \tag{4}$$

$\vec{e}_i$ – базисные орты декартовой системы координат $Oxyz$; A_{ij} – элементы матрицы $\hat{A}$, описывающие связи между полями $\hat{B}$ и $\vec{\psi}$ (закон Гука), в общем случае зависят от x, y ; по паре одинаковых индексов подразумевается суммирование ($i, j = 1,2,3$); при этом ось дислокации направлена вдоль оси $\vec{e}_3$.

Структура операторов дробных частных производной (интеграла) Римана-Лиувилля D_z^{α} (I_z^{α}) по переменной безразмерной координате z с показателем порядка α определяется в виде

$$D_z^{\alpha}\Phi = \partial_z \int_{z_0}^{z} \Phi(\xi) \,| z_0 - \xi |^{-\alpha} \, d\xi / \Gamma(1-\alpha) ,$$

$$I_z^{\alpha}\Phi = \int_{z_0}^{z} \Phi(\xi) \,| z_0 - \xi |^{\alpha-1} \, d\xi / \Gamma(\alpha) , \tag{5}$$

где ∂_z – оператор обычной частной производной по z ; Γ – гамма-функция. Показатели $\alpha, 1-\alpha$ допускают физическую интерпретацию как фрактальных размерностей компонент деформаций $\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2$ вдоль осей $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, соответственно. Для операторов $\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2, \hat{\psi}_3$ выполняются коммутационные соотношения

$$[\hat{\psi}_1, \hat{z}] = \hat{\psi}_1 \hat{z} - \hat{z} \hat{\psi}_1 = \alpha I_z^{1-\alpha} , \quad [\hat{\psi}_2, \hat{z}] = (1-\alpha) I_z^{\alpha} . \tag{6}$$

После введения матрицы-строки $\hat{\psi}$=($\hat{\psi}_1$, $\hat{\psi}_2$, $\hat{\psi}_3$) оператор $\hat{H}$ из выражения (2) принимает вид эрмитовой формы

$$\hat{H} = \hat{\psi}\hat{A}\hat{\psi}^+ ,$$

в которой $\hat{\psi}^+ = (\hat{\psi})^+$, причем верхний индекс «+» означает операцию эрмитового сопряжения.

Упростим дальнейшее решение задачи. Из симметричных соображений наложим дополнительные условия на элементы матрицы $\hat{A}$ типа $A_{12} = A_{13} = A_{21} = A_{31} = 0$. Тогда симметризованная форма записи оператора $\hat{H}$ принимает вид

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_3 + \hat{H}_4 . \tag{7}$$

Здесь

$$\hat{H}_1 = (A_{22} - A_{33})(\hat{\psi}_2^2 - \hat{z}^2)/2 + A_{11}\hat{\psi}_1^2 , \quad \hat{H}_2 = (A_{22} + A_{33})(\hat{\psi}_2^2 + \hat{z}^2)/2 ,$$

$$\hat{H}_3 = (A_{23} + A_{32})(\hat{\psi}_2\hat{z} + \hat{z}\hat{\psi}_2)/2 , \quad \hat{H}_4 = (A_{23} - A_{32})(\hat{\psi}_2\hat{z} - \hat{z}\hat{\psi}_2)/2 .$$

Введением новых операторов $\hat{c}$, $\hat{c}^+$ соотношениями

$$\hat{z} = 2^{-1/2}(\hat{c} + \hat{c}^+) ; \quad \hat{\psi}_2 = 2^{-1/2}(\hat{c} - \hat{c}^+) ; \quad [\hat{c}, \hat{c}^+] = [\hat{\psi}_2, \hat{z}] \tag{8}$$

и выполнением процедуры частичной диагонализации оператора $\hat{H}$ из (7) получим

$$\hat{H} = \hat{H}_5 + \hat{H}_6 ,$$

где

$$\hat{H}_5 = g_{11}\hat{\psi}_1^2 + g_{22}\hat{c}^+\hat{c} + g_{33}\hat{c}\hat{c}^+ ; \quad \hat{H}_6 = g_{23}(\hat{c}^+)^2 + g_{32}\hat{c}^2 ; \tag{9}$$

$$g_{11} = A_{11} , \quad g_{22} = (A_{33} - A_{22} - A_{23} + A_{32})/2 , \quad g_{33} = (A_{33} - A_{22} + A_{23} - A_{32})/2 ,$$

$$g_{23} = (A_{22} + A_{33} - A_{23} - A_{32})/2 , \quad g_{32} = (A_{22} + A_{33} + A_{23} + A_{32})/2 . \tag{10}$$

Следовательно, оператор $\hat{H}_5$ является диагональным, а $\hat{H}_6$ – недиагональным. С целью полной диагонализации оператора $\hat{H}$ перейдем к матричной форме записи. Введем матрицу $\hat{g}$ с элементами g_{ij} по формулам (10) $\left(g_{12} = g_{13} = g_{21} = g_{31} = 0\right)$ и матрицу-строку $\hat{\psi}_c = (\hat{\psi}_1, \hat{c}^+, \hat{c})$. В результате будем иметь $\hat{H} = \hat{\psi}_c\hat{g}\hat{\psi}_c^+$, где $\hat{\psi}_c^+ = (\hat{\psi}_c)^+$. С помощью унитарной матрицы $\hat{T}$ ($\hat{T}^+\hat{T} = \hat{T}\hat{T}^+ = \hat{E}$, где $\hat{E}$ – единичная матрица) с элементами t_{ij} выполним преобразование оператора $\hat{H}$ в терминах новых операторов $\hat{a}_1^+$, $\hat{a}_2^+$, $\hat{a}_3$. Получим

$$\hat{H} = \hat{\psi}_a\hat{E}_\varepsilon\hat{\psi}_a^+ , \quad \hat{E}_\varepsilon = \hat{T}^+\hat{g}\hat{T} , \quad \hat{\psi}_a = \hat{\psi}_c\hat{T} = (\hat{a}_1^+ ; \hat{a}_2^+ ; \hat{a}_3) , \tag{11}$$

где $\hat{\psi}_a^+ = (\hat{\psi}_a)^+ = \hat{T}^+\hat{\psi}_c^+$. Матрица $\hat{E}_\varepsilon$ становится диагональной с элементами на главной диагонали из собственных значений $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, ε_3 матрицы $\hat{g}$, определяемых выражениями

$$\varepsilon_1 = A_{11} , \quad \varepsilon_2 = (g_{22} + g_{33} - \varepsilon_0)/2 , \quad \varepsilon_3 = (g_{22} + g_{33} + \varepsilon_0)/2 ; \quad \varepsilon_0^2 = (g_{22} - g_{33})^2 + 4g_{23}g_{32} .$$

В результате оператор $\hat{H}$ из выражения (11) становится диагональным

$$\hat{H} = \varepsilon_1\hat{n}_1 + \varepsilon_2\hat{n}_2 + \varepsilon_3\hat{a}_3\hat{a}_3^+ . \tag{12}$$

При этом $\hat{n}_1 = \hat{a}_1^+ a_1$, $\hat{n}_2 = \hat{a}_2^+\hat{a}_2$.

Элементы t_{ij} матрицы $\hat{T}$ находятся при решении матричного уравнения

$$\hat{g}\hat{T} - \hat{T}\hat{E}_\varepsilon = 0$$

и выбор их зависит от соотношений между собственными значениями $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, ε_3 . Ограничимся вариантом, когда $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$. Для этого случая получим следующие значения элементов t_{ij} матрицы $\hat{T}$

$$t_{11} = k', \quad t_{12} = -k, \quad t_{13} = 0, \quad t_{21} = k\,cn(u,k), \quad t_{22} = k'\,cn(u,k),$$
$$t_{23} = -sn(u,k), \quad t_{31} = k\,sn(u,k), \quad t_{32} = k'sn(u,k), \quad t_{33} = cn(u,k).$$

Здесь k, u – модуль и аргумент эллиптических функций Якоби $sn(u,k)$; $cn(u,k)$; $(k')^2 = 1 - k^2$; F – неполный эллиптический интеграл первого рода; φ – полярный угол в плоскости Oxy. Взаимосвязи между элементами t_{ij} и компонентами энергии $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ определяются через параметр

$$s = t_{23} / t_{33} = g_{23} / (\varepsilon_3 - g_{22}) = (\varepsilon_3 - g_{33}) / g_{32}$$

соотношением типа

$$t_{33}^2 = 1/(1 + s^2) = cn^2(u,k).$$

Тогда на основе соотношений (11) связи между новыми $\hat{a}_1^+$, $\hat{a}_2^+$, $\hat{a}_3$ и старыми $\hat{\psi}_1$, $\hat{c}^+$, $\hat{c}$ операторами определяются выражениями

$$\hat{a}_1^+ = t_{11}\hat{\psi}_1 + t_{21}\hat{c}^+ + t_{31}\hat{c}, \quad \hat{a}_2^+ = t_{12}\hat{\psi}_1 + t_{22}\hat{c}^+ + t_{32}\hat{c},$$
$$\hat{a}_3 = t_{23}\hat{c}^+ + t_{33}\hat{c}, \quad [\hat{a}_3, \hat{a}_3^+] = (1 - 2n_{30})(1-\alpha)I_z^\alpha, \tag{13}$$

в которых $n_{30} = sn^2(u,k)$. С учетом коммутатора из соотношений (13) оператор $\hat{H}$ из выражения (12) примет искомый вид

$$\hat{H} = \varepsilon_2(\hat{n}_1 + \hat{n}_2) + \varepsilon_3\hat{n}_3 + \varepsilon_3(1 - 2n_{30})(1-\alpha)I_z^\alpha. \tag{14}$$

При этом $\hat{n}_3 = \hat{a}_3^+\hat{a}_3$. Полученный оператор $\hat{H}$ является основным при решении задачи об энергетическом спектре дислокации.

Далее рассмотрим только предельный вариант состояния дислокации с фрактальным показателем $\alpha = 0$. Тогда из выражений (1) – (5) и (8) находим

$$\hat{\psi}_1 = 1, \quad I_z^0 = 1, \quad \hat{\psi}_2 = D_z^1 = d/dz, \quad [\hat{c}, \hat{c}^+] = 1.$$

Собственную функцию $\Phi = \Phi_0$ определим из решения уравнения $\hat{c}\Phi_0 = 0$ или $(D_z^1 + \hat{z})\Phi_0 = 0$ с начальным условием $\Phi_0(z_0) = \Phi_0(0)$ при $z_0 = 0$ в следующем виде $\Phi_0(z) = \Phi_0(0)\exp(-z^2/2)$. Тогда результат действия операторов чисел заполнения на функцию Φ_0 записывается в виде

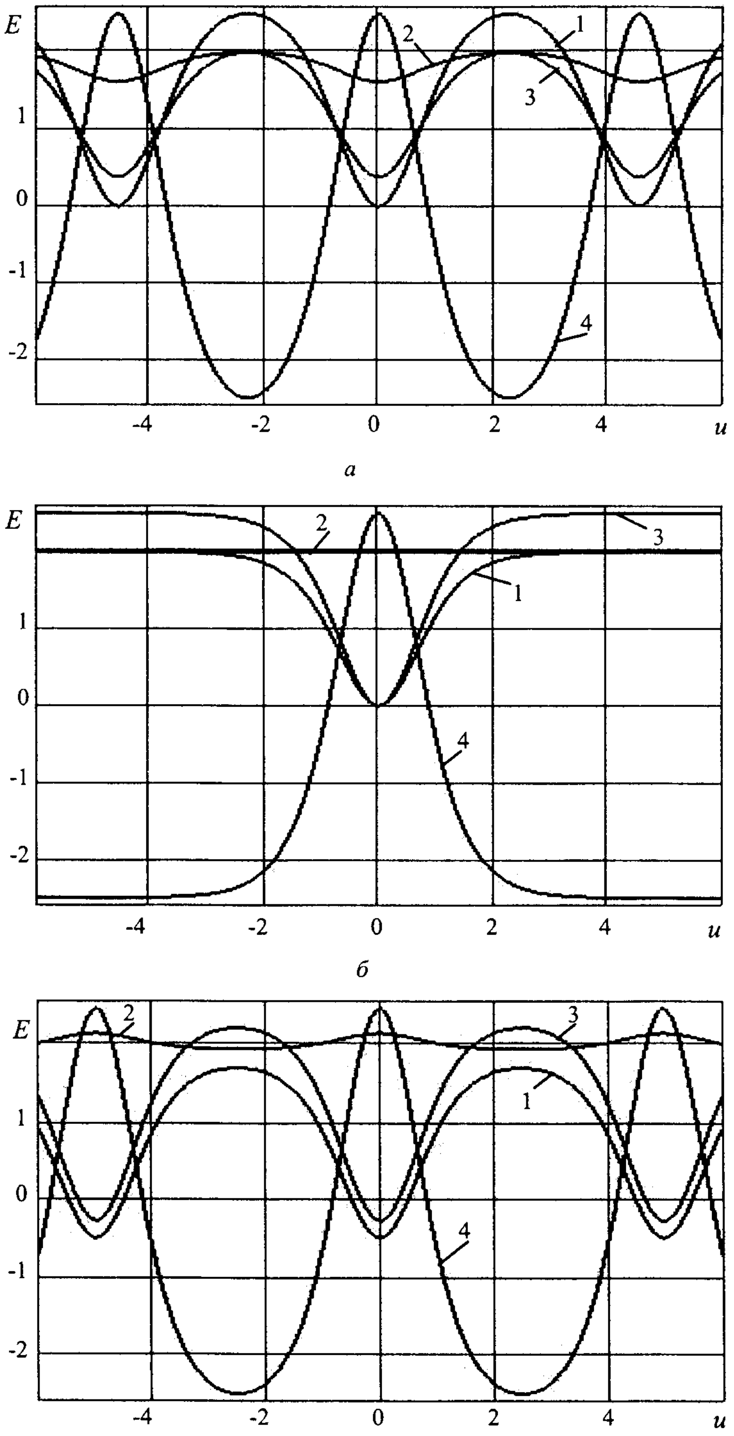
$$\hat{c}^+\hat{c}\Phi_0 = 0, \quad \hat{c}\hat{c}^+\Phi_0 = \Phi_0, \quad \hat{n}_1\Phi_0 = n_{10}\Phi_0, \quad \hat{n}_2\Phi_0 = n_{20}\Phi_0,$$
$$\hat{n}_3\Phi_0 = n_{30}\Phi_0, \quad n_{10} = (k')^2 + k^2 n_{30}, \quad n_{20} = k^2 + (k')^2 n_{30}, \tag{15}$$

где величины n_{10}, n_{20}, n_{30} имеют смысл чисел заполнения основных состояний соответствующих собственным значениям $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Действие оператора $\hat{H}$ из (14) на функцию Φ_0 определяется соотношениями

$$\hat{H}\Phi_0 = E_0\Phi_0; \quad E_0 = E_{10} + E_{20} + E_{30} + E_{g2};$$
$$E_{10} = \varepsilon_2 n_{10}; \quad E_{20} = \varepsilon_2 n_{20}; \quad E_{30} = \varepsilon_3 n_{30}; \quad E_{g2} = \varepsilon_3(1 - 2n_{30}). \tag{16}$$

Здесь E_{10}, E_{20}, E_{30} имеют смысл энергий основных состояний с учетом их чисел заполнения. В полной энергии E_0 имеется дополнительный вклад от энергии E_{g2} при условии, что $n_{30} \neq 1/2$.

Анализ результатов численных исследований. На рис. 1 приведены зависимости энергии (E) основных состояний с учетом их чисел заполнения E_{10} (кривая 1), E_{20} (кривая 2), E_{30} (кривая 3) и энергии E_{g2} (кривая 4) от параметра u для некоторых значений модуля k : $k = 0,9$ (рис. 1,*а*), $k = 1$ (рис. 1,*б*), $k = 1,05$ (рис. 1,*в*). При этом осуществлен переход к безразмерным энергиям, для которых оставлены прежние обозначения и принято, что $\varepsilon_2 = 2$, $\varepsilon_3 = 2,5$.



а

б

в

Рис. 1

Анализ поведения кривых показывает, что при $k<1$ все указанные энергии обнаруживают периодические колебания вблизи своих характерных равновесных положений, но с различными амплитудами. При $k=1$ осцилляции исчезают и наблюдаются один минимум (кривые *1*, *3*), один максимум (кривая *4*) при $u=0$, а кривая 2 не зависит от u. Далее при $k>1$ вновь появляются осцилляции вблизи новых смещенных по отношению к старым ($k<1$) положений равновесия и с измененной формой колебаний.

На рис. 2 представлены зависимости энергий E_{10}, E_{20}, E_{30}, E_{g2}, как функций модуля $k\in[0,2]$ и аргумента $u\in[0,10]$. Анализ поведения этих функций показывает, что каждая из энергий представляет собой поверхность, которые пересекаются, образуя трубки и перемычки при определенных значениях переменных k и u.

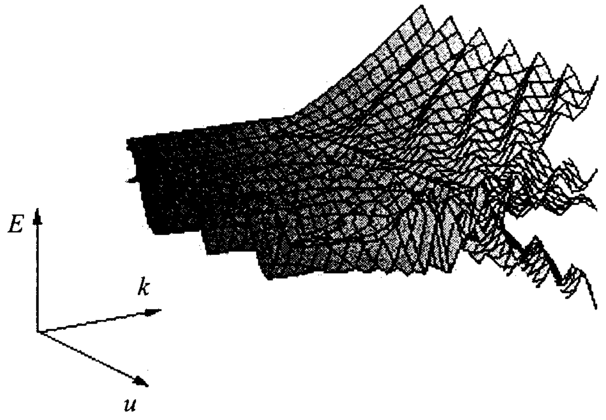


Рис. 2

РЕЗЮМЕ

Отримано оператора щільності енергії для окремої дислокації в поданні чисел заповнення енергетичних станів з обліком фрактального характеру полів деформації й напруги навколо осі дислокації. Дано графічне подання й виконаний аналіз виражень для енергій основних станів з урахуванням їх чисел заповнення.

SUMMARY

The operator of density energy for a separate dislocation in representation of filling numbers of energy states with the account of fractal nature of deformation and stress fields around axis of dislocation is obtained. The graphical representation is given and analysis of expressions for energies of basic states in view of their filling numbers is executed.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Косевич А.М.* Основы механики кристаллической решетки. – М.: Наука, 1972. – 280 с.
2. *Абрамов В.С., Абрамова О.П., Ефименко Н.О.* Уравнения динамики для анизотропной пластической подсистемы фрактальной среды // Динамические системы. – 2000. – Вып.16. – С.50-57.
3. *Абрамов В.С., Абрамова О.П., Ефименко Н.О.* Чисто вязкоползучее, вязкоупругое и упругоползучее поведения фрактальной струны // Вісник Донец. університету. Сер. А. – 2001. – Вип.2. – С.80-87.

Надійшла до редакції 24.02.2005 р.

УДК 539.3

КОНТАКТНІ ЗАДАЧІ ДЕФОРМАЦІЇ ПРУЖНОЇ МЕМБРАНИ ДОВІЛЬНОЇ ОДНОЗВ'ЯЗНОЇ ФОРМИ ПРИ СКІНЧЕННИХ ПЕРЕМІЩЕННЯХ

О.В.Байрак, В.І.Кузьменко
Дніпропетровський національний університет

Деякі підходи до чисельного розв'язання крайових задач для тонкостінних елементів конструкцій розглядалися в [1–2]. В роботі [3] і в подальших дослідженнях на прикладі задачі про взаємодію пружної мембрани з жорсткою перешкодою аналізувалися характерні риси постановки контактних задач при скінченних переміщеннях під дією неконсервативної сили, викладалася методика чисельного розв'язання, наводилися результати розв'язання за допомогою пакету програм на мові *C++*, зверталася увага на практичну збіжність запропонованого методу, наводилося порівняння з фізичною моделлю. В даній роботі задача була узагальнена для мембран довільної однозв'язної форми і реалізована за допомогою пакету символьної математики.

Постановка и побудова рішення задачі. Під мембраною будемо розуміти тонку плівку, яка не опирається згину і може лише розтягуватися, деформації мембрани вважаємо пружними. Нехай Ω – серединна поверхня мембрани у вихідному недеформованому стані. Введемо декартову систему координат $Oxyz$ і подамо Ω в параметричному виді через лагранжеві координати $U_0(x,y)=\{u_0(x,y), v_0(x,y), w_0(x,y)\}$ точок поверхні Ω. В недеформованому стані мембрана може мати довільну однозв'язну форму (рис. 1.). Нехай для простоти область визначення її в площині xOy має прямокутну форму Ω_{xy} зі сторонами $2a, 2b$.

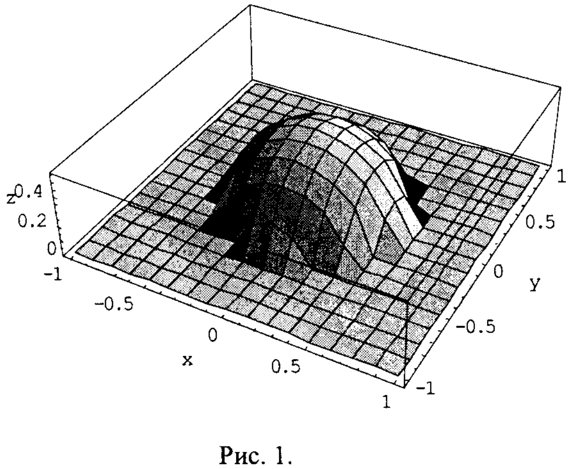


Рис. 1.

Розглянемо малий елемент мембрани з областю визначення у вигляді прямокутника. Тоді переміщення точок мембрани відносно осей Ox, Oy, Oz, що спричинені дією зовнішніх сил та сил у серединній площині, задаються вектор-функцією $U(x,y)=\{u(x,y), v(x,y), w(x,y)\}$. Положення точок мембрани задається вектор-функцією $R(x,y)=U_0(x,y)+U(x,y)$. Деформації серединної поверхні мембрани позначимо ε_x, ε_y, γ_{xy}. При великих переміщеннях деформації пов'язані з переміщеннями нелінійними співвідношеннями. Напружений стан малого елемента мембрани характеризується внутрішніми зусиллями N_x, N_y, N_{xy}. Будемо вважати, що внутрішні зусилля пов'язані з деформаціями лінійними співвідношеннями [4].

Сформулюємо умову контактної взаємодії мембрани з перешкодою, нехтуючи впливом тертя. Розглянемо прямокутник $\Omega_{xy}=\{(x,y): -a\le x\le a, -b\le y\le b\}$ з границею Γ. Задамо на частині контуру Γ деяку вектор-функцію $G(x,y)$. Будемо вважати, що мембрана закріплена на границі вздовж кривої $U_0(x,y)=G(x,y)$. Тобто за умову закріплення на границі оберемо умову Діріхле, задану на деякій частині контуру $\Gamma_1\subseteq\Gamma$, а саме $R(x,y)\big|_{\Gamma_1}=G(x,y)$.

Мембрана деформується під дією розподіленого і, взагалі кажучи, неконсервативного навантаження. Неконсервативним навантаженням будемо вважати силу $P(x,y,\Omega(x,y))$, напрямок якої може змінюватися в процесі деформації мембрани. Деформація мембрани обмежена перешкодою, що описується поверхнею, яка задається нелінійним рівнянням $\Phi(R(x,y))=0$, тобто по один бік від перешкоди функція $\Phi(R(x,y))$ додатня, по інший – від'ємна, а на самій перешкоді дорівнює нулю. Будь-яких інших обмежень, крім наявності перешкоди, на переміщення точок мембрани не накладається. Додаючи рівняння рівноваги елемента серединної поверхні та умови закріплення мембрани, отримуємо нелінійну крайову задачу для визначення параметрів напружено-деформованого стану.

Чисельне розв'язання задачі ґрунтується на варіаційному формулюванні. Оскільки діюча сила є неконсервативною, то при розв'язанні задачі необхідно розглядати деформування як процес. Для цього введемо додаткову вектор-функцію приростів переміщень $\Delta U(x,y)=\{\Delta u(x,y), \Delta v(x,y), \Delta w(x,y)\}$. Будемо використовувати формулювання задачі у приростах. Тоді залежності деформації серединної поверхні можна виразити через переміщення $U(x,y)+\Delta U(x,y)$. Враховуючи умови непроникнення і закріплення на границі, сформуємо припустиму множину V.

Розіб'ємо модуль вектора навантаження $|P|$ на m_f частин і розглянемо послідовність m_f навантажених станів мембрани. Нехай маємо деякий відомий деформований стан мембрани з переміщеннями $U_k(x,y)$, спричиненими дією навантаження P_k. Надамо модулю сили приріст ΔP і отримаємо приріст точок мембрани $\Delta U(x,y)$, спричинений дією нового навантаження P_{k+1}. Енергія деформації мембрани, обумовлена одним лише розтягненням її серединної поверхні [4], може бути обчислена за формулою

$$\Pi=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega}\left(N_x\varepsilon_x+N_y\varepsilon_y+N_{xy}\gamma_{xy}\right)dxdy. \tag{1}$$

Величина Π має сенс потенціальної енергії мембрани. Зауважимо, що отриманий функціонал залежить тільки від приростів переміщень точок мембрани $\Delta U(x,y)$, а самі переміщення вважаються відомими.

Робота зовнішніх сил по переміщенню мембрани на даному $k+1$-му кроці становить

$$A_{k+1}=A_k+\iint\limits_{\Omega}P_{k+1}\Delta U dxdy. \tag{2}$$

Тоді функціонал повної енергії має вигляд $I\left(\Delta U\right)=\Pi-A$.

Згідно з варіаційним принципом [4], для дійсного переміщення мембрани її повна енергія набуває найменшого значення. Отже, пошук переміщень точок мембрани зводиться до розв'язання екстремальної варіаційної задачі мінімізації функціонала

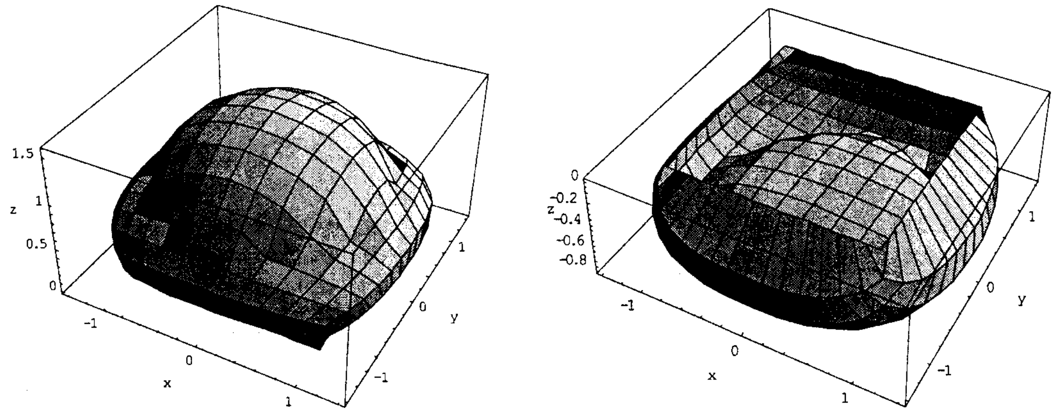
$$\inf_{\Delta U\in V} I(\Delta U). \tag{3}$$

Для дискретизації варіаційної задачі (3) скористаємося методом скінченних елементів [5]. А саме оберемо прямокутні скінченні елементи з білінійною функцією форми для апроксимації функцій форми мембрани $u(x,y), v(x,y), w(x,y)$. В даній роботі формульні перетворення виконані за допомогою пакета символьної математики. В результаті цих перетворень отримані формули що пов'язують значення функціонала повної енергії зі значеннями переміщень $u(x,y), v(x,y), w(x,y)$ і приростів переміщень $\Delta u(x,y), \Delta v(x,y), \Delta w(x,y)$ в точках дискретизації множини Ω_{xy}. Вузлові значення недеформованого стану мембрани $u_0(x,y)$, $v_0(x,y)$, $w_0(x,y)$ використовуються для отримання дійсної форми мембрани.

Методика чисельного розв'язання повністю реалізована в пакеті символьної математики. Розглянемо та проаналізуємо чисельні результати. Для того, щоб охопити одним чисельним розрахунком значне коло варіантів, будемо здійснювати розв'язання в безрозмірному вигляді. За масштаб довжини та переміщень оберемо довжину b меншої з сторін мембрани.

Результати чисельних досліджень. Обчислимо деформації мембрани, недеформований стан якої зображено на рис. 1. Вихідні параметри задачі: $a=b=1$; параметри розбиття області визначення Ω_{xy} становлять 16×16; недеформований стан мембрани описується $u_0(x,y)\equiv x$, $v_0(x,y)\equiv y$, $w_0(x,y)=0$ при $f(x,y)<0$ та $w_0(x,y)=f(x,y)$ при $f(x,y)\geq 0$, де $f(x,y)=0.3-x^2-y^2$; задамо неконсервативне навантаження за напрямом нормалі до деформованого стану, оберемо параметр розбиття навантаження $m_f=20$, модуль навантаження $|P|=5$; рівняння перешкоди $\Phi(R(x,y))=R_x^2+R_y^2+R_z$.

На рис. 2.*а* зображено деформованій стан мембрани при навантаженні, що діє в бік, протилежний від перешкоди. Можна побачити, що контактної взаємодії не відбувається. Також зберігається перегин мембрани, характерній для даного недеформованого стану. На рис. 2.*б* зображено випадок при навантаженні протилежного напрямку. Контактна взаємодія відбувається і деформований стан повторює форму параболічної перешкоди в області контакту.



а *б*

Рис. 2

Отже, в даній роботі була розглянута методика чисельного розв'язання задач про контакт з перешкодами тонких плівок довільної однозв'язної форми під дією неконсервативної сили. Були наведені і проаналізовані чисельні результати. В подальшому планується вивчення контактних задач для пружно-пластичних мембран та питань загальної теорії контактних задач, таких як теоретичне обґрунтування постановки задачі та існування розв'язку.

РЕЗЮМЕ

Запропоновано постановку та методику чисельного розв'язання задач про контакт тонких плівок довільної однозв'язної форми з перешкодами під дією неконсервативної сили. Досліджено особливості деформування мембрани в умовах контактної взаємодії за допомогою практичної реалізації методу в пакеті символьної математики.

SUMMARY

Definition and methodic of numerical solution of contact tasks for thin films of arbitrary single-connected form deformed with non-conservative forces is proposed. Methodic is practically realized in software for symbol mathematics calculations. Characteristics of membrane deformation within contact interaction are researched with the help of practical realization.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Газизов Х.Ш., Жернаков В.С.* Метод конечных элементов в геометрически нелинейных задачах теории тонких оболочек // 8 Всерос. съезд по теорет. и прикладной механике. Пермь 23-29 авг. 2001. Аннотации докладов. – Екатеринбург: Изд-во УрО РАН; Пермь: Изд-во Ин-та механики сплошных сред УрО РАН. – 2001. – С.171.
2. *Михайловский Е.И., Черных К.Ф.* Актуальные задачи нелинейной механики тонких упругих оболочек // Нелинейные проблемы механики и физики деформированного твердого тела. – С.-Петербург. гос. ун-т. – 1998. – №1. – С.234-255, 260, 265.
3. *Байрак О.В., Кузьменко В.І.* Контактні задачі для пружної мембрани при скінченних переміщеннях // Вісн. Дніпр. ун-ту: Механіка. – 2002. – Т.2. – Вип.6. – С.3-10.
4. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. – М.: Наука, 1963. – 636 с.
5. *Кузьменко В.И., Балакин В.Ф.* Решение на ЭВМ задач пластического деформирования. – К.: Техніка, 1990. – 136 с.

Надійшла 25.02.2005 р.

УДК 533.6.013.42:531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ ПЛАСТИНОК, РАЗДЕЛЯЮЩИХ МНОГОСЛОЙНУЮ ЖИДКОСТЬ

Ю.Н.Кононов, В.П.Шевченко

В работах [1-5] исследованы собственные колебания упругих мембран и пластин, расположенных на свободной и внутренних поверхностях многослойной идеальной жидкости, заполняющей цилиндрическую полость. В настоящем сообщении, без ограничения на форму полости, из положительной определенности потенциальной энергии получены условия устойчивости положения равновесия упругих пластинок, разделяющих тяжелую многослойную идеальную жидкость разной плотности. Эти условия совпали с условиями устойчивости, полученными из анализа частотного уравнения. Проведенные численные расчеты подтвердили совпадение получаемых результатов с данными аналитических исследований.

Постановка задачи и метод решения. Рассмотрим механическую систему, состоящую из m идеальных несмешивающихся жидкостей с плотностями ρ_i, частично заполняющих полость τ $(\tau = \bigcup_{i=1}^{m} \tau_i)$ до глубин h_i. На свободной поверхности верхней жидкости $(i=1)$ и на поверхностях раздела (внутренних поверхностях) многослойной жидкости находиться упругие мембраны или пластинки с растягивающими усилиями T_i в срединной поверхности. Мембраны и пластинки жестко закреплены по краю. Пластинки считаются изотропными и обладают изгибной жесткостью D_i. В дальнейшем при $D_i = 0$ под пластинкой будем подразумевать мембрану с растягивающими усилиями T_i. Движения жидкости и пластинок будем рассматривать в системе координат $Oxyz$, выбранной так, что плоскость Oxy находится на невозмущенной плоской свободной поверхности S_1 $(i=1)$, а ось Oz направлена противоположно вектору ускорения силы тяжести $\vec{g}$. Задачу будем решать в рамках линейной теории, полагая совместные колебания жидкостей и пластинок безотрывными, т.е. без кавитации, а движения жидкостей - потенциальными.

Собственные частоты и собственные формы колебаний рассматриваемой гидроупругой системы определяются из следующей системы уравнений:

$$\Delta\varphi_i = 0 \text{ в } \tau_i, \quad \left.\frac{\partial\varphi_i}{\partial\nu}\right|_{\Sigma_i} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_i}{\partial z} = i\sigma w_i \text{ на } S_i \quad (i=\overline{1, m}),$$

$$\frac{\partial\varphi_{i-1}}{\partial z} = \frac{\partial\varphi_i}{\partial z} \text{ на } S_i \ (i=\overline{2,m}); \tag{1}$$

$$\left(D_i\Delta_1^2 - \mathrm{T}_i\Delta_1 + g\Delta\rho_i - k_{0i}\sigma^2\right)w_i = i\sigma\left(\rho_{i-1}\varphi_{i-1} - \rho_i\varphi_i\right) \text{ на } S_i \ (i=\overline{2,m}); \tag{2}$$

$$\left.w_i\right|_{\gamma_i} = 0, \quad \left.\frac{\partial w_i}{\partial n}\right|_{\gamma_i} = 0, \quad w_i, \nabla w_i < \infty, \quad \int\limits_S w_i ds = 0.$$

Здесь Σ_i - абсолютно твердая, смачиваемая поверхность τ_i-ой области; S_i - невозмущенная свободная $(i=1)$ или внутренняя плоская поверхность (поверхность раздела $i-1$ и i-ой жидкости); Δ_2 - двумерный оператор Лапласа; ρ_{0i}, τ_{0i} - соответственно плотность и толщина i-ой пластинки, $k_{0i} = \rho_{0\mathrm{i}} \cdot \tau_{0i}$; γ_i - контур области S_i; $\bar{n}$ - орт внешней нормали к контуру γ_i; $\Delta\rho_i = \rho_i - \rho_{i-1}$, $(\rho_0 = 0)$; потенциал скорости i-ой жидкости Φ_i и нормальный прогиб i-ой пластинки W_i представлены в виде $\Phi_i = \mathrm{e}^{i\sigma t}\varphi_i$ и $W_i = \mathrm{e}^{i\sigma t} w_i$.

В общем случае краевую задачу (2) можно записать в виде

$$C\overline{w} - \sigma^2 A\overline{w} = 0,$$

где $\overline{w}=(w_1,...,w_m)$, A и C соответственно инерционный и упругий линейные операторы, включающие в себя не только дифференциальные уравнения (1)-(2), но и граничные условия (через область определения операторов). Каждому собственному значению σ^2 отвечает собственная форма $\overline{w}_j=(w_{1j},...,w_{mj})$.

Краевые задачи для консервативных механических систем всегда описываются самосопряженными операторами. В этом случае, когда оператор C самосопряжен, оператор A положительно определен, все собственные значения σ^2 спектра действительны и изолированы. Собственные формы колебаний, соответствующие различным собственным значениям, попарно ортогональны по кинетической и потенциальной энергии [5]

$$\left(A\overline{w}_j,\overline{w}_k\right)=0,\quad \left(C\overline{w}_j,\overline{w}_k\right)=\sum_{i=1}^{m}\left(D_i\Delta_2^2-T_i\Delta_2+\Delta\rho_i g\right)w_{ij}\cdot w_{ik}ds=0 \text{ при } j\neq k \tag{3}$$

и $\left(C\overline{w}_k,\,\overline{w}_k\right)=\sigma_k^2\left(A\overline{w}_k,\overline{w}_k\right)$ при $j=k$. Здесь $\left(\overline{w}_j,\overline{w}_k\right)=\sum\limits_{i=1}^{m}\int\limits_{S_i}w_{ij}w_{ik}ds$ – скалярное произведение;

$w_i=A_iw_{i1}^0+B_iw_{i2}^0+\sum\limits_n\tilde{C}_{in}\psi_{in}=\sum\limits_n\zeta_{in}\psi_{in}$, w_{i1}^0 и w_{i2}^0 – два линейно независимых ограниченных решения однородного уравнения (2) [6], ψ_{in} – собственные формы колебаний свободной поверхности i-ой жидкости, $\zeta_{in}=\alpha_{in}\mathrm{A}_i+\beta_{in}\mathrm{B}_i+\tilde{C}_{in}$,

$$\alpha_{in}=\frac{1}{\mathrm{N}_{in}^2}\int\limits_{S_i}w_{i1}^0\psi_{in}ds,\quad \beta_{in}=\frac{1}{\mathrm{N}_{in}^2}\int\limits_{S_i}w_{i2}^0\psi_{in}ds,\quad \mathrm{N}_{in}^2=\int\limits_{S_i}\psi_{in}^2ds.$$

Для исследования устойчивости положения равновесия рассматриваемой механической системы запишем потенциальную энергию [5]

$$\Pi=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{S_i}\left[g\Delta\rho_iW_i^2+\left(D_i\Delta_2W_i-T_iW_i\right)\Delta_2W_i\right]ds. \tag{4}$$

Функции W_i разложим по собственным формам системы (2)

$$W_i=\sum_{j=1}^{\infty}p_j(t)w_{ij}. \tag{5}$$

Потенциальная энергия (4) с учетом представления (5), ортогональности собственных форм колебаний $\overline{w}_k$ по потенциальной энергии (3) и формул Грина для жестко закрепленных пластинок

$$\int\limits_{S_i}w_{ik}\Delta_2^2w_{ik}ds=\int\limits_{S_i}\left(\Delta_2w_{ik}\right)^2ds,\quad \int\limits_{S_i}w_{ik}\Delta_2w_{ik}ds=-\int\limits_{S_i}\left[\left(\frac{\partial w_{ik}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w_{ik}}{\partial y}\right)^2\right]ds$$

примет вид

$$\Pi=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(C\overline{w}_k,\overline{w}_k\right)p_k^2(t). \tag{6}$$

Здесь

$$(Cw_k,w_k)=\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{S_i}\left\{g\Delta\rho_iw_{ik}^2+D_i(\Delta_2w_{ik})^2+T_i\left[\left(\frac{\partial w_{ik}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w_{ik}}{\partial y}\right)^2\right]\right\}ds. \tag{7}$$

Для устойчивости положения равновесия необходимо и достаточно чтобы в этом положении потенциальная энергия (6) имела изолированный минимум или соответствующая ей квадратичная форма была положительно определенной.

Квадратичная форма (6) будет положительно определенной если

$$\left(C\overline{w}_k,\overline{w}_k\right)>0. \tag{8}$$

Из формулы (7) следует, что при естественной стратификации ($\Delta\rho_i\geq 0$), т.е. когда более тяжелая жидкость находится ниже менее тяжелой, условие (8) всегда выполнено. Устойчивость может быть нарушена, если $\Delta\rho_i<0$. Однако, при помощи увеличения изгибной жесткости D_i или предварительного натяжения T_i всегда можно добиться выполнения условия (8).

Для цилиндрической полости τ ($S_1=S_2=\cdots S_m=S$, $\psi_{in}=\psi_n$, $\Delta_2\psi_n=-k_n^2\psi_n$, $\Delta_2^2\psi_n=k_n^4\psi_n$) соотношение (8) примет вид

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{n}\zeta^2_{ikn}N_n^2\left[g\Delta\rho_i+\left(D_ik_n^2+T_i\right)k_n^2\right]>0. \tag{9}$$

Для выполнения неравенства (9) достаточно потребовать, чтобы

$$g\Delta\rho_i+\left(D_ik_n^2+T_i\right)k_n^2>0. \tag{10}$$

Так, собственные числа k_n образуют бесконечно возрастающую числовую последовательность, то условие устойчивости положения равновесия (10) можно заменить более простым

$$g\Delta\rho_i+\left(D_ik_1^2+T_i\right)k_1^2>0. \tag{11}$$

Условие (11) не зависит от глубин h_i и от массовых характеристик пластинок k_{0i} .

Пусть $m=2$ и пластинка, находящаяся на свободной поверхности двухслойной, является абсолютно жесткой ($T_1=\infty$ или $D_1=\infty$). Переходя к пределу в частотном уравнении работы [3], получим

$$\sum_{n}\frac{B_n^*}{\Delta_n}(C_{22}\alpha_{2n}-C_{21}\beta_{2n})(\Delta_n-\sigma^2). \tag{12}$$

Здесь

$$B_n^*=\psi_n\,|_\gamma,\quad C_{2j}=\frac{\partial w_{i2}^0}{\partial\nu}\,|_\gamma,\ (j=1,\,2),\quad \Delta_n=\delta_{2n}\sigma^2-\tilde{\omega}_{2n}^2,$$

$$\tilde{\omega}_{2n}^2=\omega_{2n}^2(1+\frac{(D_2k_n^2+T_2)k_n^2}{\Delta\rho g},\quad \omega_{2n}^2=\frac{gk_n}{a_n\Delta\rho},$$

$$\Delta\rho=\rho_2-\rho_1,\quad a_n=\rho_1\operatorname{cth}\kappa_{1n}+\rho_2\operatorname{cth}\kappa_{2n}$$

В первом приближении ($n=1$) множество корней уравнения (12) содержит корень

$$\sigma^2=\frac{g\Delta\rho+(D_2k_1^2+T_2)k_1^2}{\rho_{02}\delta_{02}}.$$

При естественной стратификации ($\rho_1\leq\rho_2$) $\sigma^2>0$, а при $\rho_1>\rho_2$, т.е. когда более тяжелая жидкость находится выше менее тяжелой величина σ^2 может быть отрицательной. Для положительности σ^2 необходимо потребовать, чтобы

$$\rho_1-\rho_2<\frac{(D_2k_1^2+T_2)k_1^2}{g}. \tag{13}$$

Таким образом, условие (13), полученное из анализа частотного уравнения в первом приближении, совпадает с условием (11), полученным из достаточного условия положительной определенности потенциальной энергии.

Следовательно, при невыполнении условия (11) происходит потеря устойчивости плоской формы равновесия упругих пластинок, разделяющей многослойную жидкость разной плотности.

Анализ численных результатов. Численные исследования уравнения (12) были проведены для прямого кругового цилиндра и упругой мембраны [4] при следующих значениях параметров: $h_1 = h_2 = 1.0$, $k_{02} = 1.0$, $a = 1.0$. На рис. 1-2 изображены графики зависимости квадрата безразмерной первой собственной частоты $\Omega^2 = \sigma^2 a / g_0$ от перегрузки n_x ($g = n_x g_0$). Кривые *1-3* на рис.1 соответствуют значениям $\rho_{21} = \rho_2 / \rho_1 = 1, 2, 3$, а на рис.2 – значениям $\rho_{21} = 0.1, 0.2, 0.3$.

Численные исследования показали, что если более тяжелая жидкость находится внизу ($\rho_2 > \rho_1$) или $\rho_2 = \rho_1$, то первая собственная частота возрастает с ростом перегрузки, а при $\rho_2 < \rho_1$ она убывает и при значения перегрузки $n_x = 17.86 T_2 \Big/ \left((\rho_1 - \rho_2) g_0 a^2 \right)$ обращается в ноль. Таким образом, численные расчеты подтвердили результаты аналитических исследований.

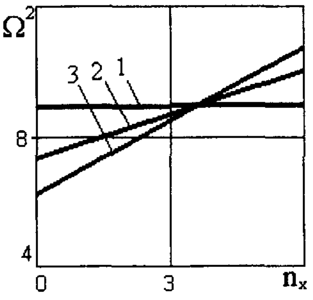


Рис. 1

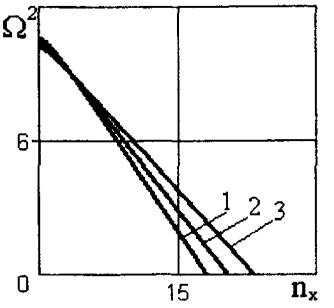


Рис. 2

РЕЗЮМЕ

З позитивної визначеності потенційної енергії для довільної порожнини, заповненою важкою багатошаровою ідеальною рідиною, отримані умови стійкості положення рівноваги пружних пластинок, що розділяють багатошарову рідину різної щільності. Сформульовані умови збіглися з умовами стійкості, виведеними з аналізу частотного рівняння. Проведені чисельні розрахунки підтвердили результати аналітичних досліджень.

SUMMARY

Conditions of stability of position of balance of the elastic plates dividing a multilayered liquid of different density are received from positive definiteness potential energy for the any cavity, filled with a heavy multilayered ideal liquid, The formulated conditions have coincided with the conditions of stability derived from the analysis of the frequency equation. The lead numerical calculations have confirmed results of analytical researches.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кононов Ю.Н., Шевченко В.П.* Свободные колебания многослойной стратифицированной жидкости, разделенной упругими мембранами // Теорет. и прикладная механика. – 1999. – Вып.29. – С.151-163.
2. *Кононов Ю.Н., Татаренко Е.А.* Свободные колебания двухслойной жидкости с упругими мембранами на "свободной" и внутренней поверхностях // Акустичний вісник. – 2003. – Т.6. – №3. – С.44-52.
3. *Кононов Ю.Н.* Свободные колебания упругих пластинок, находящихся на свободной и внутренней поверхностях двухслойной жидкости // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. – 2003. – Вип.1. – С.139-142.
4. *Кононов Ю.Н., Татаренко Е.А.* Свободные колебания многослойной жидкости, разделенной упругими инерционными мембранами // Динамические системы. – 2004. – Вып.18. – С.111-118.
5. *Кононов Ю.Н.* Колебания пластин, разделяющих многослойную жидкость // Тр. III Всерос. конф. по теории упругости с международным участием. Ростов-на-Дону-Азов. 13-16 октября 2003 г. – Ростов-на-Дону: Новая книга. – 2004. – С.227-229.
6. *Докучаев Л.В.* Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. – М.: Машиностроение. – 1987. – 232 с.

Надійшла до редакції 12.02.2005 р.

ВІСНИК ДОНЕЦЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ, Сер. А: Природничі науки, 2005, вип. 1

УДК 539.3

НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ИЗГИБА НЕРАВНОМЕРНО НАГРУЖЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ

В.А.Шалдырван, Т.А.Васильев

В инженерной практике широко используются конструкции, элементами которых являются круглые толстые плиты или короткие цилиндры. Поэтому изучение напряжённо-деформированного состояния (НДС) таких тел имеет важное прикладное значение. Формулировка краевых задач для кругового цилиндра при различных кинематических и статических условиях на его поверхности содержится в монографии [1] и статье [2], в которой исследуются бесконечные системы для коэффициентов входящих в решение Папковича-Нейбера. Однако на практике расчёты проводятся с использованием теории Кирхгофа [3, 4], поэтому необходимо рассмотреть цилиндрические тела в рамках трехмерной теории. Такого рода исследования включают: построение решения и проверку достоверности полученных на его базе результатов (в том числе и сравнение с результатами, полученными другими методами); сравнение их с данными других работ; установление границ применимости двумерной теории; установление характера зависимости НДС от геометрических параметров тела, структуры его материала, вида нагрузки и способа закрепления боковой поверхности.

В данной статье решение строится с использованием метода Лурье-Воровича [5] и основной акцент делается на установление влияния неравномерности заданной нагрузки на НДС при различных граничных условиях и относительных толщинах. Отметим, что в [6, 7] методом суперпозиции, а в [8] методом однородных решений были получены результаты для толстой жёстко защемлённой по боковой поверхности плиты при равномерно нагруженных торцах, там же приведена библиография по приведенному вопросу.

Постановка задачи и метод решения. Рассмотрим изгиб однородного тела постоянной толщины $2\tilde{H}$, изготовленного из изотропного материала ($\tilde{E},\nu$). При этом в зависимости от относительной толщины $h=\tilde{H}/\tilde{R}$ это может быть или толстая плита радиуса $\tilde{R}$, или короткий цилиндр. Цилиндрическая поверхность тела нормальна к лицевым поверхностям (торцам), которые загружены нормальной поперечной нагрузкой, изменяющейся вдоль радиуса. Боковая поверхность может быть либо жёстко заделана, либо шарнирно закреплена.

В цилиндрических координатах $O\tilde{r}\theta\tilde{z}$ тело занимает объём $V=\left\{0\le\tilde{r}\le\tilde{R},0\le\theta\le2\pi,|z|\le\tilde{H}\right\}$. Поверхность ∂V состоит из двух пересекающихся частей: ∂V_1, где задан вектор усилий, и ∂V_2. Условием жёсткой заделки будем считать отсутствие радиальной $\tilde{u}$ и осевой $\tilde{w}$ компонент вектора смещений ***u*** на цилиндрической поверхности ∂V_2 (задача I). Условиям шарнирного закрепления будут отвечать условия отсутствия осевой компоненты перемещения $\tilde{w}$ и нормальных напряжений $\tilde{\sigma}_{rr}$ на ∂V_2 [9] (задача II). В теории тонких пластин последний случай соответствует свободному опиранию [4]. Краевая задача, в которой требуется определить НДС, формулируется следующим образом. Найти функции *u=u(r,z)* и *w=w(r,z)*, удовлетворяющие в области уравнениям равновесия Ламе и граничным условиям на торцах

$$\sigma_{zz}\big|_{z=\pm1}\equiv\frac{\tilde{G}}{\tilde{G}_{cm}}\left[\nu k\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}\right)+\frac{\nu k+1}{h}\frac{\partial w}{\partial z}\right]_{z=\pm1}=\frac{\pm\tilde{Q}}{2\tilde{G}_{cm}}\ ,$$

$$\sigma_{rz}\big|_{z=\pm1}\equiv\frac{\tilde{G}}{\tilde{G}_{cm}}\left(\frac{1}{h}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{z=\pm1}=0\,. \qquad (1)$$

Кроме того, на боковой поверхности в задаче I заданы условия

$$u(r,z)\big|_{r=1}\equiv u(1,z)=0\,,\quad w(1,z)=0\ , \qquad (2)$$

а в задаче II

$$\sigma_{rr}\big|_{r=1}=\frac{\tilde{G}}{\tilde{G}_{cm}}\left[(\nu k+1)\frac{\partial u}{\partial r}+\nu k\left(\frac{u}{r}+\frac{1}{h}\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]_{r=1}=0\,,\quad w(r,z)\big|_{r=1}=0\,. \qquad (3)$$

Здесь $k=1/(1-2\nu)$, ν – коэффициент Пуассона, $\tilde{G}_{cm}$ – модуль сдвига стали В записи граничной задачи и дальнейшем изложении используются безразмерные величины $r=\tilde{r}/\tilde{R}$, $z=\tilde{z}/\tilde{H}=\tilde{z}/h\tilde{R}$, $h\equiv\tilde{H}/\tilde{R}$, $u=\tilde{u}/\tilde{R}$, $w=\tilde{w}/\tilde{R}$, $\sigma_{ij}=\tilde{\sigma}_{ij}/2\tilde{G}_{cm}$.

Решение сформулированной граничной задачи будем искать в виде

$$u(r,z)=u^{н}+u^{o}\quad,\quad w(r,z)=w^{н}+w^{o}\,, \tag{4}$$

где верхним индексом *н* обозначено частное решение системы Ламе, удовлетворяющее неоднородным граничным условиям на торцах (1). Оно индуцирует появление напряжения $\sigma_{rr}^{н}(1,z)$ и перемещения $w^{н}(1,z)$ на боковой поверхности цилиндрического тела. Введенные в соотношениях (4) функции $u^{o}(r,z)$ и $w^{o}(r,z)$ будут призваны компенсировать их. Для этого они должны удовлетворять системе Ламе, однородным граничным условиям на плоских гранях

$$\sigma_{zz}^{o}(r,\pm1)=0\,,\ \tau_{rz}^{o}(r,\pm1)=0\,,\ 0\le r\le1 \tag{5}$$

и следующим условиям на боковой поверхности: в задаче I

$$u^{o}(1,z)=-u^{н}(1,z)\,,\quad w^{o}(1,z)=-w^{н}(1,z)\,,\ |z|\le1\,; \tag{6}$$

и в задаче II

$$\sigma_{rr}^{o}(1,z)=-\sigma_{rr}^{н}(1,z)\,,\quad w^{o}(1,z)=-w^{н}(1,z)\,,\ |z|\le1\,. \tag{7}$$

Решение системы Ламе, удовлетворяющее условиям (5), возьмём в форме Лурье – Воровича. В случае осесимметричной чисто изгибной деформации оно принимает вид

$$u^{o}(r,z)=z\frac{dF}{dr}+\sum_{p=1}^{\infty}n_p(z)\frac{d\Psi_p}{dr}\,,\quad w^{o}(r,z)=-\frac{F}{h}+hk_1\left(1-\frac{\nu}{2}z^2\right)\Delta F-\sum_{p=1}^{\infty}q_p(z)\Psi_p\,, \tag{8}$$

где F – бигармоническая, а Ψ_p – метагармонические функции; $k_1=1/(1-\nu)$. Остальные обозначения совпадают с приведенными в монографии [10]. Что касается частного решения вспомогательной задачи, то оно подбирается специальным образом для каждого конкретного вида нагружения. Подстановка (7) в (3) даёт значение соответствующих напряжений однородного решения. Например, для компоненты тензора напряжений, входящей в граничные условия (6), имеем

$$\sigma_{rr}^{o}(r,z)=zk_1\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{\nu}{r}\frac{d}{dr}\right)F-z^3h^2k_2\frac{d^2\Delta F}{dr^2}+\sum_{p=1}^{\infty}\left[l_p(z)-n_p(z)\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right]\frac{d\Psi_p}{dr}\,. \tag{9}$$

Собственные функции Лурье-Воровича $F(r)$ и $\Psi_p(r)$ выберем так [10]:

$$F(r)=ar^2\,,\ \Psi_p(r)=A_p\,I_0(\gamma_p^{*}r)\big/I_0(\gamma_p^{*})\,, \tag{10}$$

где $\gamma_p^{*}=\gamma_p/h$, γ_p – корни уравнения $\sin2\gamma_p-2\gamma_p=0$. Постоянные a, A_p $(p=\overline{1,\infty})$ должны быть выбраны так, чтобы удовлетворялись условия (6) в задаче I и (7) в задаче II. Используя идею метода Бубнова – Галёркина, потребуем чтобы невязки граничных условий (6) и (7) были ортогональны к полной на отрезке [-1,1] системе функций $\{\sin\delta_m z,\cos\delta_m z\}_{m=1}^{\infty},\delta_m=\pi(m-1/2)$. В результате находим

$$\alpha_m a+\mathrm{Re}\sum_{p}V_{mp}A_p=f_m\,,\quad \beta_m a+\mathrm{Re}\sum_{p}W_{mp}A_p=g_m\,,\ m,p=\overline{1,\infty}\,. \tag{11}$$

Таким образом, задача сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений для отыскания постоянных в разложениях (10).

После определения постоянных из системы (11) перемещения вычисляются по формулам

$$u(r,z)=u^{н}(r,z)+\sum_{p=1}^{\infty}n_p(z)A_pP_0^{+}(\gamma_p^{*}r)\frac{I_0(\gamma_p^{*}r)}{I_0(\gamma_p^{*})}\,,$$

$$w(r,z)=w^{н}(r,z)-\frac{ar^2}{h}+4hk_1\left(1-\frac{\nu z^2}{2}\right)a-\sum_{p=1}^{\infty}q_p(z)A_p\frac{I_0(\gamma_p^* r)}{I_0(\gamma_p^*)}. \qquad (12)$$

Нагрузка, изменяющаяся вдоль радиуса. Пусть $\tilde{Q}/2\tilde{G}_{ст}\equiv q(r)=q_0(1-r^2)$, при этом случае q_0 выбирается так, чтобы внешние усилия были эквивалентны равномерно распределённой нагрузке, а именно $q_0=2q$. В силу линейности рассматриваемой задачи можно рассматривать суперпозицию откликов системы на два внешних воздействия: равномерно распределённые по основаниям усилия и внешние усилия, изменяющиеся по степенному (квадратичному) закону.

Однородные решения для второго случая не изменятся, а для частных, используя результаты [5,13], примем следующие представления

$$u^{н}(r,z)=P_5(r)z+P_3(r)z^3+P_1(z)z^5,\quad w^{н}(r,z)=P_6(r)+P_4(r)z^2+P_2(r)z^4+P_0(r)z^6. \qquad (13)$$

Удовлетворяя системе Ламе и граничным условиям на торцах для полиномов, входящих в (13), получим следующие выражения

$$P_5(r)=q\left(-\frac{1-\nu}{16h^2}r^5-\frac{3(2+3\nu)}{20}r^3+\frac{5-7\nu}{10}h^2r\right),\quad P_3(r)=q\left(\frac{2-\nu}{4}r^3-\frac{1-3\nu}{5}h^2r\right),$$

$$P_1(r)=-q\frac{3-\nu}{10}h^2r\ ,\quad P_6(r)=q\left(\frac{1-\nu}{96h^3}r^6-\frac{3(8-3\nu)}{80h}r^4-\frac{9-7\nu}{20}hr^2+\frac{8-5\nu}{10}h^3\right),$$

$$P_4(r)=q\left(\frac{3\nu}{16h}r^4+\frac{3(5-3\nu)}{10}hr^2+\frac{2-7\nu}{10}h^3\right),\quad P_2(r)=q\left(-\frac{1+\nu}{4}hr^2-\frac{2-3\nu}{10}h^3\right),$$

$$P_0(r)=q\frac{2-7\nu}{30}h^3.$$

Если же воздействия равномерно распределены, то частное решение выглядит так

$$u^{н}(r,z)=Q_3(r)z+Q_1(r)z^3,\quad w^{н}(r,z)=Q_4(r)+Q_2(r)z^2+Q_0(r)z^4.$$

Здесь

$$Q_3(r)=-q\left(\frac{3(1-\nu)}{16h^2}r^3+\frac{3\nu}{4}r\right),\quad Q_1(r)=\frac{2-\nu}{4}qr,\quad Q_0(r)=-\frac{1+\nu}{8}qh,$$

$$Q_2(r)=q\left(\frac{3\nu}{8h}r^2+\frac{3(1-\nu)}{4}h\right),\quad Q_4(r)=q\left(\frac{3(1-\nu)}{64h^3}r^4-\frac{3(2-\nu)}{8h}r^2+\frac{3-\nu}{8}h\right).$$

В табл.1 приведены прогибы кубообразного (h=1) и короткого цилиндров (h=2), жёстко защемлённых по боковой поверхности и изготовленных из материала с ν=0,3. В числителе приведены данные для равномерной нагрузки, а в знаменателе – для нагрузки изменяющейся вдоль радиуса по параболическому закону.

Таблица 1

r	z для h=1						z для h=2					
	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,0	0,465	0,482	0,534	0,614	0,709	0,792	0,104	0,121	0,177	0,289	0,471	0,669
	0,647	0,676	0,767	0,917	1,111	1,294	0,142	0,165	0,244	0,412	0,723	1,127
0,2	0,441	0,458	0,508	0,587	0,682	0,767	0,099	0,115	0,169	0,275	0,452	0,650
	0,612	0,639	0,724	0,865	1,050	1,227	0,135	0,157	0,231	0,389	0,681	1,068
0,4	0,374	0,389	0,433	0,506	0,601	0,692	0,084	0,098	0,143	0,234	0,393	0,593
	0,512	0,534	0,601	0,715	0,872	1,031	0,115	0,133	0,195	0,323	0,561	0,896
0,6	0,270	0,281	0,314	0,373	0,461	0,561	0,061	0,071	0,104	0,170	0,293	0,490
	0,364	0,378	0,418	0,490	0,599	0,727	0,083	0,097	0,141	0,227	0,382	0,630
0,8	0,141	0,146	0,163	0,195	0,254	0,362	0,032	0,038	0,055	0,089	0,154	0,325
	0,188	0,193	0,208	0,234	0,275	0,357	0,044	0,051	0,073	0,115	0,179	0,306
1,0	$-5\cdot10^{-5}$	$-5\cdot10^{-5}$	$-7\cdot10^{-5}$	$-1\cdot10^{-4}$	$-2\cdot10^{-4}$	$4\cdot10^{-3}$	$-6\cdot10^{-5}$	$-6\cdot10^{-5}$	$-9\cdot10^{-5}$	$-1\cdot10^{-4}$	$-3\cdot10^{-4}$	$5\cdot10^{-3}$
	$-2\cdot10^{-5}$	$-2\cdot10^{-5}$	$-3\cdot10^{-5}$	$-4\cdot10^{-5}$	$-8\cdot10^{-5}$	$2\cdot10^{-3}$	$-2\cdot10^{-5}$	$-3\cdot10^{-5}$	$-4\cdot10^{-5}$	$-6\cdot10^{-5}$	$-1\cdot10^{-4}$	$2\cdot10^{-3}$

Аналогичным является строение табл.2, в которой помещены результаты для цилиндрических тел с шарнирно закреплённой боковой поверхностью. Неоднородная нагрузка как в первом так и во втором случае приводит к увеличению максимальных прогибов почти в два раза. При этом прогибы с удалением от центра убывают так, что при $z\approx 0{,}8$ становятся сравнимыми с соответствующими величинами для однородной нагрузки. Осевые перемещения с ростом относительной толщины h вблизи срединной поверхности убывают, причём при шарнирном закреплении быстрее, чем в случае жёсткого защемления приблизительно в два раза.

Таблица 2

r	z для h=1						z для h=2					
	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,0	0,485	0,509	0,576	0,673	0,775	0,857	0,045	0,070	0,154	0,321	0,565	0,784
	0,689	0,727	0,837	1,006	1,206	1,381	0,064	0,099	0,218	0,461	0,853	1,277
0,2	0,459	0,483	0,550	0,647	0,750	0,833	0,042	0,065	0,145	0,306	0,545	0,764
	0,650	0,686	0,791	0,953	1,145	1,314	0,060	0,093	0,205	0,436	0,810	1,216
0,4	0,384	0,406	0,470	0,566	0,674	0,759	0,034	0,053	0,120	0,259	0,484	0,704
	0,539	0,570	0,661	0,802	0,970	1,118	0,048	0,075	0,169	0,363	0,685	1,040
0,6	0,269	0,287	0,342	0,430	0,538	0,630	0,022	0,035	0,082	0,186	0,373	0,593
	0,373	0,396	0,464	0,570	0,698	0,811	0,031	0,050	0,115	0,254	0,491	0,759
0,8	0,132	0,142	0,175	0,234	0,323	0,421	0,009	0,016	0,039	0,094	0,207	0,405
	0,181	0,194	0,231	0,289	0,360	0,421	0,014	0,023	0,055	0,125	0,251	0,398
1,0	$3\cdot10^{-6}$	$4\cdot10^{-6}$	$5\cdot10^{-6}$	$9\cdot10^{-6}$	$2\cdot10^{-5}$	$1\cdot10^{-3}$	$6\cdot10^{-6}$	$7\cdot10^{-6}$	$1\cdot10^{-5}$	$2\cdot10^{-5}$	$4\cdot10^{-5}$	$2\cdot10^{-3}$
	$-4\cdot10^{-7}$	$-4\cdot10^{-7}$	$-6\cdot10^{-7}$	$-1\cdot10^{-6}$	$-2\cdot10^{-6}$	$-1\cdot10^{-4}$	$-1\cdot10^{-6}$	$-1\cdot10^{-6}$	$-1\cdot10^{-6}$	$-2\cdot10^{-6}$	$-4\cdot10^{-6}$	$-2\cdot10^{-4}$

В табл.3 приведены величины напряжений σ_{rr} при двух различных значениях h .В целом построена по типу предыдущих двух, но при z=0 σ_{rr} =0 и поэтому здесь этих данные не приводятся. Табл.4 полно-

Таблица 3

r	z для h=1					z для h=2				
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,0	0,061	0,147	0,292	0,543	0,934	0,021	0,050	0,110	0,293	0,801
	0,062	0,160	0,364	0,817	1,749	0,027	0,061	0,122	0,364	1,567
0,2	0,061	0,142	0,278	0,519	0,910	0,023	0,054	0,113	0,283	0,789
	0,067	0,164	0,350	0,764	1,644	0,030	0,068	0,133	0,357	1,479
0,4	0,062	0,134	0,240	0,441	0,832	0,028	0,064	0,124	0,256	0,748
	0,082	0,178	0,319	0,611	1,324	0,037	0,087	0,167	0,342	1,210
0,6	0,069	0,135	0,198	0,304	0,675	0,035	0,080	0,147	0,230	0,652
	0,104	0,207	0,297	0,388	0,764	0,048	0,112	0,214	0,341	0,732
0,8	0,083	0,159	0,203	0,141	0,327	0,043	0,099	0,180	0,248	0,394
	0,125	0,243	0,314	0,187	-0,136	0,059	0,138	0,260	0,376	-0,044
1,0	0,103	0,198	0,255	0,114	—	0,055	0,122	0,207	0,244	—
	0,138	0,262	0,323	0,102		0,072	0,166	0,294	0,370	

Таблица 4

r	z для h=1					z для h=2				
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,0	0,026	0,102	0,275	0,573	0,979	-0,055	-0,104	-0,088	0,169	0,793
	0,028	0,125	0,378	0,904	1,870	-0,077	-0,145	-0,131	0,229	1,608
0,2	0,020	0,088	0,253	0,552	0,970	-0,052	-0,100	-0,089	0,153	0,797
	0,025	0,116	0,355	0,856	1,785	-0,072	-0,137	-0,125	0,215	1,541
0,4	0,005	0,050	0,189	0,486	0,946	-0,044	-0,085	-0,088	0,105	0,809
	0,018	0,091	0,290	0,719	1,534	-0,060	-0,114	-0,108	0,174	1,341
0,6	-0,009	0,005	0,089	0,354	0,919	-0,030	-0,061	-0,076	0,029	0,834
	0,009	0,058	0,197	0,508	1,131	-0,041	-0,079	-0,078	0,116	1,012
0,8	-0,011	-0,016	-0,001	0,126	0,907	-0,015	-0,031	-0,044	-0,030	0,877
	0,003	0,024	0,093	0,257	0,598	-0,020	-0,039	-0,040	0,053	0,556
1,0	$-1\cdot10^{-3}$	$-2\cdot10^{-3}$	$-3\cdot10^{-3}$	$3\cdot10^{-4}$	—	$-1\cdot10^{-3}$	$-2\cdot10^{-3}$	$-3\cdot10^{-3}$	$2\cdot10^{-4}$	—
	$2\cdot10^{-4}$	$4\cdot10^{-4}$	$4\cdot10^{-4}$	$-7\cdot10^{-4}$		$2\cdot10^{-4}$	$3\cdot10^{-4}$	$3\cdot10^{-4}$	$-6\cdot10^{-4}$	

стью аналогична табл.3. В ней помещены данные для шарнирно закреплённого цилиндра. Анализ результатов показывает, что на торцах кубообразного цилиндра напряжения σ_{rr} больше в случае шарнирного закрепления боковой поверхности, но в этом случае они быстрее убывают при приближении к срединной плоскости. Как видно из таблиц неоднородная нагрузка рассматриваемого вида приводит к увеличению максимальных напряжений почти в два раза. Увеличение толщины в случае шарнирного закрепления приводит к тому, что σ_{rr} в некоторый момент вблизи срединной поверхности становятся отрицательными. При дальнейшем росте h напряжения стремятся к нулю со стороны отрицательных значений.

На рис.1 и рис.2 приведены распределения напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ и σ_{zz} соответственно. Левые части рисунков представляют собой распределения указанных величин вдоль оси кубообразного цилиндра, а правые – вдоль боковой поверхности. Цифрами на рисунках помечены эпюры напряжений для случаев жёсткой заделки 1)при равномерной нагрузке, 2) при нагрузке, изменяющейся вдоль радиуса по параболическому закону. Цифрами *3* и *4* обозначены распределения, которые соответствуют шарнирному закреплению боковой поверхности. Из рис.1 видно, что если на оси напряжение σ_{zz} при шарнирном закреплении больше, то на боковой поверхности кривая для этого случая лежит гораздо ниже. При неоднородной на-

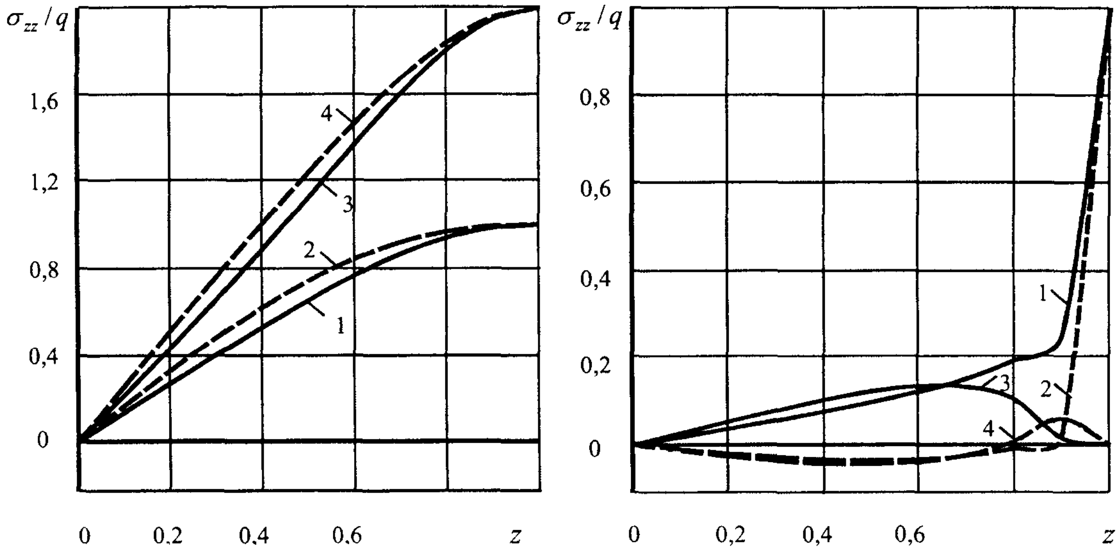


Рис.1

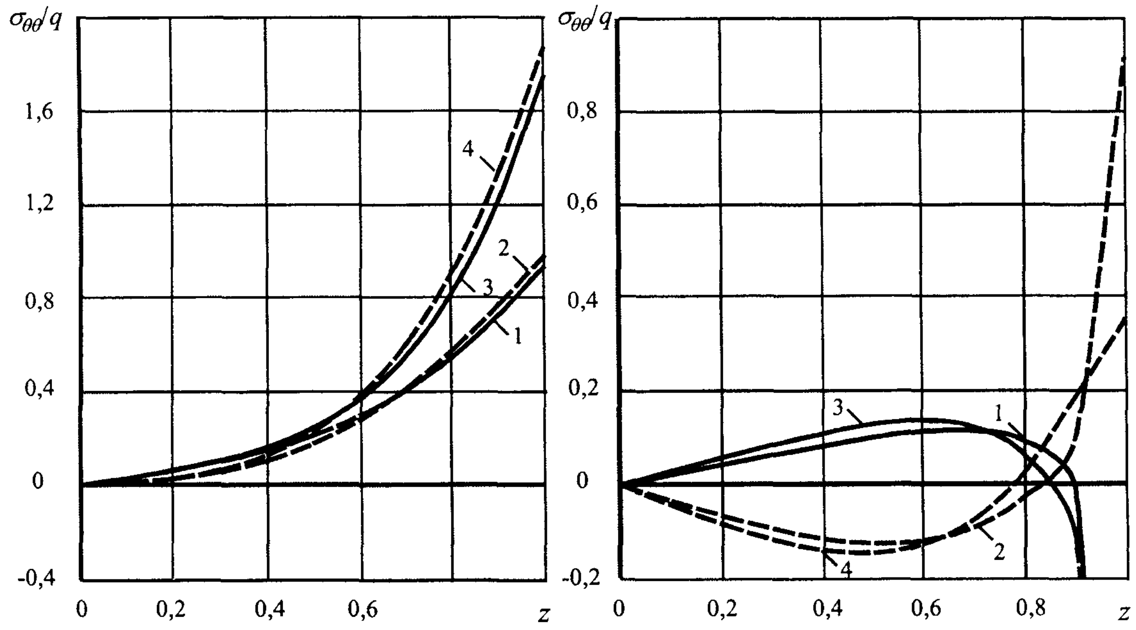


Рис.2

грузке поведение напряжений σ_{zz} и $\sigma_{\theta\theta}$ при приближении к боковой поверхности качественно меняется (на боковой поверхности при $z\approx 0{,}9$ напряжения при шарнирном закреплении становятся больше чем в случае жёсткого защемления). Поведение $\sigma_{\theta\theta}$ при жёсткой заделке существенно меняется вблизи боковой поверхности, когда в случае шарнирного закрепления появляется некоторый отрицательный минимум.

Важным с практической точки зрения является ответ на вопрос, когда тело можно считать тонкой упругой пластиной. Поскольку его можно получить с помощью полной системы уравнений пространственной теории упругости, установим рамки применимости теории Кирхгофа. Оценку будем проводить сравнением осевых смещений срединной поверхности, так как решение задачи о чистом изгибе тонкой плиты общеизвестно [4]. В наших обозначениях оно примет вид

$$\frac{1}{q}\frac{\tilde{w}^{ПТ}}{\tilde{R}} \equiv \frac{w^{ПТ}}{q} = \frac{(1-\nu)}{192h^3}\left(7-15r^2+9r^4-r^6\right). \qquad (14)$$

В табл. 5 приведены величины осевых перемещений для значений h=0,125 и h=0,075 (ν=0,3) более уместных для сравнения с результатами, полученными по теории тонких плит.

Таблица 5

r	z для h=0,125			z для h=0,075		
	0	1	ПТ	0	1	ПТ
0,0	32,7	32,1	26,1	131,8	130,6	121,
0,2	30,2	29,6	23,9	131,8	120,0	110,
0,4	$23{,}3^5$	22,9	18,0	92,0	91,2	83,4
0,6	13,8	13,7	10,2	53,0	52,8	47,0
0,8	4,85	5,10	3,08	17,1	$17{,}5^3$	14,2
1,0	$-5\cdot10^{-}$	$4\cdot10^{-}$	0,00	$-6\cdot10^{-5}$	$4\cdot10^{-3}$	0,00

В качестве меры близости двух функций $w^{ПТ}$, определяемой формулой (14), и w, описываемой соотношением (12), будем использовать коэффициент невязки χ

$$\chi = \frac{\left\| w^{ПТ} - w \right\|}{\min\left\{ \left\| w^{ПТ} \right\|, \left\| w \right\| \right\}} \cdot 100\% . \qquad (15)$$

Исследования показали, что его величина мало зависит от значения коэффициента Пуассона ν и типа используемой нормы (если норма Гильбертова, то интегралы, возникающие при этом в (15), вычисляются численно). Итак, если $0{,}054 \le h \le 0{,}076$, то $\chi \approx 10\%$; если $0{,}026 \le h \le 0{,}054$, то $\chi \approx 5\%$ и если $h \le 0{,}026$, то $\chi \approx 1\%$.

Аналогичным образом сравнивались и максимальные значения нормального напряжения σ_{rr}. В этом случае мы рассматривали все точки пластинки за исключением тех, которые лежат в некоторой окрестности ребра, где имеется особенность. Расчёты показывают, что если $0{,}10 \le h \le 0{,}15$, то $\chi \approx 10\%$; если $0{,}05 \le h \le 0{,}10$, то $\chi \approx 5\%$ и если $h \le 0{,}05$, то $\chi \approx 1\%$.

РЕЗЮМЕ

Рассмотрено несколько постановок задач теории упругости об осесимметричном изгибе цилиндрических тел, моделирующих различные кинематические и статические условия, заданные на границе. Исследовано влияние характера неравномерности заданной нагрузки, типа закрепления боковой поверхности и относительной толщины на напряжённо-деформированное состояние.

SUMMARY

Some statements of the problems of the theory of elasticity of axis symmetrical bending of cylindrical bodies that model different kinematic and static conditions which were given on literal side were considered. Influence of characteristics of given load, of type of fastening and relative thickness on stress-strait state was investigated.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лурье А.И.* Пространственные задачи теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1955. – 491с.
2. *Валов Г.М.* Об осесимметричной деформации сплошного кругового цилиндра конечной длины // Прикл. математика и механика. – 1962. – Т.26. – Вып.4. – С.653-667.
3. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. – М.: Физматгиз, 1963. – 635 с.
4. *Вайнберг Д.В., Вайнберг Е.Д.* Расчёт пластин. – К.: Будивельник, 1970. – 436 с.
5. *Шалдырван В.А.* Метод однородных решений Лурье-Воровича – оценки бигармонической проблемы, обобщения, приложения // Тр. III Всерос. конф. по теории упругости с межд. участием. Ростов н/Д: Книга. – 2004. – С.401-403.
6. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф.* Смешанная осесимметричная задача теории упругости для цилиндра конечной длины // Сопротивление материалов и теория сооружений. – К.: Будивельник. – 1971. – Вып.XV. – С.3-8.
7. *Гринченко В.Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. – К.: Наук. думка, 1980. – 264 с.
8. *Нестеров О.Ю, Шалдырван В.А.* К использованию метода однородных решений для анализа изгибного состояния короткого цилиндра // Вопр. прочн. тонкостен. конструкций. – М., 1989. – С.25-28.
9. *Аксентян О.К., Щепкин Г.Г.* Изгиб толстой плиты с шарнирно закреплённым отверстием // Мат. к VII Всес. конф. по теории оболочек и пластин. – Днепропетровск, 1969. – М.: Наука, 1969. – С.33-37.
10. *Космодамианский А.С., Шалдырван В.А.* Толстые многосвязные пластины. – К.: Наук. думка, 1980. – 240 с.

Надійшла до редакції 15.02.2005 р.

ВІСНИК ДОНЕЦЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ, Сер. А: Природничі науки, 2005, вип. 1

УДК 539.

ДО РОЗРАХУНКУ ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РОЗГАЛУЖЕНИХ ГНУЧКИХ СИСТЕМ З НЕПОТЕНЦІАЛЬНИМИ ДЕФОРМАТИВНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

О.І.Безверхий, В.Ф.Корнієнко, М.О.Шульга
Інститут механіки НАН України, м. Київ

Розгалужені гнучкі системи, що використовуються в багатьох областях техніки: будівництві, транспорті, машинобудуванні, в авіаційній і космічній техніці, у нафтовій і газовій промисловості, мають специфічні пружні властивості, які полягають у тому, що вони працюють на розтягання і не працюють на стиск[1]. Це приводить до появи ривків у гнучких елементах, що виникають унаслідок розслаблень при дії зовнішніх факторів (вітер, хвилі, потік, вимушені переміщення). Тривала дія перемінних зусиль і ривкових ефектів негативно позначається на міцності і надійності роботи елементів конструкцій і вузлів. Для зменшення негативних наслідків дії ривків гнучкі елементи конструкцій виготовляють із нелінійнопружних та в'язкопружних матеріалів. В даній роботі пропонується підхід до побудови дискретних моделей руху таких систем з врахуванням вищенаведених особливостей.

Постановка і побудова рішення задачі. Схематично гнучку розгалужену конструкцію можна вважати системою твердих тіл, з'єднаних гнучкими тілами (троси, канати, кабелі). Під гнучким тілом будемо розуміти тіло, яке при малих деформаціях має значні скінченні переміщення і працює тільки на розтяг. Тверді тіла будемо вважати матеріальними точками на які діють сили. Нехай на гнучкий елемент конструкції діють $\vec{P}^{\lambda}(x_k,t)$ масові сили, на частині поверхні діють поверхневі сили $\vec{F}^{\lambda}(x_k,t)$ і задані переміщення $\vec{u}^{\lambda}(x_k,t)$, де час і переміщення підліковуються від початкового незбуреного стану.

Для знаходження розподілу напружень і деформацій в гнучкому тілі обумовлених його рухом запишемо принцип віртуальної роботи для такої динамічної задачі [4]

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint_V \sigma^{\lambda m}\delta e_{\lambda m}dV-\delta K-\iiint_V \vec{P}\delta\vec{R}dV-\iint_S \vec{F}\delta\vec{R}dS\right\}dt=0. \tag{1}$$

Використання варіаційного принципу зручне тим, що на залежності між напруженнями і деформаціями не накладаються ніякі обмеження, тобто вони можуть бути і не потенціальними.

Для знаходження розв'язку задачі (1), за умови не потенціальності залежностей між напруженнями і деформаціями, проведемо дискретизацію системи, тобто переміщення виразимо через дискретне число узагальнених координат $q_j(j=1,2,...,N)$. Переміщення можна зобразити в вигляді: $u^{\lambda}=u^{\lambda}(x^1,x^2,x^3,q_1,q_2,q_3,t)$, тоді

$$\frac{d\vec{R}}{dt}=\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial\vec{R}}{\partial q_j}e_j+\frac{\partial\vec{R}}{\partial t},\text{ а }\delta\vec{R}=\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial\vec{R}}{\partial q_j}\delta q_j. \tag{2}$$

Перетворимо вираз $\int_{t_i}^{t_2}\delta K dt$ в (1) через узагальнені змінні

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta K dt=-\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial K}{\partial\dot{q}_j}-\frac{\partial K}{\partial q_j}\right]\cdot\delta q_j dt, \tag{3}$$

де використані умови $\delta q_j(t_1)=0;\ \delta q_j(t_2)=0;\ j=1,2...N$.

З використанням (2) третій і четвертий доданки в (1) приведемо до вигляду

$$\iiint_V \vec{P}\delta\vec{R}dV+\iint_S \vec{F}\delta\vec{R}dS=\sum_{j=1}^{N}Q_j^3\delta q_j, \tag{4}$$

$Q_j^3 = \iiint\limits_V \vec{P} \dfrac{\partial \vec{R}}{\partial q_j} dV + \iint\limits_S \vec{F} \dfrac{\partial \vec{R}}{\partial q_j} dS$ - узагальнені зовнішні сили.

Так як ми розглядаємо гнучкі протяжні елементи конструкції, то перший член у варіаційному принципі (1) можна привести до виду

$$\iiint\limits_V \sigma \delta \varepsilon dV = \int\limits_L T \delta \varepsilon ds ,$$

де $T = \iint\limits_F \sigma dF = f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ причому функція $f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ може бути не потенціальною. Використовуючи (2), можна записати $\delta \varepsilon = \sum\limits_{j=1}^{N} \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial q_j} \delta q_i$.

Введемо $Q_j^{\text{в}} = \int\limits_L T_j \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial q_i} ds$ – узагальнені внутрішні сили, тоді

$$\int\limits_L T \delta \varepsilon ds = \sum_{j=1}^{N} Q_j^{\text{в}} \delta q_j \; . \tag{5}$$

Підставляючи (3), (4), (5) в (1), одержимо

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} - Q_j^3 + Q_j^{\text{в}} \right] \cdot \delta q_j dt = 0 . \tag{6}$$

Так як варіації незалежні, то з рівняння (6) одержимо систему N рівнянь

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j^3 - Q_j^{\text{в}}, \quad j = 1,2,...N . \tag{7}$$

Ця система рівнянь являється дискретизованими рівняннями руху гнучких тіл пружності яких може бути не потенціальною і переміщення скінченні. Запишемо рівняння руху розгалуженої системи тіл з'єднаних гнучкими елементами в нерухомій прямокутній системі координат $0x_1, x_2, x_3$.

Використовуючи методику запропоновану в роботі [3], дискретизуємо систему і за узагальнені координати виберемо просторові координати точок дискретизації.

Тоді рух гнучкого елемента між суміжними точками дискретизації P_i *і* P_j можна записати через радіус - вектор

$$\vec{R}_{ij} = \sum_{k=1}^{3} R_{kij} \vec{e}_k , \tag{8}$$

де, R_{ij} - функції що виражають зв'язок довжин осі гнучкого елемента і координат точок дискретизації.

Запишемо узагальнені внутрішні сили для гнучких елементів (нелінійно, непотенціально пружних з одностоторонньою роботою) залежність між натягом та відносним видовженням можна зобразити так:

$$T = f(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) \cdot H(\varepsilon), \tag{9}$$

де $\varepsilon = \dfrac{ds - d\ell}{d\ell} = \left| \dfrac{\partial \vec{R}}{\partial \ell} \right| - 1$ – відносне видовження; $H(\varepsilon)$ – функція Хевісайда $= \begin{cases} 1 & \varepsilon > 0 \\ 0 & \varepsilon \le 0 \end{cases}$

$$Q_{ij}^{\text{в}} = \int\limits_0^{L_{ij}} f(\varepsilon_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}) H(\varepsilon_{ij}) \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial x_{kp}} ds = \int\limits_0^{L_{ij}} f \left(\left(\left| \frac{\partial \vec{R}_{ij}}{\partial \ell} \right| - 1 \right), \frac{\partial \left| \dfrac{\partial \vec{R}_{ij}}{\partial \ell} \right|}{\partial t} \right) H \left(\left| \frac{\partial \vec{R}_{ij}}{\partial \ell} \right| - 1 \right) \frac{\partial \left| \dfrac{\partial \vec{R}_{ij}}{\partial l} \right|}{\partial x_{kp}} \cdot \left| \frac{\partial \vec{R}_{ij}}{\partial \ell} \right| d\ell$$

Запишемо узагальнені зовнішні сили:

$$Q_{ij}^{з} = \int_{0}^{L_{ij}} \vec{f}_{ij} \frac{\partial \vec{R}_{ij}}{\partial x_{kp}} \cdot ds = \int_{0}^{L_{ij}} \left(\vec{f}_{ij}^{\,p} + \vec{f}_{ij}^{\,m} \right) \frac{\partial \vec{R}_{ij}}{\partial x_{kp}} \cdot \left| \frac{\partial \vec{R}_{ij}}{\partial \ell} \right| dl ,$$

$\vec{f}_{ij}^{\,p} = \int\limits_{P_{ij}} \vec{F}_{ij} dp$ - розподілена поверхнева сила; $\vec{f}_{ij}^{\,m} = \iint\limits_{F_{ij}} \vec{P}_{ij} dF_{ij}$ - розподілена масова сила.

Використовуючи вирази для кінетичної енергії та її похідних, а також узагальнених сил, що діють на гнучкі елементи конструкції, а також кінетичної енергії та її похідних, а також узагальнених сил, що діють на тверді тіла, рівняння руху розгалуженої системи набуде вигляду

$$\int_{0}^{1} \sum_{ij} L_{ij} \Bigg\{ m_{ij} \ddot{\vec{R}}_{ij} \frac{\partial \dot{\vec{R}}_{ij}}{\partial \dot{x}_{kp}} - m_{ij} \dot{\vec{R}}_{ij} \frac{\partial \dot{\vec{R}}_{ij}}{\partial x_{kp}} +$$

$$+ f\left(\left(\left| \frac{\partial \vec{R}_{ij}}{\partial \ell} \right| - 1 \right), \frac{\partial}{\partial t} \left(\left| \frac{\partial \vec{R}_{ij}}{\partial \ell} \right| \right) \right) H \left(\left| \frac{\partial \vec{R}_{ij}}{\partial l} \right| - 1 \right) \left| \frac{\partial \vec{R}_{ij}}{\partial l} \right| \frac{\partial}{\partial x_{kp}} \left| \frac{\partial \vec{R}_{ij}}{\partial l} \right| +$$

$$+ \left(\vec{f}_{ij}^{\,p} - \vec{f}_{ij}^{\,m} \right) \frac{\partial \vec{R}_{ij}}{\partial x_{kp}} \left| \frac{\partial \vec{R}_{ij}}{\partial l} \right| \Bigg\} d\xi + \sum_{s} m_{Ts(i)} \delta_{p}^{s(i)} \ddot{\vec{R}}_{Ts(i)} \vec{e}_{k} - \sum_{s} \delta_{p}^{s(i)} \vec{F}_{Ts(i)} \vec{e}_{k} = 0, \qquad (10)$$

де $p = \overline{0,\ N}$; $k = 1,2,3$; $\xi = 1 / L_{ij}$;

Нехай в деяких r-точках задані кінематичні крайові умови $\vec{R}_{r(i)}^{0} = \vec{R}_{r(i)}^{0}(t)$, тоді в системі (10) кількість рівнянь зменшиться на r з відповідними номерами і разом з початковими умовами $\vec{R}_{i}\,|_{t=0} = \vec{R}_{T}$; $\dot{\vec{R}}_{i}\,|_{t=0} = \vec{V}_{T}$ одержимо задачу динаміки розгалуженої системи тіл з'єднаних гнучкими елементами.

Використовуючи запропоновану методику, запишемо систему рівнянь руху розгалуженої просторової конструкції з гнучкими протяжними в'язкопружними елементами в рідині. Залежність між натягом і відносним видовженням для таких гнучких елементів можна представити в вигляді $T = C_{E}\varepsilon + C_{E2}\dot{\varepsilon}$. На гнучкий елемент діють також розподілені поверхневі сили: гідродинамічного опору, інерції приєднаної маси рідини , що залучається в сумісний рух, а також розподілені об'ємні сили: ваги та сила Архімеда [2]. На тверді тіла діють сили: гідродинамічного опору, інерції приєднаної маси рідини, що залучається в сумісний рух, а також об'ємні сили: ваги та сила Архімеда. Тоді система рівнянь руху такої конструкції набуде вигляду

$$\int_{0}^{1} \sum_{ij} L_{ij} \Bigg\{ m_{ij} \ddot{\vec{R}}_{i} \frac{\partial \dot{\vec{R}}_{ij}}{\partial \dot{x}_{kp}} - m_{ij} \dot{\vec{R}}_{ij} \frac{\partial \dot{\vec{R}}_{ij}}{\partial x_{kp}} - m_{aij} \left(\dot{\vec{V}} - \ddot{\vec{R}}_{ij} \right) \left| \vec{\tau}_{ij} \right| \frac{\partial \vec{R}_{ij}}{\partial x_{kp}} +$$

$$+ \left(C_{Eij} \left(\left| \vec{\tau}_{ij} \right| - 1 \right) + C_{E2ij} \left| \dot{\vec{\tau}}_{ij} \right| \right) \vec{\tau}_{ij} \left| \frac{\partial}{\partial x_{kp}} \left(\left| \vec{\tau}_{ij} \right| \right) + \right.$$

$$+ \Bigg\{ \left(\rho_{c} F_{ij} \left| \vec{\tau}_{ij} \right| - m_{ij} \right) \vec{g} - \frac{C_{\tau ij}}{\left| \vec{\tau}_{ij} \right|} \left| \vec{\tau}_{ij} \right| \left(\vec{V} - \dot{\vec{R}}_{ij} \right) \vec{\tau}_{ij} \left[\left(\vec{V} - \dot{\vec{R}}_{ij} \right) \vec{\tau}_{ij} \right] \frac{1}{\left| \vec{\tau}_{ij} \right|^{2}} -$$

$$- \frac{C_{ni}}{\left| \vec{\tau}_{i} \right|} \left| \vec{\tau}_{ij} \times \left(\vec{V} - \dot{\vec{R}}_{ij} \right) \right| \left(\left(\vec{V} - \dot{\vec{R}}_{ij} \right) \left| \vec{\tau}_{ij} \right|^{2} - \vec{\tau}_{ij} \left[\left(\vec{V} - \dot{\vec{R}}_{ij} \right) \right] \vec{\tau}_{ij} \right) \frac{1}{\left| \vec{\tau}_{ij} \right|^{2}} \Bigg\} \frac{\partial \vec{R}_{ij}}{\partial x_{kp}} \Bigg\} d\xi +$$

$$+ M_{Tp} \ddot{\vec{R}}_{Tp} \frac{\partial \dot{\vec{R}}_{Tp}}{\partial \dot{x}_{kp}} + \Big[\vec{g} \left(M_{Tp} - \rho_{c} V_{Tp} \right) + C_{Tp}\ \rho_{c} F_{Tp} \left| \vec{V} - \dot{\vec{R}}_{Tp} \right| \left(\vec{V} - \dot{\vec{R}}_{Tp} \right) +$$

$$+\rho_c \lambda_{Tp} V_{Tp} \frac{\partial^2 \left(\vec{V} - \vec{R}_{Tp}\right)}{\partial t^2} \Bigg] \frac{\partial \vec{R}_{Tp}}{\partial x_{kp}} = 0\,, \tag{11}$$

де $p = \overline{0,\,N} \mid r(i)$; $k = 1,2,3$; $\vec{\tau}_{ij} = \dfrac{\partial \vec{R}_{ij}}{\partial l}$; $\xi = 1/L_{ij}$.

І разом з початковими умовами $\vec{R}_i\,|_{t=0} = \vec{R}_T$; $\dot{\vec{R}}_i\,|_{t=0} = \vec{V}_T$ одержимо задачу динаміки розгалуженої дискретно-континуальної конструкції в рідині. Для розв'язку цієї задачі систему нелінійних рівнянь в частинних похідних (11) зведемо при допомозі локальних параметричних сплайнів до задачі Коші для системи звичайних диференційних рівнянь[2]. Розрахункову систему рівнянь $3(N+1)-r$ звичайних диференціальних рівнянь другого порядку відносно x_{kj} можна подати в вигляді:

$$[\ddot{x}_{kp}][\mathrm{M}] = \Phi(x_{kp}, \dot{x}_{kp}). \tag{12}$$

Для чисельного розв'язку системи диференціальних рівнянь, систему рівнянь руху (12) необхідно привести до нормального виду. Так як елементи матриці M залежать від шуканих функцій, то процес нормалізації необхідно проводити на кожному кроці за часом. Але, так як матриця M є розрідженою, то при її розв'язку методами виключення деякі елементи матриці, що до розв'язку були нульовими, перестають бути рівними нулю. Використовуючи перестановки стовпців і рядків матриці, можна скоротити кількість ненульових елементів при факторизації, які з'являються. Найкращі результати, з погляду мінімального числа ненульових елементів і, як наслідок, часу розв'язку перетвореної системи, одержані для перестановки, що була отримана при використанні алгоритму мінімального ступеня. Розв'язок нормалізованої нелінійної задачі Коші (12) знаходимо чисельно, користуючись багатокроковими методами типу предиктор-коректор [1, 4].

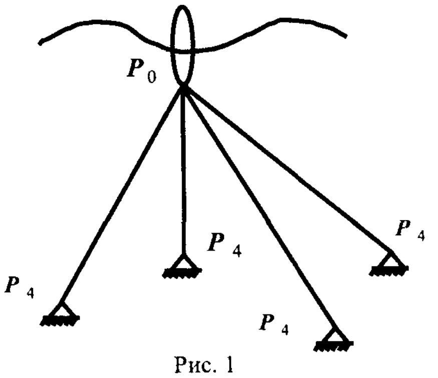


Рис. 1

Аналіз результатів чисельних досліджень. Дослідимо вплив в'язкопружності на коливання на хвилях заякореного буя. Буй, що плаває, утримується чотирма буйрепами довжиною 200м кожний, закріпленими на плоскому дні глибиною 160м у вершинах умовного квадрата з діагоналлю 240 м (рис.1). Буй має циліндричну форму, маса буя 100 кг, площа міделевого перерізу 1 м^2. Сили, що діють на буй, приймаються відповідно до роботи [3]. Коефіцієнти гідродинамічного опору руху буя у воді прийняті такі: дотична складова $C_{\tau ij} = 0{,}2\,кг/м^2$, нормальна складова $C_{nij} = 15{,}6\,кг/м^2$, приєднана маса рідини, що залучається в сумісний рух $m_{aij} = 0{,}4\,кг/м$. Погонна маса буйрепів $3\,кг/м$, площа їх поперечного перерізу $F_{ij} = 0{,}0001\ м^2$.

Виберемо нерухому систему координат: нехай площина $0x_1x_2$ збігається з незбуреною поверхнею води, а точку 0 сполучимо з точкою над центром квадрата заякорення, тобто сполучимо з буєм у незбуреному стані, осі $0x_1$ та $0x_2$ у першому випадку направимо паралельно сторонам квадрата заякорення, ні трикутника, вісь $0x_3$ направимо проти вектора вільного падіння.

На рис.2 представлені проекції траєкторій переміщення буя(точки кріплення буя), і середин бокових розтяжок на площину $0x_1x_2$ на хвилі при куті між вектором ходу хвиль і віссю $0x_1$ $30°$. У той час як буй робить періодичні (з періодом хвиль $T_\omega = 6.4c$) переміщення в напрямку ходу хвиль, середини бокових розтяжок переміщаються в напрямку їх розтяжки в незалежності від напрямку ходу хвиль.

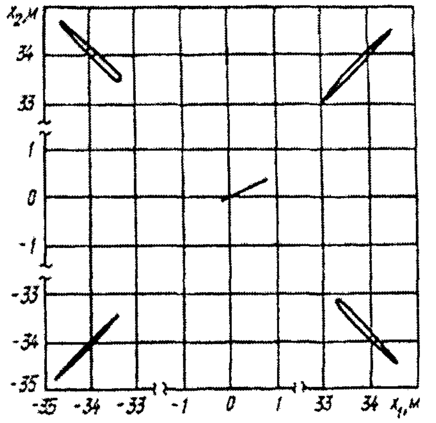


Рис. 2. Переміщення буя та середин буйрепів під дією хвиль, що набігають під кутом 30° до осі закріплення системи

Проаналізуємо вплив в'язкопружності матеріалу якірного каната на величину ривка за період коливання. На рис.3 представлена зміна натягу в точці кріплення буя до якірного каната (буйрепа), який першим зустрічає хвилю (якір 1) у часі при різних пружних характеристиках якірних канатів (крива 1 – для пружного $C_E = 10^8 H$, крива 2 – в`язкопружного троса $C_E = 10^8 H$, C_{E2}=0,03) . Бачимо, що величини першого ривка практично однакова.

На рис.4 представлені залежності натягу у в'язко-пружному якірному канаті, який першим зустрічає хвилю – біля точки кріплення буя (крива 1) і в точці заякорення (крива 2); і переміщення точки кріплення буя по вертикалі (крива 3) по часу для чотирьохякірної системи (рис.1) при періоді хвиль – $T_\omega = 6.4c$. Бачимо, що для такого періода морського хвилювання біля точки заякорення (крива 2) з'являються розслаблення, тобто натяг стає рівним нулю, і в якірному канаті виникають ривки, що при підйомі буя на хвилі за період морської хвилі практично згасають. Ривки проявляються і на вертикальних переміщеннях буя (крива 3).

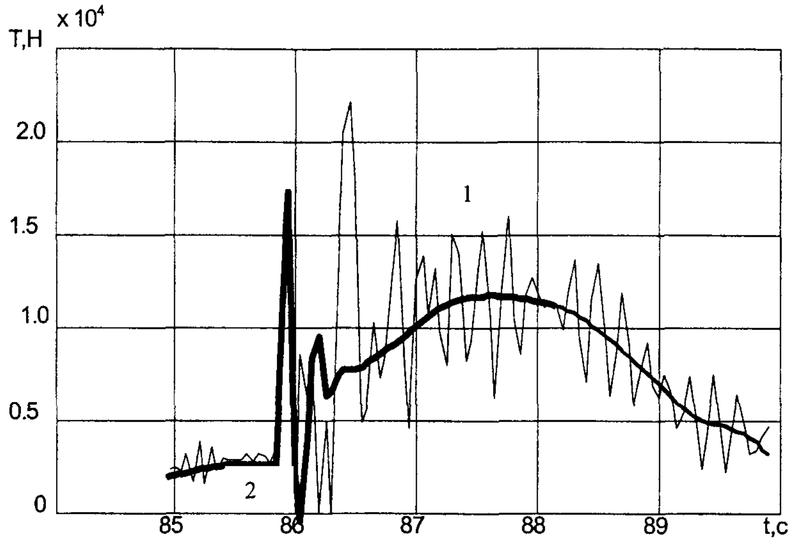


Рис.3. Натяг біля буйка в якорі 1 для пружного (1) і в`язкопружного (2) троса

Залежності натягу у в'язко-пружному якірному канаті, який першим зустрічає хвилю в точці заякорення по часу для чотирьохякірної системи при різних періодах хвиль – при *Tw=6,4c.* - крива 1, *Tw=8,0c.* – крива 2, *Tw=10,0c.* – крива 3 зображені на рис.5. Із рисунка можна зробити висновок, що з ростом періоду морських хвиль пік ривка зменшується, а стаціонарна складова натягу при підйомі на хвилі зростає. Причому пік ривка зеншується нелінійно.

Запропонований підхід до одержання рівнянь руху дискретно-континуальних гнучких одномірних систем з непотенціально-пружними характеристиками являється узагальненням до підходів, що використовувались в [1, 3, 7]. Запропонована методика розрахунку і проведені розрахунки дозволяють визначити кінематичні і динамічні параметри нелінійних коливань розгалужених систем, вплив

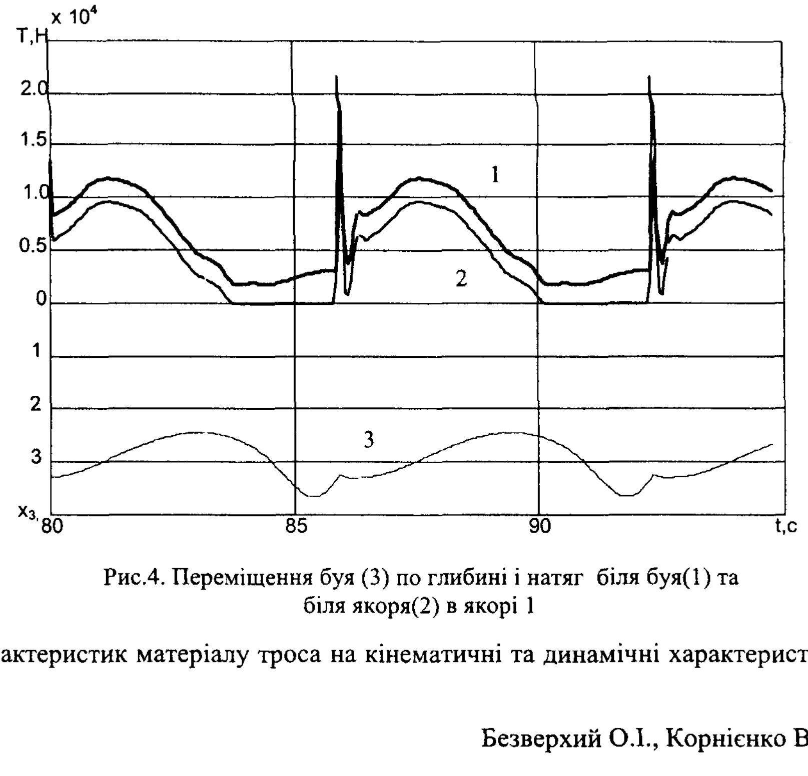


Рис.4. Переміщення буя (3) по глибині і натяг біля буя(1) та біля якоря(2) в якорі 1

в'язкопружних характеристик матеріалу троса на кінематичні та динамічні характеристики розгалуженої системи, а також параметри морських хвиль, при яких з'являються ривки як у всій системі, так і в окремих ї елементах, та їх величини.

РЕЗЮМЕ

В работе предлагается подход к расчету динамических задач для дискретно-континуальных гибких разветвленных систем с непотенциальными деформационными характеристиками. Для реализации этого подхода использованы обобщения принципа стационарности на динамические задачи. При построении алгоритмов решения задач использованы сплайн функции.

SUMMARY

In the following paper the approach to calculation of dynamic problems for discrete – continual flexible one-dimensional systems with not in potential deformation performances is offered. For realization of this approach generalizations of a principle are used stationarities on dynamic problems. At construction of algorithms of a solution of problems are used spline functions.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А,. Гоцуляк Е.А, Кондаков Г.С., Оглобля А.И.* Устойчивость и колебания деформируемых систем с односторонними связями. – К.: Выща шк., 1989. – 399 с.
2. *Безверхий О.І.* Про один спосіб розрахунку задач динаміки просторових гнучких стержневих систем. // Доповіді. НАН України. – 1993. – №2. – С.46-49
3. *Безверхий А.И.* К расчету динамики разветвленных тросовых систем. // Прикладная механіка. – 1999. – Т.35. – №9. – С.106-110
4. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
5. *Ньюмен Дж.* Морская гидромеханика. – Л.: Судостроение, 1985. – 368 с.
6. *Джорж А., Лю Дж.* Численное решение больших разреженных систем уравнений. – М.: Мир, 1984. – 333 с.
7. *Bezverkhii A.I., Kornienko V.F. and Shul'ga N.A.* The viscoelastic effect of the cable on the dynamics of anunderwater towed system suspended from a buoy.// Int. Appl. Mech. – Vol.37. – №8. – 2001. – P.1055-1061.

Надійшла до редакції 03.09.2004 р.

ВІСНИК ДОНЕЦЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ, Сер. А: Природничі науки, 2005, вип. 1

УДК 539.376

КІНЕТИКА ПОВЕРХНІ ПЛАСТИЧНОСТІ ПРИ УЛЬТРАЗВУКОВОМУ ОПРОМІНЕННІ

А.К.Русинко
Національний університет “Львівська політехніка”

В переліку зміцнювальних технологій особливе місце посідає ультразвукове зміцнення. Ультразвукове опромінення має ряд особливостей – експресність, висока ефективність, збереження розмірів оброблюваного зразка. У роботах [1,2] аналітично описано вплив параметрів ультразвукової обробки (тривалості та інтенсивності озвучування) на механічні властивості металів: межу пластичності та швидкість усталеної повзучості. Описання здійснено в рамках синтезної теорії пластичності та повзучості [3]. Дана робота присвячена аналізу кінетики поверхні навантаження при акустичному опроміненні. Збільшення межі пластичності матеріалу від дії ультразвуку пояснюється тим, що під час проходження по зразку ультразвукової хвилі в ньому виникають знакозмінні напруження, які породжують дефекти будови кристалічної будови ґратки матеріалу: дислокації, вакансії та їхні ансамблі [4-6]. Генеровані ультразвуком дефекти зміцнюють метал, оскільки при наступному статичному навантаженні (коли визначається межа пластичності озвученого матеріалу) вони служать бар’єрами для руху дислокацій. Очевидно, що, чим більша інтенсивність ультразвуку, тим більший ефект зміцнення. Збільшення межі пластичності в процесі ультразвукового опромінення відбувається до певного моменту озвучування τ^*. При $\tau > \tau^*$ межа пластичності залишається незмінною, причому чим більша амплітуда осцилюючого напруження, тим меншою є величина τ^* [4-6].

Збереження розмірів озвученого зразка пояснюється тим, що навіть при амплітуді осцилюючого напруження більшого за статичну межу пластичності матеріалу внаслідок високої швидкості навантаження може не досягатися динамічна межа пластичності (межа пластичності при даній швидкості навантаження) і тому не відбувається макроскопічне пластичне деформування. Накопичення дефектів відбувається внаслідок мікропластичної деформації, яка зосереджується у локальних областях матеріалу. Таким чином, ми маємо справу з утворенням дефектів за механізмом багатоциклової втоми в межах її інкубаційного періоду [7].

Кінетика поверхні пластичності при ультразвуковому опроміненні. В рамках синтезної теорії незворотного деформування [1-3] початкова поверхня пластичності – сфера радіуса R в тривимірному підпросторі девіаторів напружень S^3, що відповідає умові пластичності Губера-Мізеса:

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = R^2, \quad R^2 = 2/3\sigma_S^2, \tag{1}$$

де σ_S – межа пластичності матеріалу при одновісному розтязі. До кожної точки цієї сфери проводимо дотичну площину. Кожна площина характеризує певну систему ковзання в точці матеріалу. Положення площини характеризує відстань H до неї та одиничний нормальний до неї вектор $\vec{\mathbf{n}}$ $(\sin\beta, \cos\beta\cos\alpha, \cos\beta\sin\alpha)$ [1-2]. Зміна положення площин (переміщення площини відбувається при незмінному векторі $\vec{\mathbf{n}}$) визначає трансформацію форми поверхні пластичності, яка повинна огинати площини, тобто залишатися дотичною до них. Легко бачити що в початковому стані $H = \sqrt{2/3}\sigma_S$ для всіх значень кутів α і β.

Дослідимо формозміну поверхні пластичності (1) в процесі дії ультразвуку в рамках синтезної теорії. Прикладене навантаження характеризується вектором $\vec{\mathbf{S}}$ з координатами $S_1 = \sqrt{3/2}S_{xx}$, $S_2 = S_{xx}/\sqrt{2} + \sqrt{2}S_{yy}$, $S_3 = \sqrt{2}S_{xz}$, де $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma$ $\sigma = \sum_{k=1}^{3}\sigma_{kk}$, σ_{ij} – компоненти тензора напруження. Якщо виконується рівність $H = \vec{\mathbf{S}} \cdot \vec{\mathbf{n}}$, то рух площин символізує накопичення пластичної деформації [3].

Зв’язок між ступенем зміцнення матеріалу та густиною дефектів задається такою залежністю [1-3]

$$H^2 = R^2 + \psi, \tag{2}$$

де ψ – інтенсивність дефектів, яка виражає усереднену неперервну міру дефектів (для реального твердого тіла це дислокації, вакансії, міжвузлові атоми, тощо) в однорідному суцільному середовищі. Під терміном дефекти в площині з нормаллю $\vec{\mathbf{n}}$ розуміємо дефекти в системі ковзання мікрооб'єму, якому відповідає дана площина. Інтенсивність дефектів ψ виражає міру дефектів породжених пластичним деформуванням: $\psi = r\varphi$ [1-3], де φ – інтенсивність незворотного деформування. З формули (2) видно, що чим більше в тілі зосереджено дефектів ψ, тим більша відстань до площин. Отже величина H характеризує ступінь зміцнення матеріалу. Для описання накопичення в матеріалі дефектів від дії ультразвуку без проходження макродеформування $\varphi = 0 \Rightarrow \psi = 0$ введемо в формулу (2), по-перше величину ψ_u, яка характеризуватиме інтенсивність генерованих акустичною енергією дефектів, по-друге інтеграл неоднорідності I_n [3]. Величина I_n характеризує пружні спотворення ґратки матеріалу, ступінь яких зростає зі збільшенням швидкості прикладання навантаження. Таким чином, інтеграл неоднорідності виражає залежність межі пластичності від швидкості навантаження.

Отже, замінимо залежність (2) такою:

$$H^2 = R^2 + I_n^2 + \psi_u^2. \tag{3}$$

Задамо закон зміни в часі ультразвукових дефектів так

$$d\psi_u = U(\tau)\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{n}} d\tau, \quad U(\tau) = V_1 \left[S_m - S_{m0}\right]^{V_2} \exp\left[-V_3\left(S_m - S_{m0}\right)\tau\right], \tag{4}$$

$\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{S}}_u / \left|\vec{\mathbf{S}}_u\right|$ – одиничний вектор, який задає напрям дії вектора ультразвукового напруження в S^3, $\vec{\mathbf{S}}_u(\tau) = S_m \sin(2\pi f\tau)\vec{\mathbf{u}} = S_m \sin(2\pi\tau/T)\vec{\mathbf{u}}$, S_m – амплітуда вектора $\vec{\mathbf{S}}_u$, f – частота, а T – період ультразвукових коливань; S_{m0} – амплітуда мінімального ультразвукового напруження, необхідного для генерації дефектів; V_i – сталі матеріалу ($i = 1,2,3$). Якщо $S_m < S_{m0}$, то приймаємо, що $U = 0$. Скалярний добуток $\vec{\mathbf{S}}_u \cdot \vec{\mathbf{n}}$ визначає дотичне напруження, яке діє в певній системі ковзання, тим самим враховується орієнтація площини ковзання відносно прикладеного навантаження [3].

Інтеграл неоднорідності має такий вигляд [3]

$$I_n(\tau) = B\int_0^\tau \frac{d\vec{\mathbf{S}}}{d\tau} \cdot \vec{\mathbf{n}} \exp\left[-p(\tau - s)\right] ds, \quad 0 < B < 1. \tag{5}$$

При дії ультразвуку, коли тривалість навантажень є дуже малою, підінтегральна функція $\exp\left[-p(\tau - s)\right]$ може бути прийнята рівною одиниці і тому

$$I_n(\tau) \approx B\vec{\mathbf{S}}_u(\tau) \cdot \vec{\mathbf{n}}. \tag{6}$$

Визначимо мінімальне значення амплітуди вектора ультразвукового напруження S_{mS}, яке при опроміненні викличе макропластичну деформацію. Щоб зробити це в рамках синтезної теорії, потрібно H прирівняти до S_{mS}, тобто $\vec{\mathbf{S}}_u \cdot \vec{\mathbf{n}} = S_{mS}$ [1-3]. При цьому формула (3) набуває вигляду

$$S_{mS}^2 = R^2 + \left(BS_{mS}\right)^2 + \psi_u^2,$$

тобто

$$S_{mS}^2 = \frac{R^2 + \psi_u^2}{1 - B^2}. \tag{7}$$

З формули (7) видно, що навіть при $R < S_m < S_{mS}$ не виникає макропластичноа деформація, що забезпечує незмінність розмірів озвучуваного зразка. Надалі розглядатимемо саме такі значення амплітуд ультразвукового напруження.

Розглянемо випадок, коли в процесі дії ультразвуку виникають напруження розтягу-стиску. Вектор ультразвукового напруження $\vec{\mathbf{S}}_u(\tau)$ матиме такі координати $\left(\sqrt{2/3}\sigma_x(\tau), 0, 0\right)$, $\sigma_x(\tau) = \sigma_m \sin(2\pi f\tau)$, а $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = \sin\beta$. Формула (7) набуває вигляду

$$\sigma_{mS} = \sqrt{\sigma_S^2 + 3/2\,\psi_u^2} \Big/ \sqrt{1 - 2/3\,B^2}\ .$$

Визначимо з формули (4) інтенсивність ультразвукових дефектів, які накопичились за першу чверть періоду $\tau = T/4$ коли вектор напруження досягнув амплітудного значення $\sigma_m < \sigma_{mS}$:

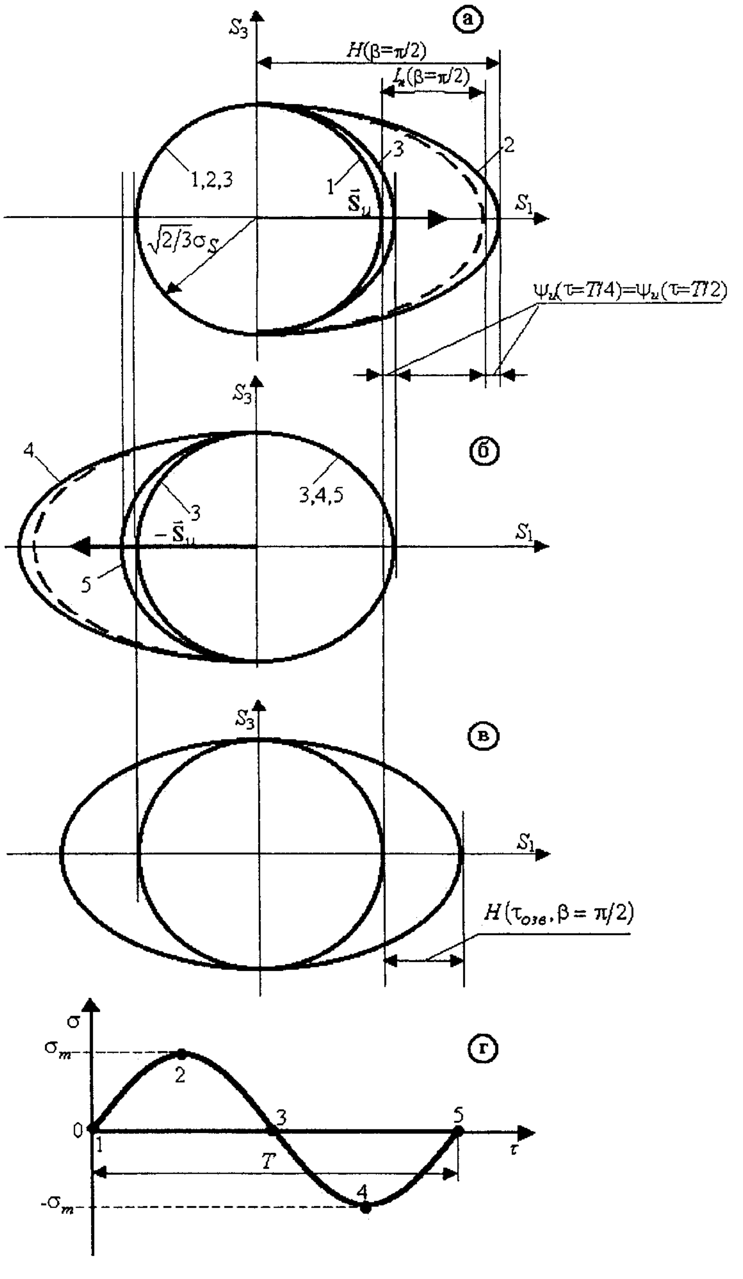
$$\psi_u = V_1\left[\sqrt{2/3}\left(\sigma_m - \sigma_{m0}\right)\right]^{V_2} \int\limits_0^{T/4} \exp\left[-V_3\sqrt{2/3}\left(\sigma_m - \sigma_{m0}\right)\tau\right] d\tau \sin\beta =$$

$$= W_1\left[1 - \exp\left(-W_2\frac{T}{4}\right)\right]\sin\beta, \qquad (8)$$

де $W_1 = \frac{V_1}{V_3}\left[\sqrt{2/3}\left(\sigma_m - \sigma_{m0}\right)\right]^{V_2-1}$, $W_2 = V_3\sqrt{2/3}\left(\sigma_m - \sigma_{m0}\right)$. Співвідношення (3) набуває такого вигляду:

$$H^2 = 2/3\sigma_S^2 + 2/3\left(B\sigma_m \sin\beta\right)^2 + \left[W_1\left(1 - \exp\left(-W_2\, T/4\right)\right)\sin\beta\right]^2. \qquad (9)$$

З формули (9) видно, що за чверть циклу відбулося переміщення площин, ініційоване інтегралом $I_n(\tau)$ та інтенсивністю ψ_u. Незалежність відстані H від кута α означає, що поверхня пластичності буде симетричною відносно осі S_1. Кут β відраховується від осі S_3 до вектора $\vec{n}$ у площині S_1OS_3 [1-3]. Легко бачити, що максимальна відстань до площин буде при $\beta = \pi/2$, тобто для площини перпендикулярної до осі S_1, вздовж якої переміщується вектор $\vec{S}_u(\tau)$. В рамках синтезної теорії приймається, що рухаються лише ті площини, для яких кут між вектором $\vec{n}$ та $\vec{S}_u$ є гострий. У випадку дії розтягуючого вектора цій умові відповідають площини, для яких $0 \le \beta \le \pi$. Отже, поверхня навантаження у другому та третьому квадрантах у площині S_1OS_3 зберігає форму сфери, а у першому та четвертому квадрантах набуває еліпсовидної форми (рис.1, *а*), що викликано збільшенням величини H за формулою (9). Точки перетину цієї поверхні з осями координат визначаються через значення відстаней до площин у відповідних напрямах: вісь S_3 – $\beta = 0$, $\beta = \pi \Rightarrow H = \sqrt{2/3}\sigma_S$, вісь S_1 – значення H визначене з формули (9) при $\beta = \pi/2$.



В проміжку $T/4 \le \tau \le T/2$, коли відбувається розвантаження $d\left|\vec{S}_u\right|/d\tau < 0$, очевидно, утворення дефектів не відбувається, тому для цього часового проміжку $d\psi_u(\tau) = 0$, тобто

$$d(H)=d\left\lfloor\sqrt{2/3}\left(B\sigma_x(\tau)\sin\beta\right)\right\rfloor,$$

що символізує переміщення площини в бік до початку координат, викликане релаксацією пружних спотворень ґратки при розвантаженні.

По завершенню півцикла навантаження $\sigma_x(\tau=T/2)=0\Rightarrow I_n(\tau=T/2)=0$ формула (9) буде

$$H^2(\tau=T/2)=2/3\sigma_S^2+\left[W_1(1-\exp(-W_2\,T/4))\sin\beta\right]^2, \tag{10}$$

З останньої формули видно, що по завершенню півцикла навантаження відстань до площин збільшилась за рахунок того, що у тілі утворилися дефекти генеровані акустичною енергією. Порівнюючи формули (9) і (10), легко бачити, що $H^2(\tau=T/2)=H^2(\tau=T/4)-2/3(B\sigma_m)^2$. Отже, інтеграл I_n відіграє єдину роль: забезпечення нерівності $H>\vec{\mathbf{S}}\cdot\vec{\mathbf{n}}$ (відсутність макропластичної деформації), а на зміні поверхні пластичності його фігурування у формулі (8) після зняття навантаження не відображається.

За другий півцикл (стиск і розвантаження) відбувається аналогічна до першого півциклу формозміна поверхні навантаження, з тією лише різницею, що рух площин відбуватиметься в другому і третьому квадрантах, а в першому і четвертому поверхня зберігатиме форму набуту в момент часу $\tau=T/4$ (формула (10)). Таким чином, по завершенню повного циклу навантаження поверхня пластичності набуде симетричної форми (рис.1*б*).

Подальше нарощення кількості числа циклів навантаження спричинятиме збільшення відстані до площин і по завершенню ультразвукового опромінення поверхня навантаження набуде вигляду, показаного на рис. 1*в*. Визначимо відстань до площин по завершенню озвучування, для чого потрібно знайти інтенсивність накопичених ультразвукових дефектів. Якщо загальну кількість циклів навантаження позначити через N то сумарна інтенсивність ψ_u генерованих дією розтягуючих напружень визначатиметься так:

$$\psi_u=V_1\left[\sqrt{2/3}(\sigma_m-\sigma_{m0})\right]^{V_2}\sin\beta\sum_{n=1}^{N}\int\limits_{(n-1)T}^{(n-1)T+T/4}\exp\left[-V_3\sqrt{2/3}(\sigma_m-\sigma_{m0})\tau\right]d\tau. \tag{11}$$

Провівши інтегрування, одержимо

$$\psi_u=W_1\sin\beta\sum_{n=1}^{N}\left\{1-\exp\left(-W_2\frac{T}{4}\right)+\left[\exp(-W_2T)-\exp\left(-W_2\left(T+\frac{T}{4}\right)\right)\right]+\ldots+\right.$$
$$\left.+\left[\exp(-W_2(N-1)T)-\exp\left(-W_2\left((N-1)T+\frac{T}{4}\right)\right)\right]\right\}=$$
$$=W_1\sin\beta\frac{(1-\exp(-W_2NT))(1-\exp(-W_2\,T/4))}{(1-\exp(-W_2T))}.$$

Розклавши $\exp(-W_2\,T/4)$ і $\exp(-W_2T)$ в ряди Тейлора до лінійного члена, остаточно одержимо

$$\psi_u=\frac{W_1}{4}(1-\exp(-W_2NT))\sin\beta. \tag{12}$$

Інтенсивність дефектів, накопичених при ультразвукових напруженнях стиску теж визначається формулою (12), оскільки зберігається незмінною підінтегральна функція і загальна область інтегрування у формулі (11). Межі інтегрування у цьому випадку будуть лише зсунутими на величину $T/2$: $\tau\in\left[(n-1)T/2;T+(n-1)T/2\right]$, $n=1,2,\ldots,N$. Якщо у формулу (12) замість величини N підставити певне значення $\tilde{n}$ з діапазону $1<\tilde{n}<N$, то отримаємо інтенсивність дефектів, генерованих за $\tilde{n}$ циклів озвучування.

Отже, відстань до площин по завершенню ультразвукового опромінення протягом часу $\tau_{озв}=NT$ для всіх значень β визначається за формулою

$$H^2(\tau_{озв})=2/3\sigma_S^2+\left\{\frac{W_1}{4}\sin\beta(1-\exp(-W_2\tau_{озв}))\right\}^2. \tag{13}$$

Визначимо межу пластичності матеріалу при одноосному розтязі після проведення ультразвукової обробки. Потрібно визначити таку мінімальну довжину вектора статичного навантаження

$\vec{\mathbf{S}}_S^u\left(\sqrt{2/3}\sigma_S^u,0,0\right)$, при якій почне виникати пластична деформація, тобто $H=\sqrt{2/3}\sigma_S^u$. Підставивши це значення у формулу (13), отримаємо

$$\sigma_S^u=\sqrt{\sigma_S^2+3/2\left\{\frac{W_1}{4}\sin\beta\left(1-\exp\left(-W_2\tau\right)\right)\right\}^2}\ . \qquad (14)$$

Висновок. Формула (13), опосередковано через величину $H(\tau_O)$, визначає поверхню пластичності матеріалу по завершенню ультразвукового опромінення, що дає змогу (формула (14)) аналітично описати збільшення межі пластичності матеріалу внаслідок ультразвукового опромінення. Ефект стабілізації σ_S^u символізує член $\exp\left(-W_2\tau\right)$, який з ростом τ прямує до нуля, притому тим інтенсивніше, чим більша амплітуда осцилюючого напруження, що підтверджується експериментальними даними [4-6].

РЕЗЮМЕ

В роботі аналітично описано кінетику формозміни поверхні пластичності при ультразвуковому опроміненні. Описання проведено в рамках синтезної теорії пластичності шляхом введення в розгляд усередненої міри дефектів будови кристалічної гратки матеріалу, породжених акустичною енергією та інтегралу неоднорідності, який задає залежність межі пластичності як функції швидкості навантаження.

SUMMARY

In the paper kinetics of yield surface at ultrasound irradiation has been analytically described. Description is developed in the framework of synthetic theory of plasticity by entering average measurement of crystal grid defects generated by acoustic energy and integral of non-homogeneity which govern yield stress as function of loading rate.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ:

1. Русинко А.К. Вплив ультразвуку на пластичне деформування металів // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Механіка. – 2003. – Вип.10. – С.157-162.
2. Русинко А.К. Вплив попереднього ультразвукового опромінення на механічні властивості металів // Вісн. Дніпр. ун-у. Сер. Механіка. – 2003. – Т.2. – Вип.6. – С.124-128.
3. Андрусик Я.Ф., Русинко К.Н. Пластическое деформирование упрочняющихся материалов при нагружении в трехмерном подпространстве пятимерного пространства девиаторов // Изв. РАН, Механіка твердого тела.с – 1993. – №27. – С.92-101.
4. Ультразвуковые колебания и их влияние на механические характеристики конструкционных материалов / Отв. ред. В.А.Кузьменко. – К.: Наук. думка, 1986. – 208 с.
5. Кулемин А.В. Ультразвук и диффузия в металлах. – М.: Металлургия, 1978. – 200 с.
6. Северденко В.П., Скрипниченко А.Л., Тяловский М.Д. Ультразвук и прочность. – Минск: Наука и техника, 1979. – 248 с.
7. Иванова В.С., Терентьев В.Ф. Природа усталости металлов. – М.: Металлургия, 1975. – 456 с.

Надійшла до редакції 14.02.2005 р.

УДК 532.5:518.5

МЕХАНИКА ГИДРОПУШКИ С ПОРШНЕВЫМ ПРИВОДОМ ДЛЯ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А.Н.Семко

Для получения импульсных высокоскоростных струй жидкости чаще всего применяют импульсный водомет (ИВ) и гидропушку (ГП) [1]. Теория установок развивалась в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости. Как правило, источником энергии в этих установках является поршень, который разгоняется сжатым газом. В работе [2] для несжимаемой жидкости получена форма профиля сопла ГП, при котором давление на поршень остается постоянным. По мнению авторов, в этом случае передача энергии от поршня к жидкости происходит наиболее эффективно. В работе [3] аналитически рассмотрено втекание свободного водяного заряда несжимаемой жидкости в сужающееся сопло ГП произвольного профиля. Получены распределения скорости и давления по длине установки и зависимости параметров от времени для ГП с соплом экспоненциальной формы. В работе [4] подобная задача решена численно для сжимаемой жидкости, проведено сравнение с несжимаемой жидкостью [3]. Отмечается, что максимальное различие скорости наблюдается на срезе сопла ГП и достигает 15 %. Максимальные значения давления практически не отличаются. В работе [5] описаны экспериментальные исследования ГП, приведено сравнение с результатами расчетов [3, 4]. В экспериментах проводилось высокоскоростное фотографирование струи и измерялась ее скорость. Давление внутри установки не регистрировалось. По результатам экспериментов делается вывод, что для струй со скоростями до 1500 м/с сжимаемостью жидкости можно пренебречь. Экспериментальные и теоретические исследования ИВ и ГП, выполненные Г. А. Атановым [6, 7] показали, что пренебрежение сжимаемостью жидкости может привести к существенным как качественным, так и количественным ошибкам. Например, для несжимаемой жидкости невозможно объяснить волновые процессы, протекающие в ГП ударного действия, которые сопровождаются кавитацией. В работе [8] оценивается влияние сжимаемости жидкости на параметры свободного водяного заряда в гидропушке. Квазиодномерное движение идеальной сжимаемой жидкости описывается уравнениями нестационарной газовой динамики, которые решаются численно. Численное решение для сжимаемой жидкости сравнивается с аналитическим решением для несжимаемой жидкости. Для анализа влияния сжимаемости жидкости предложен метод слабо сжимаемой жидкости, для которой скорость звука формально увеличивается в 10 –20 раз по сравнению со скоростью для нормальной жидкости. Из анализа результатов делаются выводы о допустимости пренебрежения сжимаемостью жидкости. Показано, что максимальные значения давления различаются больше, чем скорости, что не согласуется с выводами [3, 4]. В качестве критерия для оценки влияния сжимаемости жидкости предлагается использовать число Маха. При малых числах Маха пренебрежение сжимаемостью жидкости оправдано. При числах Маха, сравнимых с единицей, необходимо учитывать сжимаемость жидкости.

В настоящей работе в рамках модели несжимаемой жидкости рассматривается механика ГП с соплом произвольного профиля, которая работает на энергии поршня. От теории [2, 3] предлагаемая теория отличается тем, что в ней влияние поршня учитывается через граничное условие, а не как присоединенная масса поршня. Введен коэффициент, позволяющий оценить влияние поршня на параметры ГП и упростить формулы. Глубже проведен анализ течения жидкости в ГП, позволяющий лучше понять механику выстрела и оценить влияние сжимаемости жидкости на параметры ГП. Приведены примеры расчетов реальных конструкций ГП. Проведено сравнение с расчетами для сжимаемой жидкости, оценено влияние сжимаемости жидкости на параметры выстрела ГП.

Уравнения движения идеальной несжимаемой жидкости в ГП. Пусть в начальный момент времени водяной заряд длиной L, который движется в цилиндрическом стволе ГП вместе с поршнем со скоростью U_0, достигает входа в сужающееся сопло и начинает втекать в него. Будем считать жидкость идеальной и несжимаемой, профиль сопла заданным и плавно изменяющимся, а течение жидкости квазиодномерным. Входное и выходное сечения сопла обозначим F_c и F_s, а его длину - L_s, начало координат совместим с начальным положением поршня. Разобьем выстрел ГП на две стадии: втекание и истечение. Истечение начинается тогда, когда передний фронт воды достигает среза сопла.

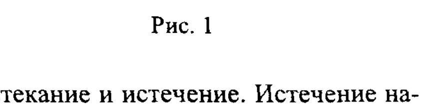


Рис. 1

Вначале рассмотрим стадию втекания. Запишем балансы массы и энергии на этой стадии

$$m_b=(L-X_R)\rho F_c+\rho\int\limits_L^{X_F} Fdx\,, \tag{1}$$

$$\frac{(m_b+m_p)U_0^2}{2}=\left[m_p+(L-X_R)\rho F_c\right]\frac{U_R^2}{2}+\int\limits_L^{X_F}\frac{\rho U^2}{2}Fdx\,. \tag{2}$$

Здесь ρ - плотность; X_R и X_F - координаты заднего и переднего фронта жидкости; m_p и m_b – масса поршня и воды; F – площадь поперечного сечения сопла; U – скорость жидкости. К уравнениям течения жидкости (1) и (2) присоединим уравнение движения поршня

$$m_p\dot{u}_p=-P_pF_c\,,$$

где $u_p=U_R$ - скорость поршня, P_p – давление на поршень, точка обозначает производную по времени.

Уравнение неразрывности (1) можно представить в другом удобном виде

$$U(X)F(X)=U_RF_c=U_FF_F\,, \tag{3}$$

где индексами “ R ” и “ F ” отмечены параметры на заднем и переднем фронте жидкости.

Перейдем к безразмерным переменным, используя масштабы: длину L, начальную скорость U_0, время L/U_0, площадь F_c, давление $\rho U_0^2/2$, массу $m_b=\rho LF_c$. Запишем уравнения (1) – (3) в безразмерном виде

$$x_R=\int\limits_1^{x_F} f(x)dx\,, \tag{4}$$

$$k_m=(k_m-x_R)u_R^2+\int\limits_1^{x_F} f(x)u^2(x)dx\,, \tag{5}$$

$$\dot{u}_R=-p_R/2k_p\,,\quad uf=u_Ff_F=u_R\,. \tag{6}$$

Здесь $k_p=m_p/m_b$, $k_m=(m_p+m_b)/m_b=k_p+1$ - коэффициенты. Безразмерные переменные обозначены малыми одноименными буквами, что и размерные. Используя (4) и (6), преобразуем (5) к виду

$$k_m=u_R^2\left(k_m-\int\limits_1^{x_F} f(x)dx+\int\limits_1^{x_F}\frac{dx}{f(x)}\right).$$

Отсюда найдем скорость переднего фронта как функцию его положения x_F

$$u_F=\frac{1}{f_F}\sqrt{\frac{k_m}{Q_F}}\,, \tag{7}$$

где $Q_F=k_m-\int\limits_1^{x_F} f(x)dx+\int\limits_1^{x_F}\frac{dx}{f(x)}$.

Распределение скорости жидкости по координате определяется выражением

$$u(x)=\frac{u_R}{f(x)}=\frac{1}{f(x)}\sqrt{\frac{k_m}{Q_F}}\,. \tag{8}$$

Для определения давления воспользуемся уравнением Эйлера, записанным в безразмерном виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}+\frac{p}{2}\right)=0\,.$$

Используя соотношение (6) для скорости и проинтегрировав уравнение Эйлера по x от x_R до текущей координаты x, получим выражение для давления

$$p(x)=-2\dot{u}_R\left(k_p+\int\limits_{x_R}^{x}\frac{d\zeta}{f(\zeta)}\right)-u_R^2\left(\frac{1}{f^2(x)}-1\right), \tag{9}$$

где $\dot{u}_R=w_R$ - ускорение заднего фронта жидкости, равное ускорению поршня. При интегрировании было учтено, что $\dot{u}_R$ зависит только от времени, а на поршне выполняется условие

$$p_R=-2k_p\dot{u}_R.$$

Для давления в стволе и сопле после интегрирования получим

$$p(x)=\begin{cases}-2\dot{u}_R\left(x-x_R+k_p\right), & x_R\le x\le 1;\\ -2\dot{u}_R\left(\int\limits_1^x\frac{dx}{f(x)}-\int\limits_1^{x_F}\frac{dx}{f(x)}\right)+u_R^2\left(\frac{1}{f_F^2}-\frac{1}{f^2}\right), & 1\le x\le x_F.\end{cases}$$

Подставив в выражение (9) $x=x_F$ и учтя условие на свободной поверхности $p_1(x_F)=0$, определим ускорение поршня

$$\dot{u}_R=-u_R^2\frac{1-f_F^2}{2f_F^2Q_F}=-k_m\frac{1-f_F^2}{2f_F^2Q_F^2}. \tag{10}$$

Соотношения (8), (9) и (10) дают зависимость скорости и давления от координаты x для разных положений переднего фронта жидкости x_F на стадии втекания.

При истечении воды из сопла масса и энергия жидкости в ГП уменьшаются. Пусть истечение струи началось в момент времени T_0. К моменту времени $T>T_0$ из сопла вытечет масса Δm и будет унесена энергия ΔE :

$$\Delta m=\rho F_s\int\limits_{T_0}^{T}U_s(t)dt,\quad \Delta E=\frac{1}{2}\rho F_s\int\limits_{T_0}^{T}U_s^3(t)dt.$$

Здесь индексом “s” отмечены параметры на срезе сопла. Рассмотрим случай, когда объем жидкости больше объема сопла и на начало истечения поршень находится в стволе ($X_R(T_0)<L$). Запишем баланс энергии

$$\frac{(m_b+m_p)U_0^2}{2}=\left[m_p+\left(X_L-X_R\right)\rho F_c\right]\frac{U_R^2}{2}+\int\limits_{X_L}^{X_F}\frac{\rho FU^2}{2}dx+\frac{\rho F_s}{2}\int\limits_{T_o}^{T}U_s^3(t)dt.$$

Преобразуем уравнение энергии к безразмерному виду, учитывая, что $F_sU_s=F_cU_R$:

$$k_m=\left(k_m-x_R+\int\limits_1^{x_s}\frac{dx}{f(x)}\right)u_R^2+k_F\int\limits_{t_0}^{t}u_R^3dt, \tag{11}$$

где $k_F=F_c/F_s$ - отношение площадей входного и выходного сечений сопла. После дифференцирования уравнения (11) по времени и преобразований получим:

$$(D_1-x_R)\dot{u}_R+D_2u_R^2=0, \tag{12}$$

где $D_1=k_m+\int\limits_1^{x_s}\frac{dx}{f(x)}$, $D_2=\left(k_F^2-1\right)/2$. Исключив из уравнения (12) производную по времени, придем к следующему уравнению

$$(D_1-x_R)u_R\frac{du_R}{dx_R}+D_2u_R^2=0\,. \tag{13}$$

Интегрируя уравнение (13) с учетом начальных условий на момент истечения, находим зависимость скорости заднего фронта жидкости (поршня) от его координаты

$$u_R=u_{R0}\left(\frac{D_1-x_R}{D_1-x_{R0}}\right)^{D_2}, \tag{14}$$

где $u_{R0}=\sqrt{k_m/Q_s}$, $x_{R0}=\int\limits_1^{x_s}f(x)dx$ - скорость и координата заднего фронта на начало истечения, а Q_s определяется по формуле (7).

Для получения зависимости параметров от времени, проинтегрируем уравнение (14) и после преобразований получим

$$t-t_0=\frac{k_m}{(D_2-1)u_{R0}^3}\left[\left(\frac{D_1-x_{R0}}{D_1-x_R}\right)^{D_2-1}-1\right], \tag{15}$$

где учтено, что $D_1-x_{R0}=Q_s=k_m/u_{R0}^2$. Явная зависимость x_R и u_R от времени определяется из выражений (15) и (14):

$$x_R=D_1-\frac{D_1-x_{R0}}{\left[1+\frac{(D_2-1)u_{R0}^3}{k_m}(t-t_0)\right]^{\frac{1}{D_2-1}}}, \tag{16}$$

$$u_R=u_{R0}\left[1+\frac{(D_2-1)u_{R0}^3}{k_m}(t-t_0)\right]^{\frac{-D_2}{D_2-1}}. \tag{17}$$

На практике для получения струй жидкости высокой скорости надо, чтобы отношение площадей k_F было большим. Но тогда коэффициент $D_2>>1$ и выражения (16) и (17) упрощаются

$$x_R=D_1-(D_1-x_{R0})\left[1+\frac{D_2u_{R0}^3}{k_m}(t-t_0)\right]^{-\frac{1}{D_2}},\quad u_R=u_{R0}\left[1+\frac{D_2u_{R0}^3}{k_m}(t-t_0)\right]^{-1}.$$

Зависимость скорости истечения от времени определяется выражением

$$u_S=u_{R0}k_F\approx u_{S\max}\left[1+\frac{u_{S\max}^3}{2k_Fk_m}(t-t_0)\right]^{-1}.$$

Скорость истечения в k_F раз больше скорости поршня. Истечение струи ГП всегда начинается с максимальной скорости, равной

$$u_{s\max}=u_{R0}k_F\,,$$

которая затем быстро уменьшается со временем.

При истечении на срезе сопла ставится граничное условие равенства нулю давления, которое эквивалентно условию на переднем фронте жидкости при втекании в сопло. Поэтому расчетные формулы для давления будут иметь такой же вид (16) и (17), как и при втекании. Ускорение $\dot{u}_R$ определяется из уравнения (12):

$$\dot{u}_R=\frac{D_2u_R^2}{D_1-x_R}=\frac{D_2u_{R0}^2}{D_1-x_{R0}}\left(\frac{D_1-x_R}{D_1-x_{R0}}\right)^{2D_2-1}.$$

Гидропушка с соплом экспоненциальной формы. Для примера рассмотрим течение в ГП с соплом экспоненциальной формы [2, 3, 4], безразмерная площадь которого изменяется по закону

$$f(x)=e^{-\alpha(x-1)},$$

где $\alpha=k_L\ln k_F$ - параметра сопла (напомним, что начальная координата сопла равна 1); $k_L=L/L_S$ - отношение длины водяного заряда к длине сопла.

После подстановки уравнения сопла и интегрирования найдем выражение

$$Q_F=k_m\frac{1}{\alpha}\left[1-e^{-\alpha(x_F-1)}\right]+\frac{1}{\alpha}\left[e^{\alpha(x_F-1)}-1\right]$$

и определим скорость переднего и заднего фронта жидкости

$$u_F=\frac{1}{f_F}\sqrt{\frac{k_m}{Q_F}},\quad u_R=u_Ff_F=\sqrt{\frac{k_m}{Q_F}}.$$

Координата заднего фронта находится по формуле

$$x_R=\frac{1}{\alpha}\left[1-e^{-\alpha(x_F-1)}\right].$$

Распределение скорости и давления по координате x задается формулами

$$u(x)=\begin{cases}u_R, \text{ если } x_R\le x\le 1;\\ u_Re^{\alpha(x-1)}, \text{ если } 1\le x\le x_F;\end{cases}\tag{18}$$

$$p(x)=\begin{cases}-2w_R\left(x-x_R+k_p\right), \text{ если } x_R\le x\le 1;\\ -2w_R\left[k_m+\frac{1}{\alpha}\left(e^{\alpha(x-1)}-1\right)\right]-u_R^2\left(e^{2\alpha(x-1)}-1\right), \text{ если } 1\le x\le x_F.\end{cases},\tag{19}$$

Ускорение поршня w_R определяется выражением

$$w_R=\frac{k_m\left(e^{2\alpha(x_F-1)}-1\right)}{2Q_F^2}.$$

Подробнее остановимся на моменте, соответствующем концу втекания. В этот момент давление внутри установки и скорость жидкости достигают максимальных значений. Характерной особенностью ГП является то, что истечение струи всегда начинается с максимальной скоростью. На этот момент для параметров ГП имеем

$$x_{R0}=\frac{k_F-1}{\alpha k_F}\approx\frac{1}{\alpha},\quad u_{R0}=\sqrt{k_m}\left[\frac{k_F}{\alpha}\left(1+\frac{\alpha k_m-2}{k_F}+\frac{\alpha}{k_F^2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\approx\sqrt{\frac{\alpha k_m}{k_F}}=\sqrt{\frac{k_Lk_m\ln k_F}{k_F}};$$

$$u_{S\max}=u_{R0}k_F\approx\sqrt{k_Lk_mk_F\ln k_F},\quad w_{R0}=\frac{k_m\alpha^2\left(k_F^2-1\right)}{2k_F^2}\left(1+\frac{\alpha k_m-2}{k_F}+\frac{\alpha}{k_F^2}\right)^{-2}\approx\frac{k_m\alpha^2}{2};$$

$$Q_S=\frac{k_F}{\alpha}\left(1+\frac{\alpha k_m-2}{k_F}+\frac{\alpha}{k_F^2}\right)\approx\frac{k_F}{\alpha}.$$

Приближенные выражения получены после разложения в ряд при условии $k_F>>1$, k_m, $k_L\approx 1$, что обычно выполняется для реальных ГП. Распределение скорости и давления жидкости в сопле на этот момент выражаются соотношениями (18) и (19) при значениях ускорения и скорости заднего фронта, равных w_{R0} и u_{R0}. Скорость монотонно возрастает от значения u_{R0} на поршне до значения $u_{S\max}$ на свободной поверхности. Отсутствие локальных экстремумов скорости следует из известной теоремы для потенциальных течений идеальной несжимаемой жидкости [9]. Давление в отличие от скорости изменяется немонотонно: в стволе возрастает линейно, а в сопле имеет максимум. Координата x_m максимума давления определяется выражением

$$x_m=1+\frac{1}{\alpha}\ln\frac{k_F^2-1}{2k_F\left(1+\frac{\alpha k_m-2}{k_F}+\frac{\alpha}{k_F^2}\right)}\approx1+\frac{1}{\alpha}\ln\frac{k_F}{2}.$$

Положение максимума давления слабо зависит от массы поршня и в приближенное выражение для x_m коэффициент k_m не входит. Положение максимума давления определяется геометрическими параметрами ГП через коэффициенты k_F и k_L и не зависит от массы поршня. Максимальное значение давления можно рассчитать по формуле

$$p_{\max}=\frac{w_{R0}^2}{u_{R0}^2\alpha^2}-2w_{R0}k_m+\frac{2w_{R0}}{\alpha}+2w_{R0}x_{R0}+u_{R0}^2\approx\frac{\alpha k_m k_F}{4}=\frac{u_{S\max}^2}{4}.$$

В процессе втекания координата максимума давления зависит от положения переднего фронта жидкости следующим образом

$$x_m(x_F)=1+\frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{-w_R(x_F)}{\alpha u_R^2(x_F)}\right).$$

Время втекания воды в сопло t_0 определяется интегралом

$$t_0=\int_1^{x_S}\frac{dx}{u(x)}=\frac{1}{\sqrt{k_m}}\int_1^{x_S}e^{-\alpha(x-1)}\sqrt{k_m-\frac{1}{\alpha}\left[1-e^{-\alpha(x-1)}\right]+\frac{1}{\alpha}\left[e^{\alpha(x-1)}-1\right]}dx,$$

который не выражается через элементарные функции.

Для характеристики добротности гидроимпульсных установок Г.А. Атанов предложил коэффициент превышения давления k_D, который равен отношению максимального давления торможения струи (для несжимаемой жидкости давление торможения равно скоростному напору) к максимальному статическому давлению в сопле [6, 10]. В безразмерном виде этот коэффициент выражается отношением

$$k_D=\frac{u_{S\max}^2}{p_{\max}}.$$

Максимальное значение давления в сопле гидропушки всегда меньше скоростного напора (k_D > 1). Для большого отношения площадей поперечного сечения ствола и сопла коэффициент k_D стремится к четырем. Это значение можно рассматривать как предельное для ГП с экспоненциальным соплом. Следовательно, при помощи ГП можно получить струю жидкости, скоростной напор которой в четыре раза превышает статическое давление внутри установки. По этому параметру ГП имеет существенное преимущество перед импульсным водометом (ИВ), для которого коэффициент k_D не превышает единицы [6]. При одном и том же максимальном давлении внутри установки при помощи ГП можно получить импульсную струю жидкости со скоростью в два раза больше, чем у ИВ.

Рассмотрим стадию истечения. Для экспоненциального сопла имеем

$$D_1=k_m+\frac{k_F-1}{\alpha}\approx k_m+\frac{k_F}{\alpha},\quad D_2=\frac{k_F^2-1}{2}\approx\frac{k_F^2}{2}.$$

Координата, скорость и ускорение поршня изменяются со временем по закону

$$x_R=x_{R0}+\frac{k_m}{u_{R0}^2}\left\{1-\left[1+\frac{\left(k_F^2-3\right)u_{R0}^3}{2k_m}(t-t_0)\right]^{\frac{-2}{k_F^2-3}}\right\}\approx x_{R0}+\frac{k_m}{u_{R0}^2}\left\{1-\left[1+\frac{k_F^2u_{R0}^3}{2k_m}(t-t_0)\right]^{\frac{-2}{k_F^2}}\right\};$$

$$u_R = u_{R0}\left[1+\frac{\left(k_F^2-3\right)u_{R0}^3}{2k_m}\left(t-t_0\right)\right]^{\frac{k_F^2-1}{k_F^2-3}} \approx u_{R0}\left[1+\frac{k_F^2 u_{R0}^3}{2k_m}\left(t-t_0\right)\right]^{-1}; \tag{20}$$

$$w_R = -w_{R0}\left[1+\frac{\left(k_F^2-3\right)u_{R0}^3}{2k_m}\left(t-t_0\right)\right]^{\frac{2\left(k_F^2-2\right)}{k_F^2-3}} \approx -w_{R0}\left[1+\frac{k_F^2 u_{R0}^3}{2k_m}\left(t-t_0\right)\right]^{-2}.$$

Из выражений (20) следует, что скорость и ускорение поршня монотонно изменяются, стремясь к нулю. Для несжимаемой жидкости поршень не может изменить направление своего движения и начать двигаться в противоположную сторону. Действительно, из уравнения неразрывности следует, что расход жидкости через любое сечение постоянный. Поэтому, если жидкость вытекает из сопла, то и в стволе она будет двигаться в ту же сторону. Изменить направление течения в сопле жидкость не может, поэтому поршень всегда будет двигаться в одну и ту же сторону.

Иначе дело обстоит для сжимаемой жидкости. Здесь ситуация, когда поршень и жидкость в сопле движутся в противоположных направлениях, возможна. Сжимаясь, жидкость запасает потенциальную энергию. Если площадь среза сопла не достаточно велика, то, расширяясь, жидкость будет двигать поршень в противоположном направлении. Это один из примеров, показывающих, что пренебрежение сжимаемостью жидкости может привести к неверному качественному и количественному описанию процесса.

Скорость истечения струи уменьшается со временем по закону

$$u_S = u_{S\max}\left[1+\frac{\left(k_F^2-3\right)u_{R0}^3}{2k_m}\left(t-t_0\right)\right]^{\frac{k_F^2-1}{k_F^2-3}} \approx u_{S\max}\left[1+\frac{u_{S\max}^3}{2k_F k_m}\left(t-t_0\right)\right]^{-1}. \tag{21}$$

Распределение скорости и давления по координате x и их зависимость от времени в фиксированном сечении задается выражениями

$$u(t,x)=\begin{cases} u_R(t), \text{ если } x_R(t)\le x\le 1; \\ u_R(t)e^{\alpha(x-1)}, \text{ если } 1\le x\le x_S; \end{cases}$$

$$p(t,x)=\begin{cases} -2w_R(t)\left[k_m+\frac{1}{\alpha}\left(e^{\alpha(x-1)}-1\right)\right]-u_R^2(t)\left(e^{2\alpha(x-1)}-1\right), \text{ если } 1\le x\le x_S; \\ -2w_R(t)\left(x-x_R(t)+k_p\right), \text{ если } x_R(t)\le x\le 1. \end{cases}$$

Скорость истечения струи ГП быстро уменьшается со временем. Передние частицы жидкости в струе движутся быстрее задних. Давление в струе всюду одинаковое, равное атмосферному. Наличие градиента скорости вдоль оси струи приводит к ее разрушению. Дальнобойность и эффективность струи ГП быстро уменьшаются с расстоянием до преграды, как выявлено в экспериментах [1, 11]. Эта характерная особенность ГП разных конструкций связана с механизмом ускорения жидкости в установке. При втекании жидкости в сужающееся сопло происходит перераспределение энергии, в результате которого передние частицы интенсивно ускоряются за счет энергии задних частиц. Удельная кинетическая энергия частиц жидкости вблизи переднего фронта намного больше средней удельной энергии. При истечении головная часть струи, имеющая максимальную скорость, отрывается от остальной массы и струя разрушается.

Оценим массу Δm, длину ΔL и энергию ΔE струи, считая, что скорость истечения струи уменьшается от максимальной до $u_1 = k_{u_S} u_{S\max}$ (k_{u_S} – коэффициент уменьшения скорости истечения):

$$\Delta m = \int_{t_0}^{t_1}\frac{u_S}{k_F}dt \approx \frac{2k_m\left(1-k_{u_S}\right)}{u_{S\max}^2\cdot k_{u_S}};\ \Delta L = \int_{t_0}^{t_1} u_S\, dt = \Delta m\cdot k_F;\ \Delta E = \int_{t_0}^{t_1}\frac{u_S^3}{2k_F}dt \approx \frac{k_m}{2}\left(1-k_{u_S}^2\right).$$

Для упрощения при интегрировании использовалась приближенная зависимость (21).

Результаты расчетов, оценка влияния сжимаемости жидкости. Для примера рассмотрим ГП с соплом экспоненциальной формы, описанную в работе [12], которая имеет следующие параметры: длина водяного заряда 140 мм, длина сопла 253 мм, радиус ствола 33 мм, радиус сопла 3,3 мм, масса поршня 2,25 кг, начальная скорость поршня 25 м/с.

Оценка эффективности преобразования энергии в ГП данной конструкции для k_{u_S} = 0,7 дает следующие результаты:

$$\Delta m = 0{,}315\cdot 10^{-2};\quad \Delta L = 0{,}315;\quad \Delta E = 0{,}51.$$

В размерных переменных эти значения равны: масса струи 1,5 г; энергия струи 439 Дж; длина струи 44 мм; средняя скорость струи 747 м/с. Максимальное давление $p_{\max}$ = 124,5 МПа, максимальная скорость струи $u_{S\max}$ = 898 м/с. Максимум давления приходится на безразмерную координату x_m = 2,49 (размерное значение x_m = 208 мм от входа в сопло). Коэффициент превышения давления равен k_D = 3,24, что меньше предельного значения 4. Примем за КПД установки отношение энергии струи к начальной энергии системы. Видно, что ГП обладает достаточно высоким к.п.д., который достигает 51 %. Вытекшая масса воды при этом составляет 0,32 %. Таким образом, ГП является устройством для эффективного преобразования кинетической энергии медленно движущегося поршня в кинетическую энергию высокоскоростной струи. Можно отметить, что КПД установки не зависит от ее геометрических размеров. А вот максимальная скорость истечения струи существенно зависит от геометрических размеров ГП.

На рис. 2 приведены распределения давления и скорости по длине ГП на конец втекания. Все величины на графиках безразмерные. За масштабы выбраны: постоянная B = 304.5 МПа в уравнении состояния воды в форме Тэта, скорость звука в воде a_0 = 1460 м/с, длина сопла. Кривые 1 – расчет по формулам для несжимаемой жидкости, кривые 2 и 3 – численный расчет методом МХН [8] для сжимаемой и слабо сжимаемой (скорость звука $a = 20\ a_0$) жидкости. Как видно, характер изменения скорости и давления для сжимаемой и несжимаемой жидкости одинаковый, а вот значения величин различаются. Максимальные значения скорости и давления для сжимаемой жидкости на 18 % и 40 % меньше, чем для несжимаемой. Максимум давления наблюдается при одной и той же координате. Коэффициенты превышения давления для несжимаемой и сжимаемой жидкости близки и равны 3,24 и 3,59.

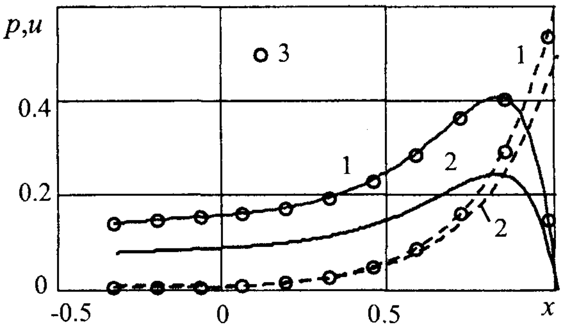


Рис. 2

В работе [8] в качестве критерия при оценке влияния сжимаемости на параметры течения жидкости предлагается использовать число Маха. Для рассматриваемого варианта число Маха М = 0,49 не очень велико, но сжимаемость жидкости необходимо учитывать. Для слабо сжимаемой жидкости число Маха М = 0,03 мало и совпадение результатов здесь полное (кривые 3). Совпадение улучшается при уменьшении начальной скорости и массы поршня. Отметим, что согласно данным [8] для свободного водяного заряда такое же различие в результатах для несжимаемой и сжимаемой жидкости наблюдается при значительно большем значении числа Маха М = 1,34.

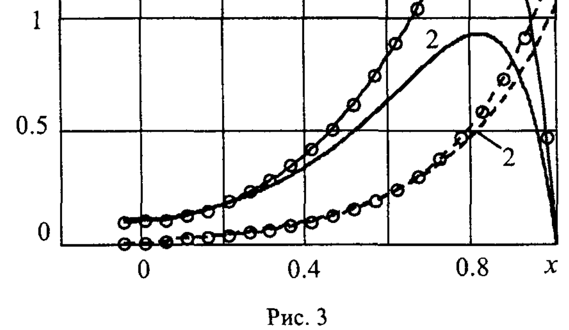


Рис. 3

На рис. 3 приведены распределения давления и скорости по длине экспериментальной ГП, конструкция которой описана в [11]. Данные установки, спроектированной согласно теории [2], следующие: длина экспоненциального сопла 1,24 м, радиус ствола 89 мм, радиус входа в сопло 30,9 мм, радиус выхода из сопла 4,175 мм. Ствол и сопло сопрягались конической вставкой длиной 100 мм. Масса поршня и воды равнялись 64 кг и 3,5 кг. Параметр сопла, рассчитанный по массе поршня α = 3,226 м$^{-1}$. Скорость поршня в варьировалась от 30 до 66 м/с.

Графики на рис. 3 построены для скорости поршня 30 м/с. Все величины на графиках приведены к безразмерным так же, как на рис. 2.

Сравнение с теорией несжимаемой жидкости показало, что пренебрежение сжимаемостью жидкости приводит к существенным ошибкам при больших скоростях движения жидкости. Например, при максимальной скорости поршня 66 м/с максимальная расчетная скорость струи равна 4045 м/с для несжимаемой и 3023 м/с для сжимаемой жидкости. Числа Маха соответственно равны M = 2,77 и 2,07. Максимальное значение давления в сопле наблюдается в конце втекания и составляет 2045 и 1105 МПа для несжимаемой и сжимаемой жидкости, соответственно. Как видно, для несжимаемой жидкости максимальные значения давления в сопле и скорости истечения в 1,85 и 1,34 раза больше, чем для несжимаемой. Распределения давления и скорости подобны для несжимаемой и сжимаемой жидкости. Отношение динамического напора к максимальному статическому давлению в сопле для сжимаемой жидкости равно 4,1, а для несжимаемой – точно 4. Максимумы давления для сжимаемой жидкости и несжимаемой жидкости практически совпадают. По этим параметрам совпадение результатов для двух моделей хорошее. При уменьшении скорости поршня совпадение результатов улучшается. При скорости поршня 30 м/с максимальные значения давления и скорости для несжимаемой жидкости в 1,53 и 1,19 раз больше, чем для несжимаемой. Причем значения скорости различаются меньше, чем давления. Числа Маха соответственно равны M = 1,26 и 1,06, т.е. движение сверхзвуковое.

РЕЗЮМЕ

Розглядається механіка гідрогармати з поршневим приводом. Для ідеальної та нестискаємої рідини у квазіодномірной постановці збудована математичка модель течії у гідрогарматі. Розподілення параметрів по простору і по часу отримані. Проаналізовано характер течії, що дозволяє краще зрозуміти механіку процесів та оцінити вплив стискаємості рідини на параметри гідрогармати.

SUMMARY

Mechanics of hydrocannon with piston drive was considered. The mathematical model for ideal incompressible liquid flow in hydrocannon was developed in quasione-dimensional approximation. The parameter's distribution in time and space was obtained. The nature of flow was analyzed in order to better understand the mechanics of process and to estimate the influence of compressible liquid on hydrocannon parameters.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лаврентьев М.А., Антонов Э.А., Войцеховский Б.В.* Вопросы теории и практики импульсных водяных струй. – Новосибирск, 1961. – 102 с.
2. *Войцеховский Б.В., Дудин Ю.А., Николаев Ю.А., Николаев В.П., Никитин В. В.* Кавитационный эффект в экспоненциальном струйном насадке // Динамика сплошной среды. – 1971. – Вып.9. – С.7-11.
3. *Ryhming J.L.* Analysis of unsteady incompressible jet nozzle flow // J.Appl. Math. Phys. – 1973. – Vol.24. – P.149-164.
4. *Glenn L.A.* The mechanics of the impulsive water cannon // Computers and Fluids. – 1975. – Vol.3. – P.197-215.
5. *Edney B.* Experimental studies of pulsed water jets // Proc. 3rd Intern. Sympos. on Jet Cutting Technology. – Chicago (Illinois). –1976. – P.11-26.
6. *Атанов Г.А.* Гидроимпульсные установки для разрушения горных пород. – К.: Вища шк., 1987. – 155 с.
7. *Повх И.Л., Атанов Г.А.* Влияние сжимаемости на течение воды и других жидкостей // Гидромеханика. – 1969. – Вып.15. – С.69-76.
8. *Семко А.Н.* О влиянии сжимаемости жидкости на параметры гидропушки // Инженерно-физический журнал. – 2001. – Т.74. – №1. – С.1-5.
9. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. – М.: Физматгиз. – 1963. – Ч.1. – 584 с.
10. *Атанов Г.А., Семко А.Н.* О соотношении между динамическим давлением ультраструи и статическим давлением в установке. // Аэрогазодинамика нестационарных процессов: Сб. науч. тр. Томск: ТГУ. – 1987. – С.9-13.
11. *Cooley W.C., Lucke W.N.* Development and Testing of a Water Cannon for Tunneling // Proc. 2nd Intern. Sympos. on Jet Cutting Technology. Cambridge (England). – 1974. – P.103-117.
12. *Атанов Г.А., Семко А.Н., Украинский Ю.Д.* Исследование внутренней баллистики гидропушки // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1983. – №4. – С.168-170.

Надійшла до редакції 12.10.2004 р.

ВІСНИК ДОНЕЦЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ, Сер. А: Природничі науки, 2005, вип. 1

УДК 532.612

ИССЛЕДОВАНИЕ СПОСОБОВ ШУНТИРОВАНИЯ КРОВЕНОСНЫХ СОСУДОВ

А.Б. Ступин, Ю.А. Скобцов, Н.В. Финошин, Ю.В. Родин**, В.С. Оверко*
**Донецкий национальный технический университет,*
***Институт неотложной и восстановительной хирургии АМН Украины, г. Донецк*

Проводимые операции по шунтированию пораженных кровеносных сосудов требуют аналитического исследования биогидромеханики крови. В частности, для увеличения эффективности работы шунта требуется определить факторы, которые влияют на кровоток в шунтированном сосуде [1].

Основной вклад в увеличение сопротивления составляют кривизна входных и выходных зон шунта, угол входа и пульсационный характер течения крови.

При пульсационном течении крови в шунтированном сосуде на стенки со стороны жидкости действует демпфирующая сила. Это происходит потому, что трение на стенке опережает по фазе на $\frac{\pi}{4}$ скорость потока. Данный факт обусловлен тем, что градиент давления, обусловленный колебаниями, действует на все слои жидкости одинаково и вследствие этого в замедленных слоях вблизи границы происходит более быстрое нарастание скорости в направлении ускорения, чем это происходит в удаленных от границы слоях. Касательные силы на поверхности дают вклад в эту силу порядка $\mathrm{Re}^{-\frac{1}{2}}$, вклад от нормальных напряжений имеет тот же порядок. Вследствие этого шунт находится в колебательном движении [2]. Изменение формы шунта, направления входа шунта в сосуд определяю сопротивление течению кровяного потока. В данной работе приведены расчеты потерь давления для случаев угла входа 45 и 70 градусов.

Расчетная область и система координат приведена на рис.1.

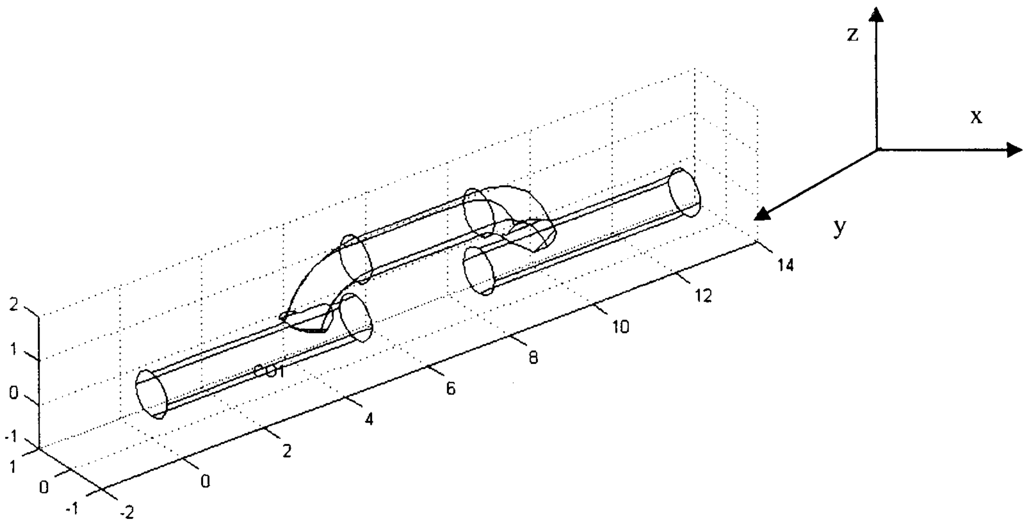


Рис.1. Схема расчетной области и система координат.

Система расчетных уравнений имеет вид:

$$u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial u}{\partial z}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \qquad (1)$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial z}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right), \quad (2)$$

$$u\frac{\partial w}{\partial y}+v\frac{\partial w}{\partial z}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0. \quad (4)$$

Система содержит следующий безразмерный параметр:

$\mathrm{Re}=\frac{U\cdot D}{v}$ – число Рейнольдса.

В расчете использовалось $\mathrm{Re}=500$, полученное при следующих значениях параметров: скорость $U=0{,}2\ м/с$, диаметр сосуда $D=0{,}01\ м$, динамическая вязкость $\mu=4{,}5\ сПз$.

В качестве начального приближения задаются поля скоростей и давления. В качестве начального поля скоростей выбран профиль Пуазейля.

Для удовлетворения граничных условий на препятствии (атеросклеротической бляшке) применим описанный в работе [3] метод фиктивных областей с продолжением по младшим коэффициентам.

Для численного решения сформулированной задачи в качестве основы был взят описанный в [4] метод расщепления. В отличие от [4] в настоящей работе для аппроксимации конвективных членов использованы разности против потока, что приводит к повышению устойчивости расчетного алгоритма для более высоких чисел Рейнольдса. Для проверки устойчивости полученной системы уравнений применены методы дифференциальных приближений и фон Неймана [5,6].

Система уравнений (1)-(4) дополняется следующими краевыми условиями.

В качестве начального поля скоростей выбран профиль Пуазейля:

$$u(0,x,y,z)=(1-r^2),\ v(0,x,y,z)=0,\ \mathrm{w}(0,\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})=0.$$

На твердых стенках задается условие прилипания, во входном сечении – профиль Пуазейля, на выходе – «мягкие» граничные условия.

Начальное распределение давления принимается гидростатическим. Следовательно, рассматриваемое избыточное давление P будет равно нулю, т.е. P(0,x,y,z)=0.

В результате численного моделирования получены поля компонент скорости и давления.

Для определения интенсивности взаимодействия потока крови со стенками сосуда и поверхностью бляшки по полям компонент скорости определялась завихренность по формуле $\overline{\omega}=rot\overline{V}$.

Изменение формы шунта при прохождении пульсовой волны давления приводит к тому, что меняется угол входа потока в шунт, увеличение которого приводит к более значительному искривлению линий тока, что в свою очередь, увеличивает сопротивление. Это видно из сравнения рис. 2 и рис. 4.

Если сравнить потери давления по отношению к потерям в прямой цилиндрической трубе, то получим:

1) для угла 70° - $\frac{\Delta P}{\Delta P_{экв}}=4$,

2) для угла 45° - $\frac{\Delta P}{\Delta P_{экв}}=2{,}7$.

На рис.3 и рис.5 показано распределение поля скорости. В случае угла 45 градусов наблюдается уменьшение отрывных зон и значительно меньшая деформация профиля скорости.

Сравнение расчетных данных показывает, что в первом случае потери давления по сравнению с прямой трубой гораздо меньше, чем во втором. Поэтому желательно удерживать шунт к сосуду в пределах 45 градусов.

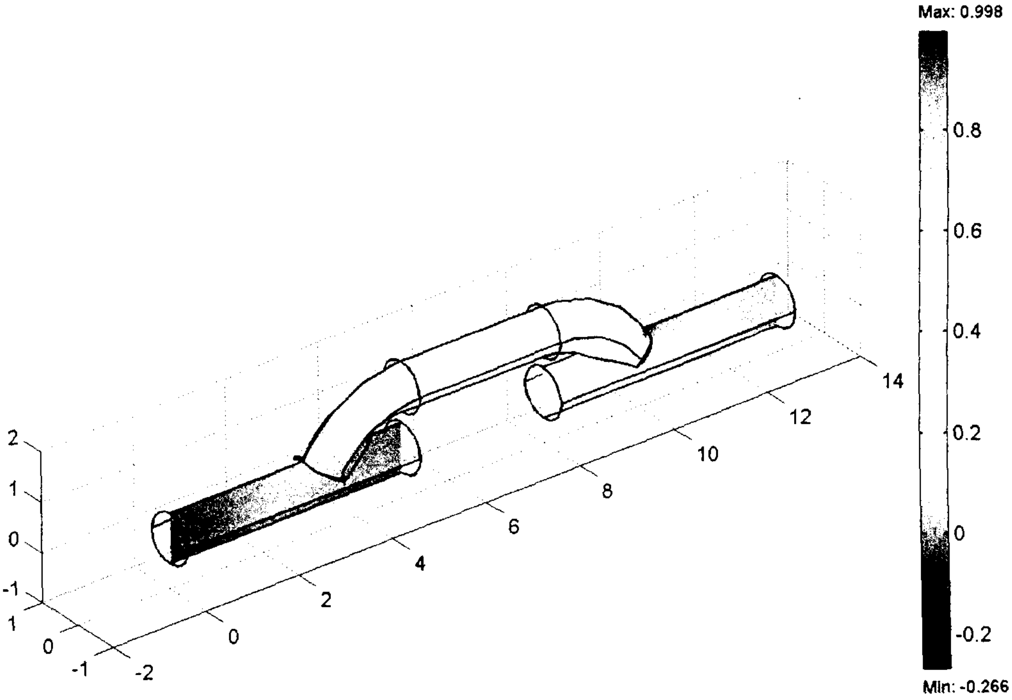


Рис. 2. Поле давления. Угол раскрытия 45°.

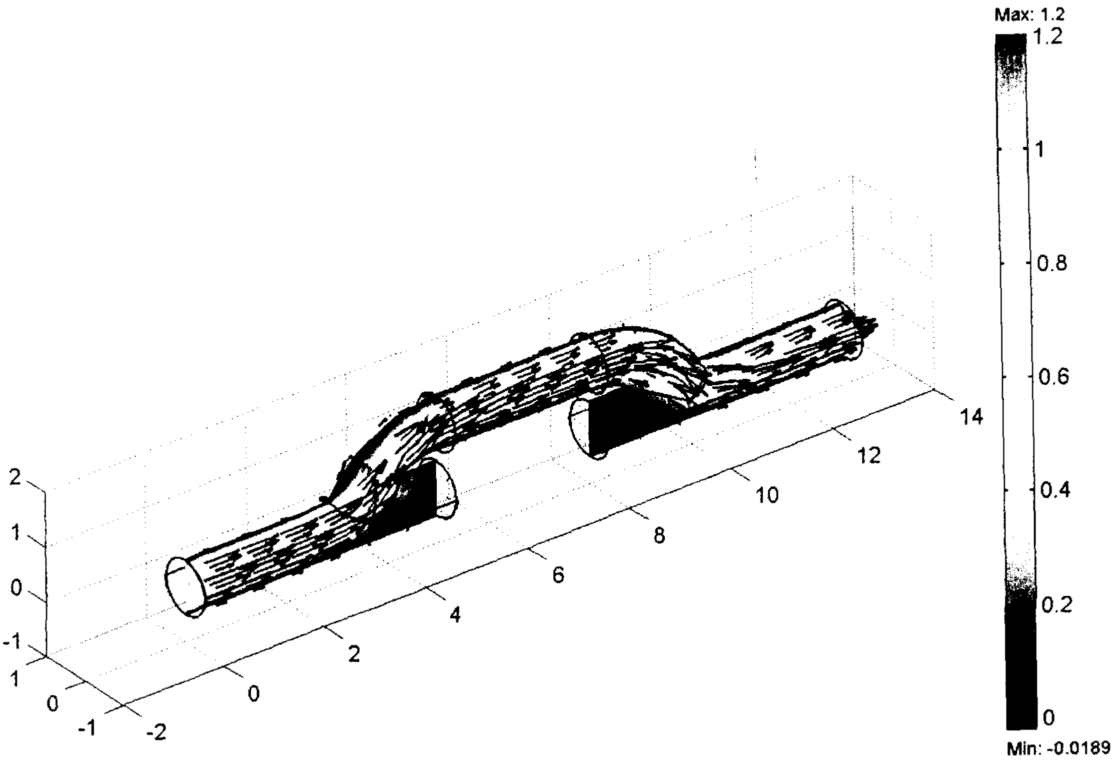


Рис. 3. Поле скорости. Угол раскрытия 45°.

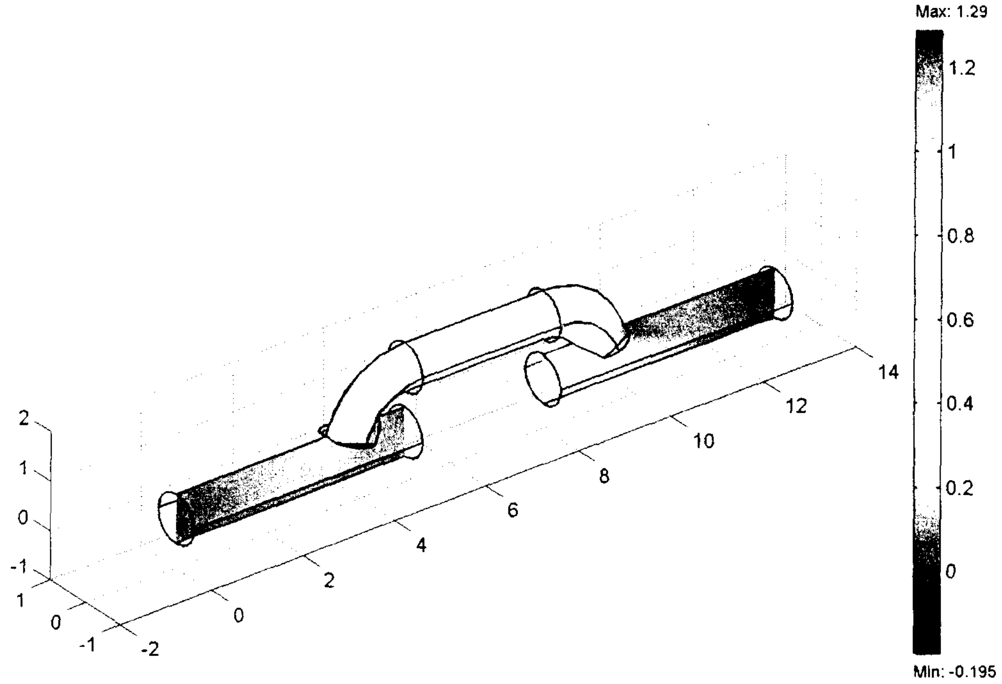


Рис. 4. Поле давления. Угол раскрытия 70°.

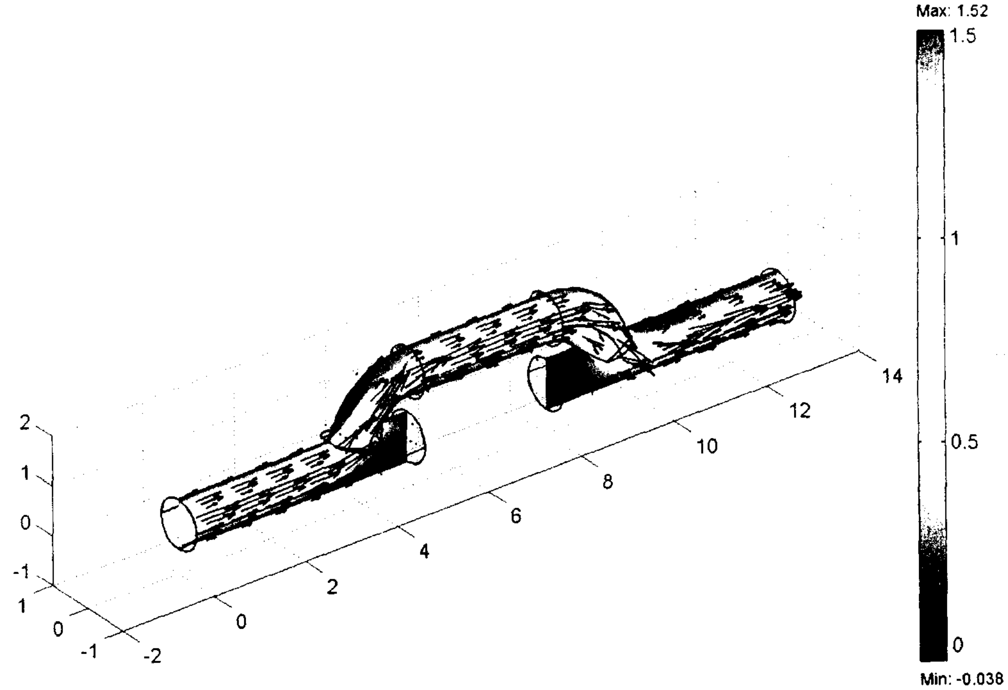


Рис. 5. Поле скорости. Угол раскрытия 70°.

РЕЗЮМЕ

Досліджені різні види шунтування судин. Визначений оптимальній кут входу шунта в уражений сосуд.

SUMMARY

Various kinds of shunting of vessels are investigated. The optimum corner of an entrance of the shunt in the struck vessel is determined.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. Golledge, R. Greenhalgh. The Symptomatic Carotid Plague //Stroke. – 2000. – V. 31.– P. 774-778.
2. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М: Наука.– 1997.– 267 с.
3. Вабищевич П.Н. Метод фиктивных областей в задачах математической физики. М.: МГУ, 1991.– 156с.
4. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М, Физматгиз, 1994. – 245 с.
5. Яненко Н.Н., Шокин Ю.И. О корректности первых дифференциальных приближений разностных схем. – ДАН СССР, 1968., 182, №4, с.776-778.
6. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Наука, 1976. – 616 с.
7. Э. Ричардсон. Динамика реальных жидкостей. М.: Мир, 1965. – 328 с.

Надійшла до редакції 24.03.2005 р.