МАТЕМАТИКА

УДК 519.21

О СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С БЫСТРЫМИ СЛУЧАЙНЫМИ ОСЦИЛЛЯЦИЯМИ

Б.В.Бондарев, А.А.Симогин

1. Введение. В данной работе получены оценки близости реализаций решения задачи Коши для стохастического дифференциального уравнения в частных производных параболического типа с быстрыми случайными осцилляциями и решения задачи Коши для соответствующего уравнения Ито.

Рассмотрим в слое $D_{n+1}^{(T)} = [0,T]\times R_n$ задачу Коши для уравнения

$$\frac{\partial U_\varepsilon(t,x)}{\partial t} = L_{t,x}U_\varepsilon(t,x) + A(t,x,U_\varepsilon(t,x)) + B(t,x,U_\varepsilon(t,x))\eta(t/\varepsilon), \tag{1}$$
$$U_\varepsilon(0,x) = u_0(x),$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $L_{t,x} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ – равномерно эллиптический оператор, $\eta(t)$ – центрированный стационарный в узком смысле случайный процесс, удовлетворяющий условию равномерно сильного перемешивания, с коэффициентом перемешивания $\varphi(t)$, $A(t,x,y)$ и $B(t,x,y)$ некоторые неслучайные функции, удовлетворяющие условию Липшица:

$$|A(t,x,y_1) - A(t,x,y_2)| + |B(t,x,y_1) - B(t,x,y_2)| \le L|y_1 - y_2|. \tag{2}$$

Пусть коэффициенты оператора $L_{t,x}$ и функции $A(t,x,y)$, $B(t,x,y)$ принадлежат классу $H^{l,l/2}\left(\overline{D_{n+1}^{(T)}}\right)$, а функция $u_0(x)$ классу $H^{l+2}\left(\overline{R_n}\right)$ тогда существует и единственно классическое решение задачи (1) из класса функций $H^{l+2,l/2+1}\left(\overline{D_{n+1}^{(T)}}\right)$ [1].

2. Некоторые вспомогательные результаты. Относительно процесса $\eta(t)$ потребуем выполнения условий

$$M\eta(t) = 0\,,\ D\int_0^T \eta(u)du = 1\,, P\left\{\sup_{0\le t\le T}|\eta(t)| > R\right\} \le C_1 \exp\{C_2 R\}$$
$$0 < \sigma = M\left(\int_0^T \eta(u)du\right)^2 + 2\sum_{j=1}^\infty M\int_0^T \eta(u)du\int_{jT}^{(j+)T}\eta(u)du < +\infty\,, \tag{3}$$

В работе [2] приведены условия, достаточные для слабой сходимости процесса $\zeta_\varepsilon(t) = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\sigma}}\int_0^{t/\varepsilon}\eta(u)du$ к $w(t)$, $t\in[0,T]$. (Здесь $w(t)$, $t\in[0,T]$, стандартный винеровский процесс.)

В тоже время, опираясь на результат известной теоремы А.В.Скорохода [3] стр.13, в работе [4] получены условия, при выполнении которых на одном вероятностном пространстве с $w(t)$ можно построить процесс $\tilde{\zeta}_\varepsilon(t)$, имеющий одинаковые конечномерные распределения с $\zeta_\varepsilon(t)$. Причем $\tilde{\zeta}_\varepsilon(t)$ будет уже сходиться по вероятности к $w(t)$ в каждой точке отрезка $[0,T]$. А также в работе [4] найдена оценка скорости сходимости по вероятности нормированного интеграла $\tilde{\zeta}_\varepsilon(t)$ к $w(t)$, $t\in[0,T]$ в метрике пространства $C_{[0,T]}$.

На основании результата работы [4] можно в частности получить оценку для вероятности выхода за уровень величины $\sup\limits_{0\le t\le T}\left|\tilde{\zeta}_\varepsilon(t)\right|$. А именно справедлив результат.

Лемма 1. Пусть выполнены условия теоремы 1 [4]: для некоторого r, $2<r<5$, справедливо $\varphi(s)\le As^{-g}$, где $g>j(u)(j(u)-1)$, $u=(2+5r)/2(5-r)$, $j(u)=2\min\{k\in N:2k\ge u\}$. Функция $\beta(\varepsilon)$ такая, что $\frac{\beta(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}\to\infty$ при $\varepsilon\to 0$, $\mu(\varepsilon)=C_0\left(\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{r/2-1}M\left|\int_0^T\eta(u)du\right|^r\right)^{1/(r+1)}$. Тогда при $R-\beta(\varepsilon)-\mu(\varepsilon)>1$ верно следующее неравенство

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\tilde{\zeta}_\varepsilon(t)\right|>R\right\}\le\left(1+\frac{3}{\varepsilon}C_1\right)\exp\left\{-\frac{C_2\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma}}{4\sqrt{\varepsilon}}\right\}+\mu(\varepsilon)+ \tag{4}$$

$$+\frac{C_3}{R-\beta(\varepsilon)-\mu(\varepsilon)}\exp\left\{-\frac{(R-\beta(\varepsilon)-\mu(\varepsilon))^2}{2T}\right\},\ C_3=\frac{4\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Аналогичный результат можно получить для процесса $\eta'(u)=|\eta(u)|-M|\eta(u)|$. Не трудно убедиться в том, что процесс $\eta'(t)$, $t\ge 0$, является стационарным в узком смысле случайным процессом с нулевым средним, который удовлетворяет условию равномерно сильного перемешивания.

Лемма 2. Если для процесса $\eta'(t)$, $t\ge 0$, выполнены условия леммы 1,тогда если $\mu'(\varepsilon)$ и σ' определены аналогично $\mu(\varepsilon)$ и σ, верна следующая оценка:

$$P\left\{\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\sigma}}\int_0^{T/\varepsilon}(|\eta(t)|-M|\eta(t)|)dt>R\right\}\le\left(1+\frac{3}{\varepsilon}C_4\right)\exp\left\{-\frac{C_2\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma'}}{4\sqrt{\varepsilon}}\right\}+\mu'(\varepsilon)+ \tag{5}$$

$$+\frac{C_3}{R-\beta(\varepsilon)-\mu'(\varepsilon)}\exp\left\{-\frac{(R-\beta(\varepsilon)-\mu'(\varepsilon))^2}{2T}\right\},\ C_4=C_1e^{bC_2}.$$

3. Оценки близости для реализаций решений уравнения с быстрыми осцилляциями и уравнения Ито.

Вместе с задачей (1) рассмотрим задачу Коши с теми же начальными условиями, сформулированную для уравнения

$$\frac{\partial Y_\varepsilon(t,x)}{\partial t}=L_{t,x}Y_\varepsilon(t,x)+A(t,x,Y_\varepsilon(t,x))+B(t,x,U_0(t,x))\eta(t/\varepsilon),\ Y_\varepsilon(0,x)=u_0(x), \tag{6}$$

здесь $U_0(t,x)$ – решение задачи

$$\frac{\partial U_0(t,x)}{\partial t}=L_{t,x}U_0(t,x)+A(t,x,U_0(t,x)),\ U_0(0,x)=u_0(x). \qquad (7)$$

Решения задач (6) и (7) существуют и единственны в классе функций $H^{l+2,\,l/2+1}\left(\overline{D_{n+1}^{(T)}}\right)$ [1].

Пусть поле $\widetilde{Y}_\varepsilon(t,x)$ построено на одном вероятностном пространстве с $w(t)$ и является решением задачи

$$\frac{\partial \widetilde{Y}_\varepsilon(t,x)}{\partial t}=L_{t,x}\widetilde{Y}_\varepsilon(t,x)+A(t,x,\widetilde{Y}_\varepsilon(t,x))+B(t,x,U_0(t,x))\eta(t/\varepsilon),\ \widetilde{Y}_\varepsilon(0,x)=u_0(x).$$

Относительно решений задач (6) и (7) справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. Путь существуют и единственны решения задач (1), (6) и (7), а также

а) выполнено условие (2);

б) $\int_0^T\left(\int_{R_n}\left|L_{t,x}^*B(t,x,U_0(t,x))\right|^2dx\right)^{1/2}dt\le A_1$, $L_{t,x}^*$ – оператор, сопряженный к $L_{t,x}$,

$$\int_0^T\left(\int_{R_n}\left|\frac{\partial B(t,x,U_0(t,x))}{\partial t}\right|^2dx\right)^{1/2}\le A_2,$$

$$\sup_{0\le t\le T}\left(\int_{Rn}\left|B(t,x,U_0(t,x))\right|^2dx\right)^{1/2}\le A_3;$$

в) выполнены условия леммы 1, тогда справедлива оценка:

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}\int_{R_n}\left|\frac{Y_\varepsilon(t,x)-U_0(t,x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right|dx>R\right\}\le\left(1+\frac{3}{\varepsilon}C_1\right)\exp\left\{-\frac{C_2\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma}}{4\sqrt{\varepsilon}}\right\}+\mu(\varepsilon)+$$
$$+\frac{C_3}{R/N_1-\beta(\varepsilon)-\mu(\varepsilon)}\exp\left\{-\frac{(R/N_1-\beta(\varepsilon)-\mu(\varepsilon))^2}{2T}\right\}, \qquad (8)$$

Доказательство. Введем в рассмотрение, следующее случайное поле: $\xi_\varepsilon^{(1)}(t,x)=\frac{Y_\varepsilon(t,x)-U_0(t,x)}{\sqrt{\varepsilon}}$. Оно удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\xi_\varepsilon^{(1)}(t,x)}{\partial t}=L_{t,x}\xi_\varepsilon^{(1)}(t,x)+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(A(t,x,Y_\varepsilon(t,x))-A(t,x,U_0(t,x))\right)+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}B(t,x,U_0(t,x))\eta(t/\varepsilon), \qquad \xi_\varepsilon^{(1)}(0,x)=0. \qquad (9)$$

Классическое решение задачи Коши (9) в силу сделанных предположений можно записать [1] формулой:

$$\xi_\varepsilon^{(1)}(t,x)=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t\int_{R_n}z(t,x,s,y)\left(A(s,y,Y_\varepsilon(s,y))-A(s,y,U_0(s,y))\right)dyds+ \qquad (10)$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t\int_{R_n}z(t,x,s,y)B(s,y,U_0(s,y))\eta(s/\varepsilon)dyds,$$

здесь $z(t,x,s,y)$ – единственное фундаментальное решение задачи Коши [1] такое, о $z(t,x,s,y)$, $\int_{R_n} z(t,x,s,y)dy = 1$ и $z(t,x,s,y) \le C(t-s)^{-n/2} \exp\left\{-\mu \frac{|x-y|^2}{t-s}\right\}$. Из последнего неравенства вытекает оценка $\int_{R_n} z(t,x,s,y)dx \le C\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}$. Далее из (10) следует

$$\left|\xi_\varepsilon^{(1)}(t,x)\right| \le L\int_0^t \int_{R_n} z(t,x,s,y)\left|\xi_\varepsilon^{(1)}(s,y)\right|dyds + \tag{11}$$

$$+\left|\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t \int_{R_n} z(t,x,s,y)B(s,y,U_0(s,y))\eta(s/\varepsilon)dyds\right|.$$

Далее

$$\int_{R_n}\int_0^t \int_{R_n} z(t,x,s,y)\left|\xi_\varepsilon^{(1)}(s,y)\right|dydsdx \le C\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}\int_0^t \int_{R_n}\left|\xi_\varepsilon^{(1)}(s,y)\right|dyds. \tag{12}$$

Пусть $\zeta_\varepsilon = \sup\limits_{0\le t\le T}\left|\zeta_\varepsilon(t)\right|$. Для второго слагаемого в правой части (11) имеем

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{R_n}\left|\int_0^t \int_{R_n} z(t,x,s,y)B(s,y,U_0(s,y))\eta(s/\varepsilon)dyds\right|dx \le \sqrt{\sigma}\zeta_\varepsilon\left[A_3 + C\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}(A_1+A_2)\right] \tag{13}$$

Обозначим $\xi_\varepsilon^{(1)}(t) = \int_{R_n}\left|\xi_\varepsilon^{(1)}(t,x)\right|dx$, $\xi_\varepsilon^{(1)} = \sup\limits_{0\le t\le T}\xi_\varepsilon^{(1)}(t)$. Из (11) с учетом неравенств (12) и (13) получаем оценку

$$\xi_\varepsilon^{(1)}(t) \le LC\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}\int_0^t \xi_\varepsilon^{(1)}(s)ds + \sqrt{\sigma}\zeta_\varepsilon\left(A_3 + C\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}(A_1+A_2)\right). \tag{14}$$

Из (14), применив лемму Гронуолла, получаем

$$\xi_\varepsilon^{(1)} \le \exp\left\{LCT\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}\right\}\left[\sqrt{\sigma}\zeta_\varepsilon\left(A_3 + C\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}(A_1+A_2)\right)\right].$$

Учитывая результат леммы 1, из последнего следует оценка (8), где

$$N_1 = \sqrt{\sigma}\exp\left\{LCT\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}\right\}\left(A_3 + C\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}(A_1+A_2)\right).$$

Лемма 4. При выполнении условий леммы 3 справедлива оценка

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}\int_{R_n}\left|\frac{U_\varepsilon(t,x)-Y_\varepsilon(t,x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right|dx > R\right\} \le \left(1+\frac{3}{\varepsilon}C_1\right)\exp\left\{-\frac{C_2\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma}}{4\sqrt{\varepsilon}}\right\} +$$

$$+\frac{C_3}{R/N_2-\beta(\varepsilon)-\mu(\varepsilon)}\exp\left\{-\frac{(R/N_2-\beta(\varepsilon)-\mu(\varepsilon))^2}{2T}\right\} + \mu(\varepsilon) + \mu'(\varepsilon) + \tag{15}$$

$$+\frac{C_3\sqrt{\varepsilon\sigma'}}{1-\sqrt{\varepsilon\sigma'}(\beta(\varepsilon)-\mu'(\varepsilon))}\exp\left\{-\frac{(1-\sqrt{\varepsilon\sigma'}(\beta(\varepsilon)-\mu'(\varepsilon)))^2}{2T\varepsilon\sigma'}\right\} + \left(1+\frac{3}{\varepsilon}C_4\right)\exp\left\{-\frac{C_2\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma'}}{4\sqrt{\varepsilon}}\right\}.$$

Доказательство. Пусть теперь $\xi_\varepsilon^{(2)}(t,x)=\dfrac{U_\varepsilon(t,x)-Y_\varepsilon(t,x)}{\sqrt{\varepsilon}}$, а $\xi_\varepsilon^{(2)}(t)$ и $\xi_\varepsilon^{(2)}$ определены как в лемме 1. Из (1) и (6) следует оценка

$$\left|\xi_\varepsilon^{(2)}(t,x)\right|\le L\int_0^t\int_{R_n} z(t,x,s,y)\left|\xi_\varepsilon^{(2)}(t,x)\right|dyds+L\int_0^t\left|\eta(s/\varepsilon)\right|\int_{R_n} z(t,x,s,y)\left|\xi_\varepsilon^{(2)}(s,y)\right|dyds+ \quad (16)$$

$$+L\int_0^t\left|\eta(s/\varepsilon)\right|\int_{R_n} z(t,x,s,y)\left|\frac{Y_\varepsilon(s,y)-U_0(s,y)}{\sqrt{\varepsilon}}\right|dyds.$$

Проинтегрировав (16) по x и применив лемму Гронуолла, получаем

$$P\left\{\xi_\varepsilon^{(2)}>R\right\}\le P\left\{L\exp\left\{CL\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}\int_0^T\left(\left|\eta(s/\varepsilon)\right|-M\left|\eta(s/\varepsilon)\right|\right)ds+\right.\right. \quad (17)$$

$$\left.+CL\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}(T+Tb)\right\}\sup_{0\le t\le T}\int_{R_n}\left|\frac{Y_\varepsilon(s,y)-U_0(s,y)}{\sqrt{\varepsilon}}\right|dy$$

$$\left.\left(\int_0^T\left(\left|\eta(s/\varepsilon)\right|-M\left|\eta(s/\varepsilon)\right|\right)ds+bT\right)>R\right\}.$$

Учитывая оценку (5) из неравенства (17) получим (15), где

$$N_2=N_1L(1+Tb)\exp\left\{CL\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}(1+T+Tb)\right\}$$

Лемма доказана.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Ито

$$\partial_t V_\varepsilon(t,x)=L_{t,x}V_\varepsilon(t,x)dt+A(t,x,V_\varepsilon(t,x))dt+\sqrt{\varepsilon\sigma}B(t,x,U_0(t,x))dw(t), \quad (18)$$
$$V_\varepsilon(0,x)=u_0(x),$$

здесь $w(t)$ стандартный винеровский процесс. У задачи (18) существует и единственно “сильное” классическое решение (см. например[6] и [7]) из класса функций, для которых $\sup\limits_{(t,x)\in D_{n+1}^{(t)}} X^2(t,x)<\infty$ при выполнении условий: матрица $a_{ij}(t,x), i,j=\overline{1,n}$ симметрична и положительно определена, коэффициенты оператора $L_{t,x}$ ограничены и непрерывны по t ($a_{ij}(t,x), i,j=\overline{1,n}$ непрерывны по t равномерно относительно переменной x) имеют одну непрерывную ограниченную гельдерову по x производную; функции $A(t,x,u)$ и $B(t,x,u)$ удовлетворяют условию $F_{1,\alpha}$ [7].

Лемма 5. Пусть существуют и единственны решения задач (6) и (18). Тогда в условиях леммы 3 верна следующая оценка

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}\int_{R_n}\left|\frac{\tilde{Y}_\varepsilon(t,x)-V_\varepsilon(t,x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right|dx>\beta(\varepsilon)+\mu(\varepsilon)\right\}\le\left(1+\frac{3}{\varepsilon}C_1\right)\exp\left\{-\frac{C_2\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma}}{4\sqrt{\varepsilon}N_1}\right\}+\frac{\mu(\varepsilon)}{N_1} \quad (19)$$

Доказательство. Обозначим $\xi_\varepsilon^{(3)}(t,x)=\dfrac{\tilde{Y}_\varepsilon(t,x)-V_\varepsilon(t,x)}{\sqrt{\varepsilon}}$. Очевидно, что

$$\xi_\varepsilon^{(3)}\le\exp\left\{LCT\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}\right\}\left(A_3+C\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}(A_1+A_2)\right)\sqrt{\sigma}\sup_{0\le t\le T}\left|\zeta_\varepsilon(t)-w_\varepsilon(t)\right|.$$

С учетом оценки теоремы 1работы [4] получаем неравенство (19). *Лемма доказана.*

Используя результаты (15) и (19) можно оценить вероятность выхода за уровень нормированной разности реализаций решений задач (1) и (18), т.е. оценить близость траекторий полей $U_\varepsilon(t,x)$ и $V_\varepsilon(t,x)$ в метрике пространства L_1.

Теорема 1. Пусть существуют и единственны решения задач (1) и (18) тогда выполнение условий леммы 3 влечет за собой справедливость оценки

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}\int_{R_n}\left|\frac{U_\varepsilon(t,x)-V_\varepsilon(t,x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right|dx>R\right\}\le\left(1+\frac{3}{\varepsilon}C_4\right)\exp\left\{-\frac{C_2\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma'}}{4\sqrt{\varepsilon}}\right\}+\left(1+\frac{3}{\varepsilon}C_1\right)\times$$
$$\times\left(\exp\left\{-\frac{C_2\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma}}{4\sqrt{\varepsilon}N_1}\right\}+\exp\left\{-\frac{C_2\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma}}{4\sqrt{\varepsilon}}\right\}\right)+\frac{N_1+1}{N_1}\mu(\varepsilon)+\mu'(\varepsilon) \tag{20}$$
$$+\frac{C\sqrt{\varepsilon\sigma'}}{1-\sqrt{\varepsilon\sigma'}(\beta(\varepsilon)+\mu'(\varepsilon))}\exp\left\{-\frac{\left(1-\sqrt{\varepsilon\sigma'}(\beta(\varepsilon)+\mu'(\varepsilon))\right)^2}{2T\varepsilon\sigma'}\right\}+$$
$$+\frac{N_2C_3}{R-(N_2+1)(\beta(\varepsilon)+\mu(\varepsilon))}\exp\left\{-\frac{(R-(N_2+1)(\beta(\varepsilon)+\mu(\varepsilon)))^2}{2TN_2^2}\right\}.$$

Доказательство. Не трудно видеть, что

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}\int_{R_n}\left|\frac{\tilde U_\varepsilon(t,x)-V_\varepsilon(t,x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right|dx>R\right\}\le P\left\{\sup_{0\le t\le T}\int_{R_n}\left|\frac{\tilde U_\varepsilon(t,x)-\tilde Y_\varepsilon(t,x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right|dx>R-\beta(\varepsilon)-\mu(\varepsilon)\right\}+$$
$$+P\left\{\sup_{0\le t\le T}\int_{R_n}\left|\frac{\tilde Y_\varepsilon(t,x)-V_\varepsilon(t,x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right|dx>\beta(\varepsilon)+\mu(\varepsilon)\right\}\le$$
$$\le P\left\{\sup_{0\le t\le T}\int_{R_n}\left|\frac{U_\varepsilon(t,x)-Y_\varepsilon(t,x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right|dx>R-\beta(\varepsilon)-\mu(\varepsilon)\right\}+$$
$$+P\left\{\sup_{0\le t\le T}\int_{R_n}\left|\frac{\tilde Y_\varepsilon(t,x)-V_\varepsilon(t,x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right|dx>\beta(\varepsilon)+\mu(\varepsilon)\right\}.$$

Отсюда и из неравенств (15) и (19) получаем оценку (20).*Теорема доказана.*

Рассмотрим наряду с задачей (1) задачу Коши с тем же начальным условием для уравнения Ито вида

$$\partial_t X_\varepsilon(t,x)=L_{t,x}X_\varepsilon(t,x)dt+A(t,x,U_0(t,x))dt+\sqrt{\varepsilon\sigma}B(t,x,U_0(t,x))dw(t) \tag{21}$$
$$X_\varepsilon(0,x)=u_0(x),$$

Проводя выкладки, повторяющие доказательства лемм 3-5 и теоремы 1, нетрудно убедиться в том, что верна соответствующая оценка скорости сходимости траекторий решений задач (1) и (21).

Теорема 2. Пусть существуют и единственны решения задач (1) и (21), а также выполнены условия леммы 3, тогда справедлива оценка

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}\int_{R_n}\left|\frac{U_\varepsilon(t,x)-X_\varepsilon(t,x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right|dx>R\right\}\le\left(1+\frac{3}{\varepsilon}C_4\right)\exp\left\{-\frac{C_2\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma'}}{4\sqrt{\varepsilon}}\right\}+$$
$$\mu'(\varepsilon)+\left(1+\frac{3}{\varepsilon}C_1\right)\times\times\left(\exp\left\{-\frac{C_2\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma}}{4\sqrt{\varepsilon}}\right\}+\exp\left\{-\frac{C_2\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma}}{4\sqrt{\varepsilon}N_1}\right\}\right)+\frac{N_3+1}{N_3}\mu(\varepsilon)+$$

$$\frac{N_4C_3}{R-(N_4+1)(\beta(\varepsilon)+\mu(\varepsilon))}\times\times\exp\left\{-\frac{(R-(N_4+1)(\beta(\varepsilon)+\mu(\varepsilon)))^2}{4TN_4^2}\right\}+$$

$$\frac{C_3\sqrt{\varepsilon\sigma'}}{\sqrt{\varepsilon\sigma'}(\beta(\varepsilon)+\mu'(\varepsilon))}\exp\left\{-\frac{(1-\sqrt{\varepsilon\sigma'}(\beta(\varepsilon)+\mu'(\varepsilon)))^2}{2T\varepsilon\sigma'}\right\},\text{ где}$$

$$N_3=\sqrt{\sigma}\left(A_3+CL\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}(A_1+A_2)\right),$$

$$N_4=N_3\exp\left\{CL\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}(1+T+Tb)\right\}CL\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}(1+T+Tb).$$

РЕЗЮМЕ

Знайдені оцінки швидкості збіжності реалізації класичного розв'язку задачі Коші для параболічного рівняння з швидкими випадковими осциляціями до розв'язку рівняння Іто в рівномірній метриці за ймовірністю.

SUMMARY

For the rate of convergence of realization of classic solution of Cauchy problem for the parabolic equation with quick random oscillations to a solution of Ito equation in a uniform metric in probability, estimates are obtained.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Порпер Ф.О., Эйдельман С.Д. Двухсторонние оценки фундаментальных решений параболических уравнений второго порядка и некоторые их приложения. – Успехи мат. наук. – 1984, т.39, № 2, – С.107-156.
2. Давыдов А.В. Принцип инвариантности для стационарных процессов. – Теория вероятностей и ее применения. – 1970. – 15, №3. – С.498-509.
3. Скороход А.В. Исследования по теории случайных процессов. – Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1961. – 216с.
4. Бондарев Б.В., Шурко И.Л. Диффузионная аппроксимация нормированных интегралов со слабой зависимостью и ее применения. – Украинский математический журнал. – 1994, т.46, №11. – С.1448-1466.
5. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977. – 568 с.
6. Розовский Б.Л. О стохастических уравнениях в частных производных. – Математический сборник. – 1975, т.96(138), №2, – С.314-341.
7. Махно С.Я. Граничные задачи для стохастических уравнений в частных производных. – Теория случайных процессов. – 1984, вып. 12. – С.48-56.

Надійшла до редакції 01.09.1998 р.

УДК 519.21

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ОЦЕНКИ НЕИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В СХЕМЕ АВТОРЕГРЕССИИ I ПОРЯДКА

К.Б.Селяков

Рассмотрим скалярную процедуру авторегрессии $U_k = \beta U_{k-1} + \varepsilon_k$, $k = 1,2,...$ в которой β – неизвестный неслучайный параметр, $U_0 = \varepsilon_0$, ε_k, $k = 1,2,...$ – независимые одинаково распределенные величины со средним нуль, дисперсией σ^2 и функцией распределения – $G(x)$. Будем предполагать, что $|\beta|<1$. Пусть $\hat{\beta}_n$ – оценка параметра β, причем для нормированного уклонения $\sqrt{n}\,(\hat{\beta}_n - \beta)$, $n = 1,2,...$ верна оценка из [2]. В дальнейшем будем считать, что известна априорная оценка β, т.е. существует $\Lambda: |\beta| \le \Lambda < 1$. Предположим, что наблюдается последовательность $\{U_k\}_0^n$. Пусть $\hat{\varepsilon}_n = U_k - \hat{\beta}_n U_{k-1}$ $(k = 1,...,n)$ – оценка неизвестных $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$,

$\hat{G}_n(x) = \frac{1}{n}$ (число $\hat{\varepsilon}_k < x$, $k = 1,...,n$) – оценка неизвестной функции распределения $G(x)$. Естественно считать статистику $\hat{G}_n(x)$ оценкой эмпирической функции распределения $G_n(x)$, построенной непосредственно по $\varepsilon_1,...,\varepsilon_n$. В [1] было установлено сближение по вероятности в равномерной метрике эмпирических функций $\hat{G}_n(x)$ к $G_n(x)$, а именно: если $\sup\limits_x |G''(x)| < \infty$, то $\sup\limits_x |\hat{G}_n(x) - G_n(x)| \xrightarrow{P} 0$, $n \to \infty$.

В данной работе изучается скорость сближения $\hat{G}_n(x)$ к $G_n(x)$.

Теорема. *При сделанных предположениях, а также если:*

$\{\varepsilon_k\}_0^n : \mathrm{M}|\varepsilon_k|^m \le \frac{\sigma^2}{2}\mathrm{H}^{m-2} m!$, $m \ge 2$, H>0- *известна*; $\mathrm{M}e^{z(\varepsilon_k^2 - M\,\varepsilon_k^2)} \le e^{z^2\sigma_1^2}$;

$\sup\limits_x |G'(x)| \le K_1 < \infty$; $\sup\limits_x |G''(x)| \le K_2 < \infty$; $R>0$, $\varepsilon>0$, $0<\tilde{\varepsilon}<|\sigma|\,(\sqrt{2}-1)$, то

$$P\{\sup_x \sqrt{n}\,|\hat{G}_n(x) - G_n(x)| > 6\varepsilon\} \le 2\exp\{-(R-1)\tilde{\varepsilon}^2\} +$$

$$+ 6\exp\{-\frac{n}{48H^2}[1 - \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{\sigma^2(\sqrt{2}-1)^2}]^2\} + (6n-2)\exp\{-\frac{\sqrt{n}\sqrt{1-\Lambda^2}}{8H^2|\sigma|}(0.81$$

$$+ \frac{|\sigma|}{\sqrt{n(1-\Lambda^2)}})^{-1}\} + \exp\{-\frac{n}{4\sigma_1^2}\left(\frac{\varepsilon(1-\Lambda^2)}{2K_2R^2} - \frac{\sigma^2}{\sqrt{n}}\right)^2\} + 2\exp\{-\frac{n^2}{n-1}\frac{\varepsilon^2}{4\sigma^2K_1^2R^2}(1-\Lambda)^2\} +$$

$$+ \exp\{-(\frac{\varepsilon(1-\Lambda^2)n}{4R^2K_2} - \tilde{\varepsilon}^2\} + (2N_n+1)(3^{m_n}+1)[2\exp\{-n^{0.25\gamma}\varepsilon + 3K_1e\} +$$

$$+ 4n\exp\{-\frac{n^{0.5\gamma}(1-\Lambda)^{0.5}}{8H^2|\sigma|}(0.81 + \frac{|\sigma|}{\sqrt{n^{\gamma}(1-\Lambda^2)}})^{-1}\}] + (N_n-2)\exp\{-\varepsilon N_n n^{-0.5} + e + 1\} +$$

$$+ 2\exp\{-\frac{n^{2\gamma+1}}{n-1}(\frac{1-\Lambda}{2\sigma})^2(\frac{\varepsilon - \sqrt{n}N_n^{-1}}{6K_1})^2\} +$$

$$+2n\exp\{-\frac{\varepsilon-\sqrt{n}N_n^{-1}}{12K_1}\,n^{-0.5+\gamma}3^{m_n}\,\frac{(1-\Lambda^2)^2}{2}(|\sigma|(\frac{\varepsilon-\sqrt{n}N_n^{-1}}{12K_1}\,n^{-0.5+\gamma}3^{m_n})^{-1}+1.62H)^{-1}\}+$$

$$+\exp\{-\frac{n}{4\sigma_1^2}(\frac{\varepsilon-\sqrt{n}N_n^{-1}}{27K_2}\,n^{\gamma-0.5}3^{m_n}-\sigma^2)^2\}+\exp\{-\frac{\varepsilon-\sqrt{n}N_n^{-1}}{27K_2}\,n^{\gamma+1}3^{m_n}-\tilde{\varepsilon}^2\}+$$

$$+\exp\{-\frac{n}{48H^2}[1-\frac{\tilde{\varepsilon}^2}{\sigma^2(\sqrt{2}-1)^2}]^2\}+2n\exp\{-\frac{\sqrt{n}\sqrt{1-\Lambda^2}}{8H^2|\sigma|}(0.81+\frac{|\sigma|}{\sqrt{n(1-\Lambda^2)}})^{-1}\}+$$

$$+2\exp\{-(n^{0.5-\gamma}-1)\tilde{\varepsilon}^2\},\ \textit{где}\ 3^{m_n}\sim n^{\frac{\gamma}{4}},\ N_n\sim n^{\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{4}}.$$

Доказательство. Воспользуемся идеей доказательства из [1].

Пусть $\Delta_k(x)=\begin{cases}1,\varepsilon_k<x\\0,\varepsilon_k\ge x\end{cases}$, тогда $G_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Delta_k(x)$,

а т.к. $\hat{\varepsilon}_k=\varepsilon_k-(\hat{\beta}_n-\beta)U_{k-1}$, то $\hat{G}_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Delta_k(x+(\hat{\beta}_n-\beta)U_{k-1})$.

Поэтому $\sqrt{n}\,(\hat{G}_n(x)-G_n(x))=z_{1n}(x)+z_{2n}(x)$, где

$$z_{1n}(x)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}[\Delta_k(x+(\hat{\beta}_n-\beta_1)U_{k-1})-G(x+(\hat{\beta}_n-\beta)U_{k-1})-\Delta_k(x)+G(x)]$$

$z_{2n}(x)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}[G(x+(\hat{\beta}_n-\beta)U_{k-1})-G(x)]$. Рассмотрим $z_{2n}(x)$.

Разлагая в ряд Тейлора, имеем:

$$P\{\sup_x|z_{2n}(x)|>2\varepsilon\}\le P\{\sup_x|G'(x)|R\frac{1}{n}|\sum_{k=1}^{n}U_{k-1}|>\varepsilon\}+$$

$$+P\{\sup_x|G''(x)|R^2\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}U_{k-1}^2>\varepsilon\}+P\{\sqrt{n}\,|\hat{\beta}_n-\beta|>R\}.$$

Обозначим $\frac{\varepsilon}{K_1R}=\delta$, тогда

$$P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}U_{k-1}|>\delta\}=P\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}U_{k-1}>\delta\}+\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-U_{k-1})>\delta\}.$$

Построим оценку первого слагаемого:

$$P\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}U_{k-1}>\delta\}=P\{\exp\{z\sum_{k=1}^{n}U_{k-1}\}>e^{zn\delta}\}\le e^{-zn\delta}M\exp\{z\sum_{k=1}^{n}U_{k-1}\},\ z>0.$$

Пусть F_k – расширяющийся поток σ – алгебр, порожденных ε_k, $k=0,\dots,n$.

Тогда $\mathrm{M}\exp\{z\sum_{k=1}^{n}U_{k-1}\}=M[M\exp\{z\sum_{k=1}^{n}U_{k-1}\}/F_{n-2}]=$

$$=M[\exp\{z\sum_{k=1}^{n-1}U_{k-1}+z(1+\beta)U_{n-2}\}M(\exp\{z\varepsilon_{n-1}\}/F_{n-2})].$$

Пусть $\varphi(z)=M(e^{z\varepsilon_{n-1}}/F_{k-2})$.

Легко увидеть, что $M(\exp\{z\varepsilon_{k-1}\}/F_{k-2})\le 1+\sum_{m=2}^{\infty}\frac{z^mM|\varepsilon_{k-1}|^m}{m!}\le\exp\{z^2\sigma^2\}$, если $0<z<\frac{1}{2H}$.

Таким образом $M\exp\{z\sum_{k=1}^{n} U_{k-1}\} \le \varphi(z)\varphi((1+|\beta|)z)\ldots\varphi((1+|\beta|+\ldots|\beta|^{n-2})z) \le$

$\le\exp\{\sigma^2z^2(n-1)(1-\Lambda)^{-2}\}$. Тогда $P\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_{k-1}>\delta^2\} \le \exp\{\sigma^2z^2(\frac{1}{1-\Lambda})^2(n-1)-zn\delta\}$.

Минимизируя по $\frac{1}{2H}>z>0$, получим:

$$P\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_{k-1}>\frac{\varepsilon}{K_1R}\}\le\exp\{-\frac{n^2}{n-1}\frac{\varepsilon^2}{4\sigma^2K_1^2R^2}(1-\Lambda)^2\}.$$

Легко убедиться, что такая же оценка верна и для $P\{-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_{k-1}>\frac{\varepsilon}{K_1R}\}$.

В результате получаем оценку: $P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_{k-1}| > \frac{\varepsilon}{K_1R}\} \le 2\exp\{-\frac{n^2\varepsilon^2(1-\Lambda)^2}{(n-1)4\sigma^2K_1^2R^2}\}$.

Далее $P\{\frac{1}{2}\sup_x|G''(x)|\,R^2\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} U_{k-1}^2>\varepsilon\}\le P\{\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} U_{k-1}^2>\frac{2\varepsilon}{R^2K_2}\}$.

В силу того, что $\sum_{k=1}^{n} U_{k-1}^2=2\beta\sum_{k=2}^{n} U_{k-2}\varepsilon_{k-1}+\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{k-1}^2+\beta^2\sum_{k-1}^{n} U_{k-1}^2-\beta^2U_{n-1}^2$

имеем $(1-\beta^2)\sum_{k=1}^{n} U_{k-1}^2=2\beta\sum_{k=2}^{n} U_{k-2}\varepsilon_{k-1}+\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{k-1}^2-\beta^2U_{n-1}^2 \le 2\beta\sum_{k=2}^{n} U_{k-2}\varepsilon_{k-1}+\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{k-1}^2$.

Тогда $P\{\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} U_{k-2}^2>\frac{2\varepsilon}{R^2K_2}\} \le P\{\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=2}^{n} U_{k-2}\varepsilon_{k-1}>\delta\} + P\{\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{k-1}^2>\delta\}$,

где $\delta=\frac{\varepsilon(1-\Lambda^2)}{2R^2K_2}$. Рассмотрим второе слагаемое: $P\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{k-1}^2>\delta\sqrt{n}\} \le$

$\le\exp\{-z(\delta\sqrt{n}-M\varepsilon_0^2)\}[M\exp\{\frac{z}{n}(\varepsilon_0^2-M\varepsilon_0^2)\}]^2\le \exp\{\frac{\sigma_1^2z^2}{n}-z\varepsilon\sqrt{n}+zM\varepsilon_0^2\}$.

Минимизируя по z >0 получим:

$$P\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{k-1}^2>\delta\sqrt{n}\}\le\exp\{-\frac{n}{4\sigma_1^2}\left(\frac{\varepsilon(1-\Lambda^2)}{2K_2R^2}-\frac{\sigma^2}{\sqrt{n}}\right)^2\}.$$

Для первого слагаемого имеем: $P\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} U_{k-1}\varepsilon_k>\delta\sqrt{n}\} \le P\{\frac{\sigma^2}{n}\sum_{k=1}^{n-1} U_{k-1}^2\le\tilde{\varepsilon}^2\}+$

$+P\{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n-1} U_{k-1}\varepsilon_k-\frac{\sigma^2}{n}\sum_{k=1}^{n-1} U_{k-1}^2>\delta n-\tilde{\varepsilon}^2\}\le P\{\frac{\sigma^2}{n}\sum_{k=1}^{n-1} U_{k-1}^2\le\tilde{\varepsilon}^2\}+$

$+\sum_{k=0}^{n-2} P\{|U_k|>\frac{\sqrt{n}}{2H}\}+\exp\{-\delta n+\tilde{\varepsilon}^2\}M\prod_{k=1}^{n-1} I(|U_{k-1}|\le\frac{\sqrt{n}}{2H})\exp\{\frac{U_{k-1}\varepsilon_k}{\sqrt{n}}-\frac{\sigma^2U_{k-1}^2}{n}\}$,

где $I(|U_{k-1}|\le\frac{\sqrt{n}}{2H})$ – индикатор события

$$|U_{k-1}|\le\frac{\sqrt{n}}{2H}\cdot M\{I(|U_{n-1}|\le\frac{\sqrt{n}}{2H})\exp\{\frac{U_{n-1}\varepsilon_n}{\sqrt{n}}-\frac{\sigma^2}{n}U_{n-1}^2\}/F_{n-1}\}\le$$

$$\le\exp\{-\frac{\sigma^2U_{n-1}^2}{n}\}[1+\sum_{m=2}^{\infty}\frac{U_{n-1}^m}{m!}H^{m-2}\frac{m!\sigma^2}{2n^{m/2}}]\le\exp\{-\frac{\sigma^2U_{n-1}^2}{n}\}[1+\frac{\sigma^2U_{n-1}^2}{n}]\le 1 \text{ и т.д.}$$

Тогда

$$P\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}U_{k-1}\varepsilon_k>\delta\sqrt{n}\}\le P\{\frac{\sigma^2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}U_{k-1}^2\le\tilde{\varepsilon}^2\}+\sum_{k=1}^{n-1}P\{|U_{k-1}|>\frac{\sqrt{n}}{2H}\}+$$

$$+\exp\{-0.5\delta n\text{-}\tilde{\varepsilon}^2\}.$$

Из [2] получим оценку: $P\{\frac{\sigma^2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}U_{k-1}^2\le\tilde{\varepsilon}^2\}\le\exp\{-\frac{n}{48H^2}[1-\frac{\tilde{\varepsilon}^2}{\sigma^2(\sqrt{2}-1)^2}]^2.$

Теперь по [3] найдем оценку

$$P\{|U_k|>\frac{\sqrt{n}}{2H}\}\le 2\exp\{-\frac{\sqrt{n}\sqrt{1-\Lambda^2}}{8H^2|\sigma|}(0.81+\frac{|\sigma|}{\sqrt{n(1-\Lambda^2)}})^{-1}\}.$$

из [2] $P\{\sqrt{n}\,|\hat{\beta}_n\text{-}\beta|>R\}\le 2\exp\{-(R-1)\tilde{\varepsilon}^2\}+2\exp\{-\frac{n}{48H^2}[1-\frac{\tilde{\varepsilon}^2}{\sigma^2(\sqrt{2}-1)^2}]^2\}+$

$+2n\exp\{-\frac{\sqrt{n}\sqrt{1-\Lambda^2}}{8H^2|\sigma|}(0.81+\frac{|\sigma|}{\sqrt{n(1-\Lambda^2)}})^{-1}\}$. Таким образом

$$P\{\sup_x|z_{2n}(x)>2\varepsilon\}\le 2\exp\{-(R-1)\tilde{\varepsilon}^2\}+4\exp\{-\frac{n}{48H^2}[1-\frac{\tilde{\varepsilon}^2}{\sigma^2(\sqrt{2}-1)^2}]^2\}+$$

$$+(4n-2)\exp\{-\frac{\sqrt{n}\sqrt{1-\beta^2}}{8H^2|\sigma|}(0.81+\frac{|\sigma|}{\sqrt{n(1-\Lambda^2)}})^{-1}\}+\exp\{-\frac{n}{4\sigma_1^2}\left(\frac{\varepsilon(1-\Lambda^2)}{2K_2R^2}-\frac{\sigma^2}{\sqrt{n}}\right)^2\}+$$

$$+2\exp\{-\frac{n^2}{n-1}\frac{\varepsilon^2}{4\sigma^2K_1^2R^2}(1-\Lambda\ )^2\}+\exp\{-(\frac{\varepsilon(1-\Lambda^2)n}{4R^2K_2}-\tilde{\varepsilon}^2\}.$$

Теперь перейдем к оценке $z_{1n}(x)$.

Рассмотрим $z_n(x,\eta_n,U)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}[\Delta_k(x+\eta_nU_{k-1})-G(x+\eta_nU_{k-1})-\Delta_k(x)+G(x)]$,

где η_n неслучайная, и заметим, что $\forall\ \varepsilon>0\ P\{\sup_x|z_{1n}(x)|>4\varepsilon\}\le$

$$\le\text{P}\{\sup_x\sup_{|\eta_n|<n^{-\gamma}}|z_n(x,\eta_n,U)|>4\varepsilon\}+\text{P}\{\sqrt{n}\,|\,\hat{\beta}_n\text{-}\beta|>n^{0.5-\gamma}\},\ 0.4<\gamma<0.5.$$

Найдём оценку для $P\{\sup_x\sup_{|\eta_n|<n^{-\gamma}}|z_n(x,\eta_n,U)|>4\varepsilon\}$. Пусть m_n и N_n – натуральные

числа, такие, что $3^{m_n}\sim n^{\frac{\gamma}{4}}$, $N_n\sim n^{\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{4}}$. Разделим отрезок $[-n^{-\gamma}, n^{-\gamma}]$ на 3^{m_n} частей точками $\eta_{sn}=-n^{-\gamma}+2n^{-\gamma}3^{-m_n}s$, $s=0,1,\ldots,3^{m_n}$, а действительную ось на N_n-частей точками $-\infty=x_0<x_1,\ldots x_{N_n-1}<x_{N_n}=+\infty$, где $G(x_i)=iN_n^{-1}$. Используя идею доказательства предложения 1 из [4], перейдем от верхней грани по континууму значений x и η_n к верхней грани по ко-

нечным множествам: $x \in \{x_i,\ i=0,1,...,N_n\}$, $\eta_n \in \{\eta_{sn},\ s=0,1,...,3^{m_n}\}$. Для этого рассмотрим случайные величины из [1] $\tilde{v}_{sk} = U_{k-1}(1-2n^{-\gamma}3^{-m_n}\eta_{sn}^{-1} I_{(U_{k-1}>0)})$,

$\hat{v}_{sk} = U_{k-1}(1-2n^{-\gamma}3^{-m_n}\eta_{sn}^{-1} I_{(U_{k-1}<0)})$ и векторы $\tilde{v}_s = (\tilde{v}_{s1},...,\tilde{v}_{sn})$, $\hat{v}_s = (\hat{v}_{s1},...,\hat{v}_{sn})$. Тогда для x, η_n таких, что $x_r \le x \le x_{r+1}$, $0 \le \eta_{jn} - \eta_n \le 2n^{-\gamma}3^{-m_n}$ имеем

$$x_r + \eta_{jn}\tilde{v}_{jk} \le x + \eta_n U_{k-1} \le x_{r+1} + \eta_{jn}\hat{v}_{jk},\ k=1,...,n,$$

и, вследствие монотонности $G(x)$, $\Delta_k(x)$,

$$z_n(x,\eta_n,U) \ge z_n(x_r,\eta_{jn},\tilde{v}_j) + \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}[\Delta_k(x_r) - G(x_r) - \Delta_k(x_{r+1}) + G(x_{r-1})] +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}[G(x_r + \eta_{jn}\tilde{v}_{jk}) - G(x_{r+1} + \eta_{jn}\hat{v}_{jk})];$$

$$z_n(x,\eta_n,U) \le z_n(x_{r+1},\eta_{jn},\hat{v}_j) + \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}[\Delta_k(x_{r+1}) - G(x_{r+1}) - \Delta_k(x_r) + G(x_{r+2})] +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}[G(x_{r+1} + \eta_{jn}\hat{v}_{jk}) - G(x_r + \eta_{jn}\tilde{v}_{jk})],$$

следовательно, $P\{\sup\limits_{x}\ \sup\limits_{|\eta_n|<n^{-\gamma}} |z_n(x,\eta_n,U)| > 4\varepsilon\} \le$

$$\le P\{\sup_{i\le N_n-1}\ \sup_{s\le 3^{m_n}} |z_n(x_{i+1},\eta_{sn},\hat{v}_s)| > \varepsilon\} + \tag{1}$$

$$+P\{\sup_{i\le N_n}\ \sup_{s\le 3^{m_n}} |z_n(x_i,\eta_{sn},\tilde{v}_s)| > \varepsilon\} + \tag{2}$$

$$+P\{\sup_{i\le N_n-2}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}[\Delta_k(x_{i+1}) - G(x_{i+1}) - \Delta_k(x_i) + G(x_{i+2})] > \varepsilon\} + \tag{3}$$

$$+P\{\sup_{i\le N_n-1}\ \sup_{s\le 3^{m_n}}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}[G(x_{r+1} + \eta_{sn}\hat{v}_{sk}) - G(x_r + \eta_{sn}\tilde{v}_{sk}) > \varepsilon]\}. \tag{4}$$

Рассмотрим (1): $P\{\sup\limits_{i\le N_n-1}\ \sup\limits_{s\le 3^{m_n}} |z_n(x_{i+1},\eta_{sn},\hat{v}_s)| > \varepsilon\} \le$

$$\le \sum_{i=0}^{N_n-1}\sum_{s=0}^{3^{m_n}} P\{|z_n(x_{i+1},\eta_{sn},\hat{v}_s)| > \varepsilon,\ |U_{k-1}| \le n^{\frac{\gamma}{2}},\ k=\overline{1,n}\} + \sum_{k=1}^{n} P\{|U_{k-1}| > n^{\frac{\gamma}{2}}\}.$$

$$P\{|z_n(x_{i+1},\eta_{sn},\hat{v}_s)| > \varepsilon,\ |U_{k-1}| \le n^{\frac{\gamma}{2}},\ k=\overline{1,n}\} \le P\{z_n(x_{i+1},\eta_{sn},\hat{v}_s) > \varepsilon,\ |U_{k-1}| \le n^{\frac{\gamma}{2}},\ k=\overline{1,n}\} +$$

$+P\{-z_n(x_{i+1},\eta_{sn},\hat{v}_s) > \varepsilon,\ |U_{k-1}| \le n^{\frac{\gamma}{2}},\ k=\overline{1,n}\}$. Теперь

$$P\{z_n(x_{i+1},\eta_{sn},\hat{v}_s) > \varepsilon,\ |U_{k-1}| \le n^{\frac{\gamma}{2}},\ k=\overline{1,n}\} \le \exp\{-z\varepsilon\}(M\exp\{\frac{z}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}[\Delta_k(x_{i+1} + \eta_{sn}\hat{v}_{sk}) -$$

$$-G(x_{i+1} + \eta_{sn}\hat{v}_{sk}) - \Delta_k(x_{i+1}) + G(x_{i+1})]\},\ |U_{k-1}| \le n^{\frac{\gamma}{2}},\ k=1,..,n).$$

Заметим, что так как $|1-2n^{-\gamma}3^{-m_n}\eta_{sn}^{-1}| \le 3$ для любого s, то $\max(|\tilde{v}_{sk}|, |\hat{v}_{sk}|) \le 3|U_{k-1}|$.

Тогда если $\eta_{sn}\hat{v}_{sk} > 0$, то $M\exp\{z\, z_n(x_{i+1},\eta_{sn},\hat{v}_s),\ |U_{k-1}| \le n^{\frac{\gamma}{2}},\ k=\overline{1,n}/F_{n-1}\} \le$

$\leq \exp\{3\frac{z^2}{n}e^{\frac{z}{\sqrt{n}}}\sup\limits_x G^{\prime}(x)n^{-0.5\gamma}\}\exp\{z\, z_{n-1}(x_{i+1},\eta_{sn},\ \hat{v}_s),\ |U_{k-1}|\leq n^{\frac{\gamma}{2}},\ k=\overline{1,n}\,/F_{n-1}\}.$

Если $\eta_{sn}\hat{v}_{sk}<0$, то $M\exp\{z\, z_n(x_{i+1},\eta_{ш},\ \hat{v}_s),\ |U_{k-1}|\leq n^{\frac{\gamma}{2}},\ k=\overline{1,n}\,/F_{n-1}\}\leq$

$\leq\exp\{3\sup\limits_x\ G^{\prime}(x)\frac{2z^2}{n}n^{\frac{-\gamma}{2}}+z\, z_{n-1}(x_{i+1},\eta_{sn},\ \hat{v}_s),\ |U_{k-1}|\leq n^{\frac{\gamma}{2}},\ k=\overline{1,n}\,/F_{n-1}\}.$

Пусть $C=\max(2,\exp\{\frac{z}{\sqrt{n}}\})$, тогда $M\exp\{z\, z_n(x_{i+1},\eta_{sn},\ \hat{v}_s)/F_{n-1}\}\ \leq$

$\leq\exp\{3K_1Cz^2n^{-\frac{\gamma}{2}-1}+z\, z_{n-1}(x_{i+1},\eta_{sn},\ \hat{v}_s)\}$, и после n-й итерации получаем

$M\exp\{z\, z_n(x_{i+1},\eta_{sn},\ \hat{v}_s)\}\ \leq\ \exp\{3K_1Cz^2n^{-\frac{\gamma}{2}}\}$. Таким образом,

$P\{z_n(x_{i+1},\eta_{sn},\ \hat{v}_s)>\varepsilon,\ |U_k|\leq n^{\frac{\gamma}{2}},\ k=\overline{1,n}\}\leq\exp\{-z\varepsilon+3K_1Cz^2n^{-\frac{\gamma}{2}}\}$. Положим $z=n^{\frac{\gamma}{4}}$ и получим $P\{z_n(x_{i+1},\eta_{sn},\ \hat{v}_s)>\varepsilon,\ |U_{k-1}|\leq n^{\frac{\gamma}{2}},\ k=\overline{1,n}\}\ \leq\ \exp\{-n^{\frac{\gamma}{4}}\varepsilon+3K_1e\}$.

Аналогично $P\{-z_n(x_{i+1},\eta_{sn},\ \hat{v}_s)>\varepsilon,\ |U_{k-1}|\leq n^{\frac{\gamma}{2}},\ k=\overline{1,n}\}\ \leq\ \exp\{-n^{\frac{\gamma}{4}}\varepsilon+3K_1e\}$.

Теперь, согласно [3],

$$\sum_{k=1}^{n}\ P\{|U_{k-1}|>n^{0.5\gamma}\}\leq 2n\exp\{-\frac{n^{0.5\gamma}(1-\Lambda)^{0.5}}{8H^2|\sigma|}(0.81+\frac{|\sigma|}{\sqrt{n^{\gamma}(1-\Lambda^2)}})^{-1}\}.$$

Таким образом

$$P\{\sup_{i\leq N_n-1}\ \sup_{s\leq 3^{m_n}}|z_n(x_{i+1},\eta_{sn},\ \hat{v}_s)|>\varepsilon\}\ \leq\ N_n(3^{m_n}+1)[2\exp\{-n^{0.25\gamma}\varepsilon+3K_1e\}+$$

$$+2n\exp\{-\frac{n^{0.5\gamma}(1-\Lambda)^{0.5}}{8H^2|\sigma|}(0.81+\frac{|\sigma|}{\sqrt{n^{\gamma}(1-\Lambda^2)}})^{-1}\}],\ 3^{m_n}\sim n^{\frac{\gamma}{4}},\ N_n\sim n^{\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{4}}\ .$$

Легко проверить, что для (2) верна следующая оценка:

$$P\{\sup_{i\leq N_n}\ \sup_{s\leq 3^{m_n}}|z_n(x_{i+1},\eta_{sn},\ \tilde{v}_s)|>\varepsilon\}\ \leq(N_n+1)(3^{m_n}+1)[2\exp\{-n^{0.25\gamma}\varepsilon+3K_1e\}+$$

$$+2n\exp\{-\frac{n^{0.5\gamma}(1-\Lambda)^{0.5}}{8H^2|\sigma|}(0.81+\frac{|\sigma|}{\sqrt{n^{\gamma}(1-\Lambda^2)}})^{-1}\}],\ 3^{m_n}\sim n^{\frac{\gamma}{4}},\ N_n\sim n^{\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{4}}\ .$$

Рассмотрим (3): $P\{\sup\limits_{i\leq N_n-2}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\ [\Delta_k(x_{i+1})-G(x_{i+1})-\Delta_k(x_i)+G(x_{i+2})]>\varepsilon\}\ \leq$

$$\leq\sum_{i=0}^{N_n}\ P\{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\ [\Delta_k(x_{i+1})-G(x_{i+1})-\Delta_k(x_i)+G(x_{i+2})]>\varepsilon\}.$$

$$P\{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\ [\Delta_k(x_{i+1})-G(x_{i+1})-\Delta_k(x_i)+G(x_{i+2})]>\varepsilon\}\ \leq$$

$\leq \exp\{-z\varepsilon\} M\exp\{\frac{z}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\ [\Delta_k(x_{i+1})\text{-}G(x_{i+1}) - \Delta_k(x_i) + G(x_{i+2})]\}=I_1$.

Заметим, что $M\exp\{\frac{z}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\ [\Delta_k(x_{i+1})\text{-}G(x_{i+1}) - \Delta_k(x_i) + G(x_{i+2})]\}/F_{n-1}\} =$

$= \exp\{\frac{z}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n-1}\ [\Delta_k(x_{i+1})\text{-}G(x_{i+1})\text{-}\Delta_k(x_i)+G(x_{i+2})] + \frac{z}{\sqrt{n}}(G(x_{i+2})\text{-}G(x_{i+1}))\}[1+(\exp\{\frac{z}{\sqrt{n}}\}\text{-}1)*$

$*(G(x_{i+1})\text{-}G(x_i))] \leq \exp\{N_n^{-1}\frac{z}{\sqrt{n}}(\exp\{\frac{z}{\sqrt{n}}\}+$

$+1)\}\exp\{\frac{z}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n-1}\ [\Delta_k(x_{i+1})\text{-}G(x_{i+1})+\Delta_k(x_i)\ \text{-}G(x_{i+2})]\}$ и после n -й итерации получим:

$I_1 \leq \exp\{\text{-}\varepsilon z+zN_n^{-1}\sqrt{n}\ (\ \exp\{\frac{z}{\sqrt{n}}\}+1)\}$.

Положим $z= N_n n^{-0.5}$, тогда

$P\{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\ [\Delta_k(x_{i+1})\text{-}G(x_{i+1}) - \Delta_k(x_i) + G(x_{i+1})] >\varepsilon\} \leq \exp\{\text{-}\varepsilon\, N_n n^{-0.5}+e+1\}$.

Применяя к разности под знаком суммы в (4) формулу Тейлора,

получаем, что $\sup_{i\leq N_n-1}\ \sup_{s\leq 3^{m_n}}\ \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\ [G(x_{r+1}+\eta_{sn}\hat{v}_{sk}) - G(x_r+\eta_{sn}\tilde{v}_{sk})] \leq$

$\leq \sup_{i\leq N_n-1}\ \sqrt{n}\,[G(x_{i+1})\text{–}G(x_i)]+\sup_x G'(x)\ \sup_{s\leq 3^{m_n}}\ (\frac{1}{\sqrt{n}}|\sum_{k=1}^{n}\ \eta_{sn}\tilde{v}_{sk}| + \frac{1}{\sqrt{n}}|\sum_{k=1}^{n}\ \eta_{sn}\hat{v}_{sk}|)+$

$+ 0.5\ \sup_x|G''(x)|\ \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\eta_{sn}^2(\nu_{sk}^2+\nu_{sk}^2)$.

Чтобы оценить последнее выражение сверху, заметим, что

$\text{Max}(|\sum_{k=1}^{n}\ \eta_{sn}\tilde{v}_{sk}|,\ |\sum_{k=1}^{n}\ \eta_{sn}\hat{v}_{sk}|)\leq n^{-\gamma}\left|\sum_{k=1}^{n}U_{k-1}\right| + 2n^{-\gamma}3^{-m_n}\sum_{k==1}^{n}|U_{k-1}|$, а так как

$|1\text{-}2n^{-\gamma}3^{-m_n}\eta_{sn}^{-1}|\leq 3$ для любого s, то $\max(|\tilde{v}_{sk}|,|\hat{v}_{sk}|)\leq 3|U_{k-1}|$ и, следовательно,

$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\eta_{sn}^2(\nu_{sk}^2+\nu_{sk}^2) \leq 18n^{-0.5-2\gamma}\sum_{k=1}^{n}U_{K-1}^2$. Таким образом (4) не превосходит

$P\{2K_1 n^{-0.5-\gamma}|\sum_{k=1}^{n}\ U_{k-1}| + 4K_1 n^{-0.5-\gamma}3^{-m_n}\sum_{k=1}^{n}|U_{k-1}| + 9K_2 n^{-0.5-2\gamma}\sum_{k=1}^{n}\ U_{k-1}^2 > \varepsilon\text{-}\ \sqrt{n}\,N_n^{-1}\} \leq$

$\leq P\{n^{-0.5-\gamma}|\sum_{k=1}^{n}\ U_{k-1}| > \frac{\varepsilon-\sqrt{n}N_n^{-1}}{6K_1}\} + P\{n^{-0.5-\gamma}3^{-m_n}\sum_{k=1}^{n}|U_{k-1}| > \frac{\varepsilon-\sqrt{n}N_n^{-1}}{12K_1}\} +$

$+P\{n^{-0.5-2\gamma}\sum_{k=1}^{n}\ U_{k-1}^2 > \frac{\varepsilon-\sqrt{n}N_n^{-1}}{27K_2}\} \leq 2\exp\{-\frac{n^{2\gamma+1}}{n-1}(\frac{1-\Lambda}{2\sigma})^2(\frac{\varepsilon-\sqrt{n}N_n^{-1}}{6K_1})^2\} +$

$+ P\{n^{-0.5-\gamma}3^{-m_n}\sum_{k=1}^{n}|U_{k-1}| > \frac{\varepsilon-\sqrt{n}N_n^{-1}}{12K_1}\} + \exp\{-\frac{n}{4\sigma_1^2}(\frac{\varepsilon-\sqrt{n}N_n^{-1}}{27K_2}n^{\gamma\text{-}0.5}3^{m_n} - \sigma^2)^2\} +$

$+ \exp\{-\ \frac{\varepsilon-\sqrt{n}N_n^{-1}}{27K_2}\ n^{\gamma+1}3^{m_n} - \tilde{\varepsilon}^2\} + \exp\{-\frac{n}{48H^2}[1 - \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{\sigma^2(\sqrt{2}-1)^2}]^2\} +$

$$+ 2n\exp\{-\frac{\sqrt{n}\sqrt{1-\Lambda^2}}{8H^2\,|\sigma|}(0.81 + \frac{|\sigma|}{\sqrt{n(1-\Lambda^2)}})^{-1}\}.$$

Теперь оценим $P\{n^{-0.5-\gamma}3^{-m_n}\sum_{k=1}^{n}|U_{k-1}| > \frac{\varepsilon-\sqrt{n}N_n^{-1}}{12K_1}\} \le$

$$\le \sum_{k=1}^{n} P\{|U_{k-1}| > \frac{\varepsilon-\sqrt{n}N_n^{-1}}{12K_1}\, n^{-0.5+\gamma}3^{m_n}\} \le 2n\exp\{-\frac{\varepsilon-\sqrt{n}N_n^{-1}}{12K_1}\, n^{-0.5+\gamma}3^{m_n} *$$

$$* \frac{(1-\Lambda^2)^2}{2}(|\sigma|(\frac{\varepsilon-\sqrt{n}N_n^{-1}}{12K_1}\, n^{-0.5+\gamma}3^{m_n})^{-1} + 1.62H)^{-1}\}.$$

И из [2] $P\{\sqrt{n}\,|\,\hat{\beta}_n\text{-}\beta| > n^{0.5-\gamma}\} \le 2\exp\{-(n^{0.5-\gamma}-1)\tilde{\varepsilon}^2\} +$

$$+2\exp\{-\frac{n}{48H^2}[1 - \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{\sigma^2(\sqrt{2}-1)^2}]^2\} + 2n\exp\{-\frac{\sqrt{n}\sqrt{1-\Lambda^2}}{8H^2\,|\sigma|}(0.81 + \frac{|\sigma|}{\sqrt{n(1-\Lambda^2)}})^{-1}\}.$$

Теорема доказана.

Автор искренне благодарен проф. Бондареву Б.В. за постановку задачи и помощь, оказанную в процессе работы.

РЕЗЮМЕ

Розглядається схема авторегресії $U_k=\beta U_{k-1}+\varepsilon_k$ $(k=1,..,n)$, де β – невідомий та невипадковий параметр, а ε_k – незалежні, однаково розподілені випадкові елементи з середнім нуль, обмеженою дисперсією та невідомою функцією розподілу $G(x)$. $\hat{G}(x)$ є оцінкою для $G(x)$. Знайдено експоненційні оцінки для ймовірності виходу величини $\sup_x \sqrt{n}\,|\,\hat{G}_n(x) - G_n(x)|$ за убуваючий рівень

SUMMARY

Let $U_k=\beta U_{k-1}+\varepsilon_k$ $(k=1,..,n)$ are n observations of autoregressive scheme, where β is unknown nonrandom parameter and ε_k are independent identically distributed random variables with zero mean, finite variance and unknown distribution function $G(x)$. The estimate $\hat{G}(x)$ of $G(x)$ is considered. It's founded exponantional estimate for the exit's probability $\sup_x \sqrt{n}\,|\,\hat{G}_n(x) - G_n(x)|$ from downing level.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болдин М.В. Оценка возмущений в схеме авторегрессии. – Теория вероятностей и ее применения,1982, т. 17, в. 4. – С.805-810.
2. Бондарев Б.В. Нерівність С.Н.Бернштейна для оцінки параметру авторегрессії першого порядку. – Теорія ймовірностей та математична статистика. Вип. 55, 1996, С.13-19.
3. V.V.Yarinski. Exponential inequalities for sums of random vectors. J.Multivar. Anal. 6 (1976), N.4, pp. 473-499.
4. Муганцева Л.А. Проверка нормальности в схемах одномерной и многомерной регрессии. Теория вероятностей и ее применения, 1977, т. 22, в. 3, с. 603-614.

Надійшла до редакції 02.09.1998 р.

УДК 519.21

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ВИНЕРОВСКОГО ПОЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ПО ЕГО ЗНАЧЕНИЯМ НА ПОВЕРХНОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

Т.В.Земляк

Введение. В статье решается следующая задача: пусть (Ω,σ,P) – некоторое вероятностное пространство, на котором задано винеровское поле $w(x,y,z)$, $x\ge 0, y\ge 0$, $z\ge 0$. Предполагается, что мы наблюдаем винеровское поле $w(x,y,z)$, $(x,y,z)\in S$ (где S – поверхность прямоугольного параллелепипеда, длина, ширина и высота которого равны d, c и h соответственно и грани параллелепипеда параллельны координатным плоскостям) и хотим восстановить поле в точке $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})\notin S$. Под восстановлением понимается построение наилучшей в среднеквадратическом смысле оценки для $w(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$, основанной на значениях $w(x,y,z)$ при $(x,y,z)\in S$. Известно, что эта оценка задается формулой $\overline{m}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})= M\{w(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})|F\}$ и ее ошибка вычисляется по формуле $d(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})=M\{(w(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})-\overline{m}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}))^2|F\}$, где $F=\sigma\{w(x,y,z),(x,y,z)\in S\}$. Целью работы является построение явных формул для $\overline{m}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ и $d(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$.

В работах [1,2] приведено решение задач восстановления винеровского поля на плоскости по его значениям на кривых некоторого типа. Заметим, что возможность упорядочить точки на кривой играет важную роль для построения явных формул в задачах на плоскости, в то время как на поверхности мы можем упорядочить точки лишь частично. Кроме того, в задачах в пространстве сильно усложняется структура рассматриваемых случайных векторов, которые в этом случае состоят из n случайных векторов, каждый из которых имеет свое распределение и, что самое главное, эти векторы зависимы между собой.

Основные результаты.

Лемма. *Пусть* $(\theta,\zeta)=(\theta,\xi_1,...\xi_n,\eta_1,.......\eta_m)$ – *гауссовский вектор с* $m_\theta=0$, $m_\zeta=0$, $D_{\theta\theta}=\mathrm{cov}(\theta,\theta)$, $D_{\zeta\zeta}=\mathrm{cov}(\zeta,\zeta)$, $D_{\theta\zeta}=\mathrm{cov}(\theta,\zeta)$, *случайные величины* θ *и* ξ_j, $j=\overline{1,n}$ *независимы с каждой из случайных величин* η_i, $i=\overline{1,m}$. *Тогда*

$$M\{\theta\mid G\}=\xi D^+_{\xi\xi}D_{\theta\xi}, \tag{1}$$

$$d_\theta=M\{[\theta-M(\theta\mid G)]^2\mid G\}=D_{\theta\theta}-D_{\theta\xi}{}^*D^+_{\xi\xi}D_{\theta\xi}, \tag{2}$$

где $G=\sigma\{\xi_j, j=\overline{1,n}, \eta_i, i=\overline{1,m}\}$, $D_{\theta\xi}=\mathrm{cov}(\theta,\xi)$, $D_{\xi\xi}=\mathrm{cov}(\xi,\xi)$, $D^+_{\xi\xi}$ – *матрица, псевдообратная к матрице* $D_{\xi\xi}$.

Доказательство леммы. По теореме о нормальной корреляции из [3, стр.498] имеем:

$$M\{\theta\mid G\}=\zeta D^+_{\zeta\zeta}D_{\theta\zeta}, \tag{3}$$

где $D_{\zeta\zeta}=\begin{pmatrix}\mathrm{cov}(\xi,\xi)\,\mathrm{cov}(\xi,\eta)\\ \mathrm{cov}(\eta,\xi)\,\mathrm{cov}(\eta,\eta)\end{pmatrix}$, $D_{\theta\zeta}=(\mathrm{cov}(\theta,\xi),\mathrm{cov}(\theta,\eta))$.

Так как случайные величины θ и ξ_j, $j=\overline{1,n}$ независимы с каждой из случайных величин η_i, $i=\overline{1,m}$, то вектор $\mathrm{cov}(\theta,\eta)$ и матрица $\mathrm{cov}(\xi,\eta)$ – нулевые. Следовательно

$$D_{\zeta\zeta}=\begin{pmatrix}\mathrm{cov}(\xi,\xi) & O\\ O & \mathrm{cov}(\eta,\eta)\end{pmatrix} \text{ и } D_{\theta\zeta}=(\mathrm{cov}(\theta,\xi),O),$$

где O – нулевые матрицы соответствующего размера.

Очевидно, что $D^{+}_{\zeta\zeta}=\begin{pmatrix} D^{+}_{\xi\xi} & O \\ O & D^{+}_{\eta\eta}\end{pmatrix}$.

Подставляя в (3) вместо $D^{+}_{\zeta\zeta}$ и $D_{\theta\zeta}$ последние равенства, получим формулу (1) в утверждении леммы. Равенство (2) доказывается аналогично. Лемма доказана.

Пусть d_1, c_1, и h_1 – расстояния от точки $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ до граней прямоугольного параллелепипеда, ближайших координатным плоскостям. Обозначим $\alpha=d_1/d$, $\beta=c_1/c$, $\eta=h_1/h$. Тогда, учитывая эти обозначения и сделанные ранее замечания, имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Пусть точка $\tilde{T}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ лежит внутри прямоугольного параллелепипеда. Тогда (с вероятностью $P=1$) имеют место равенства:*

$$\overline{m}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})=\sum_{i=1}^{26}\beta_i w_i\,, \tag{4}$$

$$d(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})=(dch)^{-1}d_1(d-d_1)c_1(c-c_1)h_1(h-h_1)\,, \tag{5}$$

где $\begin{cases}\beta_1=\alpha,\\ \beta_2=1-\alpha\end{cases}$; $\begin{cases}\beta_3=\eta,\\ \beta_4=1-\eta\end{cases}$; $\begin{cases}\beta_5=\gamma,\\ \beta_6=1-\gamma\end{cases}$; $\begin{cases}\beta_7=-(1-\alpha)(1-\eta),\\ \beta_8=-\eta(1-\alpha),\\ \beta_9=-\alpha\eta,\\ \beta_{10}=-\alpha(1-\eta)\end{cases}$; $\begin{cases}\beta_{11}=-(1-\alpha)(1-\gamma),\\ \beta_{12}=-(1-\alpha)\gamma,\\ \beta_{13}=-\alpha\gamma,\\ \beta_{14}=-\alpha(1-\gamma)\end{cases}$;

$\begin{cases}\beta_{15}=-(1-\eta)(1-\gamma),\\ \beta_{12}=-(1-\eta)\gamma,\\ \beta_{16}=-\eta\gamma,\\ \beta_{17}=-\eta(1-\gamma)\end{cases}$; $\begin{cases}\beta_{19}=(1-\alpha)(1-\eta)(1-\gamma),\\ \beta_{20}=(1-\alpha)(1-\eta)\gamma,\\ \beta_{21}=(1-\alpha)\eta\gamma,\\ \beta_{22}=(1-\alpha)\eta(1-\gamma)\end{cases}$; $\begin{cases}\beta_{23}=\alpha(1-\eta)(1-\gamma),\\ \beta_{24}=\alpha(1-\eta)\gamma,\\ \beta_{25}=\alpha\eta\gamma,\\ \beta_{26}=\alpha\eta(1-\gamma)\end{cases}$

Здесь w_i, $i=\overline{1,6}$ – значения поля в точках $E_i, i=\overline{1,6}$ – ортогональных проекциях точки $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ на грани прямоугольного параллелепипеда; w_i, $i=\overline{7,18}$ – значения поля в точках $E_i, i=\overline{7,18}$, которые получаются при пересечении плоскостей, параллельных координатным плоскостям, которые проведены через точку $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ с ребрами прямоугольного параллелепипеда; $w_i, i=\overline{19,26}$ – значения поля в точках $E_i, i=\overline{19,26}$ – вершинах прямоугольного параллелепипеда.

Доказательство. Представим случайную величину $w(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ в виде суммы следующих случайных величин:

$$\begin{aligned} w(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})&=\delta w(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})+w(\tilde{x},y_0,\tilde{z})+w(x_0,\tilde{y},\tilde{z})-w(x_0,y_0,\tilde{z})+\\ &+w(\tilde{x},\tilde{y},z_0)-w(\tilde{x},y_0,z_0)-w(x_0,\tilde{y},z_0)-w(x_0,y_0,z_0)\,, \end{aligned} \tag{6}$$

где
$$\begin{aligned} \delta w(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})&=w(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})-w(\tilde{x},y_0,\tilde{z})-w(x_0,\tilde{y},\tilde{z})+w(x_0,y_0,\tilde{z})-\\ &-w(\tilde{x},\tilde{y},z_0)+w(\tilde{x},y_0,z_0)+w(x_0,\tilde{y},z_0)+w(x_0,y_0,z_0). \end{aligned}$$

Так как все случайные величины в правой части (6), кроме $\delta w(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$, измеримы относительно σ – алгебры F, то

$$\begin{aligned} \overline{m}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})&=\delta\overline{m}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})+w(\tilde{x},y_0,\tilde{z})+w(x_0,\tilde{y},\tilde{z})-w(x_0,y_0,\tilde{z})+\\ &+w(\tilde{x},\tilde{y},z_0)-w(\tilde{x},y_0,z_0)-w(x_0,\tilde{y},z_0)-w(x_0,y_0,z_0)\,, \end{aligned} \tag{7}$$

где $\delta\overline{m}(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z}) = M\{\delta w(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z})|F\}$,

при этом $M\{(w(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z}) - \overline{m}(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z}))^2|F\} = M\{(\delta w(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z}) - \delta\overline{m}(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z}))^2|F\}$.

Следовательно, для нахождения $\overline{m}(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z})$ достаточно найти $\delta\overline{m}(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z})$.

Пусть $x_0 = x^0_{k(n)} < x^1_{k(n)} < \ldots < x^{k(n)}_{k(n)} = x_0 + d,\ n \ge 1$,

$y_0 = y^0_{k(m)} < y^1_{k(m)} < \ldots < y^{k(m)}_{k(m)} = y_0 + c,\ m \ge 1$,

$z_0 = z^0_{k(l)} < z^1_{k(l)} < \ldots < z^{k(l)}_{k(l)} = z_0 + h,\ l \ge 1$, разбиения отрезка $[0,1]$ такие, что

a) $1 \le k(1) < k(2) < \ldots < k(n) < \ldots$; $1 \le k(1) < k(2) < \ldots < k(m) < \ldots$;
$1 \le k(1) < k(2) < \ldots < k(l) < \ldots$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{1\le j\le k(n)} (x^j_{k(n)} - x^j_{k(n)}) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{1\le j\le k(m)} (y^j_{k(m)} - y^j_{k(m)}) = 0$,
$\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{1\le j\le k(l)} (z^j_{k(l)} - z^j_{k(l)}) = 0$;

c) для любого $j = \overline{1,k(n)}$ существует $r = \overline{1,k(n+1)}$ такое, что $x^j_{k(n)} = x^r_{k(n+1)}$; для любого $j = \overline{1,k(m)}$ существует $r = \overline{1,k(m+1)}$ такое, что $y^j_{k(m)} = y^r_{k(m+1)}$; для любого $j = \overline{1,k(l)}$ существует $r = \overline{1,k(l+1)}$ такое, что $z^j_{k(l)} = z^r_{k(l+1)}$.

Введем следующие обозначения: $x_i = x^i_{k(n)}$, $y_j = y^j_{k(m)}$, $z_k = z^k_{k(l)}$,

$w_{ijk} = w(x_i, y_j, z_k)$, $F_{k(n,m,l)} = \sigma\{w_{ijk} \in S, i = \overline{0,k(n)}, j = \overline{0,k(m)}, k = \overline{0,k(l)}\}$,

$\delta\overline{m}_{k(n,m,l)}(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z}) = M\{\delta w(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z})|F_{k(n,m,l)}\}$,

$d_{k(n,m,l)}(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z}) = M\{(\delta w(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z}) - \delta\overline{m}(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z}))^2|F_{k(n,m,l)}\}$.

Далее для упрощения записей переобозначим $k(n)$, $k(m)$ и $k(l)$ через n, m и l соответственно, и рассмотрим следующие случайные величины:

$w^l_{ij} = w(x_i, y_j, z_l)$, $i = \overline{0,n}$, $j = \overline{0,m}$, $w^m_{ik} = w(x_i, y_m, z_k)$, $i = \overline{0,n}$, $k = \overline{0,l}$,

$w^n_{jk} = w(x_n, y_j, z_k)$, $j = \overline{0,m}$, $k = \overline{0,l}$,

$$\delta w^l_{ij} = w^l_{ij} - w^l_{0j} - w^l_{i0} + w^l_{00} - (w_{ij0} - w_{0j0} - w_{i00} + w_{000}), \tag{8}$$

$$\delta w^m_{ik} = w^m_{ik} - w^m_{0k} - w^m_{i0} + w^m_{00} - (w_{i0k} - w_{00k} - w_{i00} + w_{000}), \tag{9}$$

$$\delta w^n_{jk} = w^n_{jk} - w^n_{0k} - w^n_{j0} + w^n_{00} - (w_{0jk} - w_{00k} - w_{0j0} + w_{000}). \tag{10}$$

Пусть $G_{n\,ml} = \sigma\left\{\begin{matrix} w_{ij0}, w_{i0k}, w_{0jk}, i = \overline{0,n},\ j = \overline{0,m},\ k = \overline{0,l}, \\ \delta w^l_{ij},\ \delta w^m_{ik}, \delta w^n_{jk},\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}, k = \overline{1,l}, \end{matrix}\right\}$.

Очевидно, что $G_{n\,ml} = F_{n\,ml}$, $\forall\, n = 1,2,\ldots$, $\forall\, m = 1,2,\ldots$, $\forall\, l = 1,2,\ldots$, так как все случайные величины, порождающие σ – алгебру $G_{n\,ml}$, представляют собой сумму или разность случайных величин, порождающих σ – алгебру $F_{n\,ml}$, и наоборот каждую случайную величину w_{ijk}, $i = \overline{0,n}$, $j = \overline{0,m}$, $k = \overline{0,l}$ можно представить в виде суммы или разности случайных величин, порождающих σ – алгебру $G_{n\,ml}$. Следовательно

$M\{\delta w(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})|F_{nml}\} = M\{\delta w(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})|G_{nml}\}$ и

$d_{nml}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = M\{(\delta w(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) - \delta\overline{m}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}))^2|G_{nml}\}$.

Таким образом, случайная величина $\delta\overline{m}_{nml}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ должна представлять собой линейную комбинацию случайных величин $w_{ij0}, w_{i0k}, w_{0jk}$, $i=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,m}$, $k=\overline{0,l}$, δw^l_{ij}, $\delta w^m_{ik}, \delta w^n_{jk}$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,l}$. Покажем, что коэффициенты перед случайными величинами $w_{ij0}, w_{i0k}, w_{0jk}, i=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,m}$, $k=\overline{0,l}$ равны нулю.

Случайные величины $w_{ij0}, w_{i0k}, w_{0jk}, i=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,m}$, $k=\overline{0,l}$ можно рассматривать как приращения винеровского поля по прямоугольному параллелепипеду, одна вершина которого имеет координаты $(i,j,0)$, $(i,0,k)$, или $(0,j,k)$, $i=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,m}$, $k=\overline{0,l}$ соответственно, а семь остальных – принадлежат координатным плоскостям, следовательно, случайные величины w_{ij0}, $w_{i0k}, w_{0jk}, i=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,m}$, $k=\overline{0,l}$ приращения винеровского поля по таким прямоугольным параллелепипедам, которые не имеют общих внутренних точек с прямоугольными параллелепипедами, по которым берутся приращения δw^l_{ij}, $\delta w^m_{ik}, \delta w^n_{jk}$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,l}$ и значит, каждая случайная величина $w_{ij0}, w_{i0k}, w_{0jk}, i=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,m}$, $k=\overline{0,l}$ независима с каждой из случайных величин δw^l_{ij}, δw^m_{ik}, δw^n_{jk}, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,l}$. Кроме того, каждая из случайных величин $w_{ij0}, w_{i0k}, w_{0jk}$, $i=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,m}$, $k=\overline{0,l}$ независима со случайной величиной $\delta w(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ и, следовательно, согласно лемме, коэффициенты перед случайными величинами $w_{ij0}, w_{i0k}, w_{0jk}$, $i=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,m}$, $k=\overline{0,l}$ равны нулю. Для нахождения $\delta\overline{m}_{nml}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = M\{\delta w(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})|G_{nml}\}$ воспользуемся теоремой о нормальной корреляции [3]. Для этого найдем решение системы

$$\operatorname{cov}(\delta\overline{w},\delta\overline{w})\overline{\beta} = \operatorname{cov}(\delta w(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}),\delta\overline{w}), \tag{11}$$

где $\delta\overline{w} = (\delta w, \delta\tilde{w}, \delta\hat{w})$, $\delta w = (\delta w^l_1, \delta w^l_2, \ldots, \delta w^l_i, \ldots, \delta w^l_n)$, $\delta w^l_i = (\delta w^l_{1i}, \delta w^l_{2i}, \ldots, \delta w^l_{mi}), i=\overline{1,n}$,

$\delta\tilde{w} = (\delta w^n_1, \delta w^n_2, \ldots, \delta w^n_k, \ldots, \delta w^n_{l-1})$, $\delta w^n_k = (\delta w^n_{1k}, \delta w^n_{2k}, \ldots, \delta w^n_{mk}), k=\overline{1,l}$,

$\delta\hat{w} = (\delta w^m_1, \delta w^m_2, \ldots, \delta w^m_k, \ldots, \delta w^m_{l-1})$, $\delta w^m_k = (\delta w^m_{1k}, \delta w^m_{2k}, \ldots, \delta w^m_{(n-1)k}), k=\overline{1,l}$,

$\overline{\beta}$ – неизвестный вектор, имеющий следующую структуру: $\overline{\beta} = (\beta, \tilde{\beta}, \hat{\beta})$,

где $\beta = (\beta^l_1, \beta^l_2, \ldots, \beta^l_i, \ldots, \beta^l_n)$, $\beta^l_i = (\beta^l_{1i}, \beta^l_{2i}, \ldots, \beta^l_{mi})$, $i=\overline{1,n}$,

$\tilde{\beta} = (\beta^n_1, \beta^n_2, \ldots, \beta^n_k, \ldots, \beta^n_{l-1})$, $\beta^n_k = (\beta^n_{1k}, \beta^n_{2k}, \ldots, \beta^n_{mk}), k=\overline{1,l}$,

$\hat{\beta} = (\beta^m_1, \beta^m_2, \ldots, \beta^m_k, \ldots, \beta^m_{l-1})$, $\beta^m_k = (\beta^m_{1k}, \beta^m_{2k}, \ldots, \beta^m_{(n-1)k}), k=\overline{1,l}$.

Решая систему (11) и учитывая равенство

$\delta\overline{m}_{nml}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = R^+ \operatorname{cov}(\delta w(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}),\delta\overline{w})\delta\overline{w}$, где R^+ – матрица псевдообратная к матрице $\operatorname{cov}(\delta\overline{w},\delta\overline{w})$, получим:

$$\begin{aligned}\delta\overline{m}_{nml}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) &= \alpha\delta w(x_0+d,\tilde{y},\tilde{z}) + \eta\delta w(\tilde{x},y_0+c,\tilde{z}) + \gamma\delta w(\tilde{x},\tilde{y},z_0+h) - \\ &- \alpha\eta\delta w(x_0+d,y_0+c,\tilde{z}) - \eta\gamma\delta w(\tilde{x},y_0+c,z_0+h) - \alpha\gamma\delta w(x_0+d,\tilde{y},z_0+h) +\end{aligned} \tag{12}$$

$+\alpha\eta\gamma\delta w(x_0+d,y_0+c,z_0+h)$.

Вспоминая, что $k(n)$, $k(m)$ и $k(l)$ переобозначали через n, m и l, соответственно в равенстве (12) перейдем к пределу при $k(n)\to\infty$, $k(m)\to\infty$, $k(l)\to\infty$. Учитывая определение разбиения отрезка [0,1], имеем:

$$G_{k(1,1,1)}\subseteq G_{k(2,1,1)}\subseteq\ldots\subseteq G_{k(n,m,l)}\subseteq\ldots\subseteq G \text{ и } G=\left\{\bigcup_{n=1,m=1,l=1}^{\infty}G_{k(n,m,l)}\right\}.$$

Следовательно, согласно теореме Леви из [3, стр.25] получим:

$$\delta\overline{m}_{k(n,m,l)}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})\xrightarrow[k(n),k(l),k(m)\to\infty]{}\delta\overline{m}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) \text{ (с вероятностью } P=1\text{)}.$$

Так как $M\left\{(\delta w-\delta\overline{m}_{k(n,m,l)})^2\right\}\le M\left\{(\delta w-\delta\overline{m}_{k(1,1,1)})^2\right\}$ для $\forall n=1,2,\ldots$, $\forall m=1,2,\ldots,\forall l=1,2,\ldots$, то $\lim\limits_{n,m,l\to\infty}\delta\,\overline{m}_{k(n,m,l)}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})=\delta\overline{m}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$.

Так как выражение в правой части (12) не зависит от n, m, l, то

$$\delta\overline{m}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})=\alpha\delta w(x_0+d,\tilde{y},\tilde{z})+\eta\delta w(\tilde{x},y_0+c,\tilde{z})+\gamma\delta w(\tilde{x},\tilde{y},z_0+h)-$$
$$-\alpha\eta\delta w(x_0+d,y_0+c,\tilde{z})-\eta\gamma\delta w(\tilde{x},y_0+c,z_0+h)-\alpha\gamma\delta w(x_0+d,\tilde{y},z_0+h)+$$
$$+\alpha\eta\gamma\delta w(x_0+d,y_0+c,z_0+h).$$

Формула (4) следует из последнего равенства и (8) – (10). Далее, учитывая, что ковариация случайной величины $\delta w(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ с каждой из случайных величин в правой части (12) равна $d_1c_1h_1$, получим:

$$d(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})=d_1c_1h_1-d_1c_1h_1(\alpha+\eta+\gamma+\alpha\eta-\eta\gamma-\alpha\gamma-\alpha\eta\gamma),$$

откуда $d(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})=d_1c_1h_1(1-\alpha)(1-\gamma)(1-\eta)$.

Учитывая, что $\alpha=d_1/d$, $\beta=c_1/c$, $\gamma=h_1/h$, получим равенство (5) в утверждении теоремы.

Таким образом, из доказанной теоремы следует, что наилучшая в среднеквадратическом смысле оценка для $w(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ зависит от значений винеровского поля на поверхности прямоугольного параллелепипеда только в конечном числе точек.

РЕЗЮМЕ

У статті розв'язана наступна задача: нехай $w(x,y,z)$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$ – вінерівське поле у просторі та S – поверхня прямокутного паралелепіпеда. Побудована найкраща у средньоквадратичному значенні оцінка для $w(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$, $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})\notin S$, яка базується на значеннях $w(x,y,z)$, $(x,y,z)\in S$, та обчислена її помилка.

SUMMARY

The following problem is solved in the paper: let $w(x,y,z)$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$ be the Wiener field in the space and S is surface of the rectangulare parallelepiped. The best valuation in everage quadratic sense for $w(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$, $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})\notin S$ based on the meaning $w(x,y,z)$, $(x,y,z)\in S$ is counstructed and its error is calculated.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шевляков А.Ю. О восстановлении винеровского поля по его реализациям на кривой // Теория случайных процессов. – 1988. – Вып.16. – С.87-93.
2. Земляк Т.В. Восстановление винеровского поля на плоскости по его реализациям на замкнутой кривой некоторого типа // Вісник Донецького державного університету. – 1998. – №1. – Серія А: Природничі науки. – С.24-30.
3. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974. – 696 с.

Надійшла до редакції 03.09.1998 р.