

МАТЕМАТИКА

УДК 511: 531/534:530:512.942

ИНВАРИАНТЫ И ДОПУСТИМЫЕ ДВИЖЕНИЯ В ГИПЕРПРОСТРАНСТВЕ

С.В.Терехов

Донецкий национальный технический университет

Введение.

Внешние произведения базисных элементов позволяют сгенерировать охватывающие алгебры над заданным числовым полем и построить схему поиска новых собственных преобразований системы координат [1]. Это означает, что поиск новых алгебр, построенных на основе изучения внешних произведений реперных элементов, дает возможность вычислить метрическую матрицу многообразия, метрические параметры и инварианты, найти собственные движения континуума и указывает на то, какими должны быть новые инвариантные уравнения, описывающие физические процессы в реальном 4-мерном пространстве-времени. В работе [1] было показано, что алгебра базисных матриц, полученных в виде внешних произведений базисных векторов, при определенных соотношениях изоморфна алгебре гиперкомплексных чисел (кватернионов [2]) и алгебре матриц Паули (см., например, стр. 48-49 работы [3]). Математический и физический изоморфизмы алгебры базисных матриц демонстрирует актуальность и научную значимость предлагаемой модели. В этой статье исследуем комплексное многообразие кватернионов.

Векторное пространство и охватывающая алгебра для кватернионов.

В качестве базисных элементов выберем единицу и три гиперкомплексных числа i , j и k (Гамильтон, 1843), произведения которых определены в табл. 1.

Таблица 1. Произведения гиперкомплексных чисел i , j и k

	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	$-k$	-1	i
k	j	$-i$	-1

Из табл.1 видно: произведение гиперкомплексных чисел некоммутативно (неперестановочно). Отметим, что аналогичным законом умножения обладают орты координатных осей в векторной алгебре со следующими отличиями: скалярное произведение $\vec{e}_n \cdot \vec{e}_m = \delta_{nm}$, а векторное – $\vec{e}_n \times \vec{e}_m = \Omega_{nm}^q \vec{e}_q$, где

$$\delta_{nm} - \text{символ Кронекера, } \Omega_{nm}^q = \begin{cases} -1, & \text{если все индексы различны и образуют нечетную подстановку} \\ 0, & \text{если хотя бы два индекса совпадают} \\ 1, & \text{если все индексы различны и образуют четную подстановку} \end{cases}.$$

Аналогичные соотношения справедливы в алгебре Клиффорда для базисных элементов кватернионного числового поля. В физической интерпретации этим соотношениям можно сопоставить наличие в исследуемом многообразии поступательного и вращательного движений.

Метрический тензор для кватернионного поля согласно алгебре Клиффорда в определении [1] имеет вид

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} 1 & i & j & k \\ i & -1 & 0 & 0 \\ j & 0 & -1 & 0 \\ k & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Из формулы (1) видно, что для гиперкомплексных единиц (в силу некоммутативности их произведения) перекрестные, пространственные, матричные элементы метрического тензора равны нулю. Ориентатор (экстенсив вращения) для данного случая имеет вид

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & -j \\ 0 & -k & 0 & i \\ 0 & j & -i & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Таким образом, поле кватернионов содержит не только поступательное, но и вращательное движения.

Построим векторное пространство над кватернионным полем. Первый нормированный базисный псевдовектор запишем в виде бивектора $g_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} f_2 \\ f_2 j \end{pmatrix}$, где псевдовектор f_2 (и f_1) определен в работе [1]. Остальные три базисных псевдовектора получим путем комплексного сопряжения по комплексным числам i и j (i – сопряжение и j – сопряжение) с учетом соотношений $f_1^+ = f_2$, $f_2^+ = f_1$ и $j f_1 = f_2 j$, $j f_2 = f_1 j$:

$$g_2 = g_1^{+i} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_1 j \end{pmatrix}, \quad g_3 = g_1^{+j} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} f_2 \\ -f_2 j \end{pmatrix}, \quad g_4 = g_1^{+i+j} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} f_1 \\ -f_1 j \end{pmatrix}.$$

Коммутации базисных псевдовекторов g_n ($n = 0 \div 3$) с гиперкомплексными числами i , j и k равны:

$$\begin{aligned} i g_1 &= g_3 i; & i g_2 &= g_4 i; & i g_3 &= g_1 i; & i g_4 &= g_2 i; \\ j g_1 &= g_2 j; & j g_2 &= g_1 j; & j g_3 &= g_4 j; & j g_4 &= g_3 j; \\ k g_1 &= g_4 k; & k g_2 &= g_3 k; & k g_3 &= g_2 k; & k g_4 &= g_1 k. \end{aligned} \quad (3)$$

С учетом некоммутативности гиперкомплексных чисел эрмитово-сопряженные вектора равны:

$$g_1^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} f_2^* & -j f_2^* \end{pmatrix}, \quad g_2^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} f_1^* & -j f_1^* \end{pmatrix}, \quad g_3^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} f_2^* & j f_2^* \end{pmatrix}, \quad g_4^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} f_1^* & j f_1^* \end{pmatrix}.$$

Свертки (скалярные или внутренние произведения) кватернионных базисных псевдовекторов равны $g_i^* g_j = \delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера. Развертки (внешние произведения) базисных псевдовекторов приведены в табл. 2, в которой верхний индекс показывает сопряжение по соответствующей гиперкомплексной единице. Табл. 2 показывает, что существует всего четыре базисных гиперкомплексных матрицы, остальные могут быть получены из этих матриц путем комплексного сопряжения по соответствующим комплексным единицам. Отсюда следует нетривиальный вывод: в гиперкомплексном многообразии существует 16 вещественных базисных матриц, которые будут найдены ниже.

Таблица 2. Развертки кватернионных базисных псевдовекторов

	g_1^*	g_2^*	g_3^*	g_4^*
g_1	U_{11}	U_{12}	U_{13}	U_{14}
g_2	$U_{21} = U_{12}^{+i}$	$U_{22} = U_{11}^{+i}$	$U_{23} = U_{14}^{+i}$	$U_{24} = U_{13}^{+i}$
g_3	$U_{31} = U_{13}^{+j}$	$U_{32} = U_{14}^{+j}$	$U_{33} = U_{11}^{+j}$	$U_{34} = U_{12}^{+j}$
g_4	$U_{41} = U_{14}^{+i+j}$	$U_{42} = U_{13}^{+i+j}$	$U_{43} = U_{12}^{+i+j}$	$U_{44} = U_{11}^{+i+j}$

где $U_{11} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} L & -K j \\ K j & L \end{pmatrix}$, $U_{12} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} K & -L j \\ L j & K \end{pmatrix}$, $U_{13} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} L & K j \\ K j & -L \end{pmatrix}$, $U_{14} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} K & L j \\ L j & -K \end{pmatrix}$.

Результат действия матриц U_{ij} на базисные псевдовектора приведен в табл. 3.

Таблица 3. Действие матриц U_{ij} на кватернионные базисные псевдовектора

	g_1	g_2	g_3	g_4
U_{11}	g_1	0	0	0
U_{12}	0	g_1	0	0
U_{13}	0	0	g_1	0
U_{14}	0	0	0	g_1

	g_1	g_2	g_3	g_4
U_{21}	g_2	0	0	0
U_{22}	0	g_2	0	0
U_{23}	0	0	g_2	0
U_{24}	0	0	0	g_2

	g_1	g_2	g_3	g_4
U_{31}	g_3	0	0	0
U_{32}	0	g_3	0	0
U_{33}	0	0	g_3	0
U_{34}	0	0	0	g_3

	g_1	g_2	g_3	g_4
U_{41}	g_4	0	0	0
U_{42}	0	g_4	0	0
U_{43}	0	0	g_4	0
U_{44}	0	0	0	g_4

Запишем базисные матрицы U_{ij} ($i = 1, j = 1 \div 4$) в развернутом виде:

$$U_{11} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} L & -Kj \\ Kj & L \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} \mu_0 & 0 \\ 0 & \mu_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_1 \end{pmatrix} i + \begin{pmatrix} 0 & -\mu_2 \\ \mu_2 & 0 \end{pmatrix} j + \begin{pmatrix} 0 & -\mu_3 \\ \mu_3 & 0 \end{pmatrix} k \right];$$

$$U_{12} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} K & -Lj \\ Lj & K \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} \mu_2 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_3 & 0 \\ 0 & \mu_3 \end{pmatrix} i + \begin{pmatrix} 0 & -\mu_0 \\ \mu_0 & 0 \end{pmatrix} j + \begin{pmatrix} 0 & -\mu_1 \\ \mu_1 & 0 \end{pmatrix} k \right];$$

$$U_{13} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} L & Kj \\ Kj & -L \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} \mu_0 & 0 \\ 0 & -\mu_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & -\mu_1 \end{pmatrix} i + \begin{pmatrix} 0 & \mu_2 \\ \mu_2 & 0 \end{pmatrix} j + \begin{pmatrix} 0 & \mu_3 \\ \mu_3 & 0 \end{pmatrix} k \right];$$

$$U_{14} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} K & Lj \\ Lj & -K \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} \mu_2 & 0 \\ 0 & -\mu_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_3 & 0 \\ 0 & -\mu_3 \end{pmatrix} i + \begin{pmatrix} 0 & \mu_0 \\ \mu_0 & 0 \end{pmatrix} j + \begin{pmatrix} 0 & \mu_1 \\ \mu_1 & 0 \end{pmatrix} k \right].$$

Базисными вещественными матрицами являются 16 матриц ($n = 0 \div 3$):

$$\alpha_n = \begin{pmatrix} \mu_n & 0 \\ 0 & \mu_n \end{pmatrix}; \beta_n = \begin{pmatrix} 0 & \mu_n \\ \mu_n & 0 \end{pmatrix}; \chi_n = \begin{pmatrix} \mu_n & 0 \\ 0 & -\mu_n \end{pmatrix}; \delta_n = \begin{pmatrix} 0 & -\mu_n \\ \mu_n & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Таким образом, поиск новых физических уравнений инвариантных по отношению к преобразованию аналогичному преобразованию Лоренца связан с использованием базисных матриц (4) или матриц U_{ij} . Кроме того, эти матрицы могут служить для построения новых изоклассных, ортогональных, собственных, невырожденных, обратимых и изометрических преобразований 4-мерного вещественного и гиперкомплексного многообразий, которые определяют собственные движения пространств. Отметим, что матрицы α_n с матрицами β_n (или с χ_n , или с δ_n) образуют подалгебру изоморфную алгебре октав [2], причем матрица α_0 играет роль единичной матрицы. Закон умножения для указанных пар базисных матриц приведен в табл. 4. (Аналогичный вид имеют таблицы для произведений матриц α_n и χ_n ; α_n и δ_n).

Таблица 4. Произведения базисных матриц α_n и β_n

	α_0	α_1	α_2	α_3	β_0	β_1	β_2	β_3
α_0	α_0	α_1	α_2	α_3	β_0	β_1	β_2	β_3
α_1	α_1	$-\alpha_0$	α_3	$-\alpha_2$	β_1	$-\beta_0$	β_3	$-\beta_2$
α_2	α_2	$-\alpha_3$	α_0	α_1	β_2	$-\beta_3$	β_0	$-\beta_1$
α_3	α_3	α_2	α_1	α_0	β_3	β_2	β_1	β_0
β_0	β_0	β_1	β_2	β_3	α_0	α_1	α_2	α_3
β_1	β_1	$-\beta_0$	β_3	$-\beta_2$	α_1	$-\alpha_0$	α_3	$-\alpha_2$
β_2	β_2	$-\beta_3$	β_0	$-\beta_1$	α_2	$-\alpha_3$	α_0	$-\alpha_1$
β_3	β_3	β_2	β_1	β_0	α_3	α_2	α_1	α_0

Отметим, что матрицы Дирака (см., например, стр. 389 работы [4] и [5]) в теории электрона связаны с базисными матрицами соотношениями: $\gamma_0 = \alpha_0$; $\gamma_1 = -i\delta_1$; $\gamma_2 = \delta_2$; $\gamma_3 = \delta_3$.

Другие пары базисных матриц не образуют подалгебру (табл. 5 и табл. 6, аналогично выглядит таблица для произведений матриц β_n и δ_n), так как не содержат единичной матрицы, необходимой для существования алгебры [2].

Таблица 5. Произведения базисных матриц β_n и χ_n

	β_0	β_1	β_2	β_3	χ_0	χ_1	χ_2	χ_3
β_0	α_0	α_1	α_2	α_3	δ_0	δ_1	δ_2	δ_3
β_1	α_1	$-\alpha_0$	α_3	$-\alpha_2$	δ_1	$-\delta_0$	δ_3	$-\delta_2$
β_2	α_2	$-\alpha_3$	α_0	$-\alpha_1$	δ_2	$-\delta_3$	δ_0	$-\delta_1$
β_3	α_3	α_2	α_1	α_0	δ_3	δ_2	δ_1	δ_0
χ_0	$-\delta_0$	$-\delta_1$	$-\delta_2$	$-\delta_3$	α_0	α_1	α_2	α_3
χ_1	$-\delta_1$	δ_0	$-\delta_3$	δ_2	α_1	$-\alpha_0$	α_3	$-\alpha_2$
χ_2	$-\delta_2$	δ_3	$-\delta_0$	δ_1	α_2	$-\alpha_3$	α_0	$-\alpha_1$
χ_3	$-\delta_3$	$-\delta_2$	$-\delta_1$	$-\delta_0$	α_3	α_2	α_1	α_0

Таблица 6. Произведения базисных матриц χ_n и δ_n

	χ_0	χ_1	χ_2	χ_3	δ_0	δ_1	δ_2	δ_3
χ_0	α_0	α_1	α_2	α_3	$-\beta_0$	$-\beta_1$	$-\beta_2$	$-\beta_3$
χ_1	α_1	$-\alpha_0$	α_3	$-\alpha_2$	$-\beta_1$	β_0	$-\beta_3$	β_2
χ_2	α_2	$-\alpha_3$	α_0	$-\alpha_1$	$-\beta_2$	β_3	$-\beta_0$	β_1
χ_3	α_3	α_2	α_1	α_0	$-\beta_3$	$-\beta_2$	$-\beta_1$	$-\beta_0$
δ_0	β_0	β_1	β_2	β_3	$-\alpha_0$	α_1	α_2	α_3
δ_1	β_1	$-\beta_0$	β_3	$-\beta_2$	α_1	$-\alpha_0$	α_3	$-\alpha_2$
δ_2	β_2	$-\beta_3$	β_0	$-\beta_1$	α_2	$-\alpha_3$	α_0	$-\alpha_1$
δ_3	β_3	β_2	β_1	β_0	α_3	α_2	α_1	$-\alpha_0$

3. Метрические параметры и инварианты, изотропные плоскости и преобразование кватернионных векторов.

Рассмотрим псевдовектора над кватернионным полем, используя разные виды комплексного сопряжения

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ i x_1 \\ j x_2 \\ k x_3 \end{pmatrix}, \quad X^{+i} = \begin{pmatrix} x_0 \\ -i x_1 \\ j x_2 \\ -k x_3 \end{pmatrix}, \quad X^{+j} = \begin{pmatrix} x_0 \\ i x_1 \\ -j x_2 \\ -k x_3 \end{pmatrix}, \quad X^{+i+j} = \begin{pmatrix} x_0 \\ -i x_1 \\ -j x_2 \\ k x_3 \end{pmatrix}, \quad X^+ = \begin{pmatrix} x_0 \\ -i x_1 \\ -j x_2 \\ -k x_3 \end{pmatrix}$$

им транспонированные вектора

$$X^T = (x_0 \ i x_1 \ j x_2 \ k x_3), \quad (X^{+i})^T = (x_0 \ -i x_1 \ j x_2 \ -k x_3), \quad (X^{+j})^T = (x_0 \ i x_1 \ -j x_2 \ -k x_3),$$

$$(X^{+i+j})^T = (x_0 \ -i x_1 \ -j x_2 \ k x_3), \quad (X^+)^T = (x_0 \ -i x_1 \ -j x_2 \ -k x_3);$$

и эрмитово-сопряженные вектора

$$X^* = (x_0 \ -i x_1 \ -j x_2 \ -k x_3), \quad X^{*i} = (x_0 \ i x_1 \ -j x_2 \ k x_3), \quad X^{*j} = (x_0 \ -i x_1 \ j x_2 \ k x_3),$$

$$X^{*i+j} = (x_0 \ i x_1 \ j x_2 \ -k x_3), \quad (X^+)^* = (x_0 \ i x_1 \ j x_2 \ k x_3).$$

Введем следующие обозначения: $L^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ – длина (модуль) вектора, $N_1^2 = x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $N_2^2 = x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$, $N_3^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$, $M_1^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$, $M_2^2 = x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$, $M_3^2 = x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$, $S^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ – норма вектора, и вычислим метрические параметры (скалярные произведения) этих псевдовекторов (табл. 7). Табл. 7 показывает, что скалярные произведения транспонированных псевдовекторов с исходными псевдовекторами того же вида приводят к норме вектора. Внутренние произведения транспонированного псевдовектора на псевдовектор, комплексно-сопряженный к исходному псевдовектору, и эрмитово-сопряженного псевдовектора на исходный псевдовектор приводят к длине псевдовектора. Свертки псевдовекторов с их эрмитово-сопряженными псевдовекторами приводят к длине вектора, а указанные в предыдущем предложении скалярные произведения псевдовекторов – к норме псевдовектора. Следовательно, транспонированные псевдовектора образуют с исходными псевдовекторами квазиевклидово пространство, а эрмитово-сопряженные псевдовекторы совместно с исходными псевдовекторами – евклидово гиперпространство.

Таблица 7. Метрические параметры кватернионных псевдовекторов

	X	X^{+i}	X^{+j}	X^{+i+j}	X^+
X^T	S^2	N_2^2	N_1^2	N_3^2	L^2
$(X^{+i})^T$	N_2^2	S^2	N_3^2	N_1^2	M_2^2
$(X^{+j})^T$	N_1^2	N_3^2	S^2	N_2^2	M_3^2
$(X^{+i+j})^T$	N_3^2	N_1^2	N_2^2	S^2	M_1^2
$(X^+)^T = X^*$	L^2	M_2^2	M_3^2	M_1^2	S^2

$\begin{matrix} \diagdown \\ X \end{matrix}$	X	X^{+i}	X^{+j}	X^{+i+j}	X^{+}
X^{*}	L^2	M_2^2	M_3^2	M_1^2	S^2
$(X^{+i})^{*}$	M_2^2	L^2	M_1^2	M_3^2	N_2^2
$(X^{+j})^{*}$	M_3^2	M_1^2	L^2	M_2^2	N_1^2
$(X^{+i+j})^{*}$	M_1^2	M_3^2	M_2^2	L^2	N_3^2
$(X^{+})^{*}$	S^2	N_2^2	N_1^2	N_3^2	L^2

Найдем метрические инварианты псевдовекторов:

$$1) X^T \hat{G} X = L^2 - 2x_0(x_1 + x_2 + x_3); X^T \hat{G} X^{+i} = M_2^2 - 2x_0 x_2; X^T \hat{G} X^{+j} = M_3^2 - 2x_0 x_1; \\ X^T \hat{G} X^{+i+j} = M_1^2 - 2x_0 x_3; X^T \hat{G} X^{+} = S^2.$$

$$2) (X^{+i})^T \hat{G} X = M_2^2 - 2x_0 x_2; (X^{+i})^T \hat{G} X^{+i} = L^2 + 2x_0(x_1 - x_2 + x_3); \\ (X^{+i})^T \hat{G} X^{+j} = M_1^2 + 2x_0 x_3; (X^{+i})^T \hat{G} X^{+i+j} = M_3^2 + 2x_0 x_1; \\ (X^{+i})^T \hat{G} X^{+} = N_2^2 + 2x_0(x_1 + x_3).$$

$$3) (X^{+j})^T \hat{G} X = M_3^2 - 2x_0 x_1; (X^{+j})^T \hat{G} X^{+i} = M_1^2 + 2x_0 x_3; \\ (X^{+j})^T \hat{G} X^{+j} = L^2 - 2x_0(x_1 - x_2 - x_3); (X^{+j})^T \hat{G} X^{+i+j} = M_2^2 + 2x_0 x_2; \\ (X^{+j})^T \hat{G} X^{+} = N_1^2 + 2x_0(x_2 + x_3).$$

$$4) (X^{+i+j})^T \hat{G} X = M_1^2 - 2x_0 x_3; (X^{+i+j})^T \hat{G} X^{+i} = M_3^2 + 2x_0 x_1; \\ (X^{+i+j})^T \hat{G} X^{+j} = M_2^2 + 2x_0 x_2; (X^{+i+j})^T \hat{G} X^{+i+j} = L^2 + 2x_0(x_1 + x_2 - x_3); \\ (X^{+i+j})^T \hat{G} X^{+} = N_3^2 + 2x_0(x_1 + x_2).$$

$$5) (X^{+})^T \hat{G} X = S^2; (X^{+})^T \hat{G} X^{+i} = N_2^2 + 2x_0(x_1 + x_3); \\ (X^{+})^T \hat{G} X^{+j} = N_1^2 + 2x_0(x_2 + x_3); (X^{+})^T \hat{G} X^{+i+j} = N_3^2 + 2x_0(x_1 + x_2); \\ (X^{+})^T \hat{G} X^{+} = L^2 + 2x_0(x_1 + x_2 + x_3).$$

$$6) X^{*} \hat{G} X = S^2; X^{*} \hat{G} X^{+i} = N_2^2 + 2x_0(x_1 + x_3); X^{*} \hat{G} X^{+j} = N_1^2 + 2x_0(x_2 + x_3); \\ X^{*} \hat{G} X^{+i+j} = N_3^2 + 2x_0(x_1 + x_2); X^{*} \hat{G} X^{+} = L^2 + 2x_0(x_1 + x_2 + x_3).$$

$$7) X^{*i} \hat{G} X = N_2^2 - 2x_0(x_1 + x_3); X^{*i} \hat{G} X^{+i} = S^2; X^{*i} \hat{G} X^{+j} = N_3^2 - 2x_0(x_1 + x_2); \\ X^{*i} \hat{G} X^{+i+j} = N_1^2 + 2x_0(x_2 - x_3); X^{*i} \hat{G} X^{+} = M_2^2 + 2x_0 x_2.$$

$$8) X^{*j} \hat{G} X = N_1^2 - 2x_0(x_2 + x_3); X^{*j} \hat{G} X^{+i} = N_3^2 + 2x_0(x_1 - x_2); X^{*j} \hat{G} X^{+j} = S^2; \\ X^{*j} \hat{G} X^{+i+j} = N_2^2 + 2x_0(x_1 - x_3); X^{*j} \hat{G} X^{+} = M_3^2 + 2x_0 x_1.$$

$$9) X^{*i+j} \hat{G} X = N_3^2 - 2x_0(x_1 + x_2); X^{*i+j} \hat{G} X^{+i} = N_1^2 - 2x_0(x_2 - x_3); \\ X^{*i+j} \hat{G} X^{+j} = N_2^2 - 2x_0(x_1 - x_3); X^{*i+j} \hat{G} X^{+i+j} = S^2; X^{*i+j} \hat{G} X^{+} = M_1^2 + 2x_0 x_3.$$

$$10) (X^{+})^{*} \hat{G} X = L^2 - 2x_0(x_1 + x_2 + x_3); (X^{+})^{*} \hat{G} X^{+i} = M_2^2 - 2x_0 x_2; \\ (X^{+})^{*} \hat{G} X^{+j} = M_3^2 - 2x_0 x_1; (X^{+})^{*} \hat{G} X^{+i+j} = M_1^2 - 2x_0 x_3; (X^{+})^{*} \hat{G} X^{+} = S^2.$$

Отсюда следует, что наличие вращения в кватернионном многообразии приводит к необходимости учета нормативов различных векторов, что приводит к «расслоению» метрических параметров и инвариантов евклидового и гиперкомплексного пространств. Единственным «нерасщепляющимся» параметром и инвариантом остается норма псевдовектора.

Для вещественного вектора $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ метрический параметр в евклидовом пространстве равен

его длине $X^T X = L^2$, а метрический инвариант в метрике четырехмерного гиперпространства определяется формулой:

$$X^T \hat{G} X = S^2 + 2x_0(x_1 i + x_2 j + x_3 k).$$

Так как действительная часть этого выражения совпадает с нормой вектора (интервал между событиями в гиперпространстве) и присутствует мнимая часть, то это приводит к необходимости введения различных нормативов вектора. Введем в рассмотрение три пространственно-временных и три пространственных норматива вещественного вектора X :

– пространственно-временные: $||[X]||_{01}^2 = 2x_0 x_1$, $||[X]||_{02}^2 = 2x_0 x_2$ и $||[X]||_{03}^2 = 2x_0 x_3$;

– пространственные: $||[X]||_{12}^2 = 2x_1 x_2$, $||[X]||_{23}^2 = 2x_2 x_3$ и $||[X]||_{31}^2 = 2x_3 x_1$.

Тогда длина и норма вещественного вектора будут связаны между собой соотношением:

$$S^4 = L^4 - ||[X]||_{01}^4 - ||[X]||_{02}^4 - ||[X]||_{03}^4 - ||[X]||_{12}^4 - ||[X]||_{23}^4 - ||[X]||_{31}^4. \quad (5)$$

Рассмотрим разложения вещественного вектора $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ и псевдовектора гиперпространства

$Y = \begin{pmatrix} x_0 \\ i x_1 \\ j x_2 \\ k x_3 \end{pmatrix}$ по базисным псевдовекторам. Базисное правостороннее (в силу некоммутативности кватер-

нионов) разложение вещественного вектора имеет вид:

$$X = g_1 a_1 + g_2 a_2 + g_3 a_3 + g_4 a_4, \quad (6)$$

где гиперчисла $a_1 = g_1^* X = \frac{1}{2}(x_0 - i x_1 - j x_2 - k x_3)$, $a_2 = g_2^* X = \frac{1}{2}(x_0 + i x_1 - j x_2 + k x_3)$,

$a_3 = g_3^* X = \frac{1}{2}(x_0 - i x_1 + j x_2 + k x_3)$, $a_4 = g_4^* X = \frac{1}{2}(x_0 + i x_1 + j x_2 - k x_3)$.

Несмотря на некоммутативность гиперкомплексных чисел i , j и k , разложение вещественного вектора (6) будет совпадать с левосторонним разложением вида

$$X = b_1 g_1 + b_2 g_2 + b_3 g_3 + b_4 g_4 \quad (7)$$

($b_n = a_n$, $n = 1 \div 4$), что нетрудно показать, если воспользоваться формулами (3) и привести (7) к виду

(6). Разложим псевдовектор Y по базисным псевдовекторам:

$$Y = g_1 d_1 + g_2 d_2 + g_3 d_3 + g_4 d_4, \quad (8)$$

где числа $d_1 = g_1^* Y = \frac{1}{2}(x_0 + x_1 + x_2 + x_3)$, $d_2 = g_2^* Y = \frac{1}{2}(x_0 - x_1 + x_2 - x_3)$,

$d_3 = g_3^* Y = \frac{1}{2}(x_0 + x_1 - x_2 - x_3)$, $d_4 = g_4^* Y = \frac{1}{2}(x_0 - x_1 - x_2 + x_3)$.

В силу вещественности коэффициентов разложения (8) справедлива такая же запись правостороннего разложения вида (7) для псевдовектора Y . Из вида коэффициентов разложения d_n ($n = 1 \div 4$) следует, что гиперплоскости

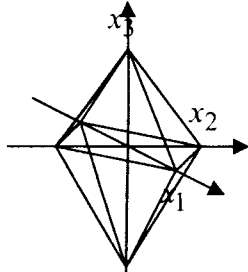
$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_0 - x_1 + x_2 - x_3 = 0, \quad x_0 + x_1 - x_2 - x_3 = 0, \quad x_0 - x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

являются выделенными гиперплоскостями 4-мерного, евклидова пространства, так как на указанных плоскостях соответствующие проекции псевдовектора обращаются в нуль. Такие плоскости (по аналогии с псевдоевклидовой плоскостью) будем называть изотропными. С физической точки зрения в приведенных гиперплоскостях движутся частицы со скоростью света. Кроме того, эти плоскости разделяют гиперпространство на будущее, прошлое, реальное пространство и пространство тахионов, скорость

движения которых превышает скорость света. Если зафиксировать время, то эти плоскости в гиперпространстве описываются уравнениями

$$\frac{x_1}{-x_0} + \frac{x_2}{-x_0} + \frac{x_3}{-x_0} = 1, \frac{x_1}{x_0} + \frac{x_2}{-x_0} + \frac{x_3}{x_0} = 1, \frac{x_1}{-x_0} + \frac{x_2}{x_0} + \frac{x_3}{x_0} = 1, \frac{x_1}{x_0} + \frac{x_2}{x_0} + \frac{x_3}{-x_0} = 1 \quad (9)$$

и образуют в пространстве ромбоид, показанный на рисунке. Отметим, что ром-



боид неограничен по плоскостям, которые описываются уравнениями:

$$\frac{x_1}{x_0} + \frac{x_2}{x_0} + \frac{x_3}{x_0} = 1, \frac{x_1}{-x_0} + \frac{x_2}{x_0} + \frac{x_3}{-x_0} = 1, \frac{x_1}{x_0} + \frac{x_2}{-x_0} + \frac{x_3}{-x_0} = 1, \frac{x_1}{-x_0} + \frac{x_2}{-x_0} + \frac{x_3}{x_0} = 1, \quad (10)$$

которые совпадают с уравнениями (9), если время имеет отрицательный знак. Следовательно, если гиперплоскости (9) ограничивают будущее, то гиперплоскости (10) – прошлое (или наоборот).

В заключение построим изокласное, ортогональное, собственное, невырожденное, обратимое и изометрическое преобразование 4-мерного евклидового и псевдоевклидового пространств. Из матриц U_{ij} выберем те, которые не изменяют базисных псевдовекторов (матрицы U_{ii}), тогда их линейная комбинация определит искомое преобразование:

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{pmatrix} = U_{11} \lambda_1 + U_{22} \lambda_2 + U_{33} \lambda_3 + U_{44} \lambda_4, \quad (9)$$

где числа λ_n ($n=1 \div 4$) в общем случае принадлежат множеству гиперкомплексных чисел, ω_{nm} – матрицы размерностью 2×2 . Учет физических требований к матрице преобразования приводит к следующим выражениям для матриц ω_{nm} :

$$\omega_{11} = \omega_{22} = \frac{1}{2} \left[L \left(e^{i\varphi + j\psi + k\varepsilon} + e^{i\varphi - j\psi - k\varepsilon} \right) + L^* \left(e^{-i\varphi + j\psi - k\varepsilon} + e^{-i\varphi - j\psi + k\varepsilon} \right) \right],$$

$$\omega_{12} = -\omega_{21} = \frac{1}{2} \left[K j \left(e^{i\varphi - j\psi - k\varepsilon} - e^{i\varphi + j\psi + k\varepsilon} \right) + K^* + j \left(e^{-i\varphi + j\psi - k\varepsilon} - e^{-i\varphi - j\psi + k\varepsilon} \right) \right].$$

Если углы $\psi = \varepsilon = 0$, то полученные формулы соответствуют преобразованию поворота на евклидовой плоскости.

Выводы

Использование внешнего произведения базисных элементов и матричного исчисления позволило построить последовательную теорию поиска физически значимых алгебраических структур в виде генерации охватывающих алгебр над полями соответствующих чисел. Показано, что базисные матрицы охватывающей алгебры могут быть использованы для построения алгебр Паули и Дирака. Вещественная часть метрической матрицы гиперпространства определяет метрику псевдоевклидова пространства-времени, для которого ориентатор отличен от нуля, что свидетельствует о наличии в этом пространстве не только поступательного, но и вращательного движений. Кроме того, предложенный подход позволяет строить изометрические, собственные, ортогональные, обратимые матрицы преобразования вещественных векторов в евклидовом и псевдоевклидовом пространствах, относительно которых уравнения физики должны быть инвариантными.

РЕЗЮМЕ

Досліджена охоплююча алгебра над полем гіперкомплексних чисел (кватерніонів) і показано, що деякі базисні матриці утворюють підалгебру октав. Відмінність орієнтатора від нуля породжує «розщеплювання» метричних параметрів і інваріантів псевдовекторного простору. Вказано на наявність ізоморфізму між алгеброю базисних матриць і алгеброю Дірака. Побудована матриця перетворення системи координат в гіперпросторі.

SUMMARY

The algebra above the field of hypercomplex numbers (quaternions) was studied and it is shown that some base matrices form the subalgebra of octaves. The difference of the orientator from zero generates «breaking» up of metrical parameters and invariants of the pseudo vector space. The presence of accordance between the algebra of base matrices and the Dirac algebra it is indicated. The matrix of transformation of the system of co-ordinates in hyperspace is built.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Терехов С.В. Генерация алгебр пространств Евклида и специальной теории относительности. – Вісник Донецького університету, Сер. А: Природничі науки, 2005, вип.1. – С.163-174.
2. Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. – М.: Наука, 1973. – 144 с.
3. Мессиа А. Квантовая механика. – М.: Наука, 1979. – Т. 2. – 583 с.
4. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. – М.: Наука, 1979. – 760 с.
5. Дирак П. Принципы квантовой механики. – М.: Наука, 1979. – 480 с.

Надійшла до редакції 29.01.2006 р.

УДК 519.21

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ГРУППОВОГО АНАЛИЗА К ИССЛЕДОВАНИЮ СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

О.В. Александрова,

Донбасская национальная академия строительства и архитектуры

1. Введение.

Решение многих фундаментальных проблем требует построения и решения математических моделей процессов, которые исследуются. Во многих случаях понятию математическая модель процесса соответствуют некоторые определенные дифференциальные уравнения, решения которых позволяют с некоторой точностью описать этот процесс. Как правило, дифференциальные уравнения и дополнительные условия следуют как из общих законов, так и из специфических законов, которые присущи каждому конкретному процессу. Наиболее простые и, в то же время, наименее точные формулировки приводят, естественно, к линейным задачам. В то же время достаточно часто описание процессов в терминах линейных уравнений является неудовлетворительным. Соответствующие математические модели «не чувствуют» более точных нелинейных эффектов, которые присущи исследуемому процессу. Итак, следующему приближению реального процесса соответствует нелинейная математическая модель, для решения которой исследователи имеют довольно ограниченный математический аппарат. Эта ситуация существенно меняется, если нелинейное дифференциальное уравнение, соответствующее некоторой модели, имеет нетривиальные симметричные свойства. На сегодняшний день изучены симметричные свойства многих известных обыкновенных дифференциальных уравнений: таких, как уравнения механики, газовой динамики, квантовой физики. Оказалось, что многие дифференциальные уравнения, которые описывают реальные процессы, имеют нетривиальные симметричные свойства. Следовательно, во время отбора дифференциального уравнения в качестве математической модели некоторого процесса определенную роль играет симметрия. Это дает возможность эффективно использовать метод симметричной редукции для построения решений таких уравнений. В работе [1] был проведен симметричный анализ линейного стохастического дифференциального уравнения (с.д.у.) Ито общего вида:

$$du(t) = (bu + \alpha)dt + (\sigma u + \beta)dw(t) \quad (1)$$

Предложенный в работах [2-4] метод построения симметрий с.д.у. Ито не дает полной картины даже при исследовании линейных с.д.у., не говоря уже о нелинейных моделях. В работе [4] была получена система определяющих уравнений для инфинитезимального оператора, который генерирует группу симметрии исследуемого уравнения (системы уравнений). При доказательстве критерия инвариантности автор [4] делает замену переменной времени и фазовой переменной, не меняя при этом винеровский процесс, который, как известно [5], входит в с.д.у. Ито. Вследствие этого для любого уравнения (системы уравнений) получает крайне ограниченный набор групп, относительно которых инвариантно данное уравнение. В работе [6] были получены определяющие уравнения для инфинитезимального оператора, который генерирует группу симметрии исследуемого уравнения (системы уравнений). При этом в доказательстве критерия инвариантности данного уравнения относительно группы преобразований автор [6] меняет и винеровский процесс, входящий в уравнение. Таким образом, как было показано в работе [1], получили весь набор однопараметрических групп, которыми обладает линейное с.д.у. Ито вида (1) в зависимости от сочетания параметров, входящих в уравнение.

В данной статье мы построим группы инвариантности для системы стохастических дифференциальных уравнений, представляющих собой модель Гестона [9].

2. Основные результаты.

Термин волатильность означает общую меру неопределенности в динамике стоимости актива и характеризует величину рыночных флуктуаций его цены. В модели Башелье-Самуэльсона [7] волатильность σ является одним из параметров модели геометрического броуновского движения, широко применяемого как универсальная модель для спекулятивных рынков. При постоянном σ уравнение

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dw(t) \quad (2)$$

предсказывает лог – нормальное распределение стоимости актива, а σ может быть оценена как средне – квадратическое отклонение приращений логарифма стоимости, измеряемых в течение некоторого промежутка времени. Накопленные в настоящее время эмпирические данные [8], в основном западные, позволяют сделать вывод, что предположение о постоянстве волатильности не учитывает многие важные особенности рынка. В работе [9], в теории оценки опционов была предложена модель со стохастической

волатильностью – модель Гестона. В этой модели $\sigma = \sqrt{v}$ и принимается [10], что v удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению:

$$dv(t) = -\gamma(v - \theta)dt + k\sqrt{v}dw_2(t) \quad (3)$$

θ – среднее значение волатильности при $t \rightarrow \infty$,

γ – скорость релаксации к среднему значению θ ,

k характеризует величину флуктуаций v ,

$w_2(t)$ – стандартный винеровский процесс.

Уравнение (3) описывает процесс, в котором v в среднем стремится к значению θ . Винеровский процесс $w(t)$ из уравнения (2) в общем случае коррелирован с процессом $w_2(t)$ из (3):

$dw_2(t) = \rho dw(t) + \sqrt{1 - \rho^2} dZ(t)$, где $\rho \in [-1; 1]$ – коэффициент корреляции, $Z(t)$ – стандартный винеровский процесс, независимый от $w(t)$.

Итак, рассмотрим систему уравнений [10]:

$$\begin{cases} dS(t) = \mu S(t)dt + S(t)\sqrt{v}dw(t), \\ dv(t) = -\gamma(v - \theta)dt + k\rho\sqrt{v}dw(t) + k\sqrt{v}\sqrt{1 - \rho^2}dZ(t). \end{cases} \quad (4)$$

Система (4) задает двумерный стохастический процесс $\bar{y}(t) = (S(t), v(t))$. Методами группового анализа мы построим группы инвариантности системы (4).

Оператор группы преобразований, допускаемой системой (4), будем искать в классе операторов [6]:

$$X = \xi(t) \frac{\partial}{\partial t} + \eta(t, S, v, w, Z) \frac{\partial}{\partial S} + \zeta(t, S, v, w, Z) \frac{\partial}{\partial v}.$$

Для определения функций ξ , η , ζ решим систему уравнений [6]:

$$\begin{cases} -\eta_w + \left(\frac{1}{2}\xi_t - \eta_s\right)S\sqrt{v} - k\rho\sqrt{v}\eta_v + \eta\sqrt{v} + \zeta \frac{S}{2\sqrt{v}} = 0, \\ -\eta_z - k\sqrt{v}\sqrt{1 - \rho^2}\eta_v = 0, \\ -\eta_t + (\xi_t - \eta_s)\mu S + \gamma(v - \theta)\eta_v + \mu\eta - \frac{1}{2}(\eta_{ww} + \eta_{zz}) - \eta_{sw}S\sqrt{v} - \\ - k\rho\sqrt{v}\eta_{vw} - \eta_{vz}k\sqrt{1 - \rho^2}\sqrt{v} - Sk\rho v\eta_{sv} - \frac{1}{2}\eta_{ss}S^2v - \frac{1}{2}k^2v\eta_{vv} = 0, \\ -\zeta_w + \left(\frac{1}{2}\xi_t - \zeta_v\right)k\rho\sqrt{v} - S\sqrt{v}\zeta_s + \zeta \frac{k\rho}{2\sqrt{v}} = 0, \\ -\zeta_z + \left(\frac{1}{2}\xi_t - \zeta_v\right)k\sqrt{v}\sqrt{1 - \rho^2} + \zeta \frac{k\sqrt{1 - \rho^2}}{2\sqrt{v}} = 0, \\ -\zeta_t - (\xi_t - \zeta_v)\gamma(v - \theta) - \mu S\zeta_s - \gamma\zeta - \frac{1}{2}(\zeta_{ww} + \zeta_{zz}) - \zeta_{sw}S\sqrt{v} - \\ - k\rho\sqrt{v}\zeta_{vw} - \zeta_{vz}k\sqrt{1 - \rho^2}\sqrt{v} - Sk\rho v\zeta_{sv} - \frac{1}{2}\zeta_{ss}S^2v - \frac{1}{2}k^2v\zeta_{vv} = 0, \end{cases} \quad (5)$$

Решением четвертого и пятого уравнений системы (5) будет функция:

$$\zeta = v\xi_t + \sqrt{v} F\left(t, -k\rho w - Zk\sqrt{1 - \rho^2} + 2\sqrt{v}\right). \quad (6)$$

Далее, решая первое и второе уравнения системы (5), с учетом (6), найдем:

$$\begin{aligned} \eta &= \xi_t S \ln S + \frac{S w}{2} F\left(t, 2\sqrt{v} - kZ\sqrt{1 - \rho^2} - k\rho w\right) + S\Phi\left(t, 2\sqrt{v} - kZ\sqrt{1 - \rho^2} - k\rho w\right) \\ \zeta &= \xi_t v + \sqrt{v} F\left(t, 2\sqrt{v} - kZ\sqrt{1 - \rho^2} - k\rho w\right) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{Обозначим } \beta = 2\sqrt{v} - kZ\sqrt{1 - \rho^2} - k\rho w. \quad (8)$$

Подставим найденные η и ζ в третье и шестое уравнения системы (5):

$$\begin{cases} -\xi'' S \ln S - \frac{Sw}{2} F_t - S\Phi_t - \frac{Sv\xi_t}{2} - \frac{S\sqrt{v}F}{2} + F_\beta \left(\gamma\sqrt{v} + \left(\frac{k^2}{4} - \gamma\theta \right) \frac{1}{\sqrt{v}} \right) \frac{Sw}{2} + \\ + S\Phi_\beta \left(\gamma\sqrt{v} + \left(\frac{k^2}{4} - \gamma\theta \right) \frac{1}{\sqrt{v}} \right) = 0, \\ -\xi'' v - \sqrt{v}F_t - \gamma\xi_t + \frac{F}{2} \left(-\gamma\sqrt{v} + \left(\frac{k^2}{4} - \gamma\theta \right) \frac{1}{\sqrt{v}} \right) + \sqrt{v}F_\beta \left(\gamma\sqrt{v} + \left(\frac{k^2}{4} - \gamma\theta \right) \frac{1}{\sqrt{v}} \right) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Теорема 1. Если $\frac{k^2}{4} = \gamma\theta$, $\gamma \neq 0$, то система уравнений (4) допускает бесконечномерную группу инвариантности с касательным вектором:

$$\begin{aligned} \xi(t) &= c_1, \\ \eta &= \frac{Sw}{2} c_2 e^{-\frac{\gamma}{2}t} + S \left(\frac{c_2}{2\gamma} e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left(2\sqrt{v} - kZ\sqrt{1-\rho^2} - k\rho w \right) + \right. \\ &\quad \left. + S \left(\frac{c_2}{4} \int_0^t e^{-\frac{\gamma}{2}s} \left(2\sqrt{v} - kZ\sqrt{1-\rho^2} - k\rho w + \gamma w \right) ds + c_3 \right) \right), \\ \zeta &= c_2 \sqrt{v} e^{-\frac{\gamma}{2}t}. \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $\frac{k^2}{4} = \gamma\theta$, $\gamma \neq 0$, тогда второе уравнение системы (9) преобразуется в следующее уравнение:

$$-\xi'' v - \sqrt{v}F_t - \gamma\xi_t - \gamma\sqrt{v} \frac{F}{2} + \gamma F_\beta = 0,$$

которое расщепляется на 2 уравнения: $-\xi'' - \gamma\xi_t + \gamma F_\beta = 0$, $-F_t - \frac{\gamma}{2}F = 0$.

Решением получившейся системы будут функции:

$$\xi = -\frac{4}{\gamma} c_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t} - \frac{c_3}{\gamma} e^{-\gamma t} + c_4, \quad F = (c_1 \beta + c_2) e^{-\frac{\gamma}{2}t}.$$

Подставим найденные F и ξ в первое уравнение системы (8):

$$\begin{aligned} -\xi'' S \ln S - \frac{Sw}{2} \left(-\frac{\gamma}{2} e^{-\frac{\gamma}{2}t} (c_1 \beta + c_2) \right) - S\Phi_t - \frac{Sv}{2} \left(2c_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t} + c_3 e^{-\gamma t} \right) - \\ - \frac{S\sqrt{v}}{2} (c_1 \beta + c_2) e^{-\frac{\gamma}{2}t} + c_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \gamma\sqrt{v} + S\gamma\sqrt{v}\Phi_\beta = 0. \end{aligned}$$

Последнее уравнение расщепляется на систему трех уравнений:

$$\begin{aligned} \left(-\gamma c_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t} - \gamma c_3 e^{-\gamma t} \right) S \ln S - \frac{Sw}{2} \left(-\frac{\gamma}{2} e^{-\frac{\gamma}{2}t} (c_1 \beta + c_2) \right) - S\Phi_t &= 0, \\ -\frac{S}{2} \left(2c_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t} + c_3 e^{-\gamma t} \right) &= 0, \\ -\frac{S}{2} (c_1 \beta + c_2) e^{-\frac{\gamma}{2}t} + c_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \gamma + \gamma S\Phi_\beta &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Из второго уравнения системы (10) следует $c_1 = c_3 = 0$, $\xi = c_4$. (11)

Получим систему для определения функции Φ :

$$-\frac{w\gamma}{4} e^{-\frac{\gamma}{2}t} c_2 - \Phi_t = 0, \quad -\frac{1}{2} c_2 e^{-\frac{\gamma}{2}t} + \gamma\Phi_\beta = 0.$$

Из которой легко находим

$$\Phi = \left(\frac{c_2 \beta}{2\gamma} e^{-\frac{\gamma}{2}t} + \frac{c_2}{4} \int_0^t e^{-\frac{\gamma}{2}s} (\beta + \gamma w) ds + c_3 \right). \quad (12)$$

Учитывая равенства (11), (12) и обозначение (8), окончательно получим

$$\xi(t) = c_1, \\ \eta = \frac{Sw}{2} c_2 e^{-\frac{\gamma}{2}t} + S \left(\frac{c_2}{2\gamma} e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left(2\sqrt{v} - kZ\sqrt{1-\rho^2} - k\rho w \right) \right) + \\ + S \left(\frac{c_2}{4} \int_0^t e^{-\frac{\gamma}{2}s} \left(2\sqrt{v} - kZ\sqrt{1-\rho^2} - k\rho w + \gamma w \right) ds + c_3 \right),$$

$$\zeta = c_2 \sqrt{v} e^{-\frac{\gamma}{2}t}.$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Если $\frac{k^2}{4} \neq \gamma\theta$, $k=0$, то система уравнений (4) допускает бесконечномерную группу инвариантности с касательным вектором:

$$\xi(t) = c_1, \quad \eta = S \cdot I(4e^{\gamma t}(v - \theta)), \quad \zeta = 0,$$

где I – произвольная дифференцируемая функция.

Доказательство.

Подставим $k=0$ во второе уравнение системы (9):

$$-\xi_{tt}v - \sqrt{v}F_t - \gamma\xi_t + \frac{F}{2} \left(-\gamma\sqrt{v} - \frac{\gamma\theta}{\sqrt{v}} \right) + \sqrt{v}F_\beta \left(\gamma\sqrt{v} - \frac{\gamma\theta}{\sqrt{v}} \right) = 0,$$

которое по степеням v расщепляется на четыре уравнения: $-\xi_{tt} - \gamma\xi_t + \gamma F_\beta = 0$, $-F_t - \gamma\frac{F}{2} = 0$,

$$\frac{\gamma\theta F}{2} = 0, \quad F_\beta = 0. \text{ Так как } \gamma \neq 0 \text{ и } \theta \neq 0, \text{ то } F = 0. \text{ Тогда}$$

$$\xi(t) = c_1 + c_2 e^{-\gamma t}.$$

Подставим теперь найденные выражения в первое уравнение системы (9):

$$-\gamma^2 c_2 e^{-\gamma t} S \ln S - S\Phi_t + \frac{Sv}{2} c_2 e^{-\gamma t} + S\gamma \left(\frac{\beta}{2} - \frac{2\gamma\theta}{\beta} \right) \Phi_\beta = 0.$$

Так как $\gamma \neq 0$, а слагаемое $-\gamma^2 c_2 e^{-\gamma t} S \ln S$ не подобно никакому другому, то из последнего уравнения следует $c_2 = 0$. Получаем уравнение для определения функции Φ :

$$-S\Phi_t + S\gamma \left(\frac{\beta}{2} - \frac{2\gamma\theta}{\beta} \right) \Phi_\beta = 0,$$

решая которое, при условии (8), получим $\Phi = I(4e^{\gamma t}(v - \theta))$.

Подставляя найденные выражения для ξ , F , Φ в выражения (7), получим:

$$\xi(t) = c_1, \quad \eta = S \cdot I(4e^{\gamma t}(v - \theta)), \quad \zeta = 0.$$

Итак, теорема 2 доказана.

Теорема 3. Если $\theta = 0$, то система уравнений (4) допускает двухпараметрическую группу инвариантности с касательным вектором:

$$\xi(t) = c_1, \quad \eta = c_2 S, \quad \zeta = 0.$$

Доказательство.

В этом случае при $\gamma \neq 0$ из первого уравнения системы (9) следует сразу $\xi(t) = c_1, F = 0, c_2 = 0, \zeta = 0$.

Для определения Φ получим уравнение:

$$-\Phi_t + \frac{k^2}{4\sqrt{v}} \Phi_\beta + \gamma\sqrt{v}\Phi_\beta = 0,$$

откуда, собирая коэффициенты при разных степенях v , получим $\Phi = c_2$. Следовательно, в случае $\theta = 0$ получим, что решением системы (9) являются функции $\xi(t) = c_1, \eta = c_2 S, \zeta = 0$.

Теорема 3 доказана.

3. Выводы.

В статье построены симметрии для нелинейной системы уравнений, описывающей реальный процесс. Полученные результаты дают возможность предположить существование по меньшей мере трех классов неэквивалентных нелинейных уравнений вида (4), которые допускают полученные группы инвариантности.

РЕЗЮМЕ

У даній статті проведено симетричний аналіз моделі Гестона.

SUMMARY

In this work discuss symmetries of stochastic models of Heston.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Александрова О.В. Симметрии линейных стохастических уравнений Ито // Науковий часопис НПУ ім. М.П.Драгоманова, серія 1, фізико-математичні науки, Київ: НПУ ім. М. П.Драгоманова. – 2004. – №5. – С.89-96.
2. Gaeta G. and N. Rodriguez Quintero B Lie point symmetries and stochastic differential equations // J. Phys. Math. Gen. – 1999. – №32. – P.8485-8505.
3. Gaeta G. Lie point symmetries and stochastic differential equations II // J. Phys. Math. Gen. – 2000. – №33. – P.4883-4902.
4. Gaeta G. Symmetry of Stochastic Equations // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. – 2004, vol.50, Part 1. – P.98-109.
5. Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. // Справочник по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Наука, 1985. – 640 с.
6. Александрова О.В. Групповой анализ двумерного стохастического уравнения Ито // ж. Вісник, ДонНАБА. – 2005-1(49). – С.140-145.
7. Ширяев Ф.Н. О некоторых понятиях и стохастических моделях финансовой математики // Теория вероятностей и ее применения. – 1994. – Т. 39. – С.5-22.
8. Samuelson P. A. Rational theory of warrant pricing. – Industrial Management Review, 1965, 6 (Spring). – P. 13-31.
9. Heston S. L. A closed – form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options // Rev. Financial Studies. – 1993. – V. 6. – № 10. – P. 327-343.
10. Бухбиндер Г.Л., Чистилин К. М. Описание российского фондового рынка в рамках модели Гестона // Математическое моделирование. – 2005. – Т. 17. – № 10. – С.31-38.
11. Ширяев А. Н. Аналитические модели динамики стоимостей акций и облигаций // Теория вероятностей и ее применения. – 1994. – Т.39, вып. 1. – С. 5-3.

Надійшла до редакції 26.01.2006 р.

УДК 519.21

АППРОКСИМАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ
СМЕСЬЮ СДВИНУТЫХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

А.В.Тымко

Вступление.

При решении различных теоретических и прикладных задач приходится иметь дело с самыми общими распределениями, со многими из которых не просто оперировать. Например, не для всех распределений представляется возможным вычислить характеристическую функцию, свертку распределений или некоторые числовые характеристики. А если такие вычисления и удастся провести, то результат не всегда получается благоприятным для применения или дальнейших расчетов.

Также случается, что одна и та же задача встречается для различных распределений, и для каждого из них существует свой подход к решению, если, конечно, он существует. А, как известно, практика требует универсальных способов решений, пригодных почти для всех случаев.

По этим и многим другим причинам ставится вопрос, во-первых, решить задачу более простым, доступным, рациональным способом, или оценить решение, минимизировав его неточность, и, во-вторых, добиться универсальности этого решения.

Настоящая статья дает один из возможных ответов на этот вопрос, а именно показано, что для любого положительно определенного распределения найдется такое распределение, представляющее смесь сдвинутых экспоненциальных распределений, близкое к заданному в смысле Леви.

Основной результат.

Пусть $p_1, p_2, \dots, p_N$ – неотрицательные числа, в сумме составляющие единицу.

Рассмотрим смесь сдвинутых экспоненциальных распределений:

$$H(x) = \sum_{k=1}^N p_k H_k(x),$$

$$\text{где } H_k(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda_k(x-a_k)}, & x \geq a_k, \\ 0, & x < a_k \end{cases}, \quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N, \quad 0 < a_1 < a_2 < \dots < a_N.$$

Из полезных свойств этого распределения можно выделить, например то, что случайная величина, распределенная смесью сдвинутых экспоненциальных распределений, имеет дробно-рациональную характеристическую функцию, или то, что можно найти явный вид распределения суммы таких случайных величин.

Расстояние Леви между двумя функциями $F(x)$ и $H(x)$ будем обозначать $\rho[F, H]$.

$\rho[F, H] \leq \varepsilon$ равносильно тому, что для любого x , $-\infty < x < +\infty$, и для любого положительного ε $F(x - \varepsilon) - \varepsilon \leq H(x) \leq F(x + \varepsilon) + \varepsilon$.

Теорема: Пусть $F(x)$ – функция распределения положительной случайной величины. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое распределение $H(x)$, что $\rho[F, H] \leq \varepsilon$.

Проведем конструктивное доказательство теоремы, по аналогии с доказательством теоремы об аппроксимации положительно определенной функции распределения гиперэрланговским распределением, предложенным в [1].

Докажем четыре леммы, представляющие также и самостоятельный интерес.

Лемма 1 [1]: Для любой функции распределения $F(x)$ и любого положительного ε найдется функция распределения $E(x)$ дискретной случайной величины, принимающая конечное число значений, такая что $\rho[F, E] \leq \varepsilon$.

Доказательство.

На рис.1 показано построение функции $E(x)$ для функции $F(x)$, такой, что для любого $\varepsilon > 0$

$\rho[F, E] \leq \varepsilon$. График функции $E(x)$ представлен в виде ступенчатых линий, попеременно касающихся графиков $F(x + \varepsilon) + \varepsilon$ и $F(x - \varepsilon) - \varepsilon$.

Объясним более детально построение функции $E(x)$.

Предположим, что для всех $x \leq \tau_1$ ($\tau_1 \geq 0$) $F(x) = 0$.

Из точки пересечения функции $F(x + \varepsilon) + \varepsilon$ с прямой $x = \tau_1$ $p_1 = F(\tau_1 + \varepsilon) + \varepsilon$ проводим прямую, параллельную оси абсцисс до пересечения с функцией $F(x - \varepsilon) - \varepsilon$. Получим точку (τ_2, p_1) , где $\tau_2 = F^{-1}(p_1 + \varepsilon) + \varepsilon$. Далее, из точки $(\tau_2, p_1 + p_2)$, где $p_1 + p_2 = F(\tau_2 + \varepsilon) + \varepsilon$, проводим прямую до пересечения с функцией $F(x - \varepsilon) - \varepsilon$ в точке $(\tau_3, p_1 + p_2)$, где $\tau_3 = F^{-1}(p_1 + p_2 + \varepsilon) + \varepsilon$. И так далее.

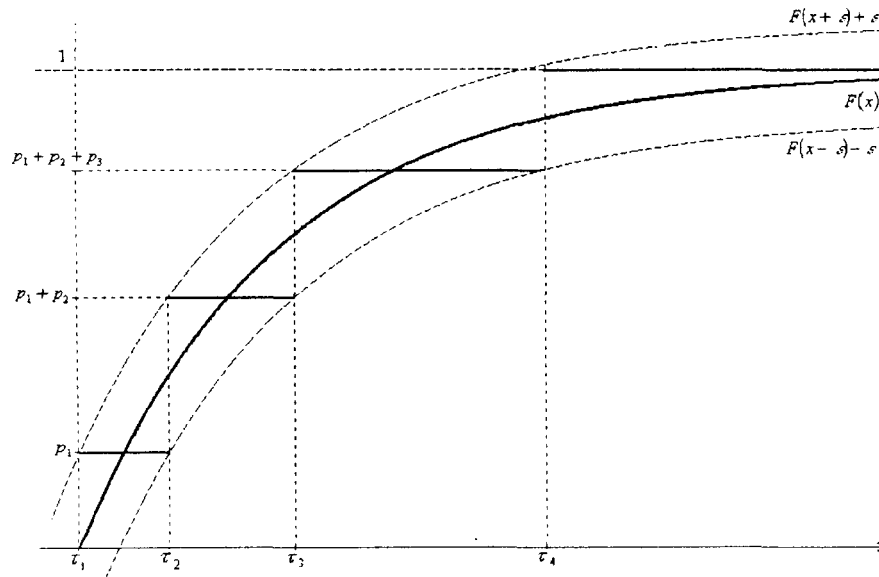


Рис.1

Величина скачка в каждой точке разрыва функции $E(x)$, кроме, возможно, крайней правой, не меньше 2ε , так что всего возможных значений данной случайной величины не более $\frac{1}{2\varepsilon} + 1$.

Лемма 1 доказана.

Для $\tau > 0$ введем ступенчатую функцию распределения $E_\tau(x) = \int_0^x \delta(t - \tau) dt$, где $\delta(t)$ – функция

Дирака. Очевидно, что функция $E(x)$ является смесью функций $E_{\tau_k}(x)$, то есть $E(x) = \sum_{k=1}^N p_k E_{\tau_k}(x)$,

где $0 < p_k < 1$, $\sum_{k=1}^N p_k = 1$. Причем из доказательства леммы 1 видно, что p_k , τ_k и N ($k = \overline{1, N}$) – вели-

чины, зависящие от выбора ε . К тому же, $N \leq \frac{1}{2\varepsilon} + 1$.

Лемма 2: Пусть $\tau_k > 0$, $E_{\tau_k}(x) = \int_0^x \delta(t - \tau_k) dt$, $H_{\tau_k, n}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{n}{\tau_k}(x - a_k)} & , x \geq a_k \\ 0, & x < a_k \end{cases}$.

Тогда $\rho[E_{\tau_k}, H_{\tau_k, n}] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Доказательство:

По определению расстояния Леви между функциями $E_{\tau_k}(x)$ и $H_{\tau_k,n}(x)$ имеем:

$$H_{\tau_k,n}(x-\varepsilon)-\varepsilon \leq E_{\tau_k}(x) \leq H_{\tau_k,n}(x+\varepsilon)+\varepsilon.$$

То есть для $x \geq a_k$ должны выполняться неравенства

$$1 - e^{-\frac{n}{\tau_k}(x-a_k-\varepsilon)} - \varepsilon \leq E_{\tau_k}(x) \leq 1 - e^{-\frac{n}{\tau_k}(x-a_k+\varepsilon)} + \varepsilon.$$

Учитывая вид функции $E_{\tau_k}(x)$, приходим к системе неравенств:

$$\begin{cases} 1 - e^{-\frac{n}{\tau_k}(x-a_k-\varepsilon)} - \varepsilon \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{n}{\tau_k}(x-a_k+\varepsilon)} + \varepsilon \geq 1 \end{cases} \quad (*)$$

Покажем, что найдется $\varepsilon(n) > 0$ такой, что оба неравенства системы (*) будут выполнены и $\varepsilon(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Рассмотрим второе неравенство: $1 - e^{-\frac{n}{\tau_k}(x-a_k+\varepsilon)} + \varepsilon \geq 1$.

Упростим его вид: $\varepsilon - e^{-\frac{n}{\tau_k}(x-a_k+\varepsilon)} \geq 0$.

Для любого $\varepsilon > 0$ $\varepsilon - e^{-\frac{n}{\tau_k}(x-a_k+\varepsilon)} \leq \varepsilon - e^{-\frac{n}{\tau_k}\varepsilon}$. Поэтому, решение неравенства $\varepsilon - e^{-\frac{n}{\tau_k}\varepsilon} \geq 0$ будет ре-

шением исходного. Для всех $\varepsilon(n) \geq \frac{W\left(\frac{n}{\tau_k}\right)}{\frac{n}{\tau_k}}$ будет выполнено $\varepsilon - e^{-\frac{n}{\tau_k}\varepsilon} \geq 0$, где $W(x)$ функция,

удовлетворяющая условию $W(x)e^{W(x)} = x$. График этой функции представлен на рис.2.

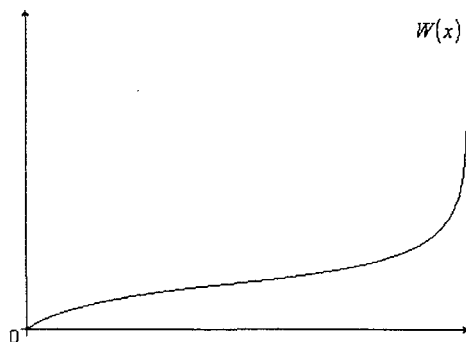


Рис.2

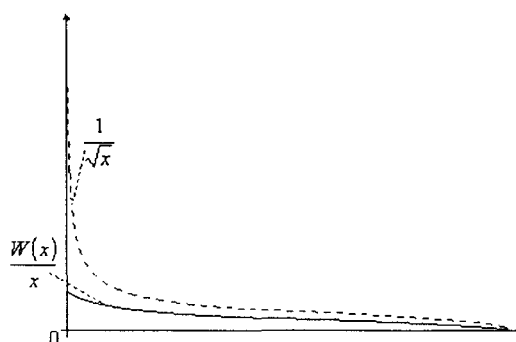


Рис.3

Отсюда, $\varepsilon(n) = \frac{W\left(\frac{n}{\tau_k}\right)}{\frac{n}{\tau_k}}$ будет решением второго неравенства системы (*).

Для сравнения, на рис.3 представлены графики функций $\frac{W(x)}{x}$ и $\frac{1}{\sqrt{x}}$. Заметим, что $\varepsilon(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Нетрудно проверить, что найденное решение второго уравнения системы (*) является решением и первого неравенства. Для этого стоит подставить его непосредственно в первое неравенство системы.

Таким образом, мы показали, что $\rho[E_{\tau_k}, H_{\tau_k, n}] \leq \frac{W\left(\frac{n}{\tau_k}\right)}{n/\tau_k}$.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3 [1]: Пусть $H_k(x)$ и $F_k(x)$, $1 \leq k \leq N$ – функции распределения.

$$H(x) = \sum_{k=1}^N p_k H_k(x), \quad F(x) = \sum_{k=1}^N p_k F_k(x), \quad \text{где } p_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^N p_k = 1.$$

Тогда, если $\rho[H_k, F_k] \leq \varepsilon$, то также $\rho[H, F] \leq \varepsilon$.

Доказательство:

Просуммировав двойные неравенства $F_k(x - \varepsilon) - \varepsilon \leq H_k(x) \leq F_k(x + \varepsilon) + \varepsilon$ с коэффициентами p_k , приходим к аналогичному неравенству для $H(x)$ и $F(x)$.

Лемма 3 доказана.

Лемма 4 [1]: Пусть $H(x)$, $F(x)$ и $E(x)$ – три любые функции распределения.

Тогда для расстояния Леви имеет место неравенство треугольника:

$$\rho[F, H] \leq \rho[F, E] + \rho[E, H].$$

Доказательство:

Пусть $\rho[F, E] = s$, $\rho[E, H] = r$.

Тогда $F(x - s) - s \leq E(x)$, $E(x - r) - r \leq H(x)$.

Если в первом неравенстве положить $x - r$ вместо x , то $F(x - r - s) - s \leq E(x - r)$. А по второму неравенству это означает, что $F(x - r - s) - s \leq H(x) + r$, или, что то же, $F(x - r - s) - r - s \leq H(x)$.

Аналогично доказывается и справедливость неравенства $H(x) \leq F(x + r + s) + r + s$.

Последние неравенства в совокупности приводят к выводу, что $\rho[F, H] \leq r + s$.

Лемма 4 доказана.

Теперь перейдем к доказательству теоремы.

Выбираем (фиксируем) положительное $\varepsilon = \varepsilon_0$.

По лемме 1, для положительно определенной функции распределения $F(x)$ строим ступенчатую функцию $E(x) = \sum_{k=1}^N p_k E_{\tau_k}(x)$, где p_k и τ_k зависят от выбранного ε_0 , $N \leq \frac{1}{2\varepsilon_0} + 1$ и $\rho[F, E] \leq \varepsilon_0$.

По лемме 2, выбрав параметры распределений $H_k(x)$ так, чтобы $a_k = \tau_k$ и $\lambda_k = -\frac{\ln \varepsilon_0}{\varepsilon_0}$

($k = \overline{1, N}$), получаем $\rho[E_{\tau_k}, H_k] \leq \varepsilon_0$. Здесь λ_k выражено из соотношения $\varepsilon_0 = \frac{W(\lambda_k)}{\lambda_k}$.

По лемме 3, для функции распределения

$$H(x) = \sum_{k=1}^N p_k H_k(x) = \sum_{k=1}^N p_k \left(1 - e^{-\lambda_k(x - a_k)}\right) = 1 - \sum_{k=1}^N p_k e^{-\lambda_k(x - a_k)} \quad \text{имеем: } \rho[E, H] \leq \varepsilon_0.$$

Учитывая неравенство треугольника для расстояния Леви, находим $\rho[F, H] \leq \rho[F, E] + \rho[E, H] \leq 2\varepsilon_0$.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы можно использовать в виде алгоритма при построении смеси сдвинутых экспоненциальных распределений, аппроксимирующей некоторое распределение положительной случайной величины. Продемонстрируем это на примере.

Пример.

Возьмем распределение Парето с параметром формы $c = 2$: $F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2}, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$.

Построим функцию распределения $H(x) = 1 - \sum_{k=1}^N p_k e^{-\lambda_k(x-a_k)}$, где $0 < p_k < 1$, $\sum_{k=1}^N p_k = 1$, такую что расстояние Леви между $F(x)$ и $H(x)$ не превышает $\varepsilon = 0.05$, то есть $\rho[F, H] \leq 0.05$.

Параметры функции $H(x)$ определим из рекуррентных соотношений:

$$\sum_{k=1}^n p_k = F(a_n + \varepsilon) + \varepsilon = 1.05 - \frac{1}{(a_n + 0.05)^2}, \quad a_{n+1} = F^{-1}\left(\sum_{k=1}^n p_k + \varepsilon\right) + \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{0.95 - \sum_{k=1}^n p_k}} + 0.05,$$

где $a_1 = 1$, $n = \overline{1, N-1}$. N и p_N получаем таким образом, чтобы $\sum_{k=1}^N p_k = 1$.

Параметры λ_k определяются из соотношения $\lambda_k = \lambda = -\frac{\ln \varepsilon}{\varepsilon}$.

По проведенным расчетам для заданного распределения Парето, получили следующие значения параметров:

$$N = 7; \quad \lambda = 59.9146;$$

$$p_k = 0.1430, 0.2276, 0.1791, 0.1462, 0.1238, 0.1089, 0.0714;$$

$$a_k = 1, 1.1634, 1.3637, 1.6304, 2.0336, 2.8199, 6.8833; \quad k = \overline{1, 7}.$$

Для наглядности полученной аппроксимации $\rho[F, H] \leq 0.05$ на рис.4 изображены графики функций $F(x + \varepsilon) + \varepsilon$, $F(x - \varepsilon) - \varepsilon$ и $H(x)$.

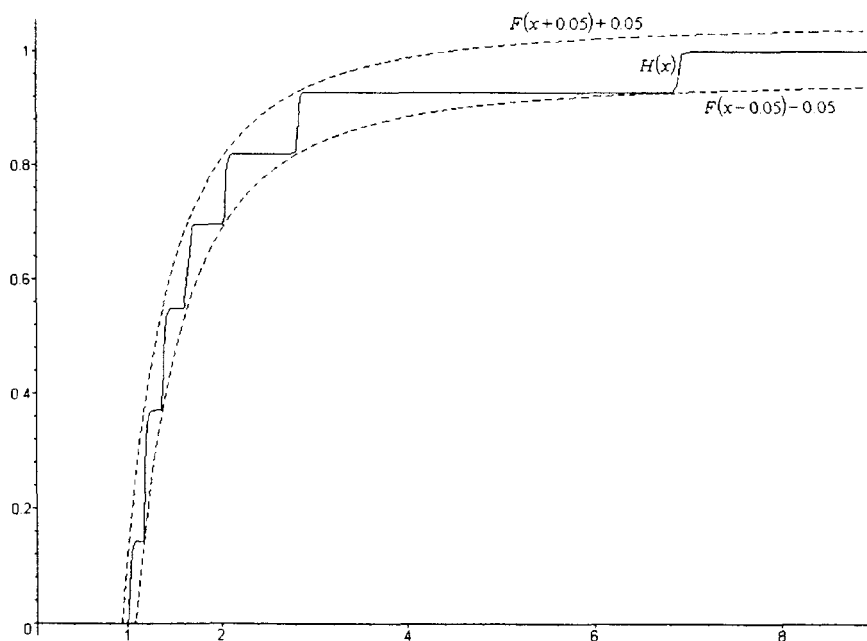


Рис.4

Заключение.

Результат данной работы имеет как теоретическое, так и прикладное значение. С точки зрения теории, интересен факт близости, в смысле расстояния Леви, функции распределения любой положительной

случайной величины и смеси сдвинутых экспоненциальных распределений. С практической точки зрения, важен доступный, простой в применении, способ построения аппроксимирующей функции по заданной аппроксимируемой, с необходимой точностью.

Замечательно также и то, что полученная аппроксимация справедлива для любых распределений, а не только непрерывно-дискретных.

Апроксимація розподілу позитивної випадкової величини сумішшю зрушених експонентних розподілів

РЕЗЮМЕ

У статті доводиться близькість у розумінні Леви будь-якої функції розподілу позитивної випадкової величини і суміші зрушених експонентних розподілів. Показується застосування отриманого результату на прикладі розподілу Парето.

SUMMARY

In article the affinity in concept Levi of any function of distribution of a positive random variable and a mix of shifted exponential distributions is proved. Application of the received result is shown by the example of distribution Pareto.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коваленко И.Н., Филиппова А.А. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие для втузов. – М.: «Высшая школа», 1973. – 368 с.

Надійшла до редакції 07.04.2006 р.

ОБ ОДНОЗНАЧНОСТИ РЕДУКЦИИ БИНАРНОГО ОТНОШЕНИЯ

А.С. Сенченко,

Славянский государственный педагогический университет

Введение

Теория конечных автоматов является одним из старейших и наиболее развитых разделов теоретической информатики. Автоматы широко используются при построении вычислительных систем. В.М.Глушков предложил рассматривать такую систему как систему двух взаимодействующих автоматов. В.М.Глушков, Ю.В.Капитонова, А.А.Летичевский [1, 2] предложили рассматривать проектирование вычислительных систем как поэтапный процесс разработки системы «сверху вниз». На каждом этапе такой разработки рассматривается алгебраическо-автоматное представление будущей вычислительной системы. В настоящее время тенденцией при такой разработке является совместное создание вычислительной системы и средств ее проверки (верификации, тестирования) на всех этапах. При этом исследование и создание средств проверки отстает от исследования и создания средств синтеза систем. Поэтому создание средств проверки является актуальной и важной задачей. Она требует разработки эффективных математических методов. В настоящее время интенсивно развиваются методы, основанные на теории экспериментов с автоматами [3, 4, 5, 6]. Одним из таких методов является задание и исследование автоматов с помощью системы определяющих соотношений. Ю.И.Соркин [7] показал алгоритмическую разрешимость известных проблем Туэ для автоматов. Тем самым была показана принципиальная возможность использования систем определяющих соотношений при решении различных задач теории автоматов. И.С.Грунский, Р.И.Олейник, Л.А.Толмачевская показали, что системы определяющих соотношений могут быть эффективно использованы при построении экспериментов с конечными автоматами и другими моделями конечных дискретных систем.

В 2002 году автор совместно с И.С.Грунским в [8] предложил решение задачи характеристики бинарного отношения для автомата, то есть задачи определения, является ли данное бинарное отношение системой определяющих соотношений для заданного автомата. Для решения этой задачи была введена специальная процедура редукции бинарного отношения. Решение вышеуказанной задачи состоит в сравнении результата редукции бинарного отношения с особой так называемой канонической системой определяющих соотношений для данного автомата. Однако одна из операций процедуры редукции недетерминирована, то есть не очевидно, однозначен ли результат редукции при различном порядке выполнения её операций.

В настоящей работе доказывается однозначность редукции бинарного отношения и показана структура результата редукции (теорема 3 и следствия из теоремы 4). На основании этой однозначности получена характеристика систем определяющих соотношений для фиксированного автомата.

1. Основные определения.

Под автоматом, если не оговорено противное, понимается конечный детерминированный инициальный инициально-связный всюдуопределенный (полу)автомат [9]. Все рассматриваемые автоматы имеют один и тот же входной алфавит X . Множество всех слов конечной длины в этом алфавите обозначается X^* . Пусть $p = x_1 \dots x_k$ – произвольное слово в алфавите X , тогда длина слова p обозначается $d(p)$ и $d(p) = k$. Через e обозначаем пустое слово и полагаем $d(e) = 0$.

Пусть $A = (A, X, \delta, a_0)$ – автомат, у которого A – конечное множество состояний, a_0 – начальное состояние, $\delta: A \times X \rightarrow A$ – функция переходов. Если это не вызывает неоднозначного понимания, то автомат будем также обозначать множеством его состояний A . $\delta(a, x)$ обозначаем ax . Расширим функцию переходов на множество X^* обычным образом: $a \cdot e = a$, $a(px) = (ap)x$.

Пусть ρ – произвольное бинарное отношение на X^* . Это отношение называется эквивалентностью, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Если, кроме того, ρ стабильно справа, то есть $(p, q) \in \rho$ влечет $(pw, qw) \in \rho$ для всех $w \in X^*$, то ρ называется правой конгруэнцией. Через $[\rho]$ обозначим правоконгруэнтное замыкание отношения ρ , то есть наименьшую правую конгруэнцию, содержащую ρ [10]. Первой проекцией $\rho \upharpoonright \rho$ отношения ρ называется множество всех таких слов p , для которых существует такое слово q , что пара (p, q) принадлежит ρ . Аналогично определяется вто-

рая проекция $pr_2\rho$ отношения ρ . Множество $V^A = \{v^0, \dots, v^n\}$ слов в алфавите X называется базисом достижимости [5, 11] автомата A , если для каждого состояния $a \in A$ существует единственное слово $v \in V^A$, что $a_0v = a$.

Каждый автомат $A = (A, X, \delta_A, a_0)$ порождает на X^* правую конгруэнцию ρ_A по правилу: $(p, q) \in \rho_A$, если $a_0p = a_0q$. Пусть ρ – некоторое бинарное отношение на X^* . Это отношение назовем системой определяющих соотношений для A , если $[\rho] = \rho_A$.

2. Каноническая система определяющих соотношений.

Введем каноническую систему определяющих соотношений для автомата.

Пусть $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ и $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_m$ – произвольно зафиксированный линейный порядок P на X . Введем линейный порядок $\leq$ на X^* таким образом:

- 1) $x_i \leq x_i$;
- 2) если $d(p) < d(q)$, то $p \leq q$;
- 3) $x_1' \dots x_s' = p \leq q = x_1'' \dots x_s''$, если $x_k' \leq x_k''$ для некоторого $k \leq s$, в то время как $x_1' = x_1'', \dots, x_{k-1}' = x_{k-1}''$.

Очевидно, что порядок $\leq$ на X^* однозначно определяется линейным порядком на X .

Будем говорить, что слово p предшествует слову q , если $p \leq q$.

Пусть $A = \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$ и v_i – кратчайшее по порядку $\leq$ слово, для которого $a_0v_i = a_i$. Множество $V_A(P) = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ назовем кратчайшим по P базисом достижимости автомата A . В случае, когда это не вызывает разночтений, указание на порядок P в $V_A(P)$ опускаем и пишем V_A .

Определим конечное бинарное отношение κ_A на множестве $V_A \times V_A \cdot X$ по правилу: пусть κ_A вначале пусто. Для каждого $v_i, v_j \in V_A$ и $x \in X$, если $a_0v_ix = a_0v_jx$ и $v_ix \neq v_jx$, то пара (v_j, v_ix) содержится в κ_A . Заметим, что $v_j \leq v_ix$ по определению V_A .

Теорема 1 [8]. κ_A является системой определяющих соотношений для автомата A .

Ниже будет показано, что каноническая система определяющих соотношений κ_A является минимальной системой определяющих соотношений для A как по количеству пар слов, так и по суммарной длине пар слов. При необходимости будем указывать в скобках тот линейный порядок, по которому построена каноническая система определяющих соотношений.

Через $|\rho|$ обозначим число пар слов в ρ . Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. $|\kappa_A| = (m-1)n + 1$.

Доказательство.

Множество $V_A \cdot X$ мощности mn содержит $(n-1)$ слов из V_A . Поэтому в правой части пар $(p, q) \in \kappa_A$ содержится $mn - (n-1)$ то есть $(m-1)n + 1$ слов из $V_A \cdot X - V_A$. Из построения κ_A следует, что в κ_A нет пар с одинаковой правой частью. Поэтому мощность κ_A равна мощности множества $V_A \cdot X - V_A$. Теорема доказана.

3. Редукция бинарного отношения.

Пусть $\rho \subseteq X^* \times X^*$ – некоторое конечное бинарное отношение и P – некоторый произвольно фиксированный линейный порядок на X .

Введем на ρ такие операции:

1. Удалим из ρ все пары вида (p, p) .
 2. Каждую пару $(p, q) \in \rho$ при $q \leq p$ заменим парой (q, p) .
 3. Пусть $(p, q), (t, u) \in \rho$. Если $p = uw$ для некоторого $w \in X^*$, то пару (p, q) в ρ заменяем парой (tw, q) . Если же $q = uw$, то пару (p, q) в ρ заменяем парой (p, tw) .
 4. Удалим повторяющиеся пары, оставляя только по одному экземпляру.
- Рассмотрим процедуру редукции отношения ρ , состоящую из таких шагов:

а) выполняется операция 1;

б) выполняется операция 2;

в) если операция 3 не применима, то применяется операция 4 и процедура завершается, иначе после каждого однократного выполнения операции 3 переходим к (г);

г) выполняется операция 4, и переходим к (а).

Легко видеть, что при выполнении этой процедуры число пар слов в отношении и длина этих слов не могут возрастать. При этом при выполнении операции 3 слово заменяется меньшим по линейному порядку $\leq$. Поэтому (в силу линейности $\leq$) замена слов по операции 3 всегда выполняется конечное число раз. Вследствие этого для конечного ρ процедура редукции всегда завершается. Результат редукции обозначим $\langle \rho \rangle(P)$. В случае, когда это не вызывает разночтений, указание на порядок P в $\langle \rho \rangle(P)$ опускаем и пишем $\langle \rho \rangle$.

Зафиксируем некоторый линейный порядок P на X . У канонической системы определяющих соотношений относительно этого порядка, согласно алгоритма ее построения отсутствуют пары с одинаковыми словами и повторяющиеся пары, для каждой пары $(p, q) \in \kappa_A$ слово p предшествует слову q , и для любых пар $(p, q), (t, u) \in \kappa_A$ и любых слов $v, w \in X^*$ выполняется $p \neq uv, q \neq iw$. Поэтому при построении редукции канонической системы определяющих соотношений не будет производиться ни одна из операций редукции. Отсюда вытекает, что $\langle \kappa_A \rangle(P) = \kappa_A(P)$.

Следующие утверждения характеризуют простейшие свойства процедуры редукции.

Лемма 1. $[\rho] = [\langle \rho \rangle]$, причем редукция проведена по произвольному линейному порядку.

Доказательство.

Пусть $\rho_1, \dots, \rho_k$ – последовательность бинарных отношений, где $\rho_1 = \rho$, $\rho_k = \langle \rho \rangle$, и ρ_{i+1} получено из ρ_i однократным применением одной из операций 1 – 4. Очевидно, что операции 1, 2, 4 таковы, что, если ρ_{i+1} получено из ρ_i одной из них, то $[\rho_i] = [\rho_{i+1}]$.

Пусть ρ_{i+1} получено с помощью операции 3. Пусть $(p, q), (t, u) \in \rho_i$ и, для определенности, $p = uw$. Тогда $\rho_{i+1} = (\rho_i - \{(p, q)\}) \cup \{(tw, q)\}$. $(t, u) \in \rho_i$ влечет $(tw, uw) \in [\rho_i]$ и, в силу симметричности и транзитивности $[\rho_i]$ пара (tw, q) принадлежит $[\rho_i]$ то есть $\rho_{i+1} \subseteq [\rho_i]$. Поэтому $[\rho_{i+1}] \subseteq [\rho_i]$. Обратно, $(t, u) \in \rho_{i+1}$ влечет $(tw, uw) \in [\rho_{i+1}]$. Так как $(tw, q) \in \rho_{i+1}$, то $(uw, q) \in [\rho_{i+1}]$, то есть $\rho_i \subseteq [\rho_{i+1}]$. Поэтому $[\rho_i] \subseteq [\rho_{i+1}]$, то есть $[\rho_i] = [\rho_{i+1}]$.

Случай, когда $q = uw$ доказывается аналогично. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть τ – конечное бинарное отношение. Если $\langle \rho \rangle \subseteq \tau \subseteq [\rho]$, то $\langle \tau \rangle = \langle \rho \rangle$.

Доказательство.

Пусть предположение леммы выполняется. Пусть $(p, q) \in \tau - \langle \rho \rangle$. Поскольку $\langle \rho \rangle \subseteq \tau \subseteq [\rho]$, то существует такая конечная последовательность пар слов $(r_1, s_1), \dots, (r_i, s_i), \dots, (r_k, s_k) = (p, q)$, что пара $(r_i, s_i) \in \langle \rho \rangle$, или $r_i = s_i$, или она получена из пар этой последовательности с меньшими индексами с помощью одной из следующих операций:

α) симметричного замыкания, то есть $(r_i, s_i) = (s_j, r_j)$ для $j < i$;

β) транзитивного замыкания, то есть $(r_j, s_j), (r_k, s_k)$ для $j, k < i$ таковы, что $r_j = r_i, s_j = r_k, s_k = s_i$;

γ) правоконгруэнтного замыкания, то есть $r_i = r_j w, s_i = s_j w$ для $j < i$ и некоторого слова $w \in X^*$.

Вышеуказанную последовательность назовем выводом пары (p, q) .

Пусть ξ – бинарное отношение, полученное объединением отношения τ и выводов всех пар $(p, q) \in \tau - \langle \rho \rangle$. Ясно, что ξ – конечно, и $\tau \subseteq \xi \subseteq [\rho]$. Определим последовательность бинарных отно-

шений $\langle \rho \rangle = \xi_0 \subseteq \xi_1 \subseteq \dots \subseteq \xi_l \subseteq \dots \subseteq \xi_k = \xi$ так, что $\xi_l = \xi_{l-1} \cup \{(p, q)\}$, а (p, q) получена из ξ_{l-1} с помощью одной из операций $(\alpha) - (\gamma)$ или $p = q$.

Покажем, что $\langle \xi_l \rangle = \langle \xi_{l-1} \rangle$. Доказательство основано на том, что операции 1-3 получения $\langle \xi_l \rangle$ в некотором смысле обратны операциям $(\alpha) - (\gamma)$. Операции 1-3 назовем операциями редукции.

Пусть $\xi_l = \xi_{l-1} \cup \{(p, p)\}$ для некоторой пары $(p, p) \in \xi$. Тогда операция 1 редукции удалит эту пару из ξ_l и поэтому $\langle \xi_l \rangle = \langle \xi_{l-1} \rangle$.

Пусть $\xi_l = \xi_{l-1} \cup \{(p, q)\}$ и пара (p, q) добавлена по операции α симметричного замыкания. Тогда $q < p$ и $(q, p) \in \xi_{l-1}$. Следовательно, процедура редукции удалит пару (p, q) на шаге (б), и поэтому $\langle \xi_l \rangle = \langle \xi_{l-1} \rangle$.

Пусть $\xi_l = \xi_{l-1} \cup \{(p, q)\}$ и пара (p, q) добавлена по операции β транзитивного замыкания. Тогда $(p, w), (w, q) \in \xi_{l-1}$ и $(p, w), (w, q), (p, q) \in \xi_l$. Если $p < w$, то пара (p, q) будет добавлена в процессе выполнения редукции отношения ξ_{l-1} . Поэтому $\langle \xi_l \rangle = \langle \xi_{l-1} \rangle$. Если же $p < w$, то пара (p, q) будет удалена в процессе выполнения редукции отношения ξ_{l-1} . Поэтому $\langle \xi_l \rangle = \langle \xi_{l-1} \rangle$.

Пусть $\xi_l = \xi_{l-1} \cup \{(p, q)\}$ и пара (p, q) добавлена по операции γ , то есть $(p', q') \in \xi_l$ и $p = p'u, q = q'u$ для некоторого $u \in X^*$. Пусть для определенности $p' < q'$. Тогда при выполнении процедуры редукции отношения ξ_l пара (p, q) будет заменена парой $(p'u, p'u)$ на шаге (в) процедуры, и $(p'u, p'u)$ будет удалена на шаге (а) этой процедуры. Поэтому $\langle \xi_l \rangle = \langle \xi_{l-1} \rangle$. Лемма 2 доказана.

Из лемм 1, 2 вытекает следующее важное утверждение

Теорема 3. Для всякого конечного бинарного отношения $\rho \subseteq X^* \times X^*$ и произвольного линейного порядка P на X процедура редукции определяет результат единственным образом.

Доказательство.

Пусть в результате первого применения процедуры редукции к некоторому ρ по порядку P получено $\langle \rho \rangle_1$, а в результате второго применения – $\langle \rho \rangle_2$. Тогда $\langle \rho \rangle_i \subseteq \langle \rho \rangle_1 \cup \langle \rho \rangle_2, i = 1, 2$. По лемме 1 $\llbracket \langle \rho \rangle_i \rrbracket = \llbracket \rho \rrbracket = \llbracket \langle \rho \rangle_2 \rrbracket$. Из свойств замыкания следует, что $\langle \rho \rangle_i \subseteq \llbracket \langle \rho \rangle_i \rrbracket = \llbracket \rho \rrbracket$. Таким образом $\langle \rho \rangle_i \subseteq \langle \rho \rangle_1 \cup \langle \rho \rangle_2 \subseteq \llbracket \rho \rrbracket$. Из свойств процедуры редукции следует, что $\langle \langle \rho \rangle_i \rangle = \langle \rho \rangle_i$. Тогда по лемме 2 $\langle \rho \rangle_1 = \langle \langle \rho \rangle_1 \rangle = \langle \langle \rho \rangle_1 \cup \langle \rho \rangle_2 \rangle$ и $\langle \rho \rangle_2 = \langle \langle \rho \rangle_2 \rangle = \langle \langle \rho \rangle_1 \cup \langle \rho \rangle_2 \rangle$. Отсюда $\langle \rho \rangle_1 = \langle \rho \rangle_2$. Теорема доказана.

4. Теорема характеризации систем определяющих соотношений и следствия из нее.

Следующее утверждение дает критерий, является ли данное конечное бинарное отношение ρ системой определяющих соотношений для заданного автомата A .

Теорема 4. Пусть P – некоторый произвольно зафиксированный линейный порядок на X . $\llbracket \rho \rrbracket = \rho_A$ тогда и только тогда, когда $\langle \rho \rangle(P) = \kappa_A(P)$.

Доказательство.

Пусть $\langle \rho \rangle = \kappa_A$. В силу теоремы 1 $\rho_A = \llbracket \kappa_A \rrbracket = \llbracket \langle \rho \rangle \rrbracket$. По лемме 1 $\llbracket \rho \rrbracket = \llbracket \langle \rho \rangle \rrbracket$, поэтому $\rho_A = \llbracket \rho \rrbracket$.

Пусть теперь $\llbracket \rho \rrbracket = \rho_A$. Полагаем $\tau = \kappa_A \cup \langle \rho \rangle$. Тогда $\kappa_A \subseteq \tau \subseteq \llbracket \kappa_A \rrbracket \cup \llbracket \langle \rho \rangle \rrbracket$. По лемме 1 $\llbracket \langle \rho \rangle \rrbracket = \llbracket \rho \rrbracket$ и по теореме 1 $\llbracket \kappa_A \rrbracket = \rho_A$. Тогда из равенства $\llbracket \rho \rrbracket = \rho_A$ следует $\kappa_A \subseteq \tau \subseteq \rho_A$ и по лемме 2 и теореме 3 $\kappa_A = \tau$. Аналогично, $\langle \rho \rangle \subseteq \tau \subseteq \llbracket \kappa_A \rrbracket \cup \llbracket \langle \rho \rangle \rrbracket$ и, в силу сказанного, $\langle \rho \rangle \subseteq \tau \subseteq \llbracket \rho \rrbracket$. Тогда по лемме 2 и теореме 3 $\kappa_A = \langle \tau \rangle = \langle \rho \rangle$. Теорема 4 доказана.

Теорема 4 дает конструктивный метод проверки равенства $\rho_A = \llbracket \rho \rrbracket$.

Из теоремы 4 вытекает ряд полезных следствий.

Следствие 4.1. Пусть ρ – конечная система определяющих соотношений для автомата A , а ρ' – некоторое конечное бинарное отношение на множестве X^* . ρ' является системой определяющих соотношений для автомата A тогда и только тогда, когда $\rho' \subseteq \rho$.

щих соотношений для A тогда и только тогда, когда $\langle \rho' \rangle(P) = \langle \rho \rangle(P)$ для любого линейного порядка P на X .

Доказательство.

Пусть P – некоторый произвольно зафиксированный линейный порядок на X , ρ' – конечная система определяющих соотношений для автомата A . По теореме 4 $\langle \rho' \rangle = \kappa_A = \langle \rho \rangle$. Если же $\langle \rho' \rangle = \langle \rho \rangle$, то по теореме 4 $\langle \rho \rangle(P) = \kappa_A(P)$, значит $\langle \rho' \rangle(P) = \kappa_A(P)$, то есть ρ' – система определяющих соотношений для A , что и требовалось доказать.

Таким образом, два конечных бинарных отношения являются системами определяющих соотношений для одного и того же автомата точно тогда, когда их редукции (проведенные по одному и тому же порядку) совпадают.

Следствие 4.2. Каждая каноническая система определяющих соотношений κ_A является минимальной по количеству пар и по суммарной длине слов системой определяющих соотношений для автомата A .

Доказательство.

Пусть κ_A – произвольная каноническая система определяющих соотношений для автомата A и порядка P . Допустим, что существует система определяющих соотношений κ' для автомата A , содержащая меньше пар, чем κ_A . По теореме 4 $\langle \kappa' \rangle(P) = \kappa_A$. Ввиду того, что ни одна из операций редукции не увеличивает количества пар слов, получаем противоречие допущению.

Допустим теперь, что существует система определяющих соотношений κ'' для автомата A , суммарная длина слов в которой меньше, чем в κ_A . По теореме 4 $\langle \kappa'' \rangle(P) = \kappa_A$. Ввиду того, что ни одна из операций редукции не увеличивает длину слов, в этом случае также получаем противоречие допущению, что доказывает следствие.

Следующие два следствия показывают внутреннюю структуру результата редукции бинарного отношения.

Каждому конечному бинарному отношению $\rho \subseteq X^* \times X^*$ поставим в соответствие множество $C_P(\rho)$ всех начальных отрезков из $pr_1\langle \rho \rangle \cup L(pr_2\langle \rho \rangle)$, где $L(pr_2\langle \rho \rangle)$ – множество собственных начальных отрезков всех слов из $pr_2\langle \rho \rangle$ и редукция $\langle \rho \rangle$ проведена по линейному порядку P на множестве X .

Следствие 4.3. Пусть ρ – конечная система определяющих соотношений для некоторого конечного, всюдуопределенного автомата с n состояниями. Тогда $|C_P(\rho)| = n$ для любого линейного порядка P на X .

Доказательство.

Пусть ρ – система определяющих соотношений для автомата A . По теореме 4 выполняется равенство $\langle \rho \rangle(P) = \kappa_A(P)$. По определению $C_P(\rho)$ выполняются соотношения $C_P(\rho) = C_P(\kappa_A(P))$ и $C_P(\kappa_A(P)) = pr_1\kappa_A(P) \cup L(pr_2\kappa_A(P))$. Покажем, что выполняется равенство $C_P(\kappa_A(P)) = V_A(P)$.

Покажем, что выполняется включение $C_P(\kappa_A(P)) \subseteq V_A(P)$. Пусть $q \in C_P(\kappa_A(P))$. В случае, когда $q \in pr_1\kappa_A(P)$, то существует такое слово r , что $(q, r) \in \kappa_A(P)$. Если же $q \in L(pr_2\kappa_A(P))$, то существуют такие $t \in X^*$ и $x \in X$, что $(t, qx) \in \kappa_A(P)$. По построению элементы $\kappa_A(P)$ имеют вид $(v_j, v_i x)$, где $v_i, v_j \in V_A(P)$ и $x \in X$. Тогда в любом случае выполняется $q \in V_A(P)$, поэтому $C_P(\kappa_A(P)) \subseteq V_A(P)$.

Покажем, что выполняется обратное включение. Пусть $q \in V_A(P)$. Поскольку автомат A коне-

чен, то базис достижимости $V_A(P)$ также конечен. Поэтому существует такое слово $w \in X^*$, длина которого $d(w) \leq n-1$ и входной символ $x \in X$, для которых одновременно выполняются соотношения $qw \in V_A(P)$ и $qwx \notin V_A(P)$. Тогда по построению $\kappa_A(P)$ пара $(v, qwx) \in \kappa_A(P)$, где v такое слово из $V_A(P)$, что $a_0v = a_0qwx$. По определению $C_P(\kappa_A(P))$ выполняется $q \in C_P(\kappa_A(P))$, поэтому $V_A(P) \subseteq C_P(\kappa_A(P))$, следовательно, $C_P(\kappa_A(P)) = V_A(P)$. Последнее равенство влечет $|C_P(\kappa_A)| = n$, что доказывает следствие.

Пусть $\rho \subseteq X^* \times X^*$ – произвольное конечное бинарное отношение. Для произвольного слова $q \in pr_1\rho \cup pr_2\rho$ через $T_P(q)$ обозначим кратчайшее по P слово из $[\rho](q)$, где $[\rho](q)$ – множество всех таких слов w , что $(w, q) \in [\rho]$.

Следствие 4.4. Пусть $(r, qx) \in \langle \rho \rangle(P)$. Тогда $r = T_P(p)$ и $q = T_P(q)$.

Доказательство.

Пусть $T_P(r) = r'$ и $r' \neq r$. По определению $(r', r) \in [\rho]$. Согласно леммы 1 пара (r', r) принадлежит $[\langle \rho \rangle]$. Если $(r', r) \in \langle \rho \rangle$, то ввиду выполнения операции 3 редукции пара (r, qx) должна быть заменена парой (r', qx) , что противоречит условию. Поэтому $(r', r) \notin \langle \rho \rangle$. Обозначим $\tau = \langle \rho \rangle \cup (r', r)$. Согласно леммы 2 $\langle \tau \rangle = \langle \rho \rangle$. Ввиду выполнения операции редукции 3 пара $(r', r) \in \langle \tau \rangle$, что неверно. Аналогично доказывается, что $q = T_P(q)$. Следствие доказано.

Автоматы $A = (A, X, \delta_A, a_0)$ и $B = (B, X, \delta_B, b_0)$ называются s-изоморфными [12], если между элементами множеств состояний A и B существует такое взаимно однозначное отображение φ , что $\varphi(\delta_A(a, x)) = \delta_B(\varphi(a), x)$ для всех $a \in A$, $x \in X$. Другими словами, s-изоморфизм является изоморфизмом с тождественным отображением множеств входных символов.

Одной из классических проблем, связанной с представлением автоматов системой определяющих соотношений, является проблема изоморфизма: два автомата заданы конечными системами определяющих соотношений. Требуется указать алгоритм, позволяющий определить, являются ли данные автоматы изоморфными.

Теорема 4 позволяет найти частный случай решения проблемы изоморфизма без построения автоматов по их системам определяющих соотношений, что зачастую проще решения для общего случая неинициальных автоматов, предложенного в [7], поскольку в [7] осуществляется проверка изоморфизма двух автоматов, что является трудной задачей [13, 14].

Следствие 4.5. Пусть ρ и τ – конечные системы определяющих соотношений для автоматов A и B соответственно. Автоматы A и B s-изоморфны тогда и только тогда, когда $\langle \rho \rangle(P) = \langle \tau \rangle(P)$ для любого линейного порядка P .

Доказательство.

Пусть автоматы A и B s-изоморфны. Тогда $\kappa_A(P) = \kappa_B(P)$ по любому линейному порядку P . По теореме 4 $\langle \rho \rangle(P) = \kappa_A(P) = \kappa_B(P) = \langle \tau \rangle(P)$.

Пусть теперь $\langle \rho \rangle = \langle \tau \rangle$. По теореме 4 $\rho_A = [\langle \rho \rangle] = [\langle \tau \rangle] = \rho_B$, поэтому автоматы A и B s-изоморфны. Следствие доказано.

Таким образом, можно определить, являются ли два заданные системами определяющих соотношений автомата s-изоморфными, с помощью построения редукции обеих систем.

Заключение.

В работе доказывается однозначность результата процедуры редукции бинарного отношения, введенной для решения задачи характеристики данного бинарного отношения для заданного автомата и показана структура результата редукции бинарного отношения.

РЕЗЮМЕ

В роботі доведено, що процедура редукції бінарного відношення визначає результат однозначно. Цю процедуру було введено для розв'язку задачі характеристики даного бінарного відношення для фіксованого автомата – задачі визначення, чи є бінарне відношення системою визначальних співвідношень для цього автомата. Також наведена структура результату редукції бінарного відношення.

SUMMARY

In this paper it is proved that reduction procedure of a binary relation defines its result uniquely. The procedure was introduced for a solution i.e. for a decision that the binary relation is a copresentation for an automaton. A structure of a reduction result of the binary relations it is shown.

Автор благодарен Грунскому Игорю Сергеевичу, Карнаух Татьяне Александровне, Резникову Илье Игоревичу за полезные замечания.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Глушков В.М. Синтез цифровых автоматов. – М.: Физматгиз, 1962. – 476 с.
2. Капитонова Ю.В., Летичевский А.А. Математическая теория проектирования вычислительных систем. – М.: Наука, 1988. – 296 с.
3. Грунский И.С. Анализ поведения конечных автоматов. – Луганск: Изд-во Луган. гос. пед. ун-та, 2003. – 318 с.
4. Грунский И.С., Козловский В.А. Синтез и идентификация автоматов. – К.: Наукова думка, 2004. – 246 с.
5. Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. – М.: Наука, 1985. – 320 с.
6. Grunsky I.S. Testing of automata: from experiments to representations by means of fragments // Testing of communicating systems. Proc. of the IFIP TC6 11th Int.Workshop IWTCS'98, 1998, Tomsk, Russia. – Boston: Kluwer Acad. Publ., 1998. – P. 3-14.
7. Соркин Ю.И. Теория определяющих соотношений для автоматов // Проблемы кибернетики. – 1961. – Вып. 9. – С. 45-69.
8. Грунский И.С., Сенченко А.С. Каноническая система определяющих соотношений для автоматов // Труды ИПММ НАН Украины. – 2002. – Т. 7. – С.58-63.
9. Богомолов А.М., Салий В.Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. – М.: Наука, 1997. – 368 с.
10. Лаллеман Ж. Полугруппы и комбинаторные приложения. – М.: Мир, 1985. – 440 с.
11. Василевский М.П. О распознавании неисправностей автомата // Кибернетика. – 1973. – №4. – С.93-108.
12. Глушков В.М. Абстрактная теория автоматов // Успехи математических наук. – 1961. – Т.16, вып. 5 (101). – С.3-62.
13. Капитонова Ю.В. Об изоморфизме абстрактных автоматов. I // Кибернетика. – 1965. – №3. – С.16-19.
14. Капитонова Ю.В. Об изоморфизме абстрактных автоматов. II // Кибернетика. – 1965. – №5. – С.10-13.

Надійшла до редакції 19.01.2006 р.

М Е Х А Н І К А

УДК 531.38, 517.977.1, 531.08

СТАБИЛИЗАЦИЯ МОДЕЛИ МАНИПУЛЯТОРА
С НАБЛЮДАТЕЛЕМ В ЦЕПИ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

А.Л.Зуев,

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, г. Донецк

Рассмотрена модель управляемого гибкого манипулятора, основанная на галеркинских приближениях краевой задачи для уравнений балки С.П. Тимошенко. Предложена схема стабилизации положения равновесия модели с помощью обратной связи по состоянию системы-наблюдателя. Доказано, что такой подход обеспечивает асимптотическую устойчивость невозмущенного решения галеркинской системы при любом количестве степеней свободы, соответствующих колебаниям упругой балки. Приведен результат численного интегрирования уравнений движения, иллюстрирующий эффективность найденного управления.

Введение. Математическая теория управления имеет широкий круг приложений в механике роботов-манипуляторов [1]. Использование современных манипуляторов с гибкими звеньями стимулирует развитие методов оптимального управления системами в бесконечномерных пространствах [2]. Возможный подход к решению задач управления такими объектами состоит в построении семейства приближенных уравнений движения (с конечным числом степеней свободы), для которых обеспечивается сходимость решений при определенном выборе управления. Такой “модальный” подход использован в работах [3, 4, 5] для управления системами, описываемыми уравнениями Эйлера-Бернулли. Одно из направлений развития этих исследований связано с уточнением модели балки Эйлера-Бернулли, которое было предложено С.П. Тимошенко [6, с. 389]. Настоящая статья продолжает серию работ [7, 8] по управлению математической моделью гибкого манипулятора на основе теории балки С.П. Тимошенко.

Уравнения движения и предварительные результаты. В статье [7] получены уравнения движения управляемого манипулятора в виде балки С.П. Тимошенко с грузом в поле силы тяжести. Для краевой задачи с частными производными получены приближенные по Галеркину дифференциальные уравнения в окрестности частного решения, соответствующего положению равновесия манипулятора. Эти приближенные уравнения могут быть, с точностью до нелинейных членов, записаны в виде [7, 8]:

$$\dot{z}_1 = A_{11}z_1 + A_{12}z_2 + B_1u + R_1(x, u), \quad \dot{z}_2 = A_{21}z_1 + A_{22}z_2 + B_2u + R_2(x, u), \quad (1)$$

где $z = (z_1^T, z_2^T)^T$ – фазовый вектор, u – управление. Компоненты фазового вектора $z_1 = (\tilde{\varphi}, \dot{\tilde{\varphi}})^T$ и $z_2 = (q_1, \dot{q}_1, \dots, q_N, \dot{q}_N)^T$ имеют следующий физический смысл: $\tilde{\varphi}$ – угол между центральной линией балки в точке приложения управляющего момента и направлением, соответствующим положению равновесия; N – количество координат, используемых для представления колебаний упругой балки в методе Галеркина; $q_1, q_2, \dots, q_N$ – модальные координаты отклонения балки от ее положения равновесия. Матрицы в правой части системы (1) имеют следующую структуру:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ d_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ d_1 & 0 & d_2 & 0 & \dots & d_N & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_1 - b_1 d_0 & 0 \\ 0 & 0 \\ a_2 - b_2 d_0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ a_N - b_N d_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\lambda_1 - b_1 d_1 & 0 & -b_1 d_2 & 0 & \dots & -b_1 d_N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ -b_2 d_1 & 0 & -\lambda_2 - b_2 d_2 & 0 & \dots & -b_2 d_N & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -b_N d_1 & 0 & -b_N d_2 & 0 & \dots & -\lambda_N - b_N d_N & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = (0, 1)^T, \quad B_2 = (0, -b_1, 0, -b_2, \dots, 0, -b_N)^T, \quad (2)$$

а нелинейные слагаемые удовлетворяют оценке $\|R_1(z, u)\| + \|R_2(z, u)\| = o(\|z\| + |u|)$ при $z \rightarrow 0, u \rightarrow 0$.

Элементы матриц (2) определяются в терминах N минимальных собственных чисел $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$ и соответствующих собственных функций $(w_j(x), \psi_j(x))_{j=1}^N$ задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{aligned} K(\psi_j'(x) - w_j''(x)) - \lambda_j \rho w_j(x) &= 0, \\ K(\psi_j(x) - w_j'(x)) - EI \psi_j''(x) - \lambda_j I_\rho \psi_j(x) &= 0, \quad x \in (0, l), \\ w_j(0) = \psi_j(0) = 0, \quad K(w_j'(l) - \psi_j(l)) - m \lambda_j w_j(l) &= 0, \\ EI \psi_j'(l) - \lambda_j J_c \psi_j(l) &= 0 \quad (j = \overline{1, N}), \end{aligned} \quad (3)$$

где l – длина балки; ρ – масса на единицу длины балки, E – модуль Юнга, I – момент инерции поперечного сечения, $I_\rho = \rho l / A$ – массовый момент инерции поперечного сечения балки, m – масса твердого тела-нагрузки, J_c – центральный момент инерции твердого тела-нагрузки. Коэффициент K равен kGA , где G – модуль сдвига, A – площадь поперечного сечения балки, k – геометрическая константа, определяемая формой поперечного сечения балки. Функции $w_j(x)$ и $\psi_j(x)$ описывают отклонение центральной линии балки и угол поворота поперечного сечения, соответственно, в точке балки с координатой x для j -й моды упругих колебаний. Будем считать все величины ρ, EI, K, I_ρ положительными константами, полагая также, что тело-нагрузка прикреплено к балке в своем центре масс ($c = 0$ в обозначениях работы [7]). Тогда элементы матриц (2) представимы в виде [7, 8]:

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{\int_0^l \rho w_j dx + m w_j(l)}{\int_0^l (\rho w_j^2 + I_\rho \psi_j^2) dx + m w_j^2(l) + J_c \psi_j^2(l)} g \sin \varphi_0, \\ b_j &= \frac{\int_0^l (\rho x w_j + I_\rho \psi_j) dx + m l w_j(l) + J_c \psi_j(l)}{\int_0^l (\rho w_j^2 + I_\rho \psi_j^2) dx + m w_j^2(l) + J_c \psi_j^2(l)}, \\ d_0 &= \frac{\int_0^l \rho w_0(x) dx + m w_0(l)}{J_0 + \int_0^l \rho w_0^2(x) dx + m w_0^2(l)} g \cos \varphi_0, \\ d_j &= \frac{\lambda_j \left(\int_0^l (\rho x w_j + I_\rho \psi_j) dx + m l w_j(l) + J_c \psi_j(l) \right) + g \left(\int_0^l \rho w_j dx + m w_j(l) \right) \sin \varphi_0}{J_0 + \int_0^l \rho w_0^2(x) dx + m w_0^2(l)} \quad (j = \overline{1, N}), \end{aligned} \quad (4)$$

где φ_0 – угол между центральной линией балки в состоянии равновесия и горизонтальным направлением (угол φ_0 вычисляется в точке $x = 0$), g – ускорение свободного падения, J_0 – момент инерции опоры манипулятора относительно оси действия управляющего момента; функции $w_0(x)$ и $\psi_0(x)$ определяют форму равновесия балки С.П. Тимошенко (см. [7]):

$$(K(w_0'(x) - \psi_0(x)))' = \rho g \cos \varphi_0,$$

$$\begin{aligned} (EI\psi_0'(x))' + K(w_0'(x) - \psi_0(x)) &= 0, \quad x \in (0, l), \\ w_0(0) = \psi_0(0) &= 0, \quad K(\psi_0(l) - w_0'(l)) = mg \cos \varphi_0, \quad \psi_0'(l) = 0. \end{aligned}$$

Выражение

$$u = (M - M_0) \left(J_0 + \int_0^l w_0^2(x) \rho dx + m w_0^2(l) \right)^{-1}$$

задаёт связь между управлением u в системе (1) и управляющим моментом M , приложенным к манипулятору. Здесь M_0 – значение управляющего момента, соответствующее исследуемому положению равновесия.

Стабилизация с наблюдателем. В работе [8] построена динамическая система наблюдения для линеаризованной системы (1) с любым количеством N упругих координат. При этом рассмотрены функции выхода следующего вида:

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 z_1, \quad y_2 = C_2 z_2, \quad C_1 = (1, 0), \\ C_2 &= (\chi_1, 0, \chi_2, 0, \dots, \chi_N, 0), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\chi_j = \psi_j'(l_0)$, $l_0 \in [0, l]$. Значения y_1, y_2 измеряются на практике с помощью датчика угла отклонения φ и датчиков компонент тензора напряжений в фиксированной точке балки с координатой $x = l_0$. Имеет место условие наблюдаемости:

Лемма. [8] Система линейного приближения (в окрестности нуля) уравнений (1) наблюдаема относительно выхода (5), если

$$\begin{vmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \dots & \pi_{1N} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \dots & \pi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{N1} & \pi_{N2} & \dots & \pi_{NN} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (6)$$

где

$$\pi_{1j} = \chi_j, \quad \pi_{kj} = -\lambda_j \pi_{k-1,j} - d_j \sum_{i=1}^N \pi_{k-1,i} b_i \quad (j = \overline{1, N}, k = \overline{2, N}).$$

В частности, при $N = 1$ условие (6) эквивалентно неравенству $\chi_1 \neq 0$, а при $N = 2$ следующему:

$$\chi_1 \chi_2 (\lambda_1 - \lambda_2 + b_1 d_1 - b_2 d_2) + b_2 \chi_2^2 d_1 - b_1 \chi_1^2 d_2 \neq 0.$$

В настоящей статье предлагается использовать динамический наблюдатель типа Луенбергера [9, Гл. 3.5] для реализации обратной связи по состоянию при неполных измерениях. Докажем основной результат.

Теорема. Предположим, что система (1), (5) удовлетворяет условию наблюдаемости (6), все λ_j положительны и различны, $b_j d_j > 0$ для всех $j = 1, 2, \dots, N$. Тогда тривиальное решение $z = 0$, $\bar{z} = 0$ расширенной системы, состоящей из уравнений (1) и уравнений наблюдателя

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}}_1 &= (A_{11} - F_1 C_1) \bar{z}_1 + A_{12} \bar{z}_2 + F_1 y_1 + B_1 u, \\ \dot{\bar{z}}_2 &= (A_{22} - F_{22} C_2) \bar{z}_2 + F_{21} y_1 + F_{22} y_2 + B_2 u, \end{aligned} \quad (7)$$

асимптотически устойчиво по Ляпунову, где $y_1 = C_1 z_1$, $y_2 = C_2 z_2$, $u = K \bar{z}$. Матрицы K, F_1, F_{21}, F_{22} имеют следующий вид:

$$K = (K_1, K_2), \quad K_1 = \left(-d_0 - \frac{h_1 + \sum_{j=1}^N a_j (b_j + a_j / \lambda_j)}{h_2}, -\frac{h_0}{h_2} \right), \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
 K_2 &= \left(-d_1 + \frac{a_1 + \lambda_1 b_1}{h_2}, 0, -d_2 + \frac{a_2 + \lambda_2 b_2}{h_2}, 0, \dots, -d_N + \frac{a_N + \lambda_N b_N}{h_2}, 0 \right), \\
 F_1 &= (\phi_1, d_0 + \phi_2)^T, \quad F_{21} = (0, a_1 - b_1 d_0, 0, a_2 - b_2 d_0, \dots, 0, a_N - b_N d_0)^T, \\
 F_{22} &= (f_1, 0, f_2, 0, \dots, f_N, 0)^T, \quad (f_1, f_2, \dots, f_N)^T = Q^{-1}(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_N)^T, \\
 Q &= \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1 d_1}{b_1} + d_1^2 & d_1 d_2 & \dots & d_1 d_N \\ d_2 d_1 & \frac{\lambda_2 d_2}{b_2} + d_2^2 & \dots & d_2 d_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_N d_1 & d_N d_2 & \dots & \frac{\lambda_N d_N}{b_N} + d_N^2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь $h_0, h_1, h_2, \phi_1, \phi_2, \gamma$ – произвольные положительные константы.

Доказательство. Совершим линейное преобразование $e_1 = z_1 - \bar{z}_1$, $e_2 = z_2 - \bar{z}_2$ и запишем расширенную систему (1), (7) в переменных z, e_1, e_2 :

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_0 & -BK_1 & -BK_2 \\ 0 & H_1 & A_{12} \\ 0 & 0 & H_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R(z, K(z-e)) \\ R_1(z, K(z-e)) \\ R_2(z, K(z-e)) \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned}
 H_0 &= \begin{pmatrix} A_{11} + B_1 K_1 & A_{12} + B_1 K_2 \\ A_{21} + B_2 K_1 & A_{22} + B_2 K_2 \end{pmatrix}, \quad H_1 = A_{11} - F_1 C_1, \\
 H_2 &= A_{22} - F_{22} C_2, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Как показано в статье [8, с. 221-222], матрицы H_1 и H_2 являются гурвицевыми, т.е. все их собственные значения имеют отрицательные вещественные части. Покажем, что матрица H_0 – гурвицева при выполнении условий теоремы. Для этого рассмотрим вспомогательную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{z}(t) = H_0 z(t). \tag{11}$$

Для системы (11) возьмем функцию Ляпунова, предложенную в работе [7]:

$$2V(z) = k_1 \tilde{\varphi}^2 + k_2 \tilde{\dot{\varphi}}^2 + \sum_{j=1}^N (\lambda_j q_j^2 + \dot{q}_j^2 - 2a_j \tilde{\varphi} q_j + 2b_j \tilde{\dot{\varphi}} \dot{q}_j). \tag{12}$$

Определим константы k_1 и k_2 в функции Ляпунова (12) следующим образом:

$$k_1 = h_1 + \sum_{j=1}^N \frac{a_j^2}{\lambda_j}, \quad k_2 = h_2 + \sum_{j=1}^N b_j^2.$$

Тогда в случае $h_1 > 0$, $h_2 > 0$ для квадратичной формы $V(z)$ выполнены условия положительной определенности, приведенные в доказательстве утверждения 3 статьи [7]. Производная функции $V(z)$ в силу системы (11) равна:

$$\dot{V}(z) = -h_0 \tilde{\dot{\varphi}}^2 \leq 0.$$

Повторяя рассуждения из доказательства утверждения 3 работы [7], приходим к выводу, что функция $V(z)$ удовлетворяет условиям теоремы Барбашина-Красовского для системы (11), если

$$a_j + \lambda_j b_j \neq 0 \quad (j = \overline{1, N}). \quad (13)$$

Неравенства (13) следуют из предположений теоремы $\lambda_j > 0$, $b_j d_j > 0$ и формул (4) для коэффициентов a_j, b_j, d_j .

Таким образом, тривиальное решение системы (11) асимптотически устойчиво по теореме Барбашина-Красовского, т.е. матрица H_0 – гурвицева. Поскольку матрица линейной части системы (10) имеет блочно-треугольную форму, то ее спектр является объединением спектров гурвицевых матриц H_0 , H_1 , H_2 , а значит линейное приближение системы (10) асимптотически устойчиво. Отсюда следует асимптотическая устойчивость тривиального решения нелинейной системы (10) (а также системы (1), (7) с $y_1 = C_1 z_1$, $y_2 = C_2 z_2$, $u = K \bar{z}$) на основании теоремы Ляпунова об устойчивости по линейному приближению.

Результаты вычислений. Определим коэффициенты системы (1) и проверим условия наблюдаемости (6) для обоснования применимости теоремы в схеме стабилизации модели реального гибкого манипулятора. Прототипом такой модели является управляемая пожарная лестница IVECO DLK 23-12 CS GL, описанная в статье [10]. Модель лестницы имеет следующие механические параметры:

$$l = 25 \text{ м}, \quad \rho = 64 \text{ кг/м}, \quad K = 2,3 \cdot 10^5 \text{ Н}, \quad I_\rho = 2,2 \cdot 10^4 \text{ кг·м}^2, \\ EI = 5 \cdot 10^9 \text{ Н·м}^2, \quad m = 100 \text{ кг}, \quad J_0 = 100 \text{ кг·м}^2, \quad l_0 = 1 \text{ м}.$$

Кабина, прикрепленная к верхней части лестницы, имеет небольшие линейные размеры по сравнению с длиной l , поэтому будем считать ее центральный момент инерции пренебрежимо малым, т.е. $J_c = 0 \text{ кг·м}^2$. Рассмотрим положение равновесия модели, соответствующее углу наклона лестницы $\varphi_0 = \pi/3$.

В таблице приведены собственные значения λ_n ($n = \overline{1, 4}$) задачи Штурма-Лиувилля (3) при указанном выше выборе механических параметров. В ней также приведены теоретические частоты модальных колебаний $\nu_n = \sqrt{\lambda_n}/2\pi$ и результаты экспериментальных измерений модальных частот ν_n^* для реальной пожарной лестницы. Легко видеть, что спектр задачи Штурма-Лиувилля (3) может быть использован для адекватного описания измеренных модальных частот реального манипулятора.

n	λ_n, c^{-2}	Теоретическая частота ν_n^*, c^{-1}	Измеренная частота ν_n^*, c^{-1}
1	14,1	0,59	0,6
2	126,5	1,79	1,8
3	354,6	2,99	2,9
4	694,7	4,19	4,25

Зафиксируем число $N = 2$ и вычислим коэффициенты системы (1). Для этого найдем собственные функции $w_j(x)$, $\psi_j(x)$ задачи (3) и применим формулы (4):

$$a_1 = 31,65, \quad a_2 = -7,08, \quad b_1 = 62,95, \quad b_2 = 15,55, \quad d_0 = -89,48, \\ d_1 = 307,19, \quad d_2 = 653,39, \quad \chi_1 = \psi'_1(l_0) = 0,001, \quad \chi_2 = \psi'_2(l_0) = 0,0014$$

Здесь собственные функции нормированы из условия $\left\langle \begin{matrix} w_j & w_j \\ \psi_j & \psi_j \end{matrix} \right\rangle_H = J_0$, $j = 1, 2$; билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ определена в статье [7]. Непосредственная проверка показывает, что все условия теоремы выполнены:

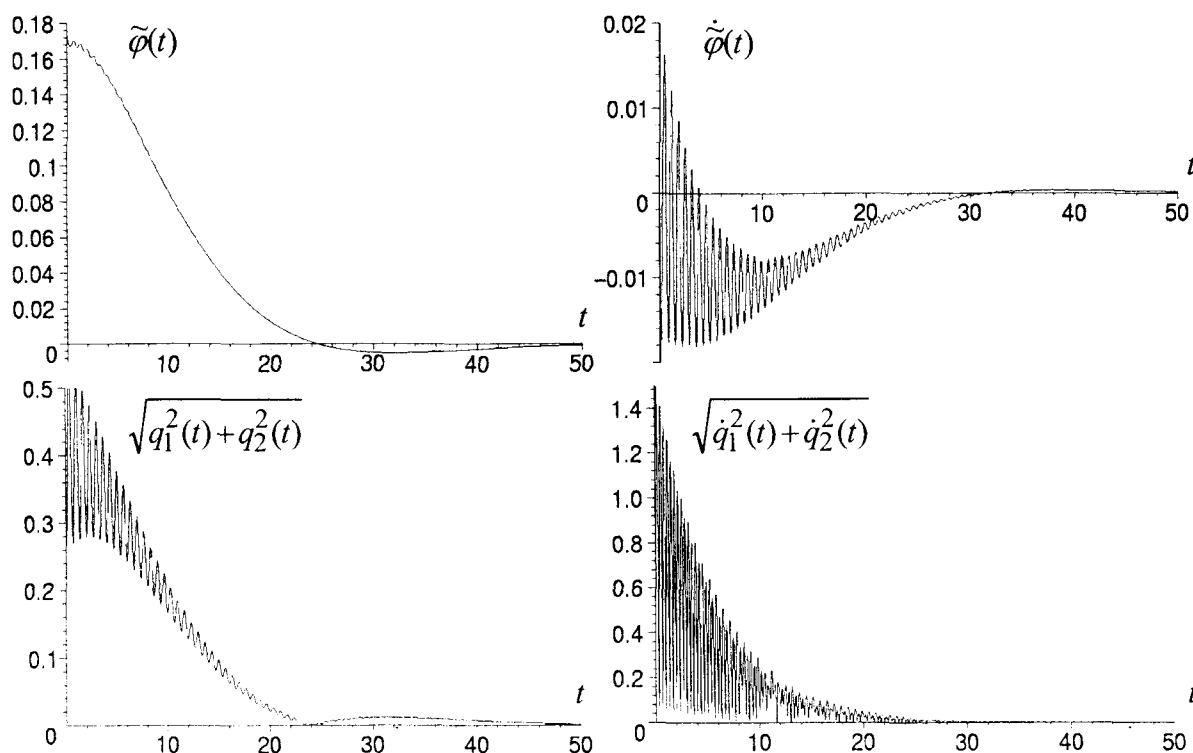
$$b_1 d_1 > 0, \quad b_2 d_2 > 0, \quad \chi_1 \chi_2 (\lambda_1 - \lambda_2 + b_1 d_1 - b_2 d_2) + b_2 \chi_2^2 d_1 - b_1 \chi_1^2 d_2 = -0,013 \neq 0.$$

Для стабилизации системы (1) применим управление вида $u = K \bar{z}$ из теоремы со значениями параметров

$$h_0 = \gamma = 10^4, \quad h_1 = 10^3, \quad h_2 = \phi_1 = \phi_2 = 10^2.$$

На рисунке показаны результаты численного интегрирования системы (1), (7) со следующим начальными условиями:

$$\tilde{\varphi}(0) = \frac{\pi}{18}, \quad \dot{\tilde{\varphi}}(0) = 0, \quad q_1(0) = q_2(0) = 0, \quad \dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0, \quad \bar{z} = 0. \quad (14)$$



Выводы. Результаты вычислений подтверждают возможность стабилизации модели гибкого манипулятора с помощью функции управления, определяемой в терминах системы-наблюдателя. Отметим также, что теорема гарантирует локальную асимптотическую устойчивость в нелинейной постановке. Предложенный подход позволяет конструктивно строить систему динамического наблюдения и функцию обратной связи явным образом с помощью выражений (7)-(9), которые применимы при любом конечном числе упругих координат. Вместе с тем требует дальнейшего исследования вопрос о сходимости решений систем (1), (7) при стремлении числа степеней свободы к бесконечности.

РЕЗЮМЕ

Розглянуто математичну модель керованого гнучкого маніпулятора, що ґрунтується на наближеннях за Гальоркіним рівнянь руху балки С.П. Тимошенка. Запропоновано схему стабілізації стану рівноваги моделі за допомогою зворотного зв'язку відносно системи-спостерігача. Доведено асимптотичну стійкість замкненої системи зі спостерігачем при довільному числі ступенів волі пружних коливань балки. Наведено результат числового інтегрування рівнянь руху, який ілюструє ефективність отриманого керування.

SUMMARY

A mathematical model of a flexible-link manipulator is considered within the framework of Galerkin approximations of the Timoshenko beam equation. An observer-based feedback law is proposed in order to stabilize the equilibrium of the model considered. Asymptotic stability of the closed-loop system with observer is proved for an arbitrary number of degrees of freedom corresponding to oscillations of the flexible part. Simulation results illustrate the efficiency of the controller proposed.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Черноушко Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. Манипуляционные роботы. – М.: Наука, 1989. – 368 с.
2. Lasiecka I., Triggiani R. Control theory for partial differential equations: continuous and approximation theories. 2: Abstract hyperbolic-like systems over a finite time horizon. – Cambridge: Cambridge University Press, 2000. – 1067 p.
3. Balas M.J. Modal control of certain flexible dynamical systems // SIAM Journal on Control and Optimization. – 1978. – Vol. 16. – P. 450–462.

4. Ковалев А.М., Зуев А.Л., Щербак В.Ф. Синтез стабилизирующего управления твердым телом с присоединенными упругими элементами // Проблемы управления и информатики. – 2002. – № 6. – С. 5-16.
5. Zuyev A. Partial asymptotic stabilization of nonlinear distributed parameter systems // Automatica. – 2005. – Vol. 41. – P. 1-10.
6. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
7. Зуев А.Л. Управление упругим манипулятором в рамках модели балки Тимошенко // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41. – № 12. – С. 107-115.
8. Зуев А.Л. Синтез динамического наблюдателя для модели упругого манипулятора // Механика твердого тела. – 2005. – Вып. 35. – С. 217-223.
9. Уонэм М. Линейные многомерные системы управления. – М.: Наука, 1980. – 376 с.
10. Sawodny O., Lambeck S., Hildebrandt A. Trajectory Generation for the Trajectory Tracking Control of a Fire Rescue Turnable Ladder // Proc. 3rd International Workshop on Robot Motion and Control (RoMoCo'02). – Poznan-Bukowy Dworek (Poland). – 2002. – P. 411-416.

Надійшла до редакції 20.03.2006 р.

ОБ ОДНОМ КЛАСЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ КИРХГОФА

А.В.Зыза

Введение. В динамике твердого тела большой интерес представляет задача построения частных решений уравнений движения [3]. Это связано с тем, что частные решения позволяют с помощью метода годографов [4] изучить движение тела в конкретных случаях на параметры, характеризующие начальные условия движения тела. Кроме того, они позволяют изучить свойства интегральных многообразий уравнений движения в окрестности данных частных решений и, в частности, обнаружить либо хаотический, либо регулярный характер в поведении интегральных траекторий.

Класс полиномиальных решений, найденных в классической задаче о движении тела с неподвижной точкой Н.Ковалевским [1], В.А.Стекловым [5], Д.Н.Горячевым [6], составляет значительную часть в классических случаях интегрируемости уравнений Эйлера-Пуассона. Ряд из них П.В.Харламов [2] обобщил на случай движения тяжелого гиростата. В работе [7] рассмотрены условия существования полиномиальных решений указанного выше типа в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, описываемой уравнениями Кирхгофа [8] и построены новые случаи интегрируемости этих уравнений.

В классической задаче о движении гиростата под действием силы тяжести имеет место решение А.И.Докшевича [9], которое относится также к полиномиальному типу, но по переменным отличающихся от переменных в решениях Стеклова-Ковалевского-Горячева. Поэтому представляет большой интерес задача об исследовании аналогичных по структуре решений, но в более общих задачах динамики.

Данная работа посвящена изучению условий существования полиномиальных решений вида [9] в задаче о движении гиростата, которая описывается уравнениями Кирхгофа [8]. Построено новое решение этих уравнений.

Постановка задачи. Рассмотрим движение гиростата с неподвижной точкой под действием потенциальных и гироскопических сил, которое описывается дифференциальными уравнениями класса Г.Кирхгофа [8]

$$A\dot{\omega} = (A\omega + \lambda) \times \omega + \omega \times Bv + v \times (Cv - s), \quad \dot{v} = v \times \omega. \quad (1)$$

Уравнения (1) допускают три первых интеграла

$$A\omega \cdot \omega - 2(s \cdot v) + Cv \cdot v = 2E, \quad v \cdot v = 1, \quad (A\omega + \lambda) \cdot v - \frac{1}{2}(Bv \cdot v) = k, \quad (2)$$

где ω – угловая скорость гиростата; v – единичный вектор, характеризующий направление оси симметрии силовых полей; λ – гиростатический момент; s – вектор обобщенного центра масс; A – тензор инерции гиростата, построенный в неподвижной точке; B и C – симметричные матрицы третьего порядка; E и k – постоянные интегрирования; точка над переменными обозначает относительную производную по времени t .

Пусть в (1), (2) матрицы A , B , C имеют диагональную структуру, $\omega = (p, q, r)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$, $s = (s_1, s_2, 0)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, 0)$.

Поставим задачу об исследовании условий существования у уравнений (1) решений вида

$$\begin{aligned} q &= Q(p) = \sum_{k=0}^n b_k p^k, \quad r^2 = R(p) = \sum_{i=0}^m c_i p^i, \\ v_1 &= \varphi(p) = \sum_{j=0}^l a_j p^j, \quad v_2 = \psi(p) = \sum_{i=0}^{n_1} g_i p^i, \\ v_3 &= r\chi(p), \quad \chi(p) = \sum_{j=0}^{m_1} f_j p^j, \end{aligned} \quad (3)$$

где n , m , l , n_1 , m_1 – натуральные числа или нули; b_k , c_i , a_j , g_i , f_j – постоянные, подлежащие определению.

Известно, что в задаче о движении тяжелого гиростата указанным классом полиномов можно описать решение А.И.Дошкевича [9].

Подставим выражения (3) в скалярные уравнения, вытекающие из (1) и интегралы (2)

$$\dot{p} = (\varphi'(p))^{-1} (\psi(p) - Q(p)\chi(p))\sqrt{R(p)}; \quad (4)$$

$$\psi'(p)(\psi(p) - Q(p)\chi(p)) = \varphi'(p)(p\chi(p) - \varphi(p)); \quad (5)$$

$$(R(p)\chi^2(p))' (p\chi(p) - \varphi(p)) = 2\psi'(p)\chi(p)(Q(p)\varphi(p) - p\psi(p)). \quad (6)$$

$$A_1(p\chi(p) - \varphi(p)) = \psi'(p) \times \\ \times \{((C_3 - C_2)\psi(p) + B_3Q(p) + s_2)\chi(p) + (A_2 - A_3)Q(p) - B_2\psi(p) + \lambda_2\}; \quad (7)$$

$$A_2Q'(p)(p\chi(p) - \varphi(p)) = \psi'(p) \times \\ \times \{((C_1 - C_3)\varphi(p) - B_3p - s_1)\chi(p) + B_1\varphi(p) + (A_3 - A_1)p - \lambda_1\}; \quad (8)$$

$$A_3R'(p)(p\chi(p) - \varphi(p)) = 2\psi'(p)\{((C_2 - C_1)\psi(p) - B_1Q(p) - s_2)\varphi(p) + \\ + B_2\psi(p)p + s_1\psi(p) + (A_1 - A_2)pQ(p) + \lambda_1Q(p) - \lambda_2p\}. \quad (9)$$

$$\varphi^2(p) + \psi^2(p) + R(p)\chi^2(p) = 1; \quad (10)$$

$$(2A_1p - B_1\varphi(p))\varphi(p) + (2A_2Q(p) - B_2\psi(p))\psi(p) + \\ + (2A_3 - B_3\chi(p))R(p)\chi(p) + 2\varphi(p)\lambda_1 + 2\psi(p)\lambda_2 = 2k; \quad (11)$$

$$A_1p^2 + A_2Q^2(p) + A_3R(p) + C_1\varphi^2(p) + C_2\psi^2(p) + \\ + C_3R(p)\chi(p) - 2\varphi(p)s_1 - 2\psi(p)s_2 = 2E. \quad (12)$$

Здесь A_i, B_i, C_i ($i = \overline{1, 3}$) – диагональные элементы матриц A, B, C ; штрихом обозначена производная по вспомогательной переменной p . Уравнение (4) устанавливает зависимость p от времени t .

Случай $Q(p) = b_2p^2 + b_1p + b_0, R(p) = c_2p^2 + c_1p + c_0$ ($n = 2, m = 2$). Одной из первоначальных задач является оценка максимальных степеней полиномов в (3), то есть значений n_1, m_1, l , считая $n_1 > 1, m_1 \geq 1, l > 1$. На первом этапе эту оценку удобно получить на основе геометрического интеграла (10). При этом возникает ряд вариантов

$$1) l = n_1 = m_1 + 1, \quad 2) n_1 = m_1 + 1 > l, \quad 3) l = m_1 + 1 > n_1. \quad (13)$$

При рассмотрении уравнения (5) для первого варианта из (13) получим $m + 2 + m_1 \leq m_1 + m_1 + 1$ или $2 \leq 1$, что невозможно.

Для второго варианта в (13) из анализа уравнения (5) имеем $l = m_1 + 2$, что противоречит условию данного варианта.

Перейдем к рассмотрению последнего варианта в (13). Исследование интегралов (10)-(12) дает условия на некоторые параметры задачи

$$C_1 = C_3, \quad B_1 = B_3. \quad (14)$$

Будем считать $a_l \neq f_{m_1}$. Из анализа уравнений (5), (8) на основании условий (14) имеем $n_1 = m_1 = 2$. Следовательно, получен один из возможных вариантов максимальных степеней полиномов в (3)

$$l = 3, \quad n = m = n_1 = m_1 = 2, \quad (a_3 \neq f_2). \quad (15)$$

Исследуем вариант (15). Для него полиномы из (3) таковы

$$q = Q(p) = b_2p^2 + b_1p + b_0, \quad r^2 = R(p) = c_2p^2 + c_1p + c_0, \\ v_1 = a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0, \quad v_2 = \psi(p) = g_2p^2 + g_1p + g_0,$$

$$v_3 = r(f_2 p^2 + f_1 p + f_0). \quad (16)$$

Подставим необходимые значения для компонент векторов ω и v их (16) в динамические уравнения (7), (8) и потребуем их выполнения при всех p . Получим систему условий на параметры задачи и параметры решения. Запишем некоторые из них

$$\begin{aligned} (C_2 - C_1)g_2 &= B_1 b_2, \quad (C_2 - C_1)g_1 = B_1 b_1, \quad b_2 A_2 = -g_2 B_1, \\ A_2(b_1(f_2 - a_3) + 2b_2(f_1 - a_2)) &= 2g_2(B_1(a_2 - f_1) - f_2 s_1) + g_1(a_3 - f_2)B_1, \\ A_2(b_1(f_1 - a_2) + 2b_2(f_0 - a_1)) &= \\ &= 2g_2(B_1(a_1 - f_0) - f_1 s_1 + (A_3 - A_1)) + g_1(B_1(a_2 - f_1) - f_2 s_1), \\ A_2(b_1(f_0 - a_1) - 2b_2 a_0) &= 2g_2(B_1 a_0 - s_1 f_0 - \lambda_1) + g_1(B_1(a_1 - f_0) - f_1 s_1 + (A_3 - A_1)). \end{aligned} \quad (17)$$

Из совместности системы (17) вытекает $A_1 = A_3$, $s_1 = 0$, $\lambda_1 = 0$. На основании этого заключаем, что рассматриваемое решение (16) является частным случаем решения Кирхгофа-Харламова.

Случай $Q(p) = b_2 p^2 + b_1 p + b_0$, $R(p) = c_4 p^4 + c_3 p^3 + c_2 p^2 + c_1 p + c_0$ ($n = 2$, $m = 4$). Проведем оценку максимальных степеней полиномов $\varphi(p)$, $\psi(p)$, $\chi(p)$ из (3), считая $l > 1$, $n_1 > 1$, $m_1 \geq 1$.

Рассмотрение геометрического интеграла (10) приводит к возможным вариантам исследования

$$1) l = n_1 = m_1 + 2, \quad 2) l = m_1 + 2 > n_1, \quad 3) n_1 = m_1 + 2 > l. \quad (18)$$

Положим вначале $m_1 = 1$, т.е. $\chi(p) = f_1 p + f_0$. Тогда для первого варианта в (18) имеем $l = 3$, $n_1 = 3$. При этом динамические уравнения (7), (8) могут быть тождествами по p , только при выполнении условий $C_1 = C_2 = C_3$ и $B_1 = 0$, что является вырожденным случаем, который не входит в рассмотрение.

Для второго варианта в (18) степени полиномов $\varphi(p)$ и $\psi(p)$ таковы: $l = 3$, $n_1 = 2$, но тогда нарушается уравнение (5).

При рассмотрении третьего варианта из (18), заключаем $n_1 = 3$, $l = 2$. Следовательно, имеем один из возможных вариантов максимальных степеней полиномов из (3)

$$l = 2, \quad n = 2, \quad m = 4, \quad n_1 = 3, \quad m_1 = 1. \quad (19)$$

Пусть теперь степень полинома $\chi(p) - m_1 > 1$.

Динамические уравнения (7), (8), при условии первого варианта в (18), могут выполняться при всех p только когда матрица $\|C\|$ в рассмотрение не входит и $B_1 = 0$, т.е. получаем вырожденный случай.

При рассмотрении второго варианта в (18) из анализа уравнений (5), (6) имеем $n_1 = m_1 + 1$ и $4 + 2m_1 - 1 + 2 + m_1 = m_1 + m_1 + 4 + m_1$, что невозможно.

Перейдем теперь к рассмотрению третьего варианта в (18). Исследование будем проводить для случаев $l \leq m_1$ и $l = m_1 + 1$.

Если же $l \leq m_1$, то из анализа динамических уравнений (7), (8) вытекает $C_1 = C_2 = C_3$ и $B_3 = 0$ – вырожденный случай.

Пусть теперь $l = m_1 + 1$. Из уравнений (7), (8) и интегралов (10)-(12) имеем два варианта максимальных степеней полиномов из (3) при условиях $C_1 = C_2 = C_3$, $B_2 = B_3$, $s_1 \neq 0$, $s_2 = 0$

$$l = 3, \quad n = 2, \quad m = 4, \quad n_1 = 4, \quad m_1 = 2; \quad (20)$$

$$l = 4, \quad n = 2, \quad m = 4, \quad n_1 = 5, \quad m_1 = 3.$$

Изучим вариант (19). Предварительный анализ уравнений движения (5)-(9) и интегралов (10)-(12) дает условия на параметры задачи и решения

$$C_1 = C_2 = C_3, \quad B_2 = B_3, \quad g_3 - b_2 f_1 = 0, \quad A_2 = A_3. \quad (21)$$

Учитывая значения (21), запишем первое динамическое уравнение (7) в виде

$$(p\chi(p) - \varphi(p)) = \psi'(p)\mu_1, \quad (22)$$

где $\mu_1 = A^{-1}[B_2(b_0 f_0 - g_0) + \lambda_2 + s_2 f_0]$. При этом имеем дополнительные условия

$$b_1 f_1 + b_2 f_0 - g_2 = 0, \quad B_2(b_0 f_1 + b_1 f_0 - g_1) + s_2 f_1 = 0. \quad (23)$$

Подставим полиномы из (3) в уравнение движения (5)-(9), предварительно исключив разность $(p\chi(p) - \varphi(p))$ при помощи формулы (22), и потребуем их выполнения при всех p . Получим условия на параметры

$$\begin{aligned} g_1 - (b_1 f_0 + b_0 f_1) &= 2\mu_1 a_2; \\ 3c_4 f_1 &= \mu_1^{-1}(b_2 a_2 - g_3), \quad 5c_3 f_1 + 4c_4 f_0 = 2\mu_1^{-1}(b_2 a_1 + b_1 a_2 - g_2); \\ g_3 &= (3\mu_1)^{-1}(f_1 - a_2), \quad g_2 = (2\mu_1)^{-1}(f_0 - a_1), \quad B_1 a_2 - B_2 f_1 = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Из совместности системы (24) и условий (21), (23) находим

$$\begin{aligned} b_2 &= (B_1 - B_2)(3\mu_1 B_1)^{-1}, \quad b_1 = [(B_1 + 2B_2)f_0 - 3B_1 a_1](6\mu_1 B_1 f_1)^{-1}, \\ c_3 &= (B_1 - B_2)a_1(3\mu_1^2 B_1 f_1)^{-1} + (2B_2^3 - B_1 B_2 - B_1^2)f_0(9\mu_1^2 B_1^2 f_1)^{-1}. \end{aligned} \quad (25)$$

Интеграл энергии (12) дает дополнительное условие $A_2(2b_2 b_1 + c_3) - 2s_2 g_3 = 0$, из которого с учетом значений (25) получим $s_2 = 0$. Тогда из (23) и (24) имеем $a_2 = 0$, что невозможно. Следовательно, вариант (19) в обобщенной задаче динамики твердого тела не имеет места.

Перейдем к изучению первого варианта в (20). Уравнение (7) может быть тождеством по p только при выполнении условий

$$\begin{aligned} B_2(b_2 f_2 - g_4) &= 0, \quad B_2(b_2 f_1 + b_1 f_2 - g_3) = 0, \\ (A_2 - A_3)b_2 + B_2(b_2 f_0 + b_1 f_1 + b_0 f_2 - g_2) &= 0; \\ (A_2 - A_3)b_1 + B_2(b_1 f_0 + b_0 f_1 - g_1) &= 0; \\ \mu_2 &= (A_2 - A_3)b_0 + B_2(b_0 f_0 - g_0) + \lambda_2 \neq 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Запишем (7) в виде

$$(p\chi(p) - \varphi(p)) = \mu_2 A_1^{-1} \psi'(p). \quad (27)$$

При помощи соотношения (27) из рассмотрения уравнения (5) имеем

$$3\mu_2 a_3 = A_1(g_2 - b_2 f_0 - b_1 f_1 - b_0 f_2). \quad (28)$$

Изучение интегралов (10), (12) дает $A_2 = A_3$. Тогда из совместности системы (26), (28) следует $a_3 = 0$, что противоречит условию варианта ($l = 3$). Следовательно, рассматриваемый вариант также не имеет места в обобщенной задаче динамики твердого тела.

Аналогично доказывается невозможность существования второго варианта в (20).

Новое частное решение. Рассмотрим случай $n = 2$, $m = 4$ и $m_1 = 0$. Варианты (18) дают единственный набор значений максимальных степеней полиномов $\varphi(p)$ и $\psi(p)$ из (3): $l = 2$, $n_1 = 2$. Тогда из (3) находим

$$\begin{aligned} q &= Q(p) = b_2 p^2 + b_1 p + b_0, \quad r^2 = R(p) = c_4 p^4 + c_3 p^3 + c_2 p^2 + c_1 p + c_0, \\ v_1 &= \varphi(p) = a_2 p^2 + a_1 p + a_0, \quad v_2 = \psi(p) = g_2 p^2 + g_1 p + g_0, \quad \chi(p) = f_0. \end{aligned} \quad (29)$$

Подставим полином из (29) в уравнение (7). Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях

многочленов, стоящих в левых и правых частях уравнения, заключаем, что тождество по p может быть только при выполнении условия

$$(C_3 - C_2)g_2f_0 + B_3b_2f_0 - B_2g_2 + (A_2 - A_3)b_2 = 0. \quad (30)$$

С учетом равенства (30) первое динамическое уравнение (7) запишем так

$$(p\chi(p) - \varphi(p)) = A_1^{-1}\psi'(p)[D_1p + D_0], \quad (31)$$

где

$$D_1 = (C_3 - C_2)g_1f_0 + B_3b_1f_0 - B_2g_1 + (A_2 - A_3)b_1; \quad (32)$$

$$D_0 = (C_3 - C_2)g_0f_0 + B_3b_0f_0 - B_2g_0 + (A_2 - A_3)b_0 + \lambda_2 + s_2f_0.$$

Исключим из уравнений (5), (6), (8), (9) разность $(p\chi(p) - \varphi(p))$ с помощью (31). Подставим в них значения для компонент векторов ω и ν из (29), и полагая $D_0 = 0$ получим систему условий, к которой добавим условия на параметры, вытекающие из (31)

$$\begin{aligned} a_2A_1 &= -2g_2D_1, \quad A_1(f_0 - a_1) = g_1D_1, \quad g_1 - b_1f_0 = a_1D_1A_1^{-1}, \quad a_0 = 0; \\ 2D_1f_0c_4 &= A_1b_2a_2, \quad 3D_1f_0c_3 = 2A_1(b_2a_1 + b_1a_2 - g_2), \quad g_0 - b_0f_0 = 0; \\ D_1f_0c_2 &= A_1(b_1a_1 + b_0a_2 - g_1), \quad D_1f_0c_1 = 2A_1(b_0a_1 - g_0); \\ 2A_3A_1^{-1}D_1c_4 &= (C_2 - C_1)g_2a_2 - B_1b_2a_2, \quad \lambda_1 + s_1f_0 = 0; \\ A_3A_1^{-1}D_1c_2 &= (C_2 - C_1)(g_1a_1 + g_0a_2) - B_1(b_1a_1 + b_0a_2) - \\ &\quad - s_2a_2 + B_2g_1 + s_1g_2 + (A_1 - A_2)b_1 + \lambda_1b_2; \\ A_3A_1^{-1}D_1c_1 &= 2\{(C_2 - C_1)g_0a_1 - B_1b_0a_1 - s_2a_1 + B_2g_0 + \\ &\quad + s_1g_1 + (A_1 - A_2)b_0 + \lambda_1b_1 - \lambda_2\}; \\ (C_2 - C_1)f_0^2(A_3 + B_1f_0)^{-1} &= 4D_1^2A_1^{-2} + 1, \\ (C_2 - C_1)f_0A_2(A_3 + B_1f_0)^{-1} &= (C_3 - C_1)f_0 - B_1; \\ a_1f_0^{-1}A_2D_1^2A_1^{-2} &= (C_3 - C_1)a_1f_0 + B_3f_0 - a_1B_1 + A_1 - A_3 + (f_0 - a_1)f_0^{-1}A_2; \\ 2a_1(A_3f_0^{-1} + B_1)D_1^2A_1^{-2} &= 2(f_0 - a_1)(B_1 + (C_1 - C_2)f_0) + B_2f_0 + \\ &\quad + \frac{(C_2 - C_1)f_0^2(A_1 - A_2)}{A_3 + B_1f_0} + (3f_0 - 2a_1)f_0^{-1}A_3. \end{aligned} \quad (33)$$

Геометрический интеграл из (10) дает дополнительное условие

$$g_0^2 + c_0f_0^2 = 1. \quad (34)$$

Система (32)-(34) совместна относительно моментов инерции A_1 , A_2 , A_3 и g_2 , f_0 . При этом имеем

$$\begin{aligned} a_1 &= -2f_0, \quad D_1 = A_1\sqrt{3A_1(20A_2)^{-1}}, \quad (C_2 - C_1) = (3A_1 + 5A_2)^2(100A_2f_0^2)^{-1}; \\ (C_3 - C_2) &= \left(\frac{9}{20}A_1 - \frac{9A_1^2}{100A_2} + A_2 - A_3\right)f_0^{-2}, \quad B_1 = \left(\frac{3A_1 + 5A_2}{20} - A_3\right)f_0^{-1}; \\ B_2 &= \left(\frac{7}{20}A_1 + A_2 - A_3 - \frac{3A_1^2}{20A_2}\right)f_0^{-1}, \quad B_3 = \left(A_3 - A_2 - \frac{A_1}{10}\right)f_0^{-1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_2 &= \left(1 + \frac{3A_1}{5A_2}\right) g_2 f_0^{-1}, \quad b_1 = \frac{A_1 + 10A_2}{5A_2} \sqrt{\frac{15A_2}{A_1}}, \quad b_0 = f_0 g_2^{-1}; \\
 g_1 &= 2\sqrt{15} \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} f_0, \quad g_0 = f_0^2 g_2^{-1}; \quad a_2 = -2 \sqrt{\frac{3A_1}{20A_2}} g_2; \\
 c_4 &= -\left(1 + \frac{3A_1}{5A_2}\right) g_2^2 f_0^{-2}, \quad c_3 = -4\sqrt{15} \left(\sqrt{A_2 A_1^{-1}} + \frac{1}{5} \sqrt{A_1 A_2^{-1}}\right) g_2 f_0^{-1}; \\
 c_2 &= -6(A_1 + 10A_2) A_1^{-1}, \quad c_1 = -4\sqrt{15} \sqrt{A_2 A_1^{-1}} f_0 g_2^{-1}, \quad c_0 = (g_2^2 - f_0^4) (g_2 f_0)^{-2}; \\
 s_1 &= 5\sqrt{15} \left(A_2 - \frac{A_1}{4}\right) \sqrt{A_2 A_1^{-1}} g_2^{-1}, \quad s_2 = \left(\frac{9A_1^2}{100A_2} - \frac{8}{5} A_1 + 5A_2\right) g_2^{-1}; \\
 \lambda_1 &= -5\sqrt{15} \left(A_2 - \frac{A_1}{4}\right) \sqrt{A_2 A_1^{-1}} f_0 g_2^{-1}, \quad \lambda_2 = \left(\frac{8}{5} A_1 - 5A_2 - \frac{3}{20} \frac{A_1^2}{A_2}\right) f_0 g_2^{-1}.
 \end{aligned} \tag{35}$$

Пример действительности решения (3), (35) для уравнений (4)-(9) таков: $A_1 = a$, $A_2 = \frac{3}{2}a$, $A_3 = 2a$, $g_2 = g$, $f_0 = f$ ($a > 0$, $f \neq 0$, $g > f^2$)

$$\begin{aligned}
 \lambda &= \left(-\frac{75\sqrt{10}}{8}; -6; 0\right) \frac{af}{g}; \quad s = \left(\frac{75\sqrt{10}}{8}; \frac{149}{25}; 0\right) \frac{a}{g}; \\
 B_1 &= -\frac{59}{40} \frac{a}{f}, \quad B_2 = -\frac{1}{4} \frac{a}{f}, \quad B_3 = \frac{2}{5} \frac{a}{f}; \\
 (C_3 - C_2) &= -\frac{11}{100} \frac{a}{f^2}, \quad (C_2 - C_1) = \frac{147}{200} \frac{a}{f^2}; \\
 q &= \frac{7}{5} \frac{g}{f} p^2 + \frac{16\sqrt{10}}{5} p + \frac{f}{g}; \\
 r^2 &= -\frac{7}{5} \frac{g^2}{f^2} p^4 - \frac{34\sqrt{10}}{5} \frac{g}{f} p^3 - 96p^2 - 6\sqrt{10} \frac{f}{g} p + \frac{g^2 - f^4}{(gf)^2}; \\
 v_1 &= -\frac{\sqrt{10}}{5} gp^2 - 2fp, \quad v_2 = gp^2 + 3\sqrt{10} fp + \frac{f^2}{g}, \quad v_3 = fr; \\
 \dot{p} &= \frac{pr}{\sqrt{10}}, \quad \left(p \neq -\frac{\sqrt{10}}{2} \frac{f}{g}\right).
 \end{aligned} \tag{36}$$

Таким образом, решение (36) характеризуется одним линейным инвариантным соотношением и не является частным случаем решения П.В.Харламова [10].

РЕЗЮМЕ

Досліджено умови існування поліноміальних розв'язків у задачі про рух гіростата під впливом потенційних та гіростатичних сил у випадках, коли друга компонента вектора кутової швидкості є поліном другого степеня, а третя компонента – поліном другого та четвертого степенів. Знайдено новий частковий розв'язок, який характеризується одним лінійним інваріантним співвідношенням.

SUMMARY

In the article were investigated conditions of existence of polynomial solution in a problem of gyrostat moving under influence of potential and gyroscopic forces in cases, when the second component of a vector of an angular velocity is a polynomial of the second degree, and the third component are polynomials of the second and fourth degrees. Also was found one

new partial solution, which is characterized by one linear invariant relation.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Kowalewski N. Eine new partikular Lösung der Differenzial Gleichungen der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt // Math. Ann. – 1908. – Vol. 65. – P. 528–537.
2. Харламов П.В. Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1965. – 221 с.
3. Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А. Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. – К: Наук. думка, 1978. – 296 с.
4. Харламов П.В. Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикладная математика и механика. – 1964. – Т.28. – Вып. 3. – С. 502–507.
5. Стеклов В.А. Новое частное решение дифференциальных уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // Тр. отд-ния физ. наук о-ва любителей естествознания. – 1899. – Т. 10. – Вып. 1. – С. 1–3.
6. Горячев Д.Н. Новое частное решение задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Там же. – С. 23–24.
7. Горр Г.В., Зыза А.В. Полиномиальные решения в одной задаче о движении гироската с неподвижной точкой // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 6. – С. 12–21.
8. Харламов П.В., Мозалевская Г.В., Лесина М.Е. О различных представлениях уравнений Кирхгофа // Механика твердого тела. – 2001. – Вып. 31. – С. 3–17.
9. Докшевич А.И. Новое частное решение уравнений движения гироската, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. – 1970. – Вып. 2. – С. 12–15.
10. Харламов П.В. О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью // Журн. прикладной механики и техн. физики. – 1963. – № 4. – С. 17–29.

Надійшла до редакції 10.03.2006 р.

УДК 531.38

ОБ ОДНОМ КЛАСЕ АСИМПТОТИЧЕСКИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ТЯЖЕЛОГО ГИРОСТАТА

А.И.Молочинская,

Донбасская национальная академия строительства и архитектуры, г. Макеевка

В работе на основании результатов [1, 2] получены условия существования асимптотически периодических движений тяжелого гиростата, предельное движение которых описывается решением А.И.Докшевича.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой, которое описывается уравнениями [3]:

$$A\dot{\omega} = (A\omega + \lambda) \times \omega + s \times v, \quad \dot{v} = v \times \omega, \quad (1)$$

где введены обозначения: $\omega = (p, q, r)$ – вектор угловой скорости тела носителя; $v = (v_1, v_2, v_3)$ – единичный вектор силы тяжести; $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – вектор гиростатического момента, характеризующий движение симметричных носимых тел; $s = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, сонаправленный с вектором центра масс гиростата; $A = (A_{ij})$ – тензор инерции гиростата, вычисленный в неподвижной точке О; точка над переменными ω и v обозначает относительную производную по времени t .

Уравнения (1) имеют первые интегралы:

$$A\omega \cdot \omega - 2(\omega \cdot \omega) = 2E, \quad v \cdot v = 1, \quad (A\omega + \lambda) \cdot v = k. \quad (2)$$

Здесь E и k – произвольные постоянные.

Положим, что центр масс гиростата лежит на первой главной оси, а гиростатический момент, характеризующий циклические движения, имеет вид $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, 0)$. Тогда уравнения движения гиростата (1) можно записать так:

$$\begin{aligned} \alpha \dot{p} &= r[(\beta - \gamma)q + \lambda_2], \quad \beta \dot{q} = r[(\beta - \alpha)p + \lambda_1] - s_1 v_3, \\ \gamma \dot{r} &= (\alpha - \beta)pq + \lambda_1 q - \lambda_2 p + s_1 v_2; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\dot{v}_1 = rv_2 - qv_3, \quad \dot{v}_2 = pv_3 - rv_1, \quad \dot{v}_3 = qv_1 - pv_2, \quad (4)$$

где α, β, γ – главные моменты инерции гиростата; $s_1 = mg|r_c|$ (m – масса гиростата, g – ускорение свободного падения, r_c – вектор, определяющий центр масс гиростата); точка над переменными означает дифференцирование по времени t .

Первые интегралы из (2) преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} \alpha p^2 + \beta q^2 + \gamma r^2 - 2s_1 v_1 &= 2E, \quad v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1, \\ (\alpha p + \lambda_1)v_1 + (\beta q + \lambda_2)v_2 + \gamma r v_3 &= k. \end{aligned} \quad (5)$$

Запишем уравнения (3), (4) и интегралы (5) в безразмерных переменных и параметрах. Положим:

$$\begin{aligned} p &= \tilde{p} \sqrt{\frac{s_1}{\alpha}}, \quad q = \tilde{q} \sqrt{\frac{s_1}{\alpha}}, \quad r = \tilde{r} \sqrt{\frac{s_1}{\alpha}}, \quad t = \tau \sqrt{\frac{s_1}{\alpha}}, \\ \lambda_1 &= \tilde{\lambda}_1 \sqrt{\alpha s_1}, \quad \lambda_2 = \tilde{\lambda}_2 \sqrt{\alpha s_1}, \quad b = \frac{\beta}{\alpha}, \quad c = \frac{\gamma}{\alpha}. \end{aligned} \quad (6)$$

На основании равенств (6) уравнения (3), (4) и интегралы (5) запишем в виде (знак «тильда» над безразмерными переменными и параметрами опускаем):

$$\dot{p} = r[(b - c)q + \lambda_2]; \quad (7)$$

$$\dot{q} = \frac{1}{b} \{r[(c - 1)p + \lambda_1] - v_3\}; \quad (8)$$

$$\dot{r} = [(1 - b)pq + \lambda_1 q - \lambda_2 p + v_2]/c; \quad (9)$$

$$\dot{v}_1 = rv_2 - qv_3, \quad \dot{v}_2 = pv_3 - rv_1, \quad \dot{v}_3 = qv_1 - pv_2; \quad (10)$$

$$p^2 + bq^2 + cr^2 - 2v_1 = 2E_1, \quad v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1,$$

$$(p + \lambda_1)v_1 + (bq + \lambda_2)v_2 + crv_3 = k_1. \quad (11)$$

В уравнениях (7)-(10) для дифференцирования по безразмерному времени τ оставлена точка над переменными. В уравнениях (11) E_1 и k_1 – новые произвольные постоянные.

Будем предполагать, что p – новая независимая переменная, а $q = q(p)$, $r^2(p) = \sigma(p)$. Если будут найдены функции $q(p)$, $\sigma(p)$, то зависимость $p(\tau)$ можно определить из уравнения (7).

В работе [4] для случая, когда вектор гиростатического момента направлен по главной оси, были найдены уравнения на функции $q(p)$, $\sigma(p)$ и новое решение уравнений движения (7)-(10). В данной работе рассмотрим вариант сферического гиростата: $b = c = 1$, который в цитируемой статье не исследован. В этом случае решение А.И. Докшевича таково:

$$q(p) = b_2 p^2 + b_1 p + b_0, \quad r^2(p) = \sigma(p) = c_4 p^4 + c_3 p^3 + c_2 p^2 + c_1 p + c_0, \quad (12)$$

$$b_2 = \frac{2}{3\lambda_2}, \quad b_1 = -\frac{\lambda_1}{3\lambda_2^2}, \quad c_4 = -\frac{4}{9\lambda_2}, \quad c_3 = \frac{4\lambda_1}{9\lambda_2^2}, \quad c_2 = \frac{1}{9\lambda_2}(15\lambda_2^2 - \lambda_1^2 - 12b_0\lambda_2),$$

$$c_1 = \frac{2\lambda_1}{3\lambda_2}(b_0 - 2\lambda_2), \quad c_0 = \frac{1}{3}(6\lambda_2 b_0 - 3b_0^2 + \lambda_1^2), \quad 18E_0 = 48\lambda_2^2 + 7\lambda_1^2 - 6b_0\lambda_2,$$

$$b_{0(1,2)} = \frac{1}{12\lambda_2}(24\lambda_2^2 - 4\lambda_1^2 \pm 9\sqrt{1 - 4\lambda_1^2\lambda_2^2}), \quad (13)$$

$$\frac{dp}{d\tau} = \lambda_2 \sqrt{c_4 p^4 + c_3 p^3 + c_2 p^2 + c_1 p + c_0}. \quad (14)$$

$$v_1 = \frac{4}{3}p^2 - \frac{2\lambda_1}{3}p + \frac{2}{9}(6b_0\lambda_2 - \lambda_1^2 - 12\lambda_2^2),$$

$$v_2 = -\frac{8}{9\lambda_2}p^3 + \frac{2}{9\lambda_2}(12\lambda_2^2 - 6b_0\lambda_2 + \lambda_1^2)p - \frac{2\lambda_1}{3}(\lambda_2 + b_0),$$

$$v_3 = -\frac{2}{3}(\lambda_1 + 2p)\sqrt{c_4 p^4 + c_3 p^3 + c_2 p^2 + c_1 p + c_0}. \quad (15)$$

Из уравнения (14) следует, что $p(\tau)$ – эллиптическая функция времени. Отметим, что равенства (13) определяют значения параметров, характеризующих решение (12), (14), (15).

Для исследования асимптотических движений гиростата воспользуемся результатами работ [2,5]. Для этой цели введем вектор $\mathbf{x} = A\boldsymbol{\omega}$ (момент количества движения тела-носителя), где $A_{ij} = 0$ ($i \neq j$), $A_{11} = A_{22} = A_{33} = \alpha$, то есть эллипсоид инерции гиростата, построенный в неподвижной точке, является сферой. Тогда при помощи замены переменных (6) уравнения (1) и интегралы (2) преобразуются к виду:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \times \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{v} \times \mathbf{s}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times \mathbf{x}, \quad (16)$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - 2(\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}) = 2E_2, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 1, \quad (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{v} = k_2. \quad (17)$$

Здесь E_2 и k_2 – новые произвольные постоянные и для простоты записи опущен знак «тильда». Точка над переменными означает дифференцирование по τ .

Обозначим через $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{v}^*$ периодическое решение, которое удовлетворяет уравнениям (7)-(10). В качестве такого решения будем рассматривать решение (12), (14), (15) при условиях (13).

Положим в уравнениях (16) $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \mathbf{u}$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}^* + \mathbf{g}$ и перейдем к системе для возмущений. Пренебрегая линейными слагаемыми, выпишем систему первого приближения [5]:

$$\dot{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{u} + \mathbf{s} \times \mathbf{g}, \quad \dot{\mathbf{g}} = \mathbf{v}^* \times \mathbf{u} - \mathbf{x}^* \times \mathbf{g}. \quad (18)$$

Уравнения (18) допускают линейные интегралы, порожденные нелинейными интегралами (17)

$$\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{u} + (\lambda + \mathbf{x}^*) \cdot \mathcal{G} = k_1, \quad \mathbf{x}^* \cdot \mathbf{u} - \mathbf{s} \cdot \mathcal{G} = k_2, \quad \mathbf{v}^* \cdot \mathcal{G} = k_3. \quad (19)$$

Известно, что система (18) в случае периодических $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{v}^*$ имеет четыре нулевых характеристических числа [2]. Для существования асимптотически периодических движений нелинейной системы, соответствующей системе (18), система (18) должна иметь по крайней мере одно положительное характеристическое число. В работе [5] при помощи интегралов (19) проведена редукция уравнений (18) к уравнению типа Хилла:

$$\ddot{\eta} + \rho(\tau)\eta = 0, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \rho(\tau) = & \frac{1}{(\dot{\mathbf{v}}^*)^4} \left\langle \left((\dot{\mathbf{v}}^* \times \lambda) + \ddot{\mathbf{v}}^* \right) \cdot \left\{ (\mathbf{x}^* \times \dot{\mathbf{v}}^*) * \left[(\lambda + \mathbf{x}^*) \cdot (\mathbf{v}^* \times \dot{\mathbf{v}}^*) \right] + \right. \right. \\ & + \left. (\mathbf{v}^* \times \dot{\mathbf{v}}^*) * \left[\mathbf{s} \cdot (\mathbf{v}^* \times \dot{\mathbf{v}}^*) \right] \right\} - (\mathbf{v}^* \cdot \dot{\mathbf{v}}^*) * \left[(\dot{\mathbf{v}}^* \times \mathbf{s}) \cdot (\mathbf{v}^* \times \dot{\mathbf{v}}^*) \right] + \\ & \left. + (\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{x}^*) * \left\{ (\mathbf{v}^* \times \dot{\mathbf{v}}^*) \cdot \left[\mathbf{s} + (\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{x}^*) * (\lambda + \mathbf{x}^*) \right] \right\} - (\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{x}^*)^2 \right\rangle \end{aligned} \quad (21)$$

и выписано условие Ляпунова, которое является достаточным условием существования положительного характеристического числа уравнения (20):

$$\rho(\tau) \leq 0, \quad \rho(\tau) \neq 0. \quad (22)$$

Таким образом в данной работе на основе первого метода Ляпунова ставится задача исследования асимптотических движений гиригата, предельное движение которого описывается частным случаем решения А.И. Докшевича [4].

Исследование условий асимптотичности движения гиригата. Положим в условиях (13) $\lambda_1 = 0$. Тогда ограничения на переменные и параметры решения (12), (14) и (15) примут вид:

$$\begin{aligned} b_{0(1,2)} = \frac{8\lambda_2^2 + 3}{4\lambda_2}, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = \frac{2}{3\lambda_2}, \quad c_0 = 2\lambda_2 b_0 - b_0^2, \quad c_1 = 0, \\ c_2 = \frac{5\lambda_2 - 4b_0}{3}, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = -\frac{4}{9\lambda_2}, \quad 18E_0 = 48\lambda_2^2 - 6b_0\lambda_2. \end{aligned} \quad (23)$$

Необходимым и достаточным условием действительности данного решения является существование непустого промежутка по p , для которых выполняется условие:

$$\sigma(p) \geq 0 \quad (24)$$

Для того, чтобы определить, при каких значениях параметра λ_2 имеет место условие (24), рассмотрим два случая. Пусть $b_{0(1)} = \frac{8\lambda_2^2 + 3}{4\lambda_2}$, тогда из (12) и (23) вытекает соотношение:

$$\sigma(p) = -\frac{4}{9\lambda_2^2} p^4 - \left(\frac{1}{\lambda_2} + \lambda_2 \right) p^2 - \frac{3}{2} - \frac{9}{16\lambda_2^2}. \quad (25)$$

Дискриминант полученного из (25) уравнения $\sigma(p^2) = 0$ имеет вид $D = 2 - \frac{1}{\lambda_2^4} - \frac{5}{3\lambda_2^2} + \lambda_2^2$, причем $D = 0$ при $\lambda_2 \approx \pm 0,966124$ (зависимость $D(\lambda_2)$ показана на рис.1). Из графика функции $D(\lambda_2)$ следует, что $D \geq 0$ при $|\lambda_2| \geq 0,966124$. Выпишем значения корней уравнения $\sigma(p^2) = 0$:

$$\begin{aligned} p_{(1)}^2 = & \frac{3\sqrt{3}}{8} (-\sqrt{3}\lambda_2 - \sqrt{3}\lambda_2^3 - \sqrt{-3 - 5\lambda_2^2 + 6\lambda_2^4 + 3\lambda_2^6}), \\ p_{(2)}^2 = & \frac{3\sqrt{3}}{8} (-\sqrt{3}\lambda_2 - \sqrt{3}\lambda_2^3 + \sqrt{-3 - 5\lambda_2^2 + 6\lambda_2^4 + 3\lambda_2^6}). \end{aligned} \quad (26)$$

На рис. 2 и 3 показаны зависимости $p_{(1)}^2(\lambda_2)$ и $p_{(2)}^2(\lambda_2)$ соответственно.

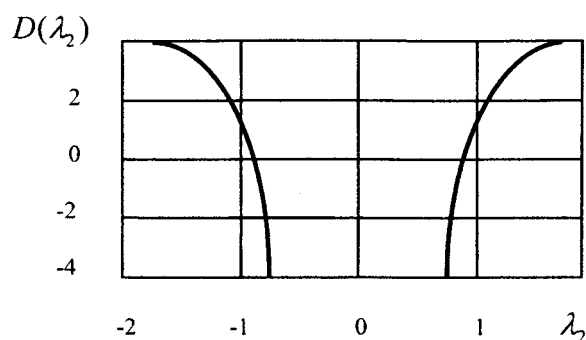


Рис. 1

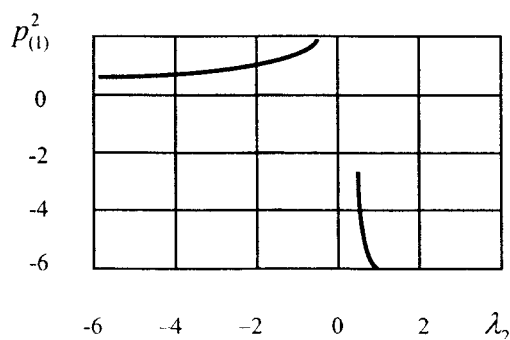


Рис. 2

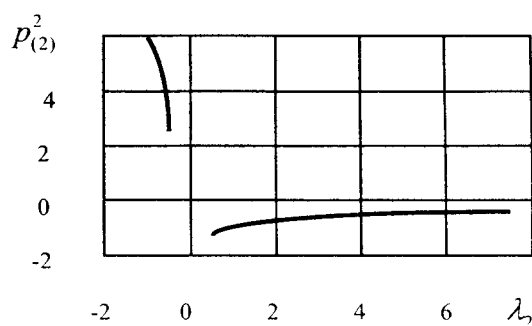


Рис. 3

Таким образом решение (12), (14), (15) в случае $b_0 = b_{0(1)}$ действительно при условиях:

$$\lambda_2 \in (-\infty; -0,966124), \quad p \in (-\sqrt{p_{(2)}^2}; -\sqrt{p_{(1)}^2}) \cup (\sqrt{p_{(1)}^2}; \sqrt{p_{(2)}^2}), \quad (27)$$

где $p_{(1)}^2$ и $p_{(2)}^2$ выражаются формулами (26).

Выпишем для случая $b_0 = b_{0(1)}$ функцию $\rho(\tau)$, которую определим из (21) для решения (12), (14), (15) при условиях (23):

$$\rho(\tau) = \frac{\sum_{i=0}^7 h_i(\lambda_2) p^{2i}}{\sum_{i=0}^6 g_i(\lambda_2) p^{2i}}. \quad (28)$$

В формуле (28) введены обозначения:

$$\begin{aligned} h_0(\lambda_2) &= 19683\lambda_2^6(3+8\lambda_2^2)^2(35+72\lambda_2^2), \quad h_1(\lambda_2) = 13122\lambda_2^2(3+8\lambda_2^2)(9 - \\ &- 18\lambda_2 - 66\lambda_2^2 + 33\lambda_2^3 - 3126\lambda_2^4 + 1163\lambda_2^5 - 903\lambda_2^6 + 3032\lambda_2^7 - 1896\lambda_2^8 + 1920\lambda_2^9); \\ h_2(\lambda_2) &= 34992\lambda_2^2(135 - 198\lambda_2 - 159\lambda_2^2 - 1176\lambda_2^3 - 3445\lambda_2^4 - 1146\lambda_2^5 - \\ &- 3337\lambda_2^6 - 224\lambda_2^7 + 11312\lambda_2^8 - 7544\lambda_2^9 + 16896\lambda_2^{10} - 7488\lambda_2^{11} + 4608\lambda_2^{12}); \\ h_3(\lambda_2) &= 7776(-81 + 243\lambda_2 + 1161\lambda_2^2 + 3060\lambda_2^3 + 1845\lambda_2^4 + 1596\lambda_2^5 - \\ &- 9213\lambda_2^6 - 19596\lambda_2^7 - 11060\lambda_2^8 - 6687\lambda_2^9 - 17184\lambda_2^{10} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+57384\lambda_2^{11}-37056\lambda_2^{12}+54912\lambda_2^{13}-17856\lambda_2^{14}+9216\lambda_2^{15}); \\
 &h_4(\lambda_2)=41472(-54+108\lambda_2+477\lambda_2^2-396\lambda_2^3+4186\lambda_2^4-5911\lambda_2^5+ \\
 &+8788\lambda_2^6-11189\lambda_2^7+5609\lambda_2^8-5368\lambda_2^9+426\lambda_2^{10}+ \\
 &+558\lambda_2^{11}+1542\lambda_2^{12}+144\lambda_2^{13}+1200\lambda_2^{14}); \quad h_5(\lambda_2)=-110592(9+ \\
 &+9\lambda_2+8\lambda_2^2-466\lambda_2^3+1039\lambda_2^4-2353\lambda_2^5+3145\lambda_2^6-3303\lambda_2^7+2769\lambda_2^8+ \\
 &-1245\lambda_2^9+220\lambda_2^{10}+372\lambda_2^{11}-420\lambda_2^{12}+192\lambda_2^{13}); \\
 &h_6(\lambda_2)=-98304(-18-27\lambda_2^2+360\lambda_2^3-500\lambda_2^4+863\lambda_2^5-1254\lambda_2^6+ \\
 &+833\lambda_2^7-963\lambda_2^8+564\lambda_2^9-174\lambda_2^{10}+243\lambda_2^{11}+54\lambda_2^{12}) \\
 &h_7(\lambda_2)=-131072(-9+27\lambda_2+23\lambda_2^2-64\lambda_2^3+101\lambda_2^4-178\lambda_2^5+115\lambda_2^6- \\
 &-78\lambda_2^7+50\lambda_2^8+9\lambda_2^9); \quad g_0(\lambda_2)=6561\lambda_2^4(3+8\lambda_2^2)^2; \\
 &g_1(\lambda_2)=8748\lambda_2^2(3+8\lambda_2^2)(-9+9\lambda_2-36\lambda_2^2+41\lambda_2^3-32\lambda_2^4+32\lambda_2^5); \\
 &g_2(\lambda_2)=2916(81-162\lambda_2+681\lambda_2^2-1530\lambda_2^3+2578\lambda_2^4-4824\lambda_2^5+ \\
 &+5201\lambda_2^6-6016\lambda_2^7+4864\lambda_2^8-2560\lambda_2^9+1536\lambda_2^{10}); \\
 &g_3(\lambda_2)=10368(27+54\lambda_2-45\lambda_2^2+462\lambda_2^3-966\lambda_2^4+1584\lambda_2^5- \\
 &-2485\lambda_2^6+2436\lambda_2^7-2364\lambda_2^8+1644\lambda_2^9-768\lambda_2^{10}+384\lambda_2^{11}) \\
 &g_4(\lambda_2)=13824(33-18\lambda_2+201\lambda_2^2-282\lambda_2^3+570\lambda_2^4-872\lambda_2^5+929\lambda_2^6- \\
 &-1136\lambda_2^7+912\lambda_2^8+720\lambda_2^9+480\lambda_2^{10}-192\lambda_2^{11}+96\lambda_2^{12}) \\
 &g_5(\lambda_2)=73728(-3+3\lambda_2-4\lambda_2^2+3\lambda_2^3)(-1-3\lambda_2+2\lambda_2^2-7\lambda_2^3+8\lambda_2^4-4\lambda_2^5+4\lambda_2^6) \\
 &g_6(\lambda_2)=16384(-3+3\lambda_2-4\lambda_2^2+3\lambda_2^3)^2.
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

Рассмотрим вариант $b_{0(2)} = \frac{8\lambda_2^2 - 3}{4\lambda_2}$, тогда из (12) и (23) имеем:

$$\sigma(p) = -\frac{4}{9\lambda_2^2}p^4 + \left(\frac{1}{\lambda_2} - \lambda_2\right)p^2 + \frac{3}{2} - \frac{9}{16\lambda_2^2}.
 \tag{30}$$

Дискриминант уравнения $\sigma(p^2) = 0$, полученного из (30), имеет вид: $D = -2 - \frac{1}{\lambda_2^4} + \frac{11}{3\lambda_2^2} + \lambda_2^2$, причем $D = 0$ при $\lambda_2 \approx \pm 0,565258$. График функции $D(\lambda_2)$ представлен на рис. 4. Из него следует, что $D \geq 0$ при $|\lambda_2| \geq \pm 0,565258$.

Значения корней уравнения $\sigma(p^2) = 0$ таково:

$$\begin{aligned}
 p_{(1)}^2 &= \frac{3\sqrt{3}}{8}(\sqrt{3}\lambda_2 - \sqrt{3}\lambda_2^3 - \sqrt{-3+11\lambda_2^2-6\lambda_2^4+3\lambda_2^6}), \\
 p_{(2)}^2 &= \frac{3\sqrt{3}}{8}(\sqrt{3}\lambda_2 - \sqrt{3}\lambda_2^3 + \sqrt{-3+11\lambda_2^2-6\lambda_2^4+3\lambda_2^6}).
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

На рис.5 и 6 изображены графики функций $p_{(1)}^2(\lambda_2)$ и $p_{(2)}^2(\lambda_2)$ соответственно.

Из представленных графиков вытекает, что решение (12), (14), (15) в случае $b_0 = b_{0(2)}$ действительно при выполнении следующих условий:

$$\lambda_2 \in (-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}; +\infty), \quad p \in (-\sqrt{p_{(2)}^2}; \sqrt{p_{(2)}^2}),$$

$$\lambda_2 \in (0, 565258; \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}), \quad p \in (-\sqrt{p_{(2)}^2}; -\sqrt{p_{(1)}^2}) \cup (\sqrt{p_{(1)}^2}; \sqrt{p_{(2)}^2}), \quad (32)$$

где $p_{(1)}^2$ и $p_{(2)}^2$ выражаются формулами (31).

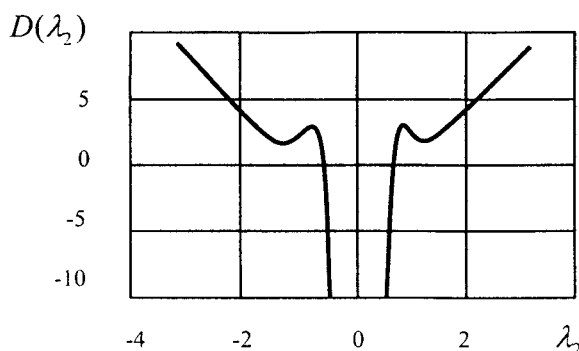


Рис. 4

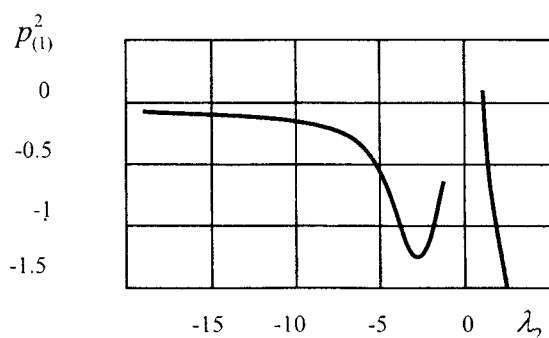


Рис. 5

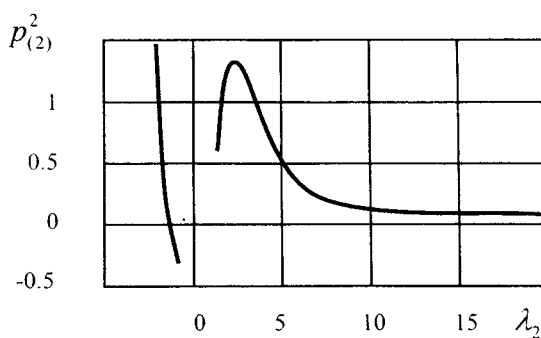


Рис. 6

Выпишем для случая $b_0 = b_{0(2)}$ функцию $\rho(\tau)$ из (21) для (12), (14), (15) при условиях (23):

$$\rho(\tau) = \frac{\sum_{i=0}^7 h_i(\lambda_2) p^{2i}}{\sum_{i=0}^6 g_i(\lambda_2) p^{2i}}. \quad (33)$$

В формуле (33) введены обозначения:

$$h_0(\lambda_2) = 19683\lambda_2^2(-3 + 8\lambda_2^2)^2(-35 + 72\lambda_2^2);$$

$$h_1(\lambda_2) = -13122\lambda_2^2(-3 + 8\lambda_2^2)(9 - 18\lambda_2 + 84\lambda_2^2 - 33\lambda_2^3 - 396\lambda_2^4 + 1163\lambda_2^5 + \\ + 1017\lambda_2^6 - 3032\lambda_2^7 - 1944\lambda_2^8 + 1920\lambda_2^9);$$

$$h_2(\lambda_2) = 34992\lambda_2^2(-135 + 198\lambda_2 - 141\lambda_2^2 - 1320\lambda_2^3 + 5425\lambda_2^4 + 1962\lambda_2^5 - \\ - 16567\lambda_2^6 - 1808\lambda_2^7 + 18352\lambda_2^8 + 8840\lambda_2^9 - 10752\lambda_2^{10} - 7872\lambda_2^{11} + 4608\lambda_2^{12});$$

$$h_3(\lambda_2) = -7776(-81 + 243\lambda_2 - 1647\lambda_2^2 - 2898\lambda_2^3 + 21033\lambda_2^4 - 7464\lambda_2^5 - \\ - 75129\lambda_2^6 + 82530\lambda_2^7 + 109669\lambda_2^8 - 159921\lambda_2^9 - 77088\lambda_2^{10} + \\ + 114984\lambda_2^{11} + 41664\lambda_2^{12} - 36480\lambda_2^{13} - 19008\lambda_2^{14} + 9216\lambda_2^{15});$$

$$\begin{aligned}
 h_4(\lambda_2) &= -41472(54 - 108\lambda_2 + 477\lambda_2^2 - 180\lambda_2^3 - 3064\lambda_2^4 + 1579\lambda_2^5 + \\
 &\quad + 7276\lambda_2^6 + 223\lambda_2^7 - 12575\lambda_2^8 - 5036\lambda_2^9 + 14406\lambda_2^{10} + \\
 &\quad + 3378\lambda_2^{11} - 8166\lambda_2^{12} + 144\lambda_2^{13} + 1200\lambda_2^{14}); \\
 h_5(\lambda_2) &= -110592(-9 - 9\lambda_2 + 170\lambda_2^2 - 664\lambda_2^3 + 339\lambda_2^4 + 2155\lambda_2^5 - \\
 &\quad - 2481\lambda_2^6 - 1905\lambda_2^7 + 2753\lambda_2^8 + 219\lambda_2^9 - 508\lambda_2^{10} + 12\lambda_2^{11} - 348\lambda_2^{12} + 192\lambda_2^{13}); \\
 h_6(\lambda_2) &= -98304(-18 + 243\lambda_2^2 - 648\lambda_2^3 + 274\lambda_2^4 + 1259\lambda_2^5 - 1722\lambda_2^6 - \\
 &\quad - 293\lambda_2^7 + 1803\lambda_2^8 - 552\lambda_2^9 - 606\lambda_2^{10} + 243\lambda_2^{11} + 54\lambda_2^{12}); \\
 h_7(\lambda_2) &= -131072(9 - 27\lambda_2 + 77\lambda_2^2 - 82\lambda_2^3 - 109\lambda_2^4 + 232\lambda_2^5 - \\
 &\quad - 31\lambda_2^6 - 132\lambda_2^7 + 50\lambda_2^8 + 9\lambda_2^9); \quad g_0(\lambda_2) = 6561\lambda_2^4(-3 + 8\lambda_2^2)^2; \\
 g_1(\lambda_2) &= -8748\lambda_2^2(-3 + 8\lambda_2^2)(-9 + 9\lambda_2 + 36\lambda_2^2 - 41\lambda_2^3 - 32\lambda_2^4 + 32\lambda_2^5); \\
 g_2(\lambda_2) &= 2916(81 - 162\lambda_2 - 519\lambda_2^2 + 1530\lambda_2^3 + 718\lambda_2^4 - 4824\lambda_2^5 + \\
 &\quad + 1105\lambda_2^6 + 6016\lambda_2^7 - 2816\lambda_2^8 - 2560\lambda_2^9 + 1536\lambda_2^{10}); \\
 g_3(\lambda_2) &= -10368(27 + 54\lambda_2 - 333\lambda_2^2 - 246\lambda_2^3 + 1446\lambda_2^4 + 168\lambda_2^5 - \\
 &\quad - 2741\lambda_2^6 + 516\lambda_2^7 + 2364\lambda_2^8 - 876\lambda_2^9 - 768\lambda_2^{10} + 384\lambda_2^{11}); \\
 g_4(\lambda_2) &= 13824(33 - 18\lambda_2 - 135\lambda_2^2 - 6\lambda_2^3 + 150\lambda_2^4 + 376\lambda_2^5 - 95\lambda_2^6 - \\
 &\quad - 880\lambda_2^7 + 240\lambda_2^8 + 720\lambda_2^9 - 288\lambda_2^{10} - 192\lambda_2^{11} + 96\lambda_2^{12}); \\
 g_5(\lambda_2) &= 73728(3 - 3\lambda_2 - 4\lambda_2^2 + 3\lambda_2^3)(-1 - 3\lambda_2 + 6\lambda_2^2 + 7\lambda_2^3 - 8\lambda_2^4 - 4\lambda_2^5 + 4\lambda_2^6) \\
 g_6(\lambda_2) &= 16384(3 - 3\lambda_2 - 4\lambda_2^2 + 3\lambda_2^3)^2.
 \end{aligned} \tag{34}$$

Численними методами можна определить промежутки знакопостоянства выражений (28), (33) при условиях (29), (34) соответственно и сопоставить их с промежутками (27), (32) существования данного решения. Получим, что в случае $b_0 = b_{0(2)}$ при $\lambda_2 \in (-0,6527; -0,612372)$ условие (22) выполняется для всех $p \in (-\sqrt{p_{(2)}^2}; \sqrt{p_{(2)}^2})$, где $p_{(1)}^2$ и $p_{(2)}^2$ выражаются формулами (31).

В качестве примера положим $\lambda_2 = -0,62$. На рис.7 изображен график функции $\sigma(p)$, которая выражается формулой (30). Из рисунка следует, что $\sigma(p) \geq 0$ при $p \in [-0,188354; 0,188354]$. На рис. 8

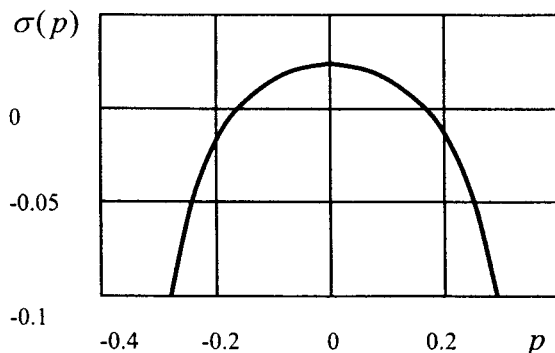


Рис. 7

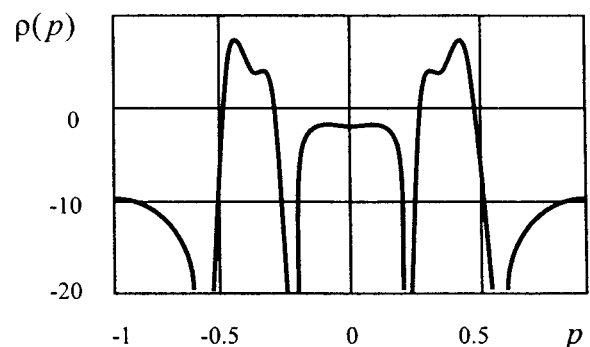


Рис. 8

показано изменение функции $\rho(p)$, которая задается выражением (33) при условиях (34). Из рис. 7–8 вытекает, что $\rho(p) \leq 0$ при $p \in (-\infty; -0,406518] \cup [-0,212215; 0,212215] \cup [0,406518; +\infty)$. Очевидно, что на всем промежутке действительности решения (12), (14), (15) выполняется условие Ляпунова (22).

Таким образом, в данной работе на основе первого метода Ляпунова с помощью численно-

аналитических методов показано, что при $\lambda_2 \in (-0,6527; -0,612372)$ в случае $b_0 = b_{0(2)}$ движение гиростата, предельное движение которого описывается решением (12), (14), (15), будет асимптотически-периодическим.

РЕЗЮМЕ

Отримані умови існування асимптотично періодичних рухів важкого гіростату, граничний рух яких описується рішенням А.І. Докшевича.

SUMMARY

Conditions of existence asymptotically periodically motions of heavy gyrostat, which limiting motions is described by solution of Dokshevich's are received.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения // Собр.Соч.; В 5 т. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. – Т.2. – С. 7-263.
2. Горр Г.В., Думбай Д.И. Об асимптотически прецессионных движениях гиростата в обобщенной задаче динамики // Механика твердого тела. – 1994. – Вып. 26(1). – С. 20-28.
3. Харламов П.В. Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. Ун-та, 1965. – 221 с.
4. Докшевич А.И. Новое частное решение уравнений движения гиростата, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. – 1970. – Вып.2. – С. 12-15.
5. Белецкая А.И. Исследование асимптотически – периодических движений сферического гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил // Механика твердого тела. – 2003. – Вып.33. – С. 40-45.

Надійшла до редакції 23.03.2006 р.

УДК 539.3

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ КРИВИЗНЫ НА НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРОВ ПО ДВУМ МОДЕЛЯМ

Я.М.Григоренко, Г.П.Урсова, Л.С.Рожок
Институт механики НАН Украины, г. Киев

При исследовании напряженного состояния оболочек в связи с их нетонкостенностью, локальностью нагрузки и условиями закрепления возникают вопросы, связанные с возможностью применения той или иной математической модели. При этом представляет интерес учёт влияния степени кривизны. В настоящей статье приведены результаты анализа влияния кривизны на напряжённое состояние нетонких цилиндрических оболочек с эллиптическим поперечным сечением [4] на основе уточнённой и пространственной моделей [1, 2].

Рассматриваются нетонкие изотропные цилиндрические оболочки, поперечное сечение которых в каждой точке имеет форму эллипса, и для поверхности отсчета задается параметрически в виде

$$x = b \cos \theta, \quad z = a \sin \theta \quad (\theta \leq 0 \leq 2\pi), \quad (1)$$

где b, a – большая и малая полуоси эллипса с периметром, равным длине окружности радиуса R , т.е.

$$\pi(a+b)f = 2\pi R, \quad f = 1 + \frac{\Delta^2}{4} + \frac{\Delta^4}{64} + \frac{\Delta^6}{256} + \dots, \quad \Delta = \frac{b-a}{b+a}. \quad (2)$$

В случае некруговых цилиндров в уточненной постановке, основанной на гипотезе прямой линии [1], компоненты деформаций координатной поверхности связаны с перемещениями u, v, w и угловыми перемещениями ψ_s, ψ_t следующими зависимостями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= \frac{\partial u}{\partial s}, \quad \varepsilon_t = \frac{\partial v}{\partial t} + k(t)w, \quad \varepsilon_{st} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s}, \\ \kappa_s &= \frac{\partial \psi_s}{\partial s}, \quad \kappa_t = \frac{\partial \psi_t}{\partial t} - k(t)\left[\frac{\partial v}{\partial t} + k(t)w\right], \quad 2\kappa_{st} = \frac{\partial \psi_s}{\partial t} + \frac{\partial \psi_t}{\partial s} - k(t)\frac{\partial u}{\partial t}, \\ \gamma_s &= \psi_s - \vartheta_s, \quad \gamma_t = \psi_t - \vartheta_t, \quad \vartheta_s = -\frac{\partial w}{\partial s}, \quad \vartheta_t = -\frac{\partial w}{\partial t} + k(t)v. \end{aligned} \quad (3)$$

В (3) s, t – координаты по образующей и направляющей координатной поверхности; $\varepsilon_s, \varepsilon_t, \varepsilon_{st}$ – тангенциальные, а $\kappa_s, \kappa_t, \kappa_{st}$ – изгибные деформации срединной поверхности; $k(t)$ – кривизна направляющей; ψ_s, ψ_t – полные углы поворота нормали с учётом поперечных сдвигов.

Система уравнений равновесия имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_t}{\partial t} + \frac{\partial N_{st}}{\partial s} + q_t &= 0, \quad \frac{\partial N_s}{\partial s} + \frac{\partial N_{ts}}{\partial t} + k(t)Q_t + q_s = 0, \quad \frac{\partial Q_s}{\partial s} + \frac{\partial Q_t}{\partial t} - k(t)N_s + q_\gamma = 0, \\ \frac{\partial M_t}{\partial t} + \frac{\partial M_{st}}{\partial s} - Q_t &= 0, \quad \frac{\partial M_s}{\partial s} + \frac{\partial M_{ts}}{\partial t} - Q_t = 0, \quad N_{ts} - N_{st} - k(t)M_{st} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь N_s, N_t – нормальные тангенциальные усилия; N_{st}, N_{ts} – сдвигающие тангенциальные усилия; Q_s, Q_t – перерезывающие усилия; M_s, M_t – изгибающие моменты; M_{st}, M_{ts} – крутящие моменты; q_s, q_t, q_γ – нагрузочные члены, которые определяются через компоненты поверхностной нагрузки $q_s^\pm, q_t^\pm, q_\gamma^\pm$, действующие на внешней и внутренней поверхностях оболочки, следующим образом:

$$q_s = q_s^+ + q_s^-, \quad q_t = q_t^+ + q_t^-, \quad q_\gamma = q_\gamma^+ + q_\gamma^-, \quad m_s = q_s^+ \gamma_n - q_s^- \gamma_0, \quad m_t = q_t^+ \gamma_n - q_t^- \gamma_0. \quad (5)$$

Соотношения упругости получены из общих соотношений упругости для ортотропных оболочек, приведенных в [1].

На основании исходных уравнений приходим к разрешающей системе дифференциальных уравнений в частных производных 10-го порядка в векторном виде

$$\frac{\partial \bar{N}}{\partial t} = B_0 \bar{N} + B_1 \frac{\partial \bar{N}}{\partial s} + B_2 \frac{\partial \bar{N}^2}{\partial s^2} + \bar{f}(s, t), \quad \bar{N} = \{N_t, N_{ts}, Q_t, M_t, M_{ts}, u, v, w, \psi_t, \psi_s\}^T, \\ B_n = \|bij^{(n)}(t)\| \quad (n = \overline{0, 2}; i, j = \overline{1, 10}), \quad \bar{f} = \{f_1, f_2, \dots, f_{10}\}^T, \quad (6)$$

где B_n – квадратные матрицы, элементы которых приведены в монографии [1], $\bar{f}(s, t)$ – вектор правой части.

На торцах оболочки принимались граничные условия соответствующие шарнирному опиранию:

$$N_t = M_t = v = w = \psi_t = 0 \quad (7)$$

После разделения переменных по образующей с помощью рядов Фурье [3] в исходной системе уравнений (6) и в нагрузках, для n -ой гармоники получаем разрешающую систему обыкновенных дифференциальных уравнений 10-го порядка для изотропных некруговых цилиндрических оболочек в следующем виде

$$\frac{dN_t}{dt} = \lambda_n N_{ts} - \lambda_n k(t) M_{ts} - q_t, \quad \frac{dM_t}{dt} = Q_t + \lambda_n M_{ts}, \\ \frac{dN_{ts}}{dt} = -\lambda_n v N_t - \lambda_n k(t) [K_2 + Eh] w + [k^2(t) K_2 + \lambda_n^2 Eh] v - k(t) K_2 \psi_s - q_s, \\ \frac{dM_{ts}}{dt} = -\lambda_n v M_t - [k(t) K_2 + \lambda_n^2 k(t) \frac{Eh^3}{12}] v + \lambda_n [K_2 + k^2(t) \frac{Eh^3}{12}] w + \left(K_2 + \lambda_n^2 \frac{Eh^3}{12} \right) \psi_s, \\ \frac{\partial Q_t}{\partial t} = k(t) v N_t - \lambda_n k(t) [K_2 + Eh] v + [K_1 + k^2(t) (Eh + \lambda_n^2 k(t))] w + \lambda_n K_2 \psi_s - q_\gamma, \\ \frac{du}{dt} = \frac{1-v^2}{Eh} N_t + \lambda_n v v - k(t) v w, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{1}{Gh} [N_{ts} + k(t) M_{ts}] - \lambda_n u, \quad \frac{dw}{dt} = \frac{1}{K_1} Q_t - \psi_t, \\ \frac{d\psi_t}{dt} = \frac{12(1-v^2)}{Eh^3} M_t - \lambda_n k(t) v v + k^2(t) v w + \lambda_n v \psi_s, \quad \frac{d\psi_s}{dt} = \frac{12}{Gh^3} M_{ts} + \lambda_n k(t) u - \lambda_n \psi_t. \quad (8)$$

В уравнениях (8) E – модуль Юнга; v – коэффициент Пуассона; h – толщина оболочки; K_1, K_2 – жесткости на поперечный сдвиг; $G_{sy} = G_{ty} = G$ – модули поперечного сдвига в направлениях s, t ; $\lambda_n = n\pi/l \quad (n = \overline{0, N})$.

Так как в работе рассматриваются оболочки эллиптического поперечного сечения, исходная информация которого задается в виде (1) с помощью параметра θ , а в разрешающих уравнениях (8) в качестве основной переменной выбран параметр длины дуги t , между этими параметрами устанавливается такая зависимость:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{\omega(\theta)} \frac{dF}{d\theta}, \quad \omega(\theta) = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2}. \quad (9)$$

Для рассмотренного класса задач был разработан алгоритм, основанный на использовании устойчивого численного метода решения одномерных краевых задач [1], обеспечивающего высокую точность получаемых результатов. По разработанному алгоритму составлен вычислительный комплекс решения краевых задач статики некруговых цилиндрических оболочек в уточненной постановке, учитывающей влияние на напряженно-деформированное состояние оболочек деформаций поперечных сдвигов.

Также рассматривалась та же задача в пространственной постановке для полого цилиндра с эллиптическим поперечным сечением, срединная поверхность которого отнесена к системе координат s, θ , а весь цилиндр к системе координат s, θ, γ . В качестве исходных принимаем основные уравнения пространственной теории упругости для изотропного тела [2]. Выбрав в качестве разрешающих функций компоненты напряжений $\sigma_\gamma, \tau_{s\gamma}, \tau_{\theta\gamma}$ и перемещений u_γ, u_s, u_θ , после некоторых преобразований получаем разрешающую систему дифференциальных уравнений в частных производных шестого порядка с переменными коэффициентами.

Принимаем на торцах оболочки граничные условия типа шарнирного опирания в виде

$$\sigma_s = u_\theta = u_\gamma = 0 \text{ при } s = 0; l. \quad (10)$$

На наружной поверхности оболочки задана поверхностная нагрузка. Граничные условия (10) позволяют свести трехмерную краевую задачу к двумерной за счет разложения разрешающих функций и компонентов нагрузки в ряды Фурье вдоль образующей оболочки. Для разделения переменных вдоль направляющей, заменим в разрешающей системе дифференциальных уравнений дополнительными функциями – произведением разрешающих функций на коэффициенты, которые препятствуют разделению переменных в этом направлении. Полученная таким образом разрешающая система дифференциальных уравнений, не будет формально зависеть от координаты θ [2], хотя сами дополнительные функции будут зависеть как от γ и θ . Представив далее разрешающие, дополнительные функции и компоненты нагрузки в виде разложений в ряды Фурье [3] по координате θ , получим, после разделения переменных, одномерную краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\gamma,k}}{d\gamma} &= \lambda_n \tau_{s\gamma,k} + \left(\frac{\nu}{1-\nu} - 1 \right) \varphi_{1,k}^1 - \varphi_{4,k}^1 - \frac{E\nu}{1-\nu^2} \lambda_n \varphi_{1,k}^4 + \frac{E}{1-\nu^2} \left(\varphi_{4,k}^3 + \varphi_{1,k}^5 \right); \\ \frac{d\tau_{s\gamma,k}}{d\gamma} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \lambda_n \sigma_{\gamma,k} + \frac{E}{1-\nu^2} \lambda_n^2 u_{s,k} - \varphi_{1,k}^2 - \left(\frac{E\nu}{1-\nu^2} + \frac{E}{2(1+\nu)} \right) \lambda_n \varphi_{4,k}^2 - \\ &\quad - \frac{E\nu}{1-\nu^2} \lambda_n \varphi_{1,k}^3 - \frac{E}{2(1+\nu)} \varphi_{6,k}; \\ \frac{d\tau_{\theta\gamma,k}}{d\gamma} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \lambda_n^2 u_{t,k} - 2\varphi_{2,k}^1 + \left(\frac{E\nu}{1-\nu^2} + \frac{E}{2(1+\nu)} \right) \lambda_n \varphi_{3,k}^3 - \frac{E}{1-\nu^2} \times \\ &\quad \times (\varphi_{7,k} + \varphi_{5,k}) - \frac{\nu}{1-\nu} \varphi_{3,k}^1; \\ \frac{du_{\gamma,k}}{d\gamma} &= \frac{1-\nu-2\nu^2}{(1-\nu)E} \sigma_{\gamma,k} + \frac{\nu}{1-\nu} \left(\lambda_n u_{s,k} - \varphi_{4,k}^2 - \varphi_{1,k}^3 \right); \\ \frac{du_{s,k}}{d\gamma} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{s\gamma,k} - \lambda_n u_{\gamma,k}; \quad \frac{du_{\theta,k}}{d\gamma} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{\theta\gamma,k} - \varphi_{3,k}^2 + \varphi_{2,k}^2, \end{aligned} \quad (11)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \gamma = \gamma_p: \sigma_{\gamma,k} &= 0, \quad \tau_{s\gamma,k} = 0, \quad \tau_{\theta\gamma,k} = 0; \\ \gamma = \gamma_q: \sigma_{\gamma,k} &= q_{\gamma,k}, \quad \tau_{s\gamma,k} = 0, \quad \tau_{\theta\gamma,k} = 0 \quad (k = \overline{0, K}). \end{aligned} \quad (12)$$

В разрешающую систему дифференциальных уравнений (11), кроме амплитудных значений разрешающих функций, входят еще и амплитудные значения дополнительных функций, которые необходимо вычислять отдельно. Для их определения при интегрировании системы (11) численным методом дискретной ортогонализации одновременно для всех гармоник, на каждом шаге при фиксированном значении координаты γ вычисляем значения дополнительных функций в некоторых точках интервала $0 \leq \theta \leq 2\pi$, используя текущие значения разрешающих функций. Строим ряды Фурье для функций, заданных на дискретном множестве точек [3]. При увеличении количества точек, в которых вычисляются значения дополнительных функций, дискретный ряд Фурье будет все меньше отличаться от точного ряда Фурье и, таким образом, можно получить решение с достаточно высокой степенью точности. При помощи схемы Рунге находим коэффициенты этих рядов, подставляем их в систему уравнений (11) и продолжаем ее интегрировать. На концах интервала $\gamma_p \leq \gamma \leq \gamma_q$ удовлетворяем соответствующие граничные условия.

С помощью разработанных подходов проведен анализ влияния степени кривизны эллиптических цилиндров в вершине максимальной кривизны ($\theta = 0$) на их напряженное состояние. На рис. 1–3 приведены графики для перемещения w и напряжений на внешней и внутренней поверхностях $\sigma^\pm$ в зависимости от степени эллиптичности для различных значений толщины при $l = 60$, $s = l/2$. Графики, полу-

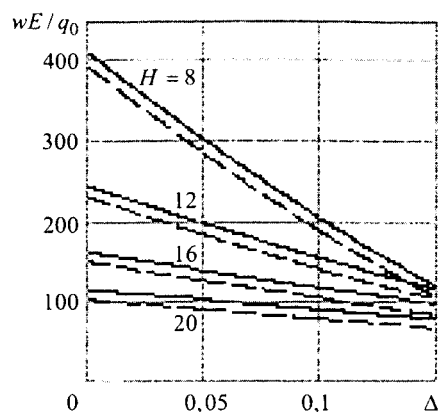


Рис. 1

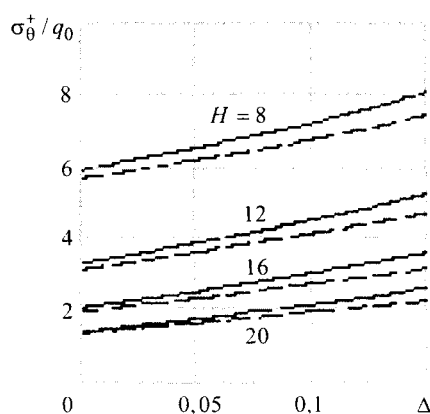


Рис. 2

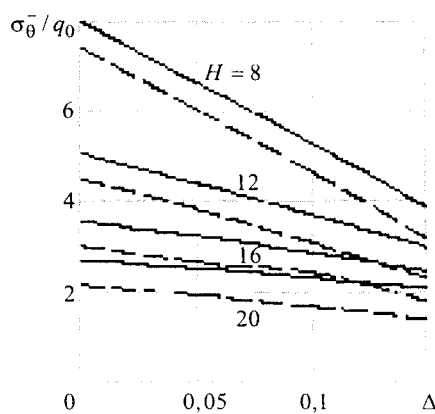


Рис. 3

ченные по пространственной теории обозначены сплошной, а по уточнённой теории – штриховой линиями. Из рис. 1–3 видно как влияют кривизна и толщина на изменение прогиба и напряжений. Также можно судить о совпадении результатов по двум моделям.

РЕЗЮМЕ

На основі уточненої моделі, побудованої на гіпотезі прямої лінії та просторової моделі досліджено напружений стан некругових нетонких оболонок з еліптичним поперечним перерізом при певних граничних умовах на торцях в залежності від зміни товщини та ступеня еліптичності оболонки.

SUMMARY

The paper studies the stress state of noncircular non-thin shells with elliptic cross section under certain boundary conditions at ends depending on the thickness variation and ellipticity degree. The refined model constructed on the basis of the straight line hypothesis and spatial model are used.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григоренко Я.М. Василенко А.Т., Голуб Г.П. Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жёсткостью. – К.: Наук. думка, 1987. – 216 с.
2. Григоренко Я.М., Рожок Л.С. Застосування дискретних рядів Фур'є до розв'язання крайових задач статки пружних тіл неканонічної форми // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – Т. 48, № 2. – С. 78–100.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М: Наука, 1949. – Т. 3. – 783 с..
4. Soldatos K. P. Mechanics of Cylindrical Shells with Noncircular Cross-Section. A survey // Appl. Mech. Rev. – 1999. – Vol. 52, № 8. – P. 237–274.

Поступила в редакцию 22.03.06

УДК 539.3

О СТРУКТУРЕ ОДНОРОДНЫХ И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ УПРУГОГО СЛОЯ

Л.А. Фильштинский, А.Абидо,
Сумской государственный университет

Фундаментальные решения для пьезокерамического слоя построены в [1]. В данной статье строятся фундаментальные решения для упругого слоя при смешанных граничных условиях на его основаниях.

Постановка задачи. В декартовой прямолинейной системе координат $0x_1x_2x_3$ рассмотрим упругий слой $-\infty < x_1, x_2 < \infty$, $-h \leq x_3 \leq h$, на основаниях которого $x_3 = \pm h$ имеют место смешанные граничные условия

$$w = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \quad (1)$$

Пусть вдоль шнура $x_1 = x_2 = 0$, $-h \leq x_3 \leq h$ распределены усилия интенсивности $P_k(x_3)$ ($k = 1, 2, 3$). Имея в виду симметричное относительно срединной плоскости слоя напряженное состояние и полагая, что функции $P_k(x_3)$ представимы своими рядами Фурье (при необходимости в пространстве обобщенных функций D' [2]), запишем

$$\begin{aligned} P_k(x_3) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{kn} \cos \gamma_n x_3 \quad (k = 1, 2), \\ P_3(x_3) &= \sum_{n=1}^{\infty} P_{3n} \sin \gamma_n x_3, \quad \gamma_n = \pi n / h \quad -h \leq x_3 \leq h. \end{aligned} \quad (2)$$

Система уравнений Ламе для рассматриваемого случая имеет вид

$$\begin{aligned} \nabla^2 u + \sigma \partial_1 \theta + \frac{1}{\mu} X_1 &= 0, \quad \theta = \partial_1 u + \partial_2 v + \partial_3 w, \\ \nabla^2 v + \sigma \partial_2 \theta + \frac{1}{\mu} X_2 &= 0, \quad X_k = P_k(x_3) \delta(x_1, x_2), \\ \nabla^2 w + \sigma \partial_3 \theta + \frac{1}{\mu} X_3 &= 0 \quad (k = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\delta(x_1, x_2)$ – двумерная дельта-функция.

В соответствии со структурой однородных решений для рассматриваемого случая [3] будем разыскивать компоненты вектора перемещения и объемное расширение в виде

$$\begin{aligned} (u, v, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} (u_n, v_n, \theta_n) \cos \gamma_n x_3, \\ w &= \sum_{n=1}^{\infty} w_n \sin \gamma_n x_3, \quad \theta_n = \partial_1 u_n + \partial_2 v_n + \gamma_n w_n. \end{aligned} \quad (4)$$

Исключая в (3) толщинную координату x_3 , приходим, с учетом формул (4), к следующей системе уравнений относительно коэффициентов Фурье u_n , v_n , w_n и θ_n :

$$\begin{aligned} \kappa_n u_n + \sigma \partial_1 \theta_n + \frac{1}{\mu} P_{1n} \delta(x) &= 0, \quad \kappa_n = \nabla^2 - \gamma_n^2, \\ \kappa_n v_n + \sigma \partial_2 \theta_n + \frac{1}{\mu} P_{2n} \delta(x) &= 0, \quad x = (x_1, x_2) \in R^2, \end{aligned}$$

$$\kappa_n w_n - \sigma \gamma_n \theta_n + \frac{1}{\mu} P_{3n} \delta(x) = 0, \quad \gamma_n = \pi n / h. \quad (5)$$

Метод решения. Интегрирование системы (3) проведем в пространстве обобщенных функций D' . Для коэффициентов Фурье θ_n имеем

$$\kappa_n \theta_n = -\frac{1}{\mu(1+\sigma)} \sum_{k=1}^3 P_{kn} \partial_k \delta(x) = f_n \quad (n=0,1,\dots). \quad (6)$$

Пусть E_n – фундаментальное решение оператора Гельмгольца κ_n . Тогда решение уравнения (6) представим в виде свертки [2]

$$\theta_n = f_n \times E_n = -\frac{1}{\mu(1+\sigma)} \sum_{k=1}^3 P_{kn} (\partial_k \delta \times E_n) = -\frac{1}{\mu(1+\sigma)} \sum_{k=1}^3 P_{kn} \partial_k E_n.$$

Поскольку $E_n = -(2\pi)^{-1} K_0(\gamma_n r)$, где $K_p(y)$ – цилиндрическая функция Макдональда порядка p , то имеем окончательно

$$\theta_n = \frac{1}{2\pi\mu(1+\sigma)} \sum_{k=1}^3 P_{kn} \partial_k K_0(\gamma_n r), \quad r=|x| \quad (n=1,2,\dots). \quad (7)$$

После определения функций θ_n получаем разделенную систему

$$\begin{aligned} \kappa_n u_n &= -\frac{\sigma}{2\pi\mu(1+\sigma)} \sum_{k=1}^3 P_{kn} \partial_1 \partial_k K_0(\gamma_n r) - \frac{1}{\mu} P_{1n} \delta(x) \quad (n=1,2,\dots), \\ \kappa_n v_n &= -\frac{\sigma}{2\pi\mu(1+\sigma)} \sum_{k=1}^3 P_{kn} \partial_2 \partial_k K_0(\gamma_n r) - \frac{1}{\mu} P_{2n} \delta(x), \\ \kappa_n w_n &= \frac{\sigma \gamma_n}{2\pi\mu(1+\sigma)} \sum_{k=1}^3 P_{kn} \partial_k K_0(\gamma_n r) - \frac{1}{\mu} P_{3n} \delta(x). \end{aligned} \quad (8)$$

Воспользуемся теперь легко выводимым соотношением

$$\kappa_n (r K_1(\gamma_n r)) = -2\gamma_n K_0(\gamma_n r) \quad (n=1,2,\dots).$$

Тогда, непосредственно из системы (8) находим

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{c\gamma_n} \sum_{k=1}^3 P_{kn} \partial_1 \partial_k \{r K_1(\gamma_n r)\} + \frac{P_{1n}}{2\pi\mu} K_0(\gamma_n r), \\ v_n &= \frac{1}{c\gamma_n} \sum_{k=1}^3 P_{kn} \partial_2 \partial_k \{r K_1(\gamma_n r)\} + \frac{P_{2n}}{2\pi\mu} K_0(\gamma_n r), \\ w_n &= -\frac{1}{c} \sum_{k=1}^3 P_{kn} \partial_k \{r K_1(\gamma_n r)\} + \frac{P_{3n}}{2\pi\mu} K_0(\gamma_n r) \quad (n=1,2,\dots), \quad c=8\pi\mu(1-\nu). \end{aligned} \quad (9)$$

Отдельно следует рассмотреть случай $n=0$. Уравнения (5) приобретают в этом случае вид

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_0 + \sigma \partial_1 \theta_0 + \frac{1}{\mu} P_{10} \delta(x) &= 0, \quad \nabla^2 v_0 + \sigma \partial_2 \theta_0 + \frac{1}{\mu} P_{20} \delta(x) = 0, \\ \nabla^2 \theta_0 + \frac{1}{\mu(1+\sigma)} \sum_{k=1}^2 P_{k0} \partial_k \delta(x) &= 0. \end{aligned}$$

Интегрирование этой системы в D' дает

$$\begin{aligned} \theta_0 &= -\frac{1}{2\pi\mu(1+\sigma)} \sum_{k=1}^2 P_{k0} \partial_k \ln r, \quad u_0 = \frac{1}{2c} \sum_{k=1}^2 P_{k0} \partial_1 \partial_k \left\{ r^2 (\ln r - 1) \right\} - \frac{P_{10}}{2\pi\mu} \ln r, \\ v_0 &= \frac{1}{2c} \sum_{k=1}^2 P_{k0} \partial_2 \partial_k \left\{ r^2 (\ln r - 1) \right\} - \frac{P_{20}}{2\pi\mu} \ln r. \end{aligned} \quad (10)$$

Окончательные результаты получим, выполнив предписанные формулами (9), (10) операции. Имеем после преобразований

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{P_{10}}{c} \left(\frac{1}{2} \cos 2\alpha - \kappa \ln r \right) + \frac{P_{20}}{2c} \sin 2\alpha, \quad v_0 = \frac{P_{10}}{2c} \sin 2\alpha - \frac{P_{20}}{c} \left(\frac{1}{2} \cos 2\alpha + \kappa \ln r \right), \\ u_n &= \frac{P_{1n}}{c} \left\{ \gamma_n r K_1(\gamma_n r) \cos^2 \alpha + \kappa K_0(\gamma_n r) \right\} + \frac{P_{2n}}{2c} \gamma_n r K_1(\gamma_n r) \sin 2\alpha - \\ &- \frac{P_{3n}}{c} \gamma_n r K_0(\gamma_n r) \cos \alpha, \quad v_n = \frac{P_{1n}}{2c} \gamma_n r K_1(\gamma_n r) \sin 2\alpha + \frac{P_{2n}}{c} \left\{ \gamma_n r K_1(\gamma_n r) \sin^2 \alpha + \right. \\ &+ \left. \kappa K_0(\gamma_n r) \right\} - \frac{P_{3n}}{c} \gamma_n r K_0(\gamma_n r) \sin \alpha \quad (n=1, 2, \dots), \quad w_n = \frac{P_{1n}}{c} \gamma_n r K_0(\gamma_n r) \cos \alpha + \\ &+ \frac{P_{2n}}{c} \gamma_n r K_0(\gamma_n r) \sin \alpha - \frac{P_{3n}}{c} \left\{ \gamma_n r K_1(\gamma_n r) - 4(1-\nu) K_0(\gamma_n r) \right\}, \\ \kappa &= 3-4\nu \quad z = x_1 + ix_2 = r e^{i\alpha}. \end{aligned} \quad (11)$$

Интерес представляет характер поведения вектора перемещения в окрестности носителя сосредоточенного функционала. Используя асимптотические формулы для функций $K_0(z)$ и $K_1(z)$ в окрестности нуля

$$K_0(z) = -\ln z + O(1) \quad K_1(z) = \frac{1}{z} + O(1),$$

получаем с учетом формул (11) следующую главную асимптотику вектора перемещения в нуле

$$\begin{aligned} u_n^0 &= -\frac{\kappa P_{1n}}{c} \ln r, \quad v_n^0 = -\frac{\kappa P_{2n}}{c} \ln r \quad (n=0, 1, 2, \dots), \\ w_n^0 &= -\frac{4(1-\nu)}{c} P_{3n} \ln r \quad (n=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Также из (11) следует, что вектор перемещения состоит из бигармонической части, которая распространяется на всю область, занятую слоем и имеет логарифмический рост на бесконечности и экспоненциально затухающей части, локализованной в окрестности носителя сингулярного функционала.

Компоненты напряжения. Согласно представлениям (4) можем записать

$$\begin{aligned} (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{33}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sigma_{11}^{(n)}, \sigma_{12}^{(n)}, \sigma_{22}^{(n)}, \sigma_{33}^{(n)} \right) \cos \gamma_n x_3, \\ (\sigma_{13}, \sigma_{23}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sigma_{13}^{(n)}, \sigma_{23}^{(n)} \right) \sin \gamma_n x_3, \quad \gamma_n = \pi n/h, \end{aligned}$$

где σ_{ij} и $\sigma_{ij}^{(n)}$ – компоненты тензора напряжения и их коэффициенты Фурье соответственно. Из закона Гука [4] получаем следующие выражения для коэффициентов $\sigma_{ij}^{(n)}$

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(n)} &= \lambda \theta_n + 2\mu \partial_1 u_n, \quad \sigma_{22}^{(n)} = \lambda \theta_n + 2\mu \partial_2 v_n, \quad \sigma_{33}^{(n)} = \lambda \theta_n + 2\mu \gamma_n w_n, \\ \sigma_{12}^{(n)} &= \mu (\partial_1 v_n + \partial_2 u_n), \quad \sigma_{13}^{(n)} = \mu (\partial_1 w_n - \gamma_n u_n), \quad \sigma_{23}^{(n)} = \mu (\partial_2 w_n - \gamma_n v_n). \end{aligned}$$

Отсюда находим стандартные комбинации «напряжений»

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^{(n)} + \sigma_{22}^{(n)} &= 2\lambda\theta_n + 4\mu \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} (u_n + iv_n) \right\} \quad (n=1,2,\dots), \\ \sigma_{22}^{(n)} - \sigma_{11}^{(n)} + 2i\sigma_{12}^{(n)} &= -4\mu \frac{\partial}{\partial z} (u_n - iv_n), \\ \sigma_{13}^{(n)} - i\sigma_{23}^{(n)} &= \mu \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial z} w_n - \gamma_n (u_n - iv_n) \right\}, \quad 2 \frac{\partial}{\partial z} = \partial_1 - i\partial_2.\end{aligned}\quad (12)$$

Функции u_n , v_n , w_n определены в (11). Подстановка их в выражения (12) дает

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^{(0)} + \sigma_{22}^{(0)} &= -\frac{P_{10} \cos \alpha + P_{20} \sin \alpha}{2\pi(1-\nu)r}, \quad \sigma_{22}^{(0)} - \sigma_{11}^{(0)} + 2i\sigma_{12}^{(0)} = \\ &= \frac{2\mu}{c} \left\{ (P_{10} + iP_{20}) \frac{\bar{z}}{z^2} + \kappa(P_{10} - iP_{20}) \frac{1}{z} \right\}, \quad \sigma_{11}^{(n)} + \sigma_{22}^{(n)} = \frac{\gamma_n}{4\pi(1-\nu)} \times \\ &\times \{ P_{3n} [\gamma_n r K_1(\gamma_n r) - 2(1-2\nu)K_0(\gamma_n r)] - \gamma_n (P_{1n} \cos \alpha + P_{2n} \sin \alpha) \times \\ &\times r K_2(\gamma_n r) \} \quad (n=1,2,\dots), \quad \sigma_{22}^{(n)} - \sigma_{11}^{(n)} + 2i\sigma_{12}^{(n)} = \frac{e^{-i\alpha} \gamma_n}{8\pi(1-\nu)} \times \\ &\times \{ P_{1n} [\gamma_n r (e^{-2i\alpha} K_2(\gamma_n r) + K_0(\gamma_n r)) + 2\kappa K_1(\gamma_n r)] + \\ &+ iP_{2n} [\gamma_n r (e^{-2i\alpha} K_2(\gamma_n r) - K_0(\gamma_n r)) - 2\kappa K_1(\gamma_n r)] - 2P_{3n} \gamma_n e^{-i\alpha} r K_1(\gamma_n r) \}, \\ \sigma_{13}^{(n)} - i\sigma_{23}^{(n)} &= \frac{\gamma_n}{4\pi(1-\nu)} \{ P_{3n} e^{-i\alpha} [\gamma_n r K_0(\gamma_n r) - 2(1-\nu)K_1(\gamma_n r)] - \\ &- P_{1n} [(1-2\nu)K_0(\gamma_n r) + \gamma_n r \cos \alpha e^{-i\alpha} K_1(\gamma_n r)] - P_{2n} [-i(1-2\nu)K_0(\gamma_n r) + \\ &+ \gamma_n r \sin \alpha e^{-i\alpha} K_1(\gamma_n r)] \}, \quad \sigma_{33}^{(n)} = \frac{\gamma_n}{4\pi(1-\nu)} \{ P_{1n} [\gamma_n r K_0(\gamma_n r) - 2\nu K_1(\gamma_n r)] \cos \alpha + \\ &+ P_{2n} [\gamma_n r K_0(\gamma_n r) - 2\nu K_1(\gamma_n r)] \sin \alpha + P_{3n} [(4-2\nu)K_0(\gamma_n r) - \gamma_n r K_1(\gamma_n r)] \}, \\ z &= re^{i\alpha} = x_1 + ix_2, \quad \bar{z} = x_1 - ix_2.\end{aligned}\quad (13)$$

Очевидно, что первые две формулы в (13) определяют тензор напряжения (в условиях плоской деформации) при действии сосредоточенной силы (P_{10}, P_{20}) . Они могут быть получены также путем прямого предельного перехода при $n \rightarrow 0$ в соответствующих комбинациях, определенных выше.

Главная асимптотика тензора напряжения находится из (13). В окрестности носителя сосредоточенного функционала имеем

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^{(n)} + \sigma_{22}^{(n)} &= -\frac{1}{2\pi(1-\nu)r} (P_{1n} \cos \alpha + P_{2n} \sin \alpha) \quad (n=0,1,\dots), \\ \sigma_{22}^{(n)} - \sigma_{11}^{(n)} + 2i\sigma_{12}^{(n)} &= \frac{e^{-i\alpha}}{4\pi(1-\nu)r} [(P_{1n} + iP_{2n}) e^{-2i\alpha} + \kappa(P_{1n} - iP_{2n})], \\ \sigma_{13}^{(n)} - i\sigma_{23}^{(n)} &= -\frac{P_{3n}}{2\pi r} e^{-i\alpha} \quad (n=1,2,\dots), \quad \sigma_{33}^{(n)} = -\frac{\nu}{2\pi(1-\nu)r} (P_{1n} \cos \alpha + P_{2n} \sin \alpha).\end{aligned}$$

Таким образом, компоненты вектора перемещения и тензора напряжения от нагрузки, распределенной вдоль шнура $x_1 = x_2 = 0$, $|x_3| \leq h$, определены полностью.

РЕЗЮМЕ

Отримані фундаментальні розв'язки рівнянь Ламе для пружного шару у вигляді рядів, коефіцієнти яких виражаються в замкненому вигляді через циліндричні функції Макдональда. Виписані формули для вектора переміщень і тензора напружень в довільній точці шару. Досліджена асимптотика польових величин в околі носія зосередженого функціоналу.

SUMMARY

Lame equations fundamental solutions have been obtained for the elastic layer in the form of series, which coefficients have been showed in the close form with the help of cylindrical McDonald functions. Formulas for displacement vector and strain tensor have been deduced for the arbitrary point of the layer. Asymptotes of field values have been explored in the neighborhood of concentrated functional.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Фильштинский Л.А., Мизина Т.Л. К построению фундаментальных решений для слоя в R^3 // Теорет. и прикладная механика. – 2001. – Вып. 32. – С. 55-58.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
3. Алтухов Е.В. Упругое равновесие слоя с полостью для граничных условий смешанного типа на торцах // Теорет. и прикладная механика. – 1993. – Вып. 24. – С. 3–7.
4. Космодамианский А.С., Шалдырван В.А. Толстые многосвязные пластины. – К.: Наук. думка., 1978. – 240 с.

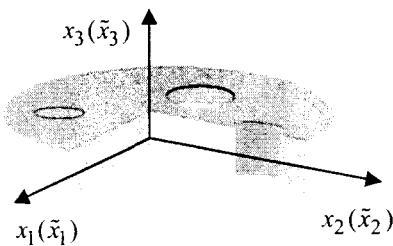
Надійшла до редакції 02.03.2006 р.

**МЕТОД ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ В ТРЕХМЕРНОЙ ТЕОРИИ
ОБОБЩЕННОЙ ТЕРМОМЕХАНИКИ ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН**

Е.В.Алтухов, С.В.Авилова

Основы обобщенной термомеханики анизотропных тел и обзор исследований в данной области изложены в монографии [1]. Одним из эффективных методов решения краевых задач обобщенной термоупругости является метод однородных решений [2–4]. В работе [5] получены решения краевых задач о связанных термоупругих колебаниях изотропной пластины, плоские грани которой жестко зашпелены. В данной статье построена система однородных решений уравнений обобщенной термомеханики для изотропного тела с учетом конечной скорости распространения тепла.

1. Постановка задачи. Рассмотрим изотропную пластину толщиной $2h$ (рисунок). Выберем систему координат $\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \tilde{x}_3$ так, чтобы срединная плоскость пластины $\tilde{x}_3 = 0$ совпадала с плоскостью $\tilde{x}_1 \tilde{x}_2$. Наряду с координатами $\tilde{x}_i$ введем безразмерные прямоугольные координаты $x_1 = \tilde{x}_1 / R$, $x_2 = \tilde{x}_2 / R$, $x_3 = \lambda^{-1} \tilde{x}_3 / R$, где $\lambda = h / R$, R – некоторый характерный размер пластины. Пусть на плоских гранях пластины



и

$$u_i(x_1, x_2, \pm 1) = 0 \quad (i = \overline{1, 4}) \quad (1.1)$$

или

$$u_i(x_1, x_2, \pm 1) = 0 \quad (i = \overline{1, 3}), \quad \partial_3 u_4(x_1, x_2, \pm 1) = 0, \quad (1.2)$$

где u_i – амплитудные значения перемещений и температуры; ∂_3 – производная по переменной x_3 .

В безразмерных величинах основная система уравнений обобщенной термоупругости после исключения временного множителя $\exp(-i\omega t)$ примет вид

$$\begin{aligned} \partial_3^2 u_i + (\lambda^2 D^2 + \omega_1^2) u_i + \lambda^2 v_1 \partial_i (\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) + \lambda v_1 \partial_i \partial_3 u_3 &= \lambda^2 (3v_1 - 1) \partial_i u_4, \\ (1 + v_1) \partial_3^2 u_3 + (\lambda^2 D^2 + \omega_1^2) u_3 + \lambda v_1 \partial_3 (\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) &= \lambda (3v_1 - 1) \partial_3 u_4 \quad (i = \overline{1, 2}), \\ \partial_3^2 u_4 + (\lambda^2 D^2 + \omega_4^2 + i\omega_2) u_4 + (\omega_5^2 + i\omega_3) (\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \lambda^{-1} \partial_2 u_2) &= 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \partial_i &= \partial / \partial x_i \quad (i = \overline{1, 3}), \quad D^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad v_1 = (1 - 2\nu)^{-1}, \quad u_i = \tilde{u}_i / R, \\ u_4 &= \alpha_t (T - T_0), \quad \omega_1^2 = \rho \omega^2 h^2 G^{-1}, \quad \omega_2 = \omega h^2 \alpha^{-1}, \\ \alpha &= \lambda_t c_9^{-1}, \quad \omega_3 = \omega h^2 \eta \alpha_t, \quad \eta = \beta T_0 \lambda_t^{-1}, \quad \beta = 2G(1 + \nu) v_1 \alpha_t, \\ \omega_4^2 &= \omega^2 h^2 c_q^{-2}, \quad c_q^2 = \alpha \tau_r^{-1}, \quad \omega_5^2 = \omega^2 h^2 \eta \alpha_t \tau_r, \end{aligned}$$

G , ν , ρ – модуль сдвига, коэффициент Пуассона и плотности; α_t , λ_t , c_9 – коэффициенты линейного расширения, теплопроводности и объемной плотности материала; τ_r – время релаксации теплового потока; ω – круговая частота; T_0 – температура тела в ненапряженном состоянии; $T(x_1, x_2, x_3)$ – абсолютная температура точек тела. Если $\tau_r = 0$, то $\omega_4 = \omega_5 = 0$. Тогда система уравнений (1.3) совпадает с приведенной в работе [5] и описывает распространение тепла с бесконечно большой скоростью [6].

2. Построение однородных решений. Задача построения однородных решений сводится к интегрированию системы уравнений (1.3) при краевых условиях (1.1) или (1.2). С учетом свойств векторного поля и в соответствии с полубратным методом И. И. Воровича амплитудные значения вектора перемещений и температуры представим суммой вихревого и потенциального состояний

$$u_i = u_{ig} + u_{in} \quad (i = \overline{1, 4}).$$

Вихревое решение имеет вид

$$\begin{aligned}u_{1g}(x_1, x_2, x_3) &= p(x_3) \partial_2 B(x_1, x_2), \\u_{2g}(x_1, x_2, x_3) &= -p(x_3) \partial_1 B(x_1, x_2), \\u_{3g}(x_1, x_2, x_3) &= 0, \quad u_{4g}(x_1, x_2, x_3) = 0\end{aligned}$$

и совпадает с аналогичным, полученным в работе [7]

$$\begin{aligned}u_{1g} &= \sum_{k=1}^{\infty} P_k^{\pm}(x_3) \partial_2 B_k^{\pm}(x_1, x_2), \quad u_{2g} = -\sum_{k=1}^{\infty} P_k^{\pm}(x_3) \partial_1 B_k^{\pm}(x_1, x_2), \\u_{3g} &= 0, \quad u_{4g} = 0,\end{aligned}\tag{2.1}$$

где

$$\begin{aligned}P_k^{+}(x_3) &= \cos \delta_k^{+} x_3, \quad P_k^{-}(x_3) = \sin \delta_k^{-} x_3 / \delta_k^{-}, \\ \delta_k^{+} &= \pi k, \quad \delta_k^{-} = (k - 0,5) \pi, \quad \lambda^2 D^2 B_k^{\pm} = \left((\delta_k^{\pm})^2 - \omega_1^2 \right) B_k^{\pm}.\end{aligned}$$

Знаками «+» и «-» отмечены характеристики, относящиеся соответственно к симметричным и антисимметричным относительно срединной плоскости $x_3 = 0$ видам колебаний пластины.

Потенциальное решение будем находить, исходя из представлений

$$\begin{aligned}u_{1n} &= n(x_3) \partial_1 C(x_1, x_2), \quad u_{2n} = n(x_3) \partial_2 C(x_1, x_2), \\u_{3n} &= q(x_3) C(x_1, x_2), \quad u_{4n} = \lambda^{-2} t(x_3) C(x_1, x_2).\end{aligned}\tag{2.2}$$

Тогда из системы (1.3) с учетом (2.2) следует, что $C(x_1, x_2)$ – метагармоническая функция:

$$\lambda^2 D^2 C(x_1, x_2) - \gamma^2 C(x_1, x_2) = 0,$$

а $n(x_3)$, $q(x_3)$, $t(x_3)$ определяются из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}n'' + \left[(1 + \nu_1) \gamma^2 + \omega_1^2 \right] n + \lambda \nu_1 q' - (3\nu_1 - 1)t &= 0, \\ (1 + \nu_1) q'' + \left(\gamma^2 + \omega_1^2 \right) q + \lambda^{-1} \nu_1 \gamma^2 n' - \lambda^{-1} (3\nu_1 - 1)t' &= 0, \\ t'' + \left(\gamma^2 + \omega_4^2 + i\omega_2 \right) t + (\omega_5^2 + i\omega_3)(\gamma^2 n + \lambda q') &= 0.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Здесь γ – параметр разделения переменных. Характеристическое уравнение системы (2.3) имеет вид

$$a_1 k^6 + a_2 k^4 + a_3 k^2 + a_4 = 0,\tag{2.4}$$

в котором

$$\begin{aligned}a_1 &= (1 + \nu_1); \\ a_2 &= 3\gamma^2(1 + \nu_1) + \omega_1^2(2 + \nu_1) + i[\omega_2(1 + \nu_1) + \omega_3(3\nu_1 - 1)] + \omega_4^2(1 + \nu_1) + \omega_5^2(3\nu_1 - 1) \\ a_3 &= 3\gamma^4(1 + \nu_1) + 2\gamma^2 \left[\omega_1^2(2 + \nu_1) + \omega_4^2(1 + \nu_1) + \omega_5^2(3\nu_1 - 1) \right] + 2i\gamma^2 \left(\omega_2(1 + \nu_1) + \right. \\ &\quad \left. + \omega_3(3\nu_1 - 1) \right) + \omega_1^2 \left(\omega_4^2(2 + \nu_1) + \omega_5^2(3\nu_1 - 1) \right) + \omega_1^4 + i\omega_1^2 \left[\omega_2(2 + \nu_1) + \omega_3(3\nu_1 - 1) \right]; \\ a_4 &= \gamma^6(1 + \nu_1) + \gamma^4 \left[\omega_1^2(2 + \nu_1) + \omega_4^2(2 + \nu_1) + \omega_5^2(3\nu_1 - 1) + i(\omega_2(1 + \nu_1) + \omega_3(3\nu_1 - 1)) \right] + \\ &\quad + \gamma^2 \omega_1^2 \left[\omega_1^2 + \omega_4^2(2 + \nu_1) + \omega_5^2(3\nu_1 - 1) + i(\omega_2(2 + \nu_1) + \omega_3(3\nu_1 - 1)) \right] + \omega_1^4(\omega_4^2 + i\omega_2).\end{aligned}$$

Решением системы (2.3) для различных по модулю корней k_i уравнения (2.4) являются функции

$$\begin{aligned}n^{+}(x_3) &= H_1^{+} \operatorname{ch} k_1 x_3 + H_2^{+} \operatorname{ch} k_2 x_3 + H_3^{+} \operatorname{ch} k_3 x_3, \\ n^{-}(x_3) &= H_1^{-} \operatorname{sh} k_1 x_3 + H_2^{-} \operatorname{sh} k_2 x_3 + H_3^{-} \operatorname{sh} k_3 x_3, \\ q^{+}(x_3) &= Q_1^{+} \operatorname{sh} k_1 x_3 + Q_2^{+} \operatorname{sh} k_2 x_3 + Q_3^{+} \operatorname{sh} k_3 x_3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q^-(x_3) &= Q_1^- \operatorname{ch} k_1 x_3 + Q_2^- \operatorname{ch} k_2 x_3 + Q_3^- \operatorname{ch} k_3 x_3, \\ t^+(x_3) &= T_1^+ \operatorname{ch} k_1 x_3 + T_2^+ \operatorname{ch} k_2 x_3 + T_3^+ \operatorname{ch} k_3 x_3, \\ t^-(x_3) &= T_1^- \operatorname{sh} k_1 x_3 + T_2^- \operatorname{sh} k_2 x_3 + T_3^- \operatorname{sh} k_3 x_3. \end{aligned} \quad (2.5)$$

При этом

$$\begin{aligned} Q_i^\pm &= \lambda^{-1} k_i H_i^\pm, \quad T_i^\pm = d_i H_i^\pm, \\ d_i &= \frac{(1 + \nu_1)(\gamma^2 + k_i^2)^2 + \omega_1^2 \left((2 + \nu_1)(\gamma^2 + k_i^2) + \omega_1^2 \right)}{(3\nu_1 - 1)(\gamma^2 + k_i^2 + \omega_1^2)}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Из граничных условий (1.1) и выражений (2.2) следует, что

$$n(\pm 1) = 0, \quad q(\pm 1) = 0, \quad t(\pm 1) = 0. \quad (2.7)$$

Подставляя соотношения (2.5) в граничные условия (2.7), получаем следующие однородные системы уравнений для симметричных и антисимметричных колебаний пластины:

$$\begin{aligned} H_1^+ \operatorname{ch} k_1 + H_2^+ \operatorname{ch} k_2 + H_3^+ \operatorname{ch} k_3 &= 0, \\ H_1^+ k_1 \operatorname{sh} k_1 + H_2^+ k_2 \operatorname{sh} k_2 + H_3^+ k_3 \operatorname{sh} k_3 &= 0, \\ H_1^+ d_1 \operatorname{ch} k_1 + H_2^+ d_2 \operatorname{ch} k_2 + H_3^+ d_3 \operatorname{ch} k_3 &= 0; \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} H_1^- \operatorname{sh} k_1 + H_2^- \operatorname{sh} k_2 + H_3^- \operatorname{sh} k_3 &= 0, \\ H_1^- k_1 \operatorname{ch} k_1 + H_2^- k_2 \operatorname{ch} k_2 + H_3^- k_3 \operatorname{ch} k_3 &= 0, \\ H_1^- d_1 \operatorname{sh} k_1 + H_2^- d_2 \operatorname{sh} k_2 + H_3^- d_3 \operatorname{sh} k_3 &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Из систем (2.8), (2.9) находим дисперсионные уравнения

$$\begin{aligned} \Delta^+ &= (d_2 - d_3)k_1 \operatorname{th} k_1 + (d_3 - d_1)k_2 \operatorname{th} k_2 + (d_1 - d_2)k_3 \operatorname{th} k_3 = 0, \\ \Delta^- &= (d_2 - d_3)k_1 \operatorname{cth} k_1 + (d_3 - d_1)k_2 \operatorname{cth} k_2 + (d_1 - d_2)k_3 \operatorname{cth} k_3 = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Для коэффициентов $H_i^\pm$, определенных из (2.8), (2.9) имеем

$$\begin{aligned} H_2^+ &= H_1^+ (k_1 \operatorname{sh} k_1 \operatorname{ch} k_3 - k_3 \operatorname{ch} k_1 \operatorname{sh} k_3) / h_1^+, \\ H_3^+ &= H_1^+ (k_2 \operatorname{ch} k_1 \operatorname{sh} k_2 - k_1 \operatorname{sh} k_1 \operatorname{ch} k_2) / h_1^+, \\ H_2^- &= H_1^- (k_1 \operatorname{ch} k_1 \operatorname{sh} k_3 - k_3 \operatorname{sh} k_1 \operatorname{ch} k_3) / h_1^-, \\ H_3^- &= H_1^- (k_2 \operatorname{sh} k_1 \operatorname{ch} k_2 - k_1 \operatorname{ch} k_1 \operatorname{sh} k_2) / h_1^-, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} h_1^+ &= k_3 \operatorname{ch} k_2 \operatorname{sh} k_3 - k_2 \operatorname{sh} k_2 \operatorname{ch} k_3, \quad h_1^- = k_3 \operatorname{sh} k_2 \operatorname{ch} k_3 - k_2 \operatorname{ch} k_2 \operatorname{sh} k_3, \\ H_1^+ &= \operatorname{ch} k_1, \quad H_1^- = \operatorname{sh} k_1. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Дисперсионные уравнения (2.10) имеют счетное множество корней $\gamma_p^\pm$. Каждому корню $\gamma_p^\pm$ соответствуют величины $H_{ip}^\pm$, $d_{ip}^\pm$, $k_{ip}^\pm$, $h_{1p}^\pm$ ($i = \overline{1, 3}$) и собственные функции $n_p^\pm(x_3)$, $q_p^\pm(x_3)$, $t_p^\pm(x_3)$. Поэтому потенциальное решение в случае граничных условий (2.7) имеет вид

$$u_{1n}^\pm(x_1, x_2, x_3) = \sum_{p=1}^{\infty} n_p^\pm(x_3) \partial_1 C_p^\pm(x_1, x_2),$$

$$\begin{aligned} u_{2n}^{\pm}(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{p=1}^{\infty} n_p^{\pm}(x_3) \partial_2 C_p^{\pm}(x_1, x_2), \\ u_{3n}^{\pm}(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{p=1}^{\infty} q_p^{\pm}(x_3) C_p^{\pm}(x_1, x_2), \\ u_{4n}^{\pm}(x_1, x_2, x_3) &= \lambda^{-2} \sum_{p=1}^{\infty} t_p^{\pm}(x_3) C_p^{\pm}(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (2.12)$$

При этом $C_p^{\pm}(x_1, x_2)$ – метагармонические функции, которые являются решением уравнения

$$\lambda^{-2} D^2 C_p^{\pm} - (\gamma_p^{\pm})^2 C_p^{\pm} = 0.$$

В случае граничных условий (1.2) функции (2.5) определяются из уравнений

$$n(\pm 1) = 0, \quad q(\pm 1) = 0, \quad \partial_3 t(\pm 1) = 0. \quad (2.13)$$

Поэтому для получения потенциального решения необходимо в выражениях (2.8)–(2.10) произвести формально замену d_i на $k_i d_i$.

Построенные однородные решения удовлетворяют уравнениям движения (1.3) и граничным условиям (1.1), (1.2). Чтобы удовлетворить краевым условиям на боковой поверхности пластины, необходимо воспользоваться решениями уравнений

$$\lambda^2 D^2 B_k^{\pm} = \left((\delta_k^{\pm})^2 - \omega_l^2 \right) B_k^{\pm}, \quad \lambda^2 D^2 C_p^{\pm} = (\gamma_p^{\pm})^2 C_p^{\pm}. \quad (2.14)$$

РЕЗЮМЕ

Із використанням напівзворотнього методу І. І. Воровича отримано однорідні розв'язки взаємозалежних рівнянь тривимірної узагальненої теорії термопружності ізотропних пластин. На плоских гранях пластини, що теплоізовані або підтримуються при нульовій температурі, розглядаються граничні умови типу жорсткого торця.

SUMMARY

With use half-returned I. I. Vorovich's method homogeneous decisions of the interconnected equations of the three-dimensional generalized theory thermoelasticity isotropic plates are received. On flat sides of a plate which thermoisolated or are supported at zero temperature, boundary conditions such as a rigid end face are considered.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Обобщенная термомеханика. – К.: Наук. думка, 1976. – 310 с.
2. Авилова С. В., Алтухов Е. В., Мысовский Ю. В. Однородные решения в трехмерных задачах обобщенной термодинамики изотропных пластин // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела: Матер. 4 Междунар. науч. конф., Донецк–Мелекино, 12–14 июня 2006 г. – Донецк: Юго-Восток. – 2006. – С. 166–168.
3. Алтухов Е. В., Авилова С. В. Однородные решения в трехмерной теории обобщенной термомеханики изотропных пластин // Науч. конф. им. ак. М. Кравчука: Материалы XI междунар. конф., Киев, 22–24 мая 2006 г. – К.: ТОВ Задруга. – 2006. – С. 17.
4. Фильштинский Л. А., Сиренко Ю. В., Фильштинская Л. Л. Связанные термоупругие поля в слое при сосредоточенных возбуждениях // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2005. – Т. 48. – №2. – С. 137–146.
5. Алтухов Е. В. Метод И. И. Воровича в трехмерной теории динамики пластин // Теорет. и прикладная механика. – 2005. – Вып. 41. – С. 3–8.
6. Новацкий В. Динамические термоупругости. – М.: Мир, 1970. – 256 с.
7. Altukhov E. V., Mysovskii Yu. V., Panchenko Yu. V. Three-dimensional problems of steady vibrations of isotropic plates // J. Math. Sci. – 1997. – Vol. 86. – №6. – P. 3095–3098.

Надійшла до редакції 14.03.2006 р.

ЭЛЕКТРОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТЕЛА С ТРЕХОСНОЙ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ ПОЛОСТЬЮ

В.С.Кирилюк,

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Напряженно-деформированное состояние в двумерных и трехмерных анизотропных телах с полостями и включениями рассматривалось в работах [1–4]. В настоящее время значительный интерес вызывают также исследования связанных полей в пьезокерамических телах, теоретические основы для изучения которых изложены, например, в монографии [5]. Нахождению электроупругого состояния тел с концентраторами напряжений посвящены работы [6–12]. При этом точное решение пространственной задачи получено только для сфероидальной полости или включения [6, 10–12], ось вращения которого ориентирована вдоль оси поляризации материала.

В настоящей работе решена задача для трансверсально-изотропной пьезоэлектрической среды, содержащей трехосную эллипсоидальную полость. Использован подход, основанный на использовании обобщенного метода эквивалентного включения Эшелби. Вычисление получаемых контурных интегралов дано по квадратурным формулам Гаусса. В частных случаях получено совпадение результатов исследований с данными других авторов. Изучено распределение напряжений вдоль поверхности эллипсоидальной полости при различных ее геометрических параметрах.

Постановка задачи. Пусть трансверсально-изотропная пьезоэлектрическая среда с осью поляризации, совпадающей с осью Oz , содержит трехосную эллипсоидальную полость с полуосями a_1, a_2, a_3 . Среда находится под действием однородных полей напряжений и электрической индукции, поверхность полости свободна от силовых воздействий, и, поскольку диэлектрическая проницаемость воздуха в сотни раз меньше проницаемости керамики, то нормальная компонента электрических перемещений (электрической индукции) на поверхности полости равна нулю. Наличие полости в среде приводит к возникновению возмущения электрического и силового полей.

Полная система уравнений электроупругости состоит из уравнений равновесия при отсутствии объемных сил

$$\sigma_{ij,j} = 0; \quad (1)$$

уравнений вынужденной электростатики

$$D_{i,i} = 0; \quad E_i = -\Psi_{,i}; \quad (2)$$

соотношений Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i});$$

уравнений состояния

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn}\varepsilon_{mn} + e_{nij}\Psi_{,n}, \quad D_i = e_{imn}\varepsilon_{mn} - k_{in}\Psi_{,n}, \quad (3)$$

где σ_{ij} , ε_{ij} , u_i , D_i , E_i , Ψ – компоненты напряжений, деформаций, перемещений, электрических перемещений (индукции), электрического поля и электрический потенциал соответственно. Введены также обозначения: C_{ijmn} ; e_{imn} ; k_{ij} – упругие модули, пьезомодули, диэлектрические проницаемости. Для пьезокерамических тел упругие свойства описываются пятью независимыми постоянными c_{11} , c_{12} , c_{13} , c_{33} , c_{44} ; пьезомодули – тремя величинами e_{31} , e_{15} , e_{33} ; диэлектрические проницаемости – двумя независимыми постоянными k_{11} , k_{33} . Компоненты записанных тензоров связаны с соответствующими независимыми постоянными соотношениями вида:

$$\begin{aligned} C_{1111} &= c_{11}; \quad C_{2222} = c_{11}; \quad C_{3333} = c_{33}; \quad C_{1122} = C_{2211} = c_{12}; \\ C_{1133} &= C_{3311} = C_{2233} = C_{3322} = c_{13}; \\ C_{2323} &= C_{2332} = C_{3232} = C_{3223} = c_{44}; \\ C_{1313} &= C_{1331} = C_{3131} = C_{3113} = c_{44}; \\ C_{1212} &= C_{1221} = C_{2121} = C_{2112} = 0,5(c_{11} - c_{12}); \end{aligned} \quad (4)$$

$$e_{113} = e_{131} = e_{223} = e_{232} = e_{15}; \quad e_{311} = e_{322} = e_{31}; \\ e_{333} = e_{33}; \quad k_{22} = k_{11}; \quad k_{33}.$$

Не приведенные здесь компоненты тензоров равны нулю.

Для описания электроупругого состояния, используем унифицированные обозначения [9]. Так, упругие перемещения и электрический потенциал запишем в виде

$$U_M = \begin{cases} u_m, & M = 1, 2, 3 \\ \Psi, & M = 4 \end{cases}; \quad (5)$$

упругие деформации и электрическое поле

$$Z_{Mn} = \begin{cases} \varepsilon_{mn}, & M = 1, 2, 3 \\ \Psi_{,n}, & M = 4 \end{cases}; \quad (6)$$

напряжения и электрические перемещения

$$\Sigma_{iJ} = \begin{cases} \sigma_{ij}, & J = 1, 2, 3 \\ D_i, & J = 4 \end{cases}; \quad (7)$$

электроупругие модули

$$E_{iJMn} = \begin{cases} C_{ijmn}, & J, M = 1, 2, 3 \\ e_{nij}, & J = 1, 2, 3; M = 4 \\ e_{imn}, & J = 4; M = 1, 2, 3 \\ -k_{in}, & J, M = 4 \end{cases}. \quad (8)$$

Отметим, что строчные индексы в использованных обозначениях изменяются от единицы до трех, а прописные индексы – от единицы до четырех.

Метод решения. Электрическое и напряженное состояние в среде представим суперпозицией основного поля и возмущения, вызванного наличием полости. Для нахождения возмущенного состояния используем схему метода эквивалентного включения, обобщенную на случай электроупругости [9]. Уравнения эквивалентности в области включения (неоднородности) принимают вид:

$$E_{iJKl}^1 (Z_{Kl}^0 + Z_{Kl}) = E_{iJKl} (Z_{Kl}^0 + Z_{Kl} - Z_{Kl}^*) \quad (\bar{x} \in \Omega), \quad (9)$$

где E_{iJKl}^1 , E_{iJKl} – электроупругие модули неоднородности и матрицы (в дальнейшем для случая полости E_{iJKl}^1 устремим к нулю); Z_{Mn}^* – фиктивные значения «свободных» деформаций и значений электрического поля, которые определяются из условий эквивалентности включения. Значения Z_{Kl}^0 получаем по значениям напряжений заданных в среде напряжений и электрической индукции (электрических перемещений) с помощью соотношений $\Sigma_{iJ}^0 = E_{iJKl} Z_{Kl}^0$. Аналогично упругому случаю имеем

$$Z_{Mn} = S_{MnAb} Z_{Ab}^*, \quad (10)$$

где S_{MnAb} – пьезоэлектрический аналог тензора Эшелби, который зависит от геометрической формы включения и электроупругих свойств матрицы. Воспользовавшись Фурье-образом функции Грина для бесконечной электроупругой среды, с помощью преобразований [10] его можно представить в виде

$$S_{MnAb} = \frac{E_{iJAb}}{4\pi} \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} [I_{mJin}(\bar{z}) + I_{nJim}(\bar{z})] d\theta d\eta_3, & m = M = 1, 2, 3; \\ -1 & 0 \\ \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} [I_{4Jin}(\bar{z})] d\theta d\eta_3, & M = 4, \\ -1 & 0 \end{cases} \quad (11)$$

где $z_i = \eta_i / a_i$; $\eta_1 = \sqrt{1 - \eta_3^2} \cos \theta$; $\eta_2 = \sqrt{1 - \eta_3^2} \sin \theta$. Кроме того, имеем $I_{MJin} = z_i z_n K_{MJ}^{-1}(\bar{z})$, где K_{MJ}^{-1} – обратная к такой матрице: $K_{MJ} = z_i z_n E_{iMJn}$.

С помощью соотношений (9)-(11) для нахождения неизвестных значений Z_{KI}^* получаем систему линейных алгебраических уравнений. Коэффициенты этой системы зависят от двойных интегралов типа (11), что не имеют каких-либо особенностей в области интегрирования.

Для нахождения распределения напряжений в электроупругой среде с трехосным эллипсоидальным включением необходимо вначале по формулам (11) вычислить аналог тензора Эшелби S_{MnAb} , а затем из уравнений эквивалентности (9) определить значения Z_{KI}^* . В данной работе вычисление компонентов S_{MnAb} проводилось по формулам квадратур Гаусса. После нахождения неизвестных значений Z_{KI}^* определялось электронапряженное состояние внутри включения. Для вычисления значений напряжений и характеристик электрического поля в точках среды, примыкающих к эллипсоидальной границе включения, использовались формулы скачка напряжений при переходе через границу включения [9]

$$[\Sigma_{IJ}] = \Sigma_{IJ}^{out} - \Sigma_{IJ}^{in} = E_{IKL} \{ -E_{pQMn} Z_{Mn}^* n_p n_l K_{QK}^{-1}(\vec{n}) + Z_{KI}^* \}, \quad (12)$$

где n_i – компоненты нормали поверхности.

Анализ результатов численных исследований. Рассмотрим вначале в качестве тестовой задачи случай сфероидальной полости, содержащейся в пьезокерамической среде. При этом полагаем, что ось вращения сфероида совпадает с осью поляризации материала. Пусть в основное электроупругое поле в среде имеет вид [11]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x^0, \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0; \\ \Psi^{(0)} &= 0; \quad D_x^{(0)} = D_y^{(0)} = 0; \quad D_z^{(0)} = d_{31} \sigma_x^0. \end{aligned} \quad (13)$$

Рассматривая пьезокерамические материалы PХЕ-5 и ЦТС-19 согласно [5] и проводя вычисления для сжатых сфероидальных полостей, получаем полное наложение результатов исследований на кривые рис. 1, 2 в работе [11]. При этом для диапазона отношений полуосей сфероида $c/a = 0,2 \div 0,9$ достаточно использовать квадратурные формулы Гаусса по 48 узлам (по каждой из переменных), а при отношениях $c/a = 0,1 \div 0,2$ – по 96 узлам. Приведенные в работе числовые данные напряжений на поверхности полости полностью совпали с найденными в результате вычислений значениями. Так, например, концентрация напряжений σ_x / σ_x^0 при заданном электроупругом поле (13) и отношении полуосей $c/a = 0,5$ для пьезокерамики ЦТС-19 на поверхности полости достигает значений 1,418 (1,42) в вершине на оси Oy и 1,887 (1,89) в вершине на оси Oz (в круглых скобках приведены соответствующие значения из работы [11]).

Следовательно, апробация подхода на тестовой задаче для трансверсально-изотропной пьезокерамической среды со сфероидальной полостью (имеющей точное решение), показала высокую эффективность подхода.

Перейдем к изучению распределения электронапряженного состояния в пьезокерамической среде, содержащей трехосную эллипсоидальную полость. Рассмотрим пьезокерамический материал РЗТ-4, свойства которого приведены в [5]. Пусть в электроупругой среде с полостью имеет место одноосное растяжение пространства (перпендикулярно оси поляризации) согласно выражениям (13). При расчетах зафиксируем отношение полуосей трехосного эллипсоида $b/a = 0,7$, а отношения c/a выберем такими: 1) 0,3 ; 2) 0,5 ; 3) 0,7 ; 4) 0,9. На рис. 1 показано распределение напряжений вдоль поверхности полости в сечении ХZ от вершины эллипсоида на оси Ox до его вершины на оси Oz. Рис. 2 отражает изменение напряжений вдоль поверхности полости в сечении ZY (от вершины эллипсоида на оси Oz до его вершины на оси Oy). Кривые 1, 2, 3, 4 отвечают геометрическим параметрам полости с теми же порядковыми номерами. По сравнению с чисто упругим материалом (с теми же упругими свойствами) происходит увеличение концентрации напряжений на 12,98%; 14,97%; 15,24%; 15,38% для случаев 1, 2, 3, 4 соответственно. Аналогичный эффект для сфероидальных полостей отмечен в [11].

Изучим напряженное состояние в среде с эллипсоидальной полостью при одноосном растяжении вдоль оси поляризации (при отсутствии электрического потенциала), т.е. для основного состояния

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \sigma_z^0, \quad \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0; \\ \Psi^{(0)} &= 0; \quad D_x^{(0)} = D_y^{(0)} = 0; \quad D_z^{(0)} = d_{33} \sigma_z^0. \end{aligned} \quad (14)$$

В результате расчетов получаем, что наибольшие значения напряжений достигаются на поверхности полостей в вершине эллипсоида, лежащей на оси Oz . На рис. 3 показано распределение напряжений

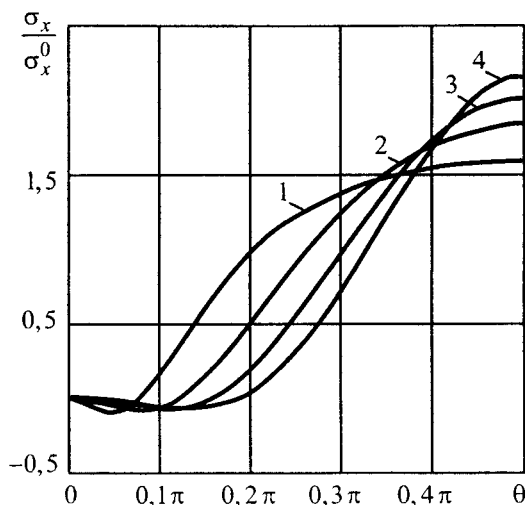


Рис. 1

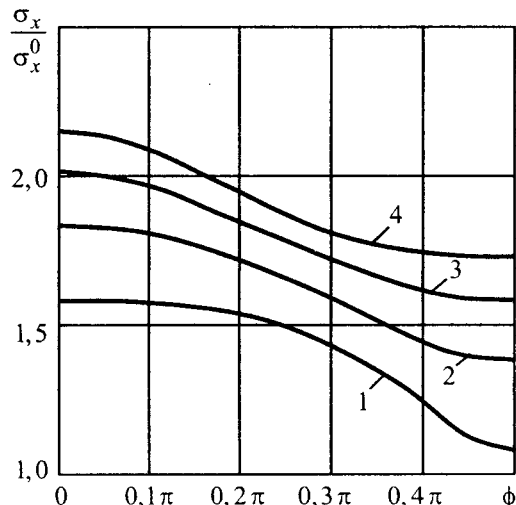


Рис. 2

вдоль поверхности полости в сечении ZY (от вершины эллипсоида на оси Oz до его вершины на оси Oy).

Кривые 1 – 4 отвечают тем же геометрическим параметрам полости, что и в предыдущем случае. Отметим, что по сравнению со значениями максимальных напряжений, возникающих в материале с теми же упругими свойствами (но при отсутствии электрических свойств) и том же одноосном растяжении, концентрация напряжений уменьшается на 5,59%; 4,38%; 4,34%; 3,85% для расчетных случаев 1 – 4 соответственно. Если же вместо основного состояния (14) рассматривать одноосное растяжение, но при отсутствии компонентов электрических перемещений, а не электрического потенциала, аналогично [8], тогда имеет место более значительное уменьшение концентрации напряжений по сравнению с чисто упругим случаем (на 8,57%; 7,87%; 7,25%; 6,69% соответственно). Отметим, что такой же эффект уменьшения концентрации напряжений при растяжении вдоль оси поляризации за счет связанности силового и электрического полей в плоской задаче отмечен в работе [8].

Таким образом, для пьезокерамического пространства с трехосной эллипсоидальной полостью при растяжении вдоль оси поляризации материала имело место уменьшение концентрации напряжений по сравнению с чисто упругим случаем, а при растяжении в направлении, перпендикулярном оси поляризации, наблюдалось ее увеличение.

РЕЗЮМЕ

Розглянуто задачу про електронапружений стан у п'єзоелектричному просторі, що містить тривісну еліпсоїдальну порожнину, при однорідних силових і електричних навантаженнях. Розв'язок задачі отримано з допомогою використання узагальненого на випадок п'єзоелектричного середовища метода еквівалентного включення Ешелбі. Тестування підходу на сфероїдальній порожнині (коли вісь обертання співпадає з віссю поляризації матеріалу), для якого існує точний розв'язок задачі, підтверджує високу його ефективність. Виконано числові дослідження і вивчено розподіл напружень вздовж поверхні тривісної еліпсоїдальної порожнини.

SUMMARY

The problem on electro-stress state in piezoelectric space, which contained a triaxial ellipsoidal cavity, under homogeneous force and electric loads was considered. The solution of the problem was obtained by means of generalized Eshelby's method of equivalent inclusion for the case of a piezoelectric medium. Approach testing for the spheroidal cavity (when revolution axis coincides with polarization axis), when the exact solution of the problem exists, confirms of its high effectiveness. Numerical researches were carried out and stress distribution and electrical displacements along cavity of the triaxial ellipsoidal surface.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Лехницький С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 415 с.
2. Kaloerov S. A., Antonov Yu. S. Thermostressed State of an Anisotropic Plate with Holes and Cracks // Int. Appl. Mech. – 2005. – Vol. 41. – № 9. – P. 1066–1075.
3. Kirilyuk V.S., Levchuk O.I. Stress State of a Transversely Isotropic Medium with Arbitrarily Orientated Spheroidal Inclusion // Int. Appl. Mech. – 2005. – Vol. 41. – № 2. – P. 137–143.
4. Kirilyuk V.S. The Stress State of an Elastic Orthotropic Medium with an Ellipsoidal Cavity // Int. Appl. Mech. – 2005. – Vol. 41. – № 3. – P. 302–308.
5. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость. – К.: Наук. думка, 1989. – 279 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 6-ти т.; Т. 1).
6. Podil'chuk Yu.N. Exact Analytical Solutions of Static Electroelastic and Thermoelastoelectric Problems for a Transversely Isotropic Body in Curvilinear Coordinate Systems // Int. Appl. Mech. – 2003. – Vol. 39. – № 2. – P. 132 – 170.
7. Kaloerov S.A., Baeva A.I., Glushchenko Yu.A. Two-Dimensional Electroelastic Problem for a Multiply Connected Piezoelectric Body // Int. Appl. Mech. – 2003. – Vol. 39. – N 1. – P. 77–84.
8. Dai L., Guo W., Wang X. Stress concentration at an elliptic hole in transversely isotropic piezoelectric solids // Int. J. Solids and Struct. – 2006. – Vol. 43. – № 6. – P. 1818–1831.
9. Dunn M.L., Taya M. Electroelastic Field Concentrations In and Around Inhomogeneities In Piezoelectric Solids // J. Appl. Mech. – 1994. – Vol. 61. – № 4. – P. 474– 475.
10. Mikata Y. Explicit determination of piezoelectric Eshelby tensors for a spheroidal inclusion // Int. J. Solids and Struct. – 2001. – Vol. 38. – № 40–41. – P. 7045–7063.
11. Podil'chuk Yu.N., Myasoedova I.G. Stress State of a Transversely Isotropic Piezoceramic Body with Spheroidal Cavity // Int. Appl. Mech. – 2004. – Vol. 40. – № 11. – P. 1269–1280.
12. Chiang C. R., Weng G.J. The nature of stress and electric-displacement concentrations around a strongly oblate cavity in a transversely isotropic piezoelectric material // Int. J. Fract. 2005. – Vol. 134. – № 3–4. – P. 319–337.

Надійшла до редакції 24.03.06 р.

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ О РЕКОНСТРУКЦИИ ПОЛОСТИ В УПРУГОМ СЛОЕ

А.О.Ватульян, О.А.Беляк,

Ростовский государственный университет, г. Ростов-на-Дону (Россия)

Рассмотрена задача об установившихся антиплоских колебаниях ортотропного упругого слоя толщины h с полостью произвольной формы малого характерного размера, колебания в котором вызываются касательной нагрузкой $p(x_1) = p_0 \delta(x_1 - x_0)$, приложенной на границе $x_3 = h$. Оси упругой симметрии совпадают с осями координат, из компонент вектора перемещений отлична от нуля компонента $u_2 = u(x_1, x_3)e^{-i\omega t}$. Краевая задача после отделения временного множителя имеет вид:

$$c_{66}u_{,11} + c_{44}u_{,33} + \rho\omega^2 u = 0; \quad (1)$$

$$x_3 = h, \quad c_{44}u_{,3} = p(x_1), \quad x_3 = 0, \quad u = 0;$$

$$\sigma_{ij}n_j = 0, \quad x \in l_0; \quad (2)$$

(n_1, n_3 – компоненты единичного вектора нормали к кривой l_0 внешнего по отношению к области, занятой упругой средой). Замыкают постановку задачи условия излучения, при формулировке которых использован принцип предельного поглощения [1].

Основным способом исследования краевой задачи (1) – (2) является предварительное сведение ее к интегральному уравнению с нерегулярным ядром на основе идей теории потенциала, аналогично реализованному в работе [2], причем фундаментальное решение представимо в виде интеграла по контуру в комплексной плоскости [1, 2]. Поле перемещений в слое имеет вид [2]

$$u(\xi) = u^*(\xi) - \int_{l_0} K(x, \xi) u(x) dl_x; \quad (3)$$

$$K(x, \xi) = c_{66}n_1 \frac{\partial U}{\partial x_1}(x, \xi) + c_{44}n_3 \frac{\partial U}{\partial x_3}(x, \xi);$$

где $u^*(\xi)$ – поле перемещений в слое без полости под действием нагрузки $p(x_1)$, именуемое далее эталонным. Исходя из общего представления ядра в (3), можно построить представление поля в дальней зоне на поверхности слоя

$$u(\xi_1, h) = u^*(\xi_1, h) - \sum_{p=1}^M A_p(u(x)) e^{i\alpha_p \xi_1}, \quad (4)$$

где

$$\alpha_p = \sqrt{\frac{k^2 h^2 - \pi^2(p-0,5)}{v h^2}} \quad (p=1, 2, \dots); \quad v = \frac{c_{66}}{c_{44}}; \quad k = \omega \sqrt{\frac{\rho}{c_{44}}};$$

M характеризует число распространяющихся волн в слое; $A_p(u(x))$ – линейные функционалы от $u(x)|_{l_0}$. Построение и анализ волнового поля в дальней зоне может быть осуществлен на основе трех подходов в зависимости от определения $u(x)|_{l_0}$.

Первый из них – метод граничных элементов (МГЭ) [2 - 4], который может быть реализован для полостей произвольной формы и размера на основе граничного интегрального уравнения (ГИУ) с нерегулярным ядром

$$\frac{1}{2}u(y) = u^*(y) - \int_{l_0} K(x, y) u(x) dl_x, \quad y \in l_0. \quad (5)$$

Процедура его дискретизации приводит к решению системы линейных уравнения относительно

узловых значений смещений на контуре, зная которые легко рассчитать амплитуды бегущих волн $A_p^{(1)}$.

Второй подход основан на асимптотическом анализе ГИУ (5) и поля перемещений на поверхности слоя (4) в случае малости характерного размера полости по сравнению с толщиной слоя.

Пусть полость представляет собой окружность радиуса r с центром в точке $C = (x_{10}, x_{30})$. В области изменения безразмерных параметров $\varepsilon = r/h \ll 1$ и $kr < 1$ проведен асимптотический анализ ядра $K(x, y)$ ГИУ (5). Затем, разлагая в ряд Тейлора величины, входящие в (5) при малых ε и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε в этом уравнении, получим представление для перемещения на контуре l_0 в виде:

$$u(x)|_{l_0} = u^*(C) + \varepsilon \left[u_{,1}^*(C)(\sqrt{v} + 1)\cos\theta + u_{,3}^*(C)\left(\frac{\sqrt{v} + 1}{\sqrt{v}}\right)\sin\theta \right] + \\ + \frac{\varepsilon^2}{2} \left[\frac{u_{,11}^*(C)(v + \sqrt{v} + 1) - u_{,33}^*(C)\sqrt{v}}{v + 1} \cos^2\theta + \right. \\ \left. + \frac{u_{,33}^*(C)(v + \sqrt{v} + 1) - u_{,11}^*(C)\sqrt{v}}{v + 1} \sin^2\theta \right] + O(\varepsilon^3), \quad (6)$$

где $x_1 = x_{10} + r\cos\theta$, $x_3 = x_{30} + r\sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Переходя к полярной системе координат и осуществляя интегрирование, получим выражения для амплитуд через эталонное поле:

$$A_p^{(2)} = (-1)^{p+1} \varepsilon^2 \pi h e^{-i\alpha_p x_{10}} \left[k^2 u^*(C) sh(\lambda_p x_{30}) / v \alpha_p + \right. \\ \left. + i u_{,1}^*(C) sh(\lambda_p x_{30}) - u_{,3}^*(C) \lambda_p ch(\lambda_p x_{30}) / v \alpha_p \right] + O(\varepsilon^4) \quad (7)$$

где $\lambda_p = \frac{i\pi(-0,5 + p)}{h}$ ($p = 1, 2, \dots, M$).

Третий подход – приближение Борна [5], которое дает результаты с достаточной точностью для слабых рассеивателей. При этом подходе перемещения на контуре заменяются эталонным полем смещений в точке C . Тогда выражение для амплитуд $A_p^{(3)}$, рассчитанное в рамках приближения Борна, имеет вид:

$$A_p^{(3)} = (-1)^{p+1} \varepsilon^2 \pi h e^{-i\alpha_p x_{10}} k^2 u^*(C) sh(\lambda_p x_{30}) / v \alpha_p. \quad (8)$$

Из выражений для амплитуд (7) и (8) видно, что приближение Борна не учитывает изменяемость смещений на контуре и в формуле (8) отсутствуют слагаемые, содержащие производные от эталонного поля. На рис. 1 и 2 представлены графики вещественной и мнимой части полей на поверхности слоя

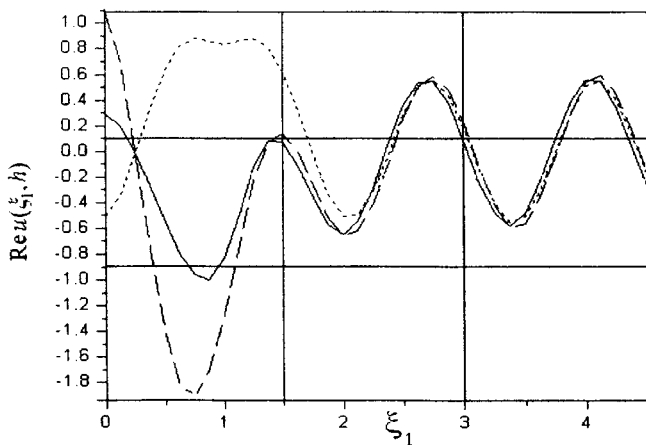


Рис. 1

$u(\xi_1, h)$, рассчитанных на основании МГЭ, асимптотического подхода, приближения Борна по формулам (4), (7), (8), причем сплошной линией изображены смещения в соответствии с МГЭ, точками – расчеты по асимптотической формуле, пунктир соответствует приближению Борна. В расчетах принято: $h = 1$ м, $\rho = 7100$ кг/м³ упругие постоянные (в Н/м²) $c_{66} = 5,05 \cdot 10^{10}$, $c_{44} = 7,93 \cdot 10^{10}$, $r = 0,18$ м, $x_{10} = 2$ м, $x_{30} = h/2$ м безразмерный параметр $\kappa = kh = 4$ (одна бегущая волна), $\rho_0/c_{44} = 1$, $x_0 = 0$. Число граничных элементов – $N = 32$. Численный эксперимент

показал, что при одной распространяющейся моде волновые поля существенно разнятся в ближней к полости зоне; в дальней зоне все подходы дают практически одинаковые результаты. Заметим, что асимптотический метод и приближение Борна могут быть использованы при расчете волновых полей в дальней зоне при $r/h = 0,001 \div 0,3$. При этом максимальная сравнительная погрешность амплитуд, рассчитанных по первому и второму способу $\varepsilon_{1,2} = \left| \frac{A_1^{(1)} - A_1^{(2)}}{A_1^{(1)}} \right| \cdot 100\% = 5,6\%$, а сравнительная погрешность

амплитуд, рассчитанных по формулам (7), (8), составляет менее процента, на частотах, при которых в слое распространяется одна волна. Этот факт позволяет рассчитывать поле на поверхности слоя (4), не прибегая к построению ГИУ и нахождению перемещений на контуре l_0 , что позволяет значительно упростить расчетную схему при анализе рассеянных полей. Однако, численный эксперимент для полостей с $r/h = 0,001 \div 0,15$ и $\kappa = 6$ (две бегущие волны) показал, что приближение Борна дает совершенно неприемлемый результат при расчете поля на поверхности, в то время как, асимптотический метод дает результаты, близкие по сравнению с МГЭ.

Обратная задача состоит в определении контура l_0 на основе измеренных значений амплитуд A_p^* ($p=1,2$) поля смещений на поверхности слоя в дальней зоне, рассчитанных на основе МГЭ на частотах, когда в слое имеется две бегущие волны. Решение обратной задачи о восстановлении 3-х параметров (координат центра полости x_{10}, x_{30} и ее радиуса r) находилось из условия минимума построенного функционала невязки

$$\Phi[x_{10}, x_{30}] = \left| \frac{A_1^*}{A_2^*} - H(x_{10}, x_{30}) \right|^2, \quad H(x_{10}, x_{30}) = A_1 / A_2.$$

Выражения для амплитуд A_1, A_2 рассчитывались по формуле (7), а нахождение их частного позволяло исключить радиус полости. Минимум введенного функционала, зависящего от двух переменных, разыскивался с помощью итерационного процесса, основанного на методе градиентного спуска. Далее, найденные координаты центра полости подставлялись в одно из выражений для A_1 или A_2 , откуда и находился радиус полости.

На рис. 3 представлены графики относительной погрешности $\varepsilon(\%)$ восстановления x_{10}, x_{30}, r при изменении безразмерного параметра kr . Сплошной линией изображена относительная погрешность восстановления x_{10} , пунктиром – относительная погрешность восстановления x_{30} , точками – относительная погрешность восстановления радиуса полости.

В расчетах приняты те же значения параметров, что и выше, за исключением $\kappa = 6$. Результаты численных экспериментов указывают на достаточно эффективную процедуру идентификации важнейших параметров, характеризующих полость.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 05-01-00734).

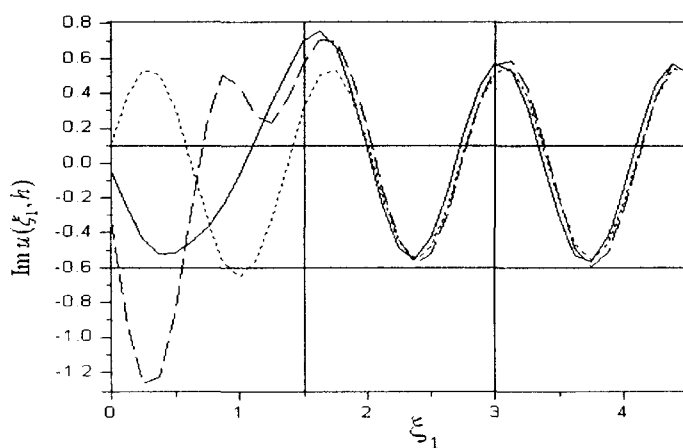


Рис. 2

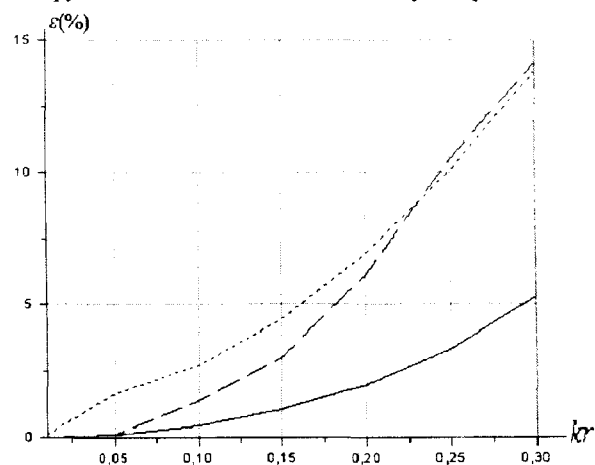


Рис. 3

РЕЗЮМЕ

Розглянуто задачу про змушені коливання шару з довільною порожниною малого характерного розміру під дією поверхневого навантаження. Рішення здійснене методом граничних елементів, асимптотичним методом і на основі наближення Борна, проведені їх порівняльний аналіз і виявлені область застосовності. Зроблено реконструкцію порожнини малого розміру на підставі інформації про поле переміщень на поверхні шару, розрахованого за допомогою асимптотичного методу.

SUMMARY

The problem about forced motions of orthotropic elastic layer with a cavity of small characteristic size is considered. The solution technique is based on the three methods. These are method of boundary element, asymptotic method and Born approximation. The numerical results are given for some field of parameters where Born approximation can not be used. But asymptotic method and method of boundary element are compared in this field of parameters. The cavity in elastic layer was reconstructed on basis of field displacement from asymptotic approach.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. -- М.: Наука, 1979. -- 319 с.
2. Ватульян А.О., Суворова О.А. Об обратной задаче для упругого слоя с полостью // Экологический вестник научных центров черноморского сотрудничества (ЧЭС). -- 2005. -- №1. -- С. 10-16.
3. Бребия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. -- М.: Мир, 1987. -- 524 с.
4. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. -- М.: Мир, 1984. -- 494 с.
5. Горюнов А.А., Сасковец А.В. Обратные задачи рассеяния в акустике. -- М.: Изд-во МГУ, 1989. -- 152 с.

Надійшла до редакції 23.03.2006 р.

УДК 539.3

НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ В ДВУХСЛОЙНОМ АНИЗОТРОПНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С ВЫРАБОТКАМИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛ ТЯЖЕСТИ

Н.М.Нескородев, Р.Н.Нескородев

Методы решения задач о напряженно - деформированном состоянии массива горных пород с протяженными горизонтальными выработками, пройденными на большой глубине, достаточно хорошо разработаны, если толща пород представлена однородным материалом [1–3]. Данная статья посвящена разработке метода исследования напряжений и перемещений, возникающих около выработок в неоднородной толще, состоящей из двух слоев с различными физико-механическими свойствами материалов.

Постановка задачи. Рассматривается массив горных пород, толща которого представлена двумя слоями: верхний Ω_1 толщиной H и нижний Ω_2 , бесконечной толщины. Массив моделируется полупространством, ограниченным горизонтальной плоскостью. Отнесем его к декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ с началом на глубине H . Ось Ox_2 направим вверх, а плоскость Ox_1x_3 совместим с горизонтальной плоскостью сопряжения слоев (рис.1). Свойства материалов, составляющих слои, различны и для их описания используем модель упругого анизотропного тела. Величинам, относящимся к слою Ω_r ($r=1,2$) будем приписывать сверху индекс (r) . Полагаем линейную связь между напряжениями и деформациями, выраженную обобщенным законом Гука, который на r -м слое имеет вид:

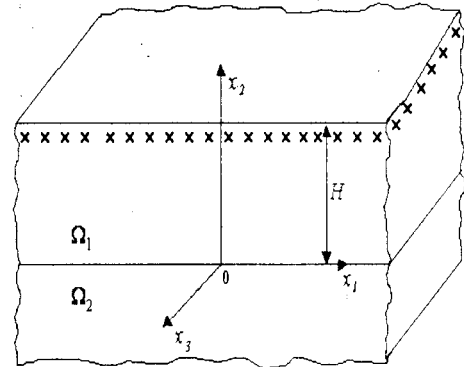


Рис.1

$$\varepsilon_i^{(r)} = \sum_{k=1}^6 a_{ik}^{(r)} \sigma_k^{(r)}, \quad (1)$$

или

$$\sigma_i^{(r)} = \sum_{k=1}^6 A_{ik}^{(r)} \varepsilon_k^{(r)}, \quad (2)$$

где $a_{ik}^{(r)}$ – коэффициенты деформации, а $A_{ik}^{(r)}$ – модули упругости r -го слоя.

Уравнения (1) или (2) вместе с уравнениями равновесия

$$\begin{aligned} \partial_1 \sigma_1^{(r)} + \partial_2 \sigma_6^{(r)} + \partial_3 \sigma_5^{(r)} + X^{(r)} &= 0, \\ \partial_1 \sigma_6^{(r)} + \partial_2 \sigma_2^{(r)} + \partial_3 \sigma_4^{(r)} + Y^{(r)} &= 0, \\ \partial_1 \sigma_5^{(r)} + \partial_2 \sigma_4^{(r)} + \partial_3 \sigma_3^{(r)} + Z^{(r)} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

и соотношениями Коши

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^{(r)} &= \partial_1 u_1^{(r)}, \quad \varepsilon_2^{(r)} = \partial_2 u_2^{(r)}, \quad \varepsilon_3^{(r)} = \partial_3 u_3^{(r)}, \quad \varepsilon_4^{(r)} = \partial_2 u_3^{(r)} + \partial_3 u_2^{(r)}, \\ \varepsilon_5^{(r)} &= \partial_1 u_3^{(r)} + \partial_3 u_1^{(r)}, \quad \varepsilon_6^{(r)} = \partial_1 u_2^{(r)} + \partial_2 u_1^{(r)} \end{aligned} \quad (4)$$

образуют полную систему дифференциально-алгебраических соотношений, описывающих упругие процессы в анизотропных средах.

Массив рассматривается как тяжелое упругое полупространство, свободное от напряжений на границе $x_2 = H$. Требуется определить напряжения и перемещения от действия сил гравитации. Для этого необходимо проинтегрировать уравнения (1)-(4) при условиях на границе и контакте соседних слоев:

$$\sigma_2^{(1)} = \sigma_4^{(1)} = \sigma_6^{(1)} = 0 \quad \text{при } x_2 = H; \quad (5)$$

$$\sigma_i^{(1)} = \sigma_i^{(2)} \quad (i = 2, 4, 6), \quad u_k^{(1)} = u_k^{(2)} \quad (k = \overline{1, 3}) \quad \text{при } x_2 = 0. \quad (6)$$

Условия (6) отражают идеальный механический контакт на сопряжении слоев. Перемещения и напряжения в сплошном анизотропном массиве от действия сил гравитации. Будем считать, что толщина пород в слоях представлена однородными по плотности $\left(\rho^{(r)} = \text{const}\right)$ материалами. Отсутствие границ в направлении осей Ox_1 и Ox_3 накладывает ограничения на компоненты напряжений и перемещений. Они не должны зависеть от этих координат. Для определения величин $u_{k0}^{(r)}(x_2)$ и $\sigma_{i0}^{(r)}(x_2)$ в нетронутом массиве необходимо проинтегрировать уравнения (1), (3), (4) при граничных условиях (5) – (6). В принятой системе координат (ось Ox_2 направлена вверх) объемные силы имеют вид [4]

$$X^{(r)} = Z^{(r)} = 0, \quad Y^{(r)} = -\rho^{(r)}g, \quad (7)$$

где g – ускорение силы тяжести, а $\rho^{(r)}$ – плотности материалов в слоях.

Выражения для напряжений $\sigma_{i0}^{(r)}$ представим в форме

$$\sigma_{i0}^{(r)} = \tau_i^{(r)} \sigma_{20}^{(r)}. \quad (8)$$

Здесь величины $\tau_i^{(r)}$ ($i = 2, 4, 6$) и $\sigma_{20}^{(r)}$ определяются интегрированием уравнений равновесия (3) с учетом зависимостей (7) и условий (5) – (6):

$$\tau_2^{(r)} = 1, \quad \tau_4^{(r)} = \tau_6^{(r)} = 0, \quad \sigma_{20}^{(r)} = \rho^{(r)}gx_2 - \rho^{(1)}gH. \quad (9)$$

Первое, третье и пятое уравнения закона Гука (1) дают систему алгебраических уравнений для определения постоянных $\tau_1^{(r)}, \tau_3^{(r)}, \tau_5^{(r)}$:

$$a_{i1}^{(r)}\tau_1^{(r)} + a_{i3}^{(r)}\tau_3^{(r)} + a_{i5}^{(r)}\tau_5^{(r)} = -a_{i2}^{(r)} \quad (i = 1, 3, 5). \quad (10)$$

Окончательные выражения для напряжений (8) принимают вид

$$\sigma_{i0}^{(r)} = -\tau_i^{(r)}gH\left(\rho^{(1)} - \rho^{(r)}x_2/H\right) \quad (i = \overline{1, 6}). \quad (11)$$

Перемещения найдем интегрированием второго, четвертого и шестого уравнений закона Гука (1) и удовлетворением граничным условиям (6):

$$u_{k0}^{(r)} = -\alpha_k^{(r)}gH\left(\rho^{(1)}x_2 - \rho^{(r)}\frac{x_2^2}{2H}\right) + v_k, \quad (k = \overline{1, 3}), \quad (12)$$

где v_k – постоянные интегрирования, а $\alpha_k^{(r)}$ определяются соотношениями

$$\alpha_1^{(r)} = \sum_{k=1}^6 a_{6k}^{(r)}\tau_k^{(r)}, \quad \alpha_2^{(r)} = \sum_{k=1}^6 a_{2k}^{(r)}\tau_k^{(r)}, \quad \alpha_3^{(r)} = \sum_{k=1}^6 a_{4k}^{(r)}\tau_k^{(r)}. \quad (13)$$

Перемещения и напряжения в анизотропном массиве, учитывающие влияние выработок.

Пусть в областях Ω_r вблизи плоскости раздела слоев пройдены горизонтальные выработки с контурами $L_{kr}^{(r)} \quad (k_r = \overline{1, n_r})$ в направлении оси Ox_3 . Принимаем два предположения. Первое – о том, что размеры поперечных сечений выработок в плоскости Ox_1x_2 пренебрежимо малы по сравнению с глубиной их нахождения, а второе – о том, что протяженность выработок в направлении оси Ox_3 велика. Это дает возможность не учитывать влияние выработок на напряженное состояние вблизи граничной поверхности $x_2 = H$ и считать, что выработки находятся в условиях обобщенной плоской деформации, т. е. все поперечные сечения на некотором расстоянии от краев находятся в одинаковых условиях. Поэтому перемещения и напряжения не меняются вдоль оси Ox_3 , а зависят только от координат x_1 и x_2 . Компоненты

напряженно - деформированного состояния, учитывающие влияние выработок, находятся интегрированием уравнений (2) – (4) без учета объемных сил (7). В результате, перемещения и напряжения найдены через аналитические функции $\varphi_j^{(r)}(z_j^{(r)})$ обобщенных комплексных переменных $z_j^{(r)} = x_1 + \mu_j^{(r)}x_2$ ($j = \overline{1,3}$) [3]:

$$\begin{aligned} u_{k1}^{(r)} &= 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^3 R_{kj}^{(r)} \varphi_j^{(r)}(z_j^{(r)}), \\ \sigma_{i1}^{(r)} &= 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^3 P_{ij}^{(r)} \Phi_j^{(r)}(z_j^{(r)}) \quad (k = 1, 2, 3; \quad i = \overline{1,6}), \\ \Phi_j^{(r)}(z_j^{(r)}) &= d\varphi_j^{(r)} / dz_j^{(r)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Граничные условия (6) на контакте областей Ω_1 и Ω_2 запишутся так:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^3 \left[P_{ij}^{(1)} \Phi_j^{(1)}(x_1) - P_{ij}^{(2)} \Phi_j^{(2)}(x_1) \right] &= 0 \quad (i = 2, 4, 6), \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^3 \left[R_{kj}^{(1)} \varphi_j^{(1)}(x_1) - R_{kj}^{(2)} \varphi_j^{(2)}(x_1) \right] &= 0 \quad (k = \overline{1, 3}). \end{aligned} \quad (15)$$

Удовлетворим условиям (15). Функции $\varphi_j^{(r)}(z_j^{(r)})$ выбираем в форме

$$\begin{aligned} \varphi_j^{(1)}(z_j^{(1)}) &= \varphi_{j1}^{(1)}(z_j^{(1)}) + \sum_{p=1}^3 \left[\bar{\alpha}_{jp} \bar{\varphi}_{p1}(z_j^{(1)}) + \beta_{j+3,p} \varphi_{p2}(z_j^{(1)}) \right], \\ \varphi_j^{(2)}(z_j^{(2)}) &= \varphi_{j2}^{(2)}(z_j^{(2)}) + \sum_{p=1}^3 \left[\bar{\beta}_{jp} \bar{\varphi}_{p2}(z_j^{(2)}) + \alpha_{j+3,p} \varphi_{p1}(z_j^{(2)}) \right], \end{aligned} \quad (16)$$

где функции $\varphi_{jr}^{(r)}(z_j^{(r)})$ учитывают влияние выработок.

Из граничных условий (15) находим системы линейных алгебраических уравнений для определения постоянных α_{jp} и β_{jp} , входящих в соотношения (16):

$$\sum_{j=1}^3 \left[\bar{R}_{kj}^{(1)} \alpha_{jp} - R_{kj}^{(2)} \alpha_{j+3,p} \right] = -R_{kp}^{(1)}, \quad \sum_{j=1}^3 \left[\bar{P}_{ij}^{(1)} \alpha_{jp} - P_{ij}^{(2)} \alpha_{j+3,p} \right] = -P_{ip}^{(1)}, \quad (17)$$

$$\sum_{j=1}^3 \left[\bar{R}_{kj}^{(2)} \beta_{jp} - R_{kj}^{(1)} \beta_{j+3,p} \right] = -R_{kp}^{(2)}, \quad \sum_{j=1}^3 \left[\bar{P}_{ij}^{(2)} \beta_{jp} - P_{ij}^{(1)} \beta_{j+3,p} \right] = -P_{ip}^{(2)}, \quad (18)$$

где $k = 1, 2, 3$; $i = 2, 4, 6$; $p = 1, 2, 3$.

Таким образом, представления (16) тождественно удовлетворяют условиям сопряжения (15), если постоянные α_{jp} и β_{jp} найдены из уравнений (17)–(18).

Граничные условия на контурах незакрепленных выработок. Для массива с выработками, контуры $L_{kr}^{(r)}$ которых не подкреплены, функции (16) определяются из граничных условий:

$$n_{1kr}^{(r)} \sigma_1^{(r)} + n_{2kr}^{(r)} \sigma_6^{(r)} = X_{nkr}^{(r)}, \quad n_{1kr}^{(r)} \sigma_6^{(r)} + n_{2kr}^{(r)} \sigma_2^{(r)} = Y_{nkr}^{(r)}, \quad n_{1kr}^{(r)} \sigma_5^{(r)} + n_{2kr}^{(r)} \sigma_4^{(r)} = Z_{nkr}^{(r)}. \quad (19)$$

Здесь $\sigma_i^{(r)} = \sigma_{i0}^{(r)} + \sigma_{i1}^{(r)}$, где $\sigma_{i0}^{(r)}$ и $\sigma_{i1}^{(r)}$ – компоненты напряжений (11) и (14); $n_{1kr}^{(r)} = \cos(n_{kr}^{(r)}, x_1)$,

$n_{2k_r}^{(r)} = \cos(n_{k_r}^{(r)}, x_2)$, $n_{k_r}^{(r)}$ – внешняя нормаль к контуру $L_{k_r}^{(r)}$; $X_{nk_r}^{(r)}$, $Y_{nk_r}^{(r)}$, $Z_{nk_r}^{(r)}$ – проекции внешних усилий на оси x_1 , x_2 и x_3 .

Подставим в условия (19) значения для $\sigma_{k0}^{(r)}$ и $\sigma_{k1}^{(r)}$. После интегрирования получим граничные условия для нахождения функций $\varphi_j^{(r)}(z_j^{(r)})$:

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}\left[\mu_1^{(r)}\varphi_1^{(r)} + \mu_2^{(r)}\varphi_2^{(r)} + \mu_3^{(r)}\lambda_3^{(r)}\varphi_3^{(r)}\right] &= \tau_1^{(r)}\rho^{(1)}gHx_2 + I_1 + c_1, \\ 2\operatorname{Re}\left[\varphi_1^{(r)} + \varphi_2^{(r)} + \lambda_3^{(r)}\varphi_3^{(r)}\right] &= \tau_2^{(r)}\rho^{(1)}gHx_1 + I_2 + c_2, \\ 2\operatorname{Re}\left[\lambda_1^{(r)}\varphi_1^{(r)} + \lambda_2^{(r)}\varphi_2^{(r)} + \varphi_3^{(r)}\right] &= -\tau_3^{(r)}\rho^{(1)}gHx_2 + I_3 + c_3, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= -\tau_1^{(r)}\rho^{(r)}gx_2^2/2 + \int_0^s X_{nk_r}^{(r)}ds, \quad I_2 = -\tau_2^{(r)}\rho^{(r)}g \int_0^s x_2 dx_1 - \int_0^s Y_{nk_r}^{(r)}ds, \\ I_3 &= \tau_3^{(r)}\rho^{(r)}gx_2^2/2 - \int_0^s Z_{nk_r}^{(r)}ds. \end{aligned}$$

Массив с выработкой эллиптического сечения в слое Ω_1 . Пусть выработка эллиптического сечения пройдена в слое Ω_1 . Уравнение контура $L_1^{(1)}$ в параметрической форме имеет вид

$$x_1 - x_{10} = a \cos \theta, \quad x_2 - x_{20} = b \sin \theta \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (21)$$

где a и b полуоси, а (x_{10}, x_{20}) координаты центра выработки.

Необходимо из граничных условий (20) определить функции $\varphi_j^{(r)}(z_j^{(r)})$. Эти функции определены в областях $S_j^{(r)}$, которые получаются из заданной области S аффинными преобразованиями [5]

$$x_{1j}^{(r)} = x_1 + \alpha_j^{(r)}x_2, \quad x_{2j}^{(r)} = \beta_j^{(r)}x_2, \quad \mu_j^{(r)} = \alpha_j^{(r)} + i\beta_j^{(r)}. \quad (22)$$

Контур $L_1^{(1)}$ в областях $S_j^{(1)}$ соответствуют контуры $L_{1j}^{(1)}$, уравнения которых имеют вид

$$\begin{aligned} t_j^{(1)} - t_{j0}^{(1)} &= x_1 - x_{10} + \mu_j^{(1)}(x_2 - x_{20}) = R_j^{(1)}\sigma + m_j^{(1)}/\sigma, \\ R_j^{(1)} &= (a - i\mu_j^{(1)}b)/2, \quad m_j^{(1)} = (a + i\mu_j^{(1)}b)/2, \quad \sigma = e^{i\theta}. \end{aligned} \quad (23)$$

Функция, отображающая внешность единичного круга на внешность эллиптического контура $L_{1j}^{(1)}$, на основании формулы (23) принимает следующий вид

$$z_j^{(1)} - t_{j0}^{(1)} = R_j^{(1)}\varsigma_j^{(1)} + m_j^{(1)}/\varsigma_j^{(1)}, \quad \left|\varsigma_j^{(1)}\right| \geq 1. \quad (24)$$

Представления (16) в рассматриваемом случае запишутся так

$$\varphi_j^{(1)}(z_j^{(1)}) = \varphi_{j1}(\varsigma_j^{(1)}) + \sum_{p=1}^3 \bar{\alpha}_{jp} \bar{\varphi}_{p1}(\bar{\varsigma}_{pj}^{(1)}), \quad \varphi_j^{(2)}(z_j^{(2)}) = \sum_{p=1}^3 \alpha_{j+3,p} \varphi_{p1}(\varsigma_{pj}^{(2)}). \quad (25)$$

Функции $\varsigma_j^{(1)}$ связаны с $z_j^{(1)}$ формулами (24), а $\varsigma_{pj}^{(r)}$ находятся из соотношений

$$\begin{aligned}\bar{z}_j^{(1)} - t_{p0}^{(1)} &= R_p^{(1)} \varsigma_{pj}^{(1)} + m_p^{(1)} / \varsigma_{pj}^{(1)}, \quad \left| \varsigma_{pj}^{(1)} \right| \geq 1, \\ z_j^{(2)} - t_{p0}^{(1)} &= R_p^{(1)} \varsigma_{pj}^{(2)} + m_p^{(1)} / \varsigma_{pj}^{(2)}, \quad \left| \varsigma_{pj}^{(2)} \right| \geq 1.\end{aligned}\quad (26)$$

Полагаем проекции внешних усилий равными нулю и рассматриваем только действие сил тяжести. На контуре главный вектор усилий не равен нулю, так как интеграл I_2 , входящий в условия (20) имеет логарифмическое слагаемое

$$\int_0^s x_2 dx_1 = (x_1 x_2 + iab \ln \sigma) / 2. \quad (27)$$

Поэтому функции $\varphi_{j1}(\varsigma_j^{(1)})$ представим в виде [5]:

$$\varphi_{j1}(\varsigma_j^{(1)}) = A_j \ln(\varsigma_j^{(1)}) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{jk}}{[\varsigma_j^{(1)}]^k}. \quad (28)$$

Представления (25) в этом случае станут такими:

$$\begin{aligned}\varphi_j^{(1)}(z_j^{(1)}) &= A_j \ln(\varsigma_j^{(1)}) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{jk}}{[\varsigma_j^{(1)}]^k} + \sum_{p=1}^3 \bar{\alpha}_{jp} \left[\bar{A}_p \ln(\bar{\varsigma}_{pj}^{(1)}) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_{pk}}{[\bar{\varsigma}_{pj}^{(1)}]^k} \right], \\ \varphi_j^{(2)}(z_j^{(2)}) &= \sum_{p=1}^3 \alpha_{j+3,p} \left[A_p \ln(\varsigma_p^{(2)}) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{pk}}{[\varsigma_{pj}^{(2)}]^k} \right].\end{aligned}\quad (29)$$

Функции $[\bar{\varsigma}_{pj}^{(1)}]^{-k}$ и $\ln(\bar{\varsigma}_{pj}^{(1)})$ являются голоморфными внутри эллипсов $L_j^{(1)}$. В этих областях их можно разложить в ряды по степеням переменной σ :

$$\begin{aligned}\left[\varsigma_{pj}^{(1)} (\bar{z}_j^{(1)} - t_{p0}^{(1)}) \right]^{-k} &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[A_{mkp}^{(j)} \sigma^m + B_{mkp}^{(j)} \sigma^{-m} \right], \\ \ln \left[\varsigma_{pj}^{(1)} (\bar{z}_j^{(1)} - t_{p0}^{(1)}) \right] &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[C_{mp}^{(j)} \sigma^m + D_{mp}^{(j)} \sigma^{-m} \right],\end{aligned}\quad (30)$$

где

$$\begin{aligned}A_{mkp}^{(j)} &= \int_s \left[\varsigma_{pj}^{(1)} (\bar{z}_j^{(1)} - t_{p0}^{(1)}) \right]^{-k} \sigma^{-m} d\sigma, \quad B_{mkp}^{(j)} = \int_s \left[\varsigma_{pj}^{(1)} (\bar{z}_j^{(1)} - t_{p0}^{(1)}) \right]^{-k} \sigma^m d\sigma, \\ C_{mp}^{(j)} &= \int_s \ln \left[\varsigma_{pj}^{(1)} (\bar{z}_j^{(1)} - t_{p0}^{(1)}) \right] \sigma^{-m} d\sigma, \quad D_{mp}^{(j)} = \int_s \ln \left[\varsigma_{pj}^{(1)} (\bar{z}_j^{(1)} - t_{p0}^{(1)}) \right] \sigma^m d\sigma.\end{aligned}$$

Из условий (20) и условий однозначности перемещений находим систему линейных алгебраических уравнений для определения постоянных A_n :

$$2 \operatorname{Im} \sum_{n=1}^3 \mu_n^{(1)} p_n^{(1)} A_n = 0, \quad 2 \operatorname{Im} \sum_{n=1}^3 p_n^{(1)} A_n = -\tau_2^{(1)} abi / 2 / H,$$

$$2 \operatorname{Im} \sum_{n=1}^3 r_n^{(1)} A_n = 0, \quad 2 \operatorname{Im} \left[R_{k1}^{(1)} A_1 + R_{k2}^{(1)} A_2 + R_{k3}^{(1)} A_3 \right] = 0 \quad (k=1, 2, 3). \quad (31)$$

Постоянные a_{jk} представлений (28) находятся из граничных условий (20) на контуре $L_1^{(1)}$. Алгебраическая система получена методом рядов и имеет вид:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^3 \left[\mu_n^{(1)} p_n^{(1)} a_{nk} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_{nm} Q_{1kmn} + \bar{a}_{nm} \bar{R}_{1kmn}) \right] &= \gamma_{1k} - \sum_{p=1}^3 (A_p q_{1kp} + \bar{A}_p r_{1kp}), \\ \sum_{n=1}^3 \left[p_n^{(1)} a_{nk} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_{nm} Q_{2kmn} + \bar{a}_{nm} \bar{R}_{2kmn}) \right] &= \gamma_{2k} - \sum_{p=1}^3 (A_p q_{2kp} + \bar{A}_p r_{2kp}), \\ \sum_{n=1}^3 \left[r_n^{(1)} a_{nk} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_{nm} Q_{3kmn} + \bar{a}_{nm} \bar{R}_{3kmn}) \right] &= \gamma_{3k} - \sum_{p=1}^3 (A_p q_{3kp} + \bar{A}_p r_{3kp}). \end{aligned} \quad (32)$$

Систему (32) нужно дополнить сопряженными уравнениями, где были использованы такие обозначения:

$$\begin{aligned} Q_{1kmn} &= \sum_{j=1}^3 \alpha_{jp} B_{kmn}^{(j)} \bar{\mu}_j^{(1)} \bar{p}_j, \quad Q_{2kmn} = \sum_{j=1}^3 \alpha_{jp} B_{kmn}^{(j)} \bar{p}_j, \quad Q_{3kmn} = \sum_{j=1}^3 \alpha_{jp} B_{kmn}^{(j)} \bar{r}_j, \\ R_{1kmn} &= \sum_{j=1}^3 \bar{\alpha}_{jp} \bar{A}_{kmn}^{(j)} \mu_j^{(1)} p_j, \quad R_{2kmn} = \sum_{j=1}^3 \bar{\alpha}_{jp} \bar{A}_{kmn}^{(j)} p_j, \quad R_{3kmn} = \sum_{j=1}^3 \bar{\alpha}_{jp} \bar{A}_{kmn}^{(j)} r_j, \\ q_{1kp} &= \sum_{j=1}^3 \alpha_{jp} D_{kp}^{(j)} \bar{\mu}_j^{(1)} \bar{p}_j, \quad q_{2kp} = \sum_{j=1}^3 \alpha_{jp} D_{kp}^{(j)} \bar{p}_j, \quad q_{3kp} = \sum_{j=1}^3 \alpha_{jp} D_{kp}^{(j)} \bar{r}_j, \\ r_{1kp} &= \sum_{j=1}^3 \bar{\alpha}_{jp} \bar{C}_{kp}^{(j)} \mu_j^{(1)} p_j, \quad r_{2kp} = \sum_{j=1}^3 \bar{\alpha}_{jp} \bar{C}_{kp}^{(j)} p_j, \quad r_{3kp} = \sum_{j=1}^3 \bar{\alpha}_{jp} \bar{C}_{kp}^{(j)} r_j, \\ \gamma_{11} &= i\tau_1^{(1)} b/2, \quad \gamma_{12} = \tau_1^{(1)} b^2/8/H, \quad \gamma_{21} = \tau_2^{(1)} a/2, \quad \gamma_{22} = -i\tau_2^{(1)} ab/8/H, \\ \gamma_{31} &= -i\tau_5^{(1)} b/2, \quad \gamma_{32} = -\tau_5^{(1)} b^2/8/H, \quad \gamma_{1k} = \gamma_{2k} = \gamma_{3k} = 0 \quad (k > 2). \end{aligned}$$

Здесь, и в системах (31), (32) введены векторы $p = [1, 1, \lambda_3^{(1)}]$, $r = [\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, 1]$.

После определения из систем (31) и (32) коэффициентов A_j и a_{jk} станут известными функции (29), через которые можно найти напряжения и перемещения.

Численные исследования были проведены для Алевролита 1 и Алевролита 2 (далее А1 и А2). Постоянные для этих материалов приведены в табл. 1 [1], причем $E = 9.81 \cdot 10^3$ МПа. Рассматривался мас-

Таблица 1

Материал	E_1/E	E_2/E	G_2/E	ν_1	ν_2	ρ
A1	6.210	5.680	2.290	0.215	0.260	2500
A2	1.074	0.523	0.120	0.413	0.198	2500

сив, ослабленный выработкой кругового сечения с радиусом $R = 2$ м., когда $x_{10} = 0$, а $x_{20} = 3$ м. На рисунках приведены графики распределения напряжений $\sigma_\theta / \rho^{(1)} gH$. На рис. 2 даны результаты расчетов для случая, когда слой Ω_1 составлен из материала А1, а на рис. 3 – из материала А2.

Жесткость материала, из которого составлен слой Ω_2 , варьировалась от бесконечно большой

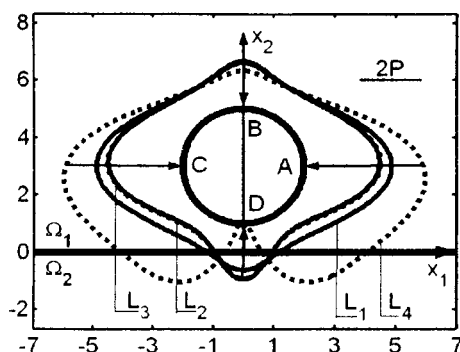


Рис. 2

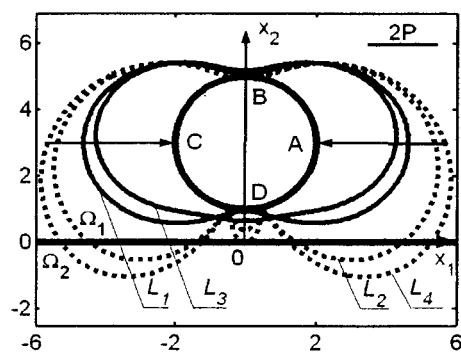


Рис. 3

(кривая L_3) до бесконечно малой (кривая L_4) в обоих случаях. В табл. 2 и 3 приведены значения напряжений $\sigma_\theta / \rho^{(1)} gH$ соответствующих рисунков в отмеченных точках А, В, С и D.

Таблица 2

кривые	точки			Модули упругости слоя Ω_2
	А, С	В	D	
L_3	-2.267	-0.183	-0.360	$(A_{ij})_{\Omega_2} \times 10^4$
L_1	-2.633	-0.071	-0.073	$(A_{ij})_{\Omega_1}$
L_2	-3.383	0.088	0.633	$(A_{ij})_{\Omega_2}$
L_4	-3.657	0.149	0.933	$(A_{ij})_{\Omega_2} \times 10^{-4}$

Таблица 3

кривые	точки			Модули упругости слоя Ω_2
	А, С	В	D	
L_3	-2.472	-1.675	-1.949	$(A_{ij})_{\Omega_2} \times 10^4$
L_2	-2.513	-1.671	-1.923	$(A_{ij})_{\Omega_1}$
L_1	-2.877	-1.609	-1.641	$(A_{ij})_{\Omega_2}$
L_4	-3.906	-1.338	0.121	$(A_{ij})_{\Omega_2} \times 10^{-4}$

В табл. 4 даны значения напряжений $\sigma_\theta / \rho^{(1)} gH$ в зависимости от расстояния центра выработки x_{20} от границы раздела слоев. Значение $x_{20} = \infty$ соответствует случаю, когда материалы слоев одинаковы и соответствуют материалу слоя Ω_1 . Первые три колонки в точках А, В, С и D относятся к случаю, когда слой Ω_1 составлен из материала А2, а слой Ω_2 – из более жесткого материала А1. В следующих трех колонках приведены напряжения, когда материалы, составляющие слои, поменялись местами.

Анализ результатов расчетов показал, что напряжения на контуре выработки, являясь сжи-

Таблица 4

x_{20}	$\Omega_1 = A2, \Omega_2 = A1$			$\Omega_1 = A1, \Omega_2 = A2$		
	A, C	B	D	A, C	B	D
∞	-2.877	-1.609	-1.641	-2.633	-0.0714	-0.073
4	-2.585	-1.684	-1.975	-3.125	0.038	0.293
3	-2.513	-1.671	-1.923	-3.383	0.088	0.633
2.5	-2.473	-1.644	-1.491	-3.554	0.117	0.742
2.1	-2.444	-1.603	-0.330	-3.707	0.072	-3.678

маючими, растут с уменьшением жесткости материала слоя Ω_2 . При сближении контура выработки с границей раздела слоев в боковых точках выработки (А, С) наблюдается уменьшение сжимающих напряжений, если слой Ω_2 составлен из более жесткого материала и их рост, если материал слоя Ω_2 менее жесткий. Одновременно с этим возникают зоны растягивающих напряжений, особенно вблизи границы раздела слоев.

РЕЗЮМЕ

У статті запропоновано метод дослідження напруженого стану, що виникає біля виробок у неоднорідній товщі гірничих порід, що складається з двох шарів з різними фізико-механічними властивостями матеріалів. Приведено результати чисельних досліджень.

SUMMARY

In article the method of research of the strain state arising about excavation in not uniform thickness of rock, consisting of two layers with various physical and mechanical properties of materials is offered. Results of numerical researches are resulted.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ержанов Ж.С., Айтиалиев Ш.М., Масанов Ж.К. Сейсмонапряженное состояние подземных сооружений в анизотропном слоистом массиве. – Алма-Ата: Наука, 1980. – 212 с.
2. Управление напряженным состоянием породного массива и устойчивостью горных выработок / В.А.Полухин, С.А.Калоеров, Ю.Б.Грядущий, Е.С.Горянская. – Донецк: Юго-Восток, 2002. – 304 с.
3. Нескородев Н.М., Нескородев Р.Н. Напряжения вокруг выработок в анизотропном горном массиве. – Донецк, 2003. – 148 с.
4. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наук. думка, 1968. – 887 с.
5. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 415 с.

Надійшла до редакції 10.03.2006 р.

**РОЗРАХУНОК ТЕРМОНАПРУЖЕНОГО СТАНУ ФЕРОМАГНІТНОГО
ЦИЛІНДРА ЗА ІНДУКЦІЙНОГО НАГРІВАННЯ В РАМКАХ МОДЕЛІ
НЕФЕРОМАГНІТНОГО ТЕРМОЧУТЛИВОГО ПРУЖНО-
ПЛАСТИЧНОГО ЕЛЕКТРОПРОВІДНОГО ТІЛА**

О.Р.Гачкевич, Б.Д.Дробенко, З.І.Касперський,

Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України, м. Львів,

Політехніка Опольська, м. Ополь, Польща

Розрахунок параметрів, що характеризують електромагнітне поле (ЕМП), температуру і напружено-деформований стан у виробках з електропровідних матеріалів за умов їх високотемпературної індукційної обробки, є доволі складною математичною проблемою. Специфіка опису взаємодії ЕМП з матеріальним континуумом, необхідність врахування термочутливості матеріалу, пружно-пластичного характеру деформування, нелінійних залежностей індукції від напруженості поля приводить до зв'язаної системи нелінійних диференціальних рівнянь еліптичного, гіперболічного і параболічного типів [1], чисельне розв'язування яких у зв'язку з комплексністю такої задачі висуває значні вимоги щодо швидкодії і об'ємів пам'яті комп'ютерних систем вже у просторово двовимірному випадку [2]. У зв'язку з цим у більшості сучасних праць, присвячених моделюванню індукційного нагріву, механічний фактор або не розглядають, або задачу термомеханіки розв'язують у пружному наближенні без врахування температурної залежності характеристик матеріалу і нелінійних залежностей магнітної індукції від напруженості магнітного поля. Використання таких моделей за умов високотемпературної обробки може приводити до суттєвих відхилень отримуваних оцінок напружень у виробках від фактичних. У праці [1] досліджено вплив термочутливості матеріалу на отримувані результати.

У роботі на основі запропонованої в [1] математичної моделі досліджено можливість розрахунку електромагнітних, теплових і механічних полів у феромагнітному циліндрі за умов його високотемпературної індукційної обробки в рамках моделі термочутливого неферомагнітного пружно-пластичного тіла. З метою порівняння отриманих результатів розв'язано задачу з врахуванням нелінійної залежності магнітної індукції від напруженості магнітного поля (модель феромагнітного тіла) і за умови заміни цієї нелінійної залежності певною лінійною (модель неферомагнітного тіла).

Формулювання задачі. Розглянемо процес високотемпературної індукційної обробки феромагнітного циліндричного тіла $V = \{(r, z): r \leq R; |z| \leq L\}$, розташованого у коаксіальному з ним індукторі $V_i = \{(r, z): r = R_i; |z| \leq L_i\}$. Індуктором тече струм

$$\mathbf{j}^{(0)} = (0, J_0(1 - e^{-\xi t})\sin(2\pi vt), 0), \quad (1)$$

де ξ – параметр, який характеризує час виходу на усталений режим; v – частота; J_0 – амплітуда; r, z – циліндричні координати.

Тіло перебуває за умов конвективного теплообміну (з коефіцієнтом β) із зовнішнім середовищем, температура якого T_S . У початковий момент часу ЕМП у циліндрі й середовищі відсутнє та заданий розподіл $T_0(r, z)$ температури. Краї та поверхня циліндра вільні від силового навантаження.

Визначимо ЕМП у системі циліндр – зовнішнє середовище та температурне й механічні поля у циліндрі в процесі його індукційної обробки. Відповідно до запропонованої у [1] методики розглядувана задача зводиться до визначення векторів напруженості $\mathbf{E}(r, z, t) = (0, E_\varphi(r, z, t), 0)$ та $\mathbf{H}(r, z, t) = (H_r(r, z, t), 0, H_z(r, z, t))$ відповідно електричного й магнітного полів, індукції $\mathbf{B}(r, z, t) = (B_r(r, z, t), 0, B_z(r, z, t))$, температури T , переміщень $\mathbf{u} = (u_r, u_z)^T$, деформацій $\{\varepsilon\} = (\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\varphi\varphi}, \varepsilon_{zz}, 2\varepsilon_{rz})^T$ і напружень $\{\sigma\} = (\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{zz}, \sigma_{rz})^T$ з рівнянь електродинаміки

$$-\frac{\partial}{\partial r} \left(\mu^{-1} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu^{-1} \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \right) + \frac{\partial \gamma}{\partial t} E_\varphi + \gamma \frac{\partial E_\varphi}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial t^2} = 0; \quad (2)$$

$$B_r = \int_0^t \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} dt', \quad B_z = - \int_0^t \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\varphi)}{\partial r} dt', \quad B_r = B_*(H_r, T), \quad B_z = B_*(H_z, T) \quad (3)$$

в області V і

$$-\mu_0^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_\varphi^{(0)}) \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_\varphi^{(0)}}{\partial z} \right) \right) + \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_\varphi^{(0)}}{\partial t^2} = - \frac{\partial j_\varphi^{(0)}}{\partial t}; \quad (4)$$

$$H_r^{(0)} = -\mu_0^{-1} \int_0^t \frac{\partial E_\varphi^{(0)}}{\partial z} dt', \quad H_z^{(0)} = -\mu_0^{-1} \int_0^t \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\varphi^{(0)})}{\partial r} dt', \quad B_r^{(0)} = \mu_0 H_r^{(0)}, \quad B_z^{(0)} = \mu_0 H_z^{(0)} \quad (5)$$

в області зовнішнього середовища $(r, z) \in E^2 \setminus V$; рівнянь теплопровідності

$$(r, z) \in V, \quad t \in [0, \tau_*] \quad (6)$$

і неізотермічної термопружно-пластичності

$$\{d\sigma\} = [C]^{t+\Delta t} (\{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon_T\}) + [dC] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_T\} - \{\varepsilon_p\}) + \{Z\} dT \quad (7)$$

за початкових умов

$$T(r, z, 0) = T_0(r, z), \quad E_\varphi = 0, \quad \partial E_\varphi / \partial t = 0, \quad (r, z) \in V; \quad (8)$$

$$E_\varphi^{(0)} = 0, \quad \partial E_\varphi^{(0)} / \partial t = 0, \quad (r, z) \in E^2 \setminus V; \quad (9)$$

умов регулярності

$$E_\varphi^{(0)} = 0 \quad (10)$$

на осі ($r = 0$); умови

$$\lim_{r, z \rightarrow \infty} E_\varphi^{(0)} = 0 \quad (11)$$

на нескінченості і умов

$$E_\varphi^{(0)} = E_\varphi, \quad \left(\mu^{-1} \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\varphi)}{\partial r} - \mu_0^{-1} \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\varphi^{(0)})}{\partial r} \right) n_r + \left(\mu^{-1} \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} - \mu_0^{-1} \frac{\partial E_\varphi^{(0)}}{\partial z} \right) n_z = 0; \quad (12)$$

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial r} n_r + \frac{\partial T}{\partial z} n_z \right) = \beta(T - T_S), \quad [\mathbf{n}]^T \{\sigma\} = \mathbf{0}, \quad (r, z) \in S \quad (13)$$

на межі S розділу циліндра і зовнішнього середовища. Тут величини з індексом (0) стосуються середовища, без індексу – тіла; ε_0 і μ_0 – діелектрична та магнітна проникності вакууму; ε і μ – диференціальні діелектрична і магнітна проникності циліндра; γ – коефіцієнт електропровідності; B_* – функція, яка задає зв'язок між індукцією і напруженістю магнітного поля [1]; $c = c(T)$ – об'ємна теплоємність; $\lambda = \lambda(T)$, $\beta = \beta(T)$ – коефіцієнти теплопровідності й тепловіддачі; $Q = \gamma E_\varphi^2$ – питома потужність джерел тепла, зумовлена протіканням у циліндрі струмів $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$; $\mathbf{n} = (n_r, n_z)^T$ – вектор одиничної нормалі поверхні S (індекс T позначає операцію транспонування); $[\mathbf{A}]$ – матриця диференціального оператора геометричних співвідношень теорії пружності; $\mathbf{F}$ – вектор об'ємних (пондеромоторних) сил, радіальна і осьова складові якого визначають як

$$F_r = \gamma E_\varphi + B_z (\mu_0^{-1} B_r - H_r) \frac{\partial B_r}{\partial r} + (\mu_0^{-1} B_z - H_z) \frac{\partial B_z}{\partial r},$$

$$F_z = -\gamma E_\varphi B_r + (\mu_0^{-1} B_z - H_z) \frac{\partial B_z}{\partial z} + (\mu_0^{-1} B_r - H_r) \frac{\partial B_r}{\partial z};$$

$\{\varepsilon\}$, $\{\varepsilon_T\}$, $\{\varepsilon_p\}$ – вектори повних, температурних і пластичних деформацій в момент часу t ; $[\mathbf{n}]$ – ма-

триця напрямних косинусів зовнішньої нормалі до поверхні S .

Відзначимо, що співвідношення (7) записані у матрично-векторному вигляді [3], який є зручним для числової реалізації з використанням методу скінченних елементів. При цьому

$$[C]^{t+dt} = [G]^{t+dt} - \frac{\{\partial \Phi / \partial \sigma\}^T [G]^{t+dt} [G]^{t+dt} \{\partial \Phi / \partial \sigma\}}{\frac{2}{3} H^t \{\partial \Phi / \partial \sigma\}^T \{\partial \Phi / \partial \sigma\} + \{\partial \Phi / \partial \sigma\}^T [G]^{t+dt} \{\partial \Phi / \partial \sigma\}}; \quad (14)$$

$$[dC] = [dG] - \frac{\{\partial \Phi / \partial \sigma\}^T [G]^{t+dt} [dG] \{\partial \Phi / \partial \sigma\}}{\frac{2}{3} H^t \{\partial \Phi / \partial \sigma\}^T \{\partial \Phi / \partial \sigma\} + \{\partial \Phi / \partial \sigma\}^T [G]^{t+dt} \{\partial \Phi / \partial \sigma\}}; \quad (15)$$

$$\{Z\} = \frac{\sqrt{\{\partial \Phi / \partial \sigma\}^T \{\partial \Phi / \partial \sigma\} [G]^{t+dt} \{\partial \Phi / \partial \sigma\} \frac{\partial \sigma_i}{\partial T}}}{\frac{2}{3} H^t \{\partial \Phi / \partial \sigma\}^T \{\partial \Phi / \partial \sigma\} + \{\partial \Phi / \partial \sigma\}^T [G]^{t+dt} \{\partial \Phi / \partial \sigma\}}, \quad (16)$$

де $[G]$ – матриця пружних сталих; $\{\partial \Phi / \partial \sigma\}$ – вектор похідних функції течіння Φ у просторі напружень; $[dG]$ – матриця приростів пружних модулів за крок навантаження (у зв'язку з їх температурною залежністю). H^t – кут нахилу кривої “еквівалентні напруження σ_i – еквівалентна пластична деформація ϵ_i^p ”.

Процес пружно-пластичного деформування розглядаємо покроково (співвідношення теорії течіння записані у приростах). Індекс $t+dt$ означає, що величини обчислені у момент часу $t + dt$, тобто в кінці чергового кроку навантаження, решта величин визначені в момент часу t (на початку кроку).

Методика розв'язування. Відповідно до [1] задачу розв'язуємо за два етапи: на першому розв'язуємо зв'язану задачу електродинаміки і теплопровідності; на другому – на основі обчислених значень температури T і пондеромоторних сил F визначаємо напружено-деформований стан тіла. З використанням процедури скінченно-елементної дискретизації у варіанті методу зважених залишків [4] до рівнянь (2), (4) і (6), задачу першого етапу зводимо до системи звичайних диференціальних рівнянь [1]

$$L_1 \dot{T}_h(t) + L_0 T_h(t) = f_T, \quad T_h(0) = T_h^0; \quad (17)$$

$$M_2 \ddot{E}_h(t) + M_1 \dot{E}_h(t) + M_0 E_h(t) = f_E, \quad E_h(0) = \dot{E}_h(0) = 0 \quad (18)$$

відносно невідомих значень вектора напруженості E_h електричного поля і температури T_h у вузлах скінченно-елементного поділу. Матрично-векторні характеристики задачі Коші (17) – (18) обчислені шляхом підсумовування відповідних характеристик окремих скінченних елементів [1]:

$$L_0^{(el)} = \int_{V^{el}} \lambda \left(\left[\frac{\partial N}{\partial r} \right]^T \left[\frac{\partial N}{\partial r} \right] + \left[\frac{\partial N}{\partial z} \right]^T \left[\frac{\partial N}{\partial z} \right] \right) r dr dz + \int_{S^{el}} \beta [N]^T [N] r d\xi; \quad (19)$$

$$f_T^{(el)} = \int_{V^{el}} j_\phi^{(1)} E_\phi^{(1)} [N]^T r dr dz + \int_{S^{el}} \beta [N]^T r d\xi; \quad (20)$$

$$M_0^{(el)} = \int_{V_*^{el}} \frac{1}{\mu_c} \left(\left[\frac{\partial N}{\partial r} \right]^T \left[\frac{\partial N}{\partial r} \right] + \left[\frac{\partial N}{\partial z} \right]^T \left[\frac{\partial N}{\partial z} \right] \right) r dr dz + \int_{V_*^{el}} \gamma_t [N]^T [N] r dr dz + \\ + \int_{V_*^{el}} \frac{1}{\mu_c} \frac{1}{r} \left(\left[\frac{\partial N}{\partial r} \right]^T [N] + [N]^T \left[\frac{\partial N}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} [N]^T [N] \right) r dr dz; \quad (21)$$

$$M_1^{(el)} = \int_{V_*^{el}} F_c [N]^T [N] r dr dz, \quad M_2^{(el)} = \int_{V_*^{el}} \epsilon_c [N]^T [N] r dr dz; \quad (22)$$

$$f_E^{(el)} = \int_{V_*^{el}} F_d [N]^T r dr dz, \quad (23)$$

де введено позначення: $\mu_c = \mu$; $\varepsilon_c = \varepsilon$, $\gamma_t = \partial \gamma / \partial t$, $F_c = \gamma$; $F_d = 0$ – для елементів $V^{(el)}$, що належать циліндру $(r, z) \in V$; $\mu_c = \mu_0$; $\varepsilon_c = \varepsilon_0$; $\gamma_t = 0$; $F_c = 0$; $F_d = \partial j_\phi / \partial t$; $E_\phi = E_\phi^{(0)}$ – для елементів $V^{(el)}$, що належать зовнішньому середовищу $(r, z) \in E^2 \setminus V$; $[N] = [N_1, N_2, \dots, N_l]$, $[\partial N / \partial r]$, $[\partial N / \partial z]$ – функції форми та їх похідні; l – кількість вузлів елемента.

Систему звичайних диференціальних рівнянь розв'язуємо за допомогою простих багатопараметричних однокрокових алгоритмів [2].

На другому етапі за відомими розподілами температури і пондеромоторних сил розв'язуємо задачу термопружно-пластичності. Після використання стандартної процедури скінченно-елементної дискретизації до рівнянь (7) отримуємо вихідні скінченно-елементні рівняння рівноваги в приростах переміщень, які для довільного кроку навантаження $[t_j, t_j + \Delta t_j]$ ($j = 1, 2, \dots$) набувають вигляду [3]

$$[K_{ep}]\{dq\} = \{dR\}, \quad (24)$$

де $\{dq\}$ – глобальний вектор приростів переміщень вузлів скінченно-елементного поділу циліндра. Пружно-пластичну матрицю жорсткості $[K_{ep}]$ і вектор реакцій $\{dR\}$ отримуємо через підсумовування відповідних матричних характеристик окремих скінченних елементів:

$$[K_{ep}^{(el)}] = \int_{V^{el}} [N]^T [A]^T [C]^{t_j + \Delta t_j} [A] [N] dv; \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \{dR\}^{(el)} = & \int_{V^{el}} [N]^T [A]^T C^{t_j + \Delta t_j} \{\varepsilon_T\} dv - \int_{V^{el}} [N]^T dF ds - \\ & - \int_{V^{el}} [N]^T [A]^T ([dC](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_T\} - \{\varepsilon_p\}) + \{Z\}dT) dv \\ \{dR\}^{(el)} = & \int_{V^{el}} [N]^T [A]^T C^{t_j + \Delta t_j} \{\varepsilon_T\} dv - \int_{V^{el}} [N]^T dF ds - \\ & - \int_{V^{el}} [N]^T [A]^T ([dC](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_T\} - \{\varepsilon_p\}) + \{Z\}dT) dv; \end{aligned} \quad (26)$$

Тут $[N]$ – матриця функцій форми скінченного елемента [3].

Задачу про напружено-деформований стан розв'язуємо з використанням методу змінних параметрів пружності [3]. За заданими приростами навантаження на черговому кроці з (24) визначаємо прирости переміщень. Використовуючи відповідно геометричні та фізичні співвідношення (7) теорії пружно-пластичного течіння, знаходимо прирости деформацій і напружень, які просумуємо з отриманими на попередніх кроках. Відповідно до отриманих напружень і деформацій на даному кроці обчислюємо нову матрицю $[K_{ep}]$ і знову розв'язуємо рівняння (24). З досягненням збіжності даного процесу на розглядуваному кроці, переходимо до обчислень на наступному кроці навантаження. Проходячи так поетапно весь процес деформування, отримуємо історію зміни термомеханічного стану циліндра.

Аналіз результатів числових досліджень. Розглянемо процес індукційної обробки для гартування циліндра із магнітом'якої сталі Ст. 30. Коли температура циліндра у приповерхневому шарі товщиною h_g в області поперечного перерізу $z = 0$ досягає певної температури $T \geq T_g$, струм (1) вимикаємо, і циліндр остигає через конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем. Розрахунки проведемо при

$$R = 0,01 \text{ м}; \quad R = 0,01 \text{ м}; \quad R_i = 0,012 \text{ м}; \quad L_i = 0,21 \text{ м}; \quad J_0 = 1 \text{ МА/м}; \quad v = 8 \text{ кГц};$$

$$T_0 = T_g = 20^\circ \text{C}; \quad T_g = 20^\circ \text{C}; \quad h_g = 0,0015 \text{ м}; \quad \xi = 10^5 \text{ с}^{-1}; \quad \beta = 10 \text{ кВт/(м}^2 \text{ град)}.$$

Температурні залежності характеристик матеріалу, кривих деформування, а також нелінійних залежностей магнітної проникності від напруженості магнітного поля у процесі числового розв'язування задачі апроксимуємо інтерполяційними сплайнами.

Виконаємо розрахунки ЕМП, температури і напружено-деформованого стану в рамках:

- моделі феромагнітного термочутливого пружно-пластичного тіла з врахуванням нелінійної залеж-

залежності магнітної індукції $\mu(H, T)$ від напруженості магнітного поля;

- моделі неферомагнітного термочутливого пружно-пластичного тіла з усередненою за напруженістю магнітного поля у діапазоні $[0, H_{\max}]$ магнітною проникністю [5]

$$\mu_s(T) = \mu_0 + (H_{\max}^{-1} \int_0^{H_{\max}} \mu(H, T_0) dH - \mu_0)(1 - (T/T_K)^6), \quad T < T_K, \quad (27)$$

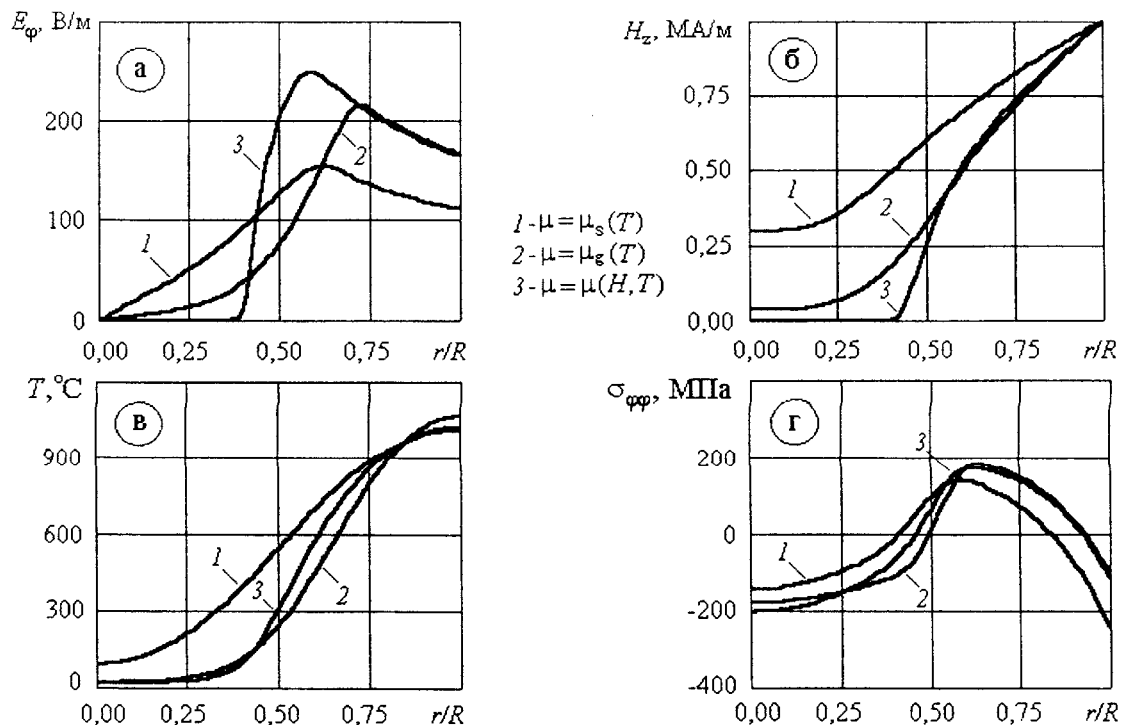
де $H_{\max} = 1$ МА/м; T_K – температура Кюрі (770°C); $\mu_s(T) = \mu_0$ при $T \geq T_K$.

Порівняльний аналіз отриманих результатів показав, що оцінка тривалості нагрівання поверхневого шару циліндра товщиною h_g до температур вищих за T_g в рамках розглядуваних моделей відрізняється практично удвічі (0,289 с в рамках моделі неферомагнітного тіла з магнітною проникністю $\mu_s(T)$ і 0,159 с при розрахунках циліндра як феромагнітного тіла з магнітною проникністю $\mu(H, T)$). У зв'язку з цим проведено ряд розрахунків на визначення такої сталої μ_{T_g} і відповідно незалежної від напруженості магнітного поля магнітної проникності

$$\mu_g(T) = \mu_0 + (\mu_{T_g} - \mu_0) \cdot (1 - (T/T_K)^6), \quad (28)$$

яка б давала таку ж тривалість нагріву тіла до необхідної температури, як і при розрахунках циліндра в рамках моделі феромагнітного тіла. Зазначимо, що при виконанні розрахунків в рамках моделі неферомагнітного тіла стійка збіжність отримуваних числових розв'язків задачі Коші (18) досягалась за суттєво (на два порядки) менших кроків інтегрування, ніж за відповідних розрахунків в рамках моделі феромагнітного тіла.

На рисунку відповідно показані розподіли напруженості E_ϕ електричного (а) й H_z магнітного (б) полів, температури T (в) у момент вимкнення струму та залишкових кільцевих напружень $\sigma_{\phi\phi}$ (г) у циліндрі (у перерізі $z = 0$). Кривими 1 і 2 позначені розв'язки задачі в рамках моделі неферомагнітного тіла



з магнітною проникністю $\mu = \mu_s$ і $\mu = \mu_g$ відповідно. Кривій 3 відповідають значення, отримані в рамках моделі феромагнітного тіла.

Відзначимо, що при відсутності інформації про феромагнітні властивості тіла за експериментально відомої тривалості його нагріву до певної температури можна ставити і розв'язувати обернені задачі про визначення усередненої магнітної проникності феромагнітного тіла із застосуванням співвідношення ти-

пу (28) і отримувати на цій основі доволі точні оцінки залишкових напружень у феромагнітному тілі.

Висновки. Шляхом вибору усередненої за напруженістю магнітного поля магнітної проникності в рамках моделі неферомагнітного термочутливого пружно-пластичного електропровідного тіла, вимоги якої щодо комп'ютерних ресурсів суттєво менші, можна отримувати задовільні оцінки параметрів, які описують електромагнітне й температурне поля, а також напружено-деформований стан феромагнітних тіл за умови їх індукційної обробки. Запропонований підхід може виявитись особливо ефективним за відсутності чи неповноти інформації про феромагнітні властивості тіла.

РЕЗЮМЕ

На основе предложенной математической модели описания физико-механических процессов в электропроводных телах при воздействии внешних электромагнитных полей исследована возможность расчета электромагнитных, тепловых и механических полей в ферромагнитном цилиндре в рамках модели неферомагнитного, термочувствительного, упругопластического тела.

SUMMARY

A possibility of electromagnetic, thermal and mechanical analysis in ferromagnetic cylinder within a model of non-ferromagnetic thermo-sensitive elasto-plastic solid is investigated on the basis of proposed earlier mathematical model of thermo-mechanical processes in electrically conductive solids subjected to external electromagnetic fields.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гачкевич О.Р., Дробенко Б.Д. Математичне моделювання індукційного нагріву електропровідних тіл // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикладної математики та інформатики. – 2004. – № 8. – С. 97–111.
2. Гачкевич О. Р., Дробенко Б. Д., Касперський З.І. Про один підхід до чисельного моделювання процесу індукційного нагрівання електропровідних тіл // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. Природничі науки. – 2005. – № 1. – С. 62–65.
3. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. Finite Element Method: V. 1. The Basis. – London: Butterworth Heinemann, 2000. – 688 p.
4. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986. – 319 с.
5. Skoczkowski T., Kalus M. The mathematical model of induction heating of ferromagnetic pipes// IEEE Trans. on magnetics. – 1989. – Vol. 25, № 3. – P. 2745–2750.

Надійшла до редакції 10.03.2006 р.

УДК 539.3

МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ И НАПРЯЖЕНИЙ В ФЕРРИТОВЫХ ТЕЛАХ, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ СЛАБЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ВЫСОКОЙ ЧАСТОТЫ

А.Р. Гачкевич, Р.А. Ивасько, З.И. Касперский,

Институт прикладных проблем механики и математики НАН Украины, г. Львов,

Политехника Опольская (Польша)

Введение. Среди радиотехнических материалов важное место занимают оксидные магнитные материалы – ферриты. Они широко используются в электронной промышленности как основные материалы при производстве многочисленных функциональных устройствах радиотехники, электроники, телевидения, техники магнитной записи, автоматики, вычислительной, высокочастотной, сверхвысокочастотной и импульсной техники. Специфика технологии изготовления ферритовых изделий (в частности, методом высокотемпературного деформирования) обуславливает необходимость использования термической обработки [1]. В достаточно широком диапазоне температур (вплоть до температур Кюри) является эффективным электромагнитный способ термообработки (низкотемпературная обработка) ферритовых изделий. Его использование не требует наличия печи или автоклава для производства тепла. Процесс нагрева происходит так же, как и в технологии индукционной термообработки, но не за счет электропроводимости материала, а вследствие особенности электрофизических свойств материала – его способности к переманчиванию и переполяризации в периодическом электромагнитном поле (ЭМП) при низкой электропроводимости ферритов. Механизм нагрева обусловлен диэлектрическими или магнитными (в зависимости от частотного диапазона) гистерезисными тепловыделениями, величина которых для ферритов может значительно превышать джоулевы тепловыделения.

Имеющиеся в литературе исследования взаимодействия ЭМП с ферритовой средой относятся в основном к оптимизации режимов эксплуатации ферритовых изделий и прогнозирования выходных характеристик электротехнических и электронных устройств с ферритовыми элементами при проектировании. Они направлены на минимизацию гистерезисных потерь в материале. Взаимосвязь механических, тепловых и электромагнитных процессов в теле из ферритового материала, обусловленных воздействием ЭМП, в литературе изучена недостаточно.

Для разработки рациональных режимов термообработки изделий из ферритовых материалов с помощью ЭМП (в процессе их производства), а также для прогнозирования характеристик функциональных устройств при воздействии внешних электромагнитных нагрузок (для учета при проектировании) является важным наличие методики приближенного расчета и исследования термонапряженного состояния ферритовых тел, обусловленного воздействием внешних ЭМП конкретного типа.

В данной работе предлагается методика для квазиустановившегося ЭМП, являющаяся развитием известных моделей для ферромагнитных и ферромагнитных тел различной электропроводимости [2].

Постановка и расчетная схема решения задачи. Ставится задача об определении электромагнитных, температурных и механических полей, возникающих в теле из ферритового материала под влиянием ЭМП, созданного заданной во внешней среде системой квазиустановившихся электрических токов радио- и сверхвысокочастотного (СВЧ) диапазонов с модуляцией амплитуды (скорость изменения амплитуды которых достаточно мала – такова, что за период электромагнитных колебаний модулируемый параметр (амплитуда плотности тока) почти не изменяется. При этом плотность токов имеет вид

$$\mathbf{J}_{**}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \left[\mathbf{J}^{0*}(\mathbf{r}, t) \right], \quad (1)$$

где: $\mathbf{J}^{0*}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}_{*}^{(0)}(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t}$ – комплексный вектор плотности электрических токов; $\mathbf{r}$ – радиус-вектор рассматриваемой точки пространства; ω – круговая частота; t – время; $\mathbf{J}_{*}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}_0(\mathbf{r}) J_0(t)$; $\mathbf{j}_0(\mathbf{r})$ – максимальная амплитуда токов; $J_0(t)$ – медленно изменяющаяся за период $f_* = 2\pi/\omega$ электромагнитных колебаний функция, удовлетворяющая условию квазиустановившегося приближения

$$\left| \frac{dJ_0(t)}{dt} \right| \ll \omega |J_0(t)|. \quad (2)$$

Для решения задачи используем известную математическую модель термомеханики ферритовых тел при воздействии квазиустановившихся ЭМП [3], в которой ограничиваются температурами ниже точ-

ки Кюри; электрофизические, теплофизические и физико-механические характеристики материала принимают независимыми от температуры (в частности, средними в интервале нагрева), а деформирование – упругим. Электромеханическими, термоэлектрическими и стрикционными эффектами, а также влиянием движения среды на характеристики ЭМП пренебрегают. Ферритовую среду считают изотропной, в которой векторы поляризации и намагничивания параллельны соответственно векторам напряженностей электрического и магнитного полей. ЭМП рассматривают как внешнее по отношению к телу воздействие, влияние которого на процессы теплообмена и деформирования учитывают через тепловыделения (как джоулевы, так и вследствие перемагничивания и переполяризации) и пондеромоторные силы.

В таком приближении исходную задачу об определении температурных полей и напряжений в ферритовом теле сводим к последовательному решению задачи электродинамики (для неподвижных электропроводных намагничивающихся и поляризующихся сред) и связанной динамической задачи термоупругости при заданных начальных и граничных условиях. Из уравнений электродинамики определяем параметры ЭМП в теле (первый этап), потом на их основании – тепловыделения и пондеромоторные силы, выступающие в свою очередь соответственно источниками тепла и объемными силами в уравнениях термоупругости (второй этап).

Характеристики ЭМП в теле находим из уравнений Максвелла (в приближении неподвижных ферритовых сред), описывающих изменение ЭМП в пространстве и во времени в системе тело-внешняя среда. В качестве начальных принимаем условия, соответствующие отсутствию ЭМП в начальный момент времени как в теле, так и в среде, а в качестве граничных – известные условия сопряжения на границе раздела сред и условия излучения на бесконечности (описывающих волны, направленные от заданной системы распределенных токов на бесконечность).

Систему уравнений Максвелла, описывающих ЭМП в теле, дополняем конститутивными уравнениями, связывающими параметры ЭМП. Особенность структуры феноменологических соотношений электродинамики ферритовой среды (зависимостей между индукциями и соответствующими напряженностями полей) приводит к нелинейности задача первого этапа об определении (на основе уравнений электродинамики) ЭМП в теле. Известно, что векторы индукции электрического и магнитного полей в ферритовых средах зависят в общем случае не только от значений векторов напряженностей в данный момент времени, но также и от значений этих векторов в предыдущие моменты. При этом экспериментально измеряемые зависимости между смещениями и напряженностями полей для периодического ЭМП имеют вид динамических петель гистерезиса, форма которых зависит от величины поля и частоты, а в слабых ЭМП высокой частоты она близка к эллиптической [3]. Это дает возможность для таких полей линеаризовать исходную задачу электродинамики путем введения приближенных комплексных представлений векторов напряженностей электрического и магнитного полей (с использованием метода комплексных амплитуд) [3–5]:

$$\mathbf{E}^{**} = \operatorname{Re} \mathbf{E}^*, \quad \mathbf{H}^{**} = \operatorname{Re} \mathbf{H}^*, \quad (3)$$

где

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E}_* e^{i\omega t} = \mathbf{j}_0(\mathbf{r}) J_0(t) \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{i\omega t}, \quad \mathbf{H}^* = \mathbf{H}_* e^{i\omega t} = \mathbf{j}_0(\mathbf{r}) J_0(t) \mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{i\omega t}; \quad (4)$$

$\mathbf{E}_*(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{H}_*(\mathbf{r}, t)$ – модулированные комплексные амплитуды, удовлетворяющие условиям:

$$\left| \frac{\partial \mathbf{E}_*}{\partial t} \right| \ll \omega |\mathbf{E}_*|, \quad \left| \frac{\partial \mathbf{H}_*}{\partial t} \right| \ll \omega |\mathbf{H}_*|, \quad (5)$$

вытекающим из (2).

Для квазиустановившегося ЭМП, амплитуды напряженностей которого описывают медленно изменяющиеся периодические функции времени (вследствие малого изменения амплитуд поля на периоде электромагнитных колебаний), реальную динамическую петлю гистерезиса заменяем эквивалентным эллипсом для каждого конкретного периода колебаний.

Тогда для описания эллиптической зависимости между индукциями и соответствующими напряженностями полей вводим (используя экспериментальные данные) зависящие от частоты поля комплексные проницаемости и соответствующие тангенсы углов гистерезисных потерь. При этом действительные части комплексных проницаемостей определяют запас обратимой энергии ЭМП в феррите, возвращаемой при его размагничивании (деполяризации), а мнимые – величину необратимых потерь на гистерезис. В таком приближении зависимости между комплексными амплитудами индукций и напряженностей электрического и магнитного полей становятся линейными [3].

Задачу электродинамики можно сформулировать относительно напряженности как магнитного, так и электрического полей. Приведем исходные соотношения такой задачи, когда за ключевую функцию

выбрана напряженность магнитного поля $\mathbf{H}_*$. Характеристики ЭМП в теле находим в результате совместного решения уравнений на комплексные амплитуды, описывающие ЭМП в области тела

$$\Delta \mathbf{H}_* + k^2 \mathbf{H}_* = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H}_* = 0 \quad (6)$$

и во внешней среде

$$\Delta \mathbf{H}_*^{(0)} + k_0^2 \mathbf{H}_*^{(0)} = -\operatorname{rot} \mathbf{J}_*^{(0)}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H}_*^{(0)} = 0 \quad (7)$$

(полученных из уравнений Максвелла с учетом комплексных представлений векторов поля и феноменологических соотношений) при граничных условиях

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}_*)_{\tau} &= (\mathbf{H}_*^{(0)})_{\tau}, \quad \frac{1}{\sigma_e + \omega \varepsilon_0 (\varepsilon'' + i\varepsilon')} (\operatorname{rot} \mathbf{H}_*)_{\tau} = \frac{1}{i\omega \varepsilon_0} (\operatorname{rot} \mathbf{H}_*^{(0)})_{\tau}, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r \left[\frac{\partial \mathbf{H}_*^{(0)}}{\partial r} + ik_0 \mathbf{H}_*^{(0)} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

При этом функция напряженности электрического поля $\mathbf{E}_*$ выражается через функцию $\mathbf{H}_*$ следующим образом:

$$\mathbf{E}_* = \frac{1}{\sigma_e + \omega \varepsilon_0 (\varepsilon'' + i\varepsilon')} \operatorname{rot} \mathbf{H}_*. \quad (9)$$

В формулах (6)–(9) приняты следующие обозначения

$$k^2 = a - ib, \quad a = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 (\varepsilon' \mu' - \varepsilon'' \mu'') - \sigma_e \omega \mu_0 \mu'', \quad b = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 (\varepsilon' \mu'' + \varepsilon'' \mu') + \sigma_e \omega \mu_0 \mu';$$

ε_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные; ε' , μ' и ε'' , μ'' – действительные и мнимые части комплексных проницаемостей; σ_e – коэффициент электропроводности; $k_0^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2$; $\mathbf{H}_*^{(0)}$ – комплексная амплитуда напряженности поля в области внешней среды (вакуума), где задано распределение плотности электрического тока, комплексная амплитуда которого равна $\mathbf{J}_*^{(0)}$.

Исходя из закона сохранения энергии ЭМП и статистической модели электромеханического взаимодействия поля и намагничивающейся и поляризуемой среды при комплексных представлениях векторов напряженностей электрического и магнитного полей, получаем выражения для удельной мощности тепловыделений и пондеромоторной силы в виде двух составляющих – медленно изменяющейся во времени (совпадающей с объемной плотностью соответствующей величины, усредненной по периоду колебаний ЭМП) и квазипериодической (суммарная мощность которой за период равна нулю) [3].

При найденных тепловыделениях и пондеромоторных силах температуру и напряжения в теле определяем из системы уравнений динамической термоупругости при краевых условиях, соответствующих заданным условиям нагрева и закрепления тела. Исходя из структуры выражений для тепловыделений и пондеромоторных сил, температуру и тензор напряжений находим в виде суммы медленно изменяющихся во времени и квазиустановившихся составляющих. При этом первые составляющие определяем в квазистатической постановке, пренебрегая влиянием связанности температурного поля и поля деформации, а вторые – в квазиустановившемся приближении (пренебрегая влиянием начальной стадии процесса) [3].

Численные исследования. В качестве примера определены параметры, описывающие напряженно-деформированное состояние ферритового упругого слоя толщиной h при воздействии ЭМП. Поле обусловлено воздействием системы квазиустановившихся электрических токов, распределенных в тонком токнесущем слое (моделированном плоскостью), находящимся на расстоянии z_0 от поверхности рассматриваемого слоя. Численные исследования выполнены для жестко скрепленного при $z = 0$ (перемещения $u_z = 0$) с диэлектрическим полупространством слоя из магнитно мягкого ферритового материала 1000НН при толщинах $h = 0,03$; $0,15$; $0,30$ м. Верхнее основание $z = h$ свободно от механических нагрузок. На нем имеет место конвективный теплообмен с внешней средой (температура которой постоянна и равна начальной температуре слоя $T_0 = 293$ К), а нижнее основание $z = 0$ – теплоизолировано. Характеристики материала таковы: $\sigma_e = 0,2$ мС/м; коэффициент Пуассона $\nu = 0,27$; коэффициент линейного температурного расширения $\alpha_T = 1,1 \cdot 10^{-5}$ К⁻¹; плотность $\rho = 4800$ кг/м³; модуль

упругости $E_p = 120 \text{ GPa}$; коэффициент теплопроводности $\lambda = 4,19 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$; коэффициент температуропроводности $a = 1,2 \text{ mm}^2/\text{s}$. Расчеты проведены для плотности электрического тока $j_0 = 4 \text{ A/m}$ (типичной для режимов эксплуатации изделий из таких материалов в технике слабых токов: поля эксплуатации $H_0 < 10 \text{ A/m}$ [6]) и расстояния от токнесущей плоскости до верхнего основания слоя $z_0 = 1 \text{ mm}$. Частота внешнего ЭМП ω выбиралась из перечня разрешенных для использования в промышленности амплитудно-модулированных волн (радиочастотного диапазона, ультракоротких, а также СВЧ телевизионного диапазонов) [6].

Анализ результатов показал, что в отличие от ферромагнитных тел, начиная с частоты $\omega = 5,53 \text{ MHz}$ изменение толщины ферритового слоя приводит к изменению характера распределения амплитуд напряженностей ЭМП, медленно изменяющихся составляющих и амплитуд квазиустановившихся составляющих удельных плотностей тепловыделений и пондеромоторных сил: для малых толщин он почти линейный, а для больших – волновой.

В различных диапазонах частот ЭМП для ферритовых тел характерны различные механизмы нагрева. Для частот $\omega < 0,1 \text{ MHz}$ преобладают джоулевы тепловыделения, а для высших – гистерезисные тепловыделения двух типов: в диапазоне $(0,1 \div 1) \text{ MHz}$ – диэлектрические, для $\omega > 10 \text{ MHz}$ – магнитные.

Характерной особенностью ферритов при работе в слабых ЭМП высокой частоты является существенная нелинейная частотная зависимость проницаемостей и гистерезисных потерь. Такая специфика ферритового материала приводит к тому, что при воздействии на ферритовое тело переменного ЭМП в нем (в зависимости от величин диэлектрической и магнитной проницаемостей материала и частоты поля) наблюдается параметрический резонанс (резонанс формы). Он связан с возникновением стоячих электромагнитных волн (ЭМВ) и сопровождается увеличением напряженностей полей, а вследствие этого и величин, непосредственно выражаемых через них – тепловыделений и пондеромоторных сил (факторов воздействия поля). Этот эффект проявляется при частоте ЭМП ω , определяемой условием $\lambda \approx 2h$ (где λ – длина ЭМВ в ферритовой среде, h – характеристический (максимальный) размер тела в направлении распространения ЭМВ). Следует отметить, что условием возникновения стоячих ЭМВ в ферритовой среде, в отличие от диэлектрической [2], является как определенное соотношение между длиной волны и размером тела в направлении ее распространения (необходимое условие), так и низкие гистерезисные потери (наряду с большими значениями проницаемостей) на данной частоте поля [6]. Строго говоря, чисто стоячие волны могут устанавливаться только при отсутствии затухания в среде в случае, когда падающая волна накладывается с волной, полностью отраженной от границ раздела двух сред с различными электрофизическими характеристиками. В противном случае, кроме стоячих волн, появляются бегущие волны, искажающие характерное для стоячих волн пространственное распределение амплитуды – чередование узлов (нулей) и пучностей (максимумов). Проведенные исследования показали, что для рассматриваемого слоя параметрический резонанс наблюдается при частоте поля $\omega = 9,89 \text{ GHz}$. Эта частота такова, что соотношение между длиной ЭМВ λ в ферритовой среде и толщиной слоя составляет $\lambda/h = 1,91$. При этом добротность такой колебательной системы равна 29,66 и находится в границах значений для величины добротности обычного радиоконтра (10¹ ÷ 10²).

Известно, что гармоничный (квазигармоничный) характер внешнего воздействия приводит к возможности возникновения в телах резонанса, связанного с существованием собственных частот свободных гармонических колебаний динамической системы [2]. Исследования термонапряженного состояния слоя показали, что для ферритовых тел (как и для ферромагнитных и неферромагнитных) существуют такие частоты внешнего ЭМП, при которых значительно возрастают уровни температурных полей и напряжений, обусловленных квазипериодическими во времени составляющими тепловыделений и пондеромоторных сил (когда их частота 2ω приближается к одной из собственных частот термоупругих (толщинных) колебаний слоя). Для рассматриваемого слоя такие резонансные частоты ЭМП определены с использованием аппроксимации разложений температуры и напряжений относительно толщиной координаты z полиномом третьей степени.

На рис. 1, 2 показаны распределения по толщине слоя амплитуд обусловленных связанностью полей температуры и деформаций квазипериодических составляющих напряжений $\sigma_{zz}^{(2)}$ и $\sigma_{xx}^{(2)}$ на первой резонансной частоте ЭМП $\omega \equiv \omega_{res}^I \approx 0,15 \text{ MHz}$ (рис. 1) и $\omega \equiv \omega_{res}^{II} \approx 0,53 \text{ MHz}$ (рис. 2) при $h = 0,03 \text{ m}$. Символом σ_F обозначены напряжения, обусловленные пондеромоторной силой.

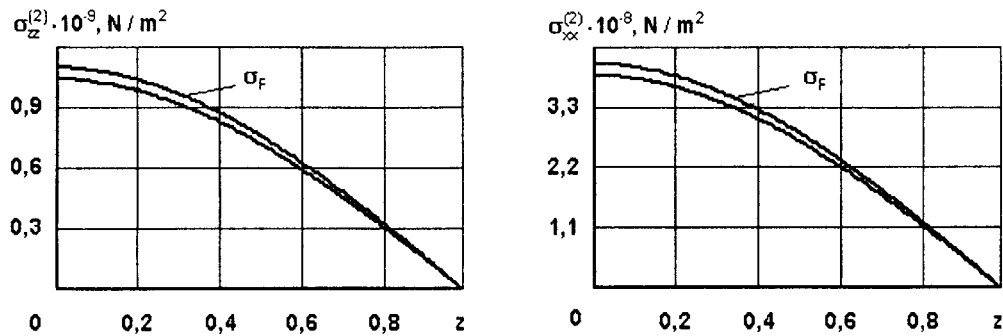


Рис. 1

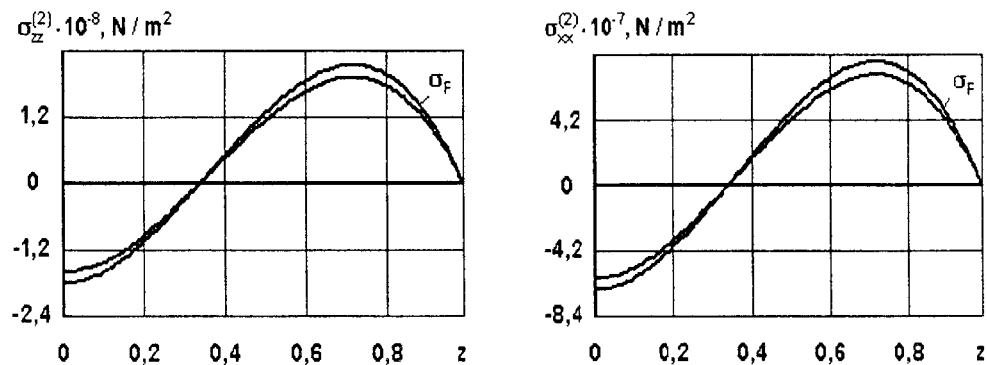


Рис. 2

Получено, что в окрестностях резонансных частот $\omega = \omega_{res}^I$ и $\omega = \omega_{res}^{II}$ наблюдается резкое возрастание (приблизительно на 10 порядков) максимальных значений квазипериодических составляющих температуры и напряжений. При этом, в отличие от тел низкой электропроводимости (ТНЭ), в ферритовых телах в окрестностях резонансных частот квазипериодические составляющие напряжений в основном определяются воздействием пондеромоторной силы (значительные величины которой обусловлены магнитными свойствами материала). С увеличением порядка резонансной частоты амплитуды квазипериодических составляющих температуры и напряжений уменьшаются.

Исследования термонапряженного состояния слоя в окрестностях резонансных частот $\omega = \omega_{res}^I$ и $\omega = \omega_{res}^{II}$ показали, что резонанс, обусловленный связанностью полей температуры и деформаций (коэффициент связанности $\varepsilon^* \approx 0.0046$), происходит вследствие незначительного термоупругого рассеяния энергии и характеризуется большим резонансным (селективным) откликом такой колебательной системы (по сравнению с нерезонансным), чем для колебательной системы, имеющейся при резонансе формы.

Выводы. Предложена методика исследования термонапряженного состояния ферритовых тел, обусловленного воздействием внешнего квазиустановившихся ЭМП. Проведенный анализ решений, найденных с использованием этой методики, позволил установить следующие основные закономерности в распределении напряженностей электрического и магнитного полей, тепловыделений, пондеромоторных сил, температуры и напряжений в ферритовых телах:

1) в отличие от ферромагнитных тел, в ферритовых телах (как и в ТНЭ) характер распределений (линейный или волновой) исследуемых величин при воздействии внешнего ЭМП зависит от соотношения между характерным размером тела в направлении распространения ЭМВ и ее длиной в ферритовой среде, определяемой как электрическими, так и магнитными свойствами материала;

2) как и в ТНЭ, в ферритовых телах наблюдается резонанс, связанный с геометрией тела: значительное возрастание напряженностей электрического и магнитного полей в окрестностях определенных (резонансных) частот ЭМП, обусловленный возникновением стоячих ЭМВ. Вследствие этого, в теле создаются зоны более высоких температур и напряжений. Возникновение стоячих волн существенно зависит от гистерезисных потерь, которые для ферритовых тел (в отличие от диэлектрических) сильно зависят от частоты ЭМП и магнитных свойств материала;

3) как и для ферромагнитных тел и ТНЭ, в ферритовых телах возникает резонанс, обусловленный периодическим характером изменения во времени тепловыделений и ponderomotive сил. Для него каждая из резонансных частот ЭМП практически равна половине соответствующей собственной частоты колебаний тела. При этом основная частота резонансных колебаний может быть приближенно получена при помощи полиномиальной аппроксимации распределений температуры и составляющих напряжений по пространственным переменным;

4) влияние ponderomotive сил на напряженное состояние ферритовых тел пренебрежимо мало за исключением окрестностей частот ЭМП, при которых наблюдаются резонансные явления, обусловленные связанностью полей температуры и деформации. Тогда влияние ponderomotive сил является определяющим (в отличие от ТНЭ).

Данная методика позволяет найти решения широкого класса задач, связанных с исследованием влияния электрофизических, тепловых и механических характеристик материала и амплитудно-частотных параметров ЭМП на напряженно-деформированное состояние ферритовых тел различной геометрической конфигурации. Она позволяет прогнозировать напряженное состояние таких тел при воздействии электромагнитного излучения различного частотного диапазона. Найденные с ее помощью результаты могут быть использованы при создании новых и усовершенствовании существующих режимов термобработки изделий из ферритовых материалов с помощью ЭМП, а также режимов эксплуатации соответствующих элементов конструкций и приборов при воздействии тепловых, силовых и электромагнитных нагрузок.

РЕЗЮМЕ

Запропоновано методику дослідження термонапруженого стану феритових тіл, зумовленого дією квазіусталених електромагнітних полів радіочастотного діапазону. В ній вплив випромінювання на теплові і механічні процеси враховується через об'ємні тепловиділення (як гістерезисні, так і джоулеві) і ponderomotive сили. Введенням наближених комплексних представлень для векторів напруженостей електричного і магнітного полів (за допомогою комплексних проникностей і відповідних тангенсів кутів гістерезисних втрат) лінеаризовано вихідну нелінійну задачу електродинаміки здатних до поляризації та намагнічення тіл і враховано специфіку частотної залежності діелектричної та магнітної проникностей феритового матеріалу. З використанням такого підходу знайдено та досліджено електромагнітні, температурні та механічні поля в пружному шарі з конкретного феритового матеріалу, що перебуває під дією електромагнітного поля, створеного квазіусталеним струмом, який протікає у площині, паралельній до основи шару.

SUMMARY

The procedure of examination of thermoelastic state of the ferrite solids subjected to quasi-steady electromagnetic fields in the radio range is proposed. Coupling of electromagnetic, thermal and mechanical processes is taken into account in terms of volumetric heat sources (both hysteresis, and Joule) and ponderomotive forces. Basic nonlinear problem of electrodynamics for polarizable and magnetizable solids is linearized by introducing complex representation for vectors of electric and magnetic strengths expressed through complex permeabilities and correspondent hysteresis losses. Frequency dependencies of dielectric and magnetic permeabilities of ferrite materials are taken into account. Within above approach, the electromagnetic, thermal and mechanical fields are found and investigated in the elastic ferrite layer subjected to electromagnetic field due to quasi-steady current flowing in the plane parallel to layer's base.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Быков Ю.А. Высокотемпературное деформирование и термическая обработка ферритов. – М.: Металлургия, 1988. – 216 с.
2. Gaczkiewicz A., Kasperski Z. Modele i metody matematyczne w zagadnieniach brzegowych termomechaniki ciał przewodzących. – Opole: OWPO, 1999. – 368 s.
3. Гачкевич О.Р., Івасько Р.О. Термомеханіка феритових тіл в квазіусталеному електромагнітному полі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – Т. 43, № 1. – С. 161–172.
4. Caltun O.F., Spinu L., Stancu A. and Sava A. Modeling the complex permeability spectra of Ni-Zn ferrite // Int. J. Appl. Electromagn. Mech. – 2001/2002. – Vol. 13. – P. 241–244.
5. Tsutaoka T. Frequency dispersion of complex permeability in Mn-Zn and Ni-Zn spinel ferrites and their composite materials // J. Appl. Phys. – 2003. – Vol. 93, № 5. – P. 2789–2796.
6. Гачкевич О.Р., Івасько Р.О. Термопружний стан феритового шару в квазіусталеному електромагнітному полі // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2005 – Т. 41, № 3. – С. 85–95.

Поступила в редакцію 13.03.2006

УДК 539.376

ДЛИТЕЛЬНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ ВЯЗКОУПРУГИХ ВОЛОКНИСТЫХ ОДНОНАПРАВЛЕННЫХ КОМПОЗИТОВ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ

В.П.Голуб

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Одной из наиболее актуальных задач механики композитов считается задача прогнозирования характеристик вязкоупругого деформирования композита по свойствам и объемному содержанию его компонентов [1, 2]. Большинство работ, выполненных в этом направлении, относится к области линейной ползучести [2–4]. В нелинейной области задача предсказания вязкоупругих свойств композитов по свойствам компонентов остается практически не решенной. В случае использования нелинейной теории трудности возникают не только в процессе реализации процедуры определения характеристик вязкоупругости, но и в выборе вида нелинейной теории. В работе [5] построена нелинейная модель ползучести с инвариантным во времени характером нелинейности, который определяется законом мгновенного деформирования. В рамках модели решены задачи расчета деформаций линейной и нелинейной ползучести полимерных связующих [6] и армирующих волокон [7, 8]. В настоящей работе решается задача прогнозирования деформаций нелинейной ползучести волокнистых однонаправленных композитов при растяжении вдоль направления армирования.

1. Постановка задачи. Рассматривается нелинейная ползучесть вязкоупругих волокнистых однонаправленных композитов при растяжении вдоль направления армирования силой P . Считается, что арматура и связующее композита являются однородными и изотропными и между ними существует полное сцепление. Компоненты однонаправленно армированного композита находятся в одноосном напряженном состоянии. Внешняя нагрузка P в процессе ползучести не изменяется, так что напряжение растяжения $\sigma(t)$ задается соотношением

$$\sigma(t) = \sigma_k h(t) \quad (k = \overline{1, m}), \quad (1.1)$$

где $\sigma_k = \text{const}$; $h(t)$ – единичная функция Хевисайда ($h = 0$ при $t < 0$ и $h = 1$ при $t \geq 0$); t – физическое время. Начальное ($t = 0$) напряженное состояние композита и его компонентов упругое. Реакция композита на длительное ($t \gg 0$) воздействие внешней нагрузки характеризуется зависящей от времени t величиной полной деформации $\varepsilon^r(t)$

$$\varepsilon^r(t) = \varepsilon^e + \varepsilon^c(t), \quad (1.2)$$

включающей упругую компоненту ε^e и компоненту ползучести $\varepsilon^c(t)$.

Нелинейная модель ползучести наследственного типа задается дифференциальным уравнением [5]

$$\frac{d\varepsilon^r}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ h(t) \left(1 + \int_0^t K(t-\tau) d\tau \right) \right\} \left(\frac{d\varphi_0(\varepsilon^r)}{d\varepsilon^r} \right)^{-1} \sigma_k, \quad (1.3)$$

где $K(t-\tau)$ – ядро наследственности; $\varphi_0(\cdot)$ уравнение диаграммы мгновенного растяжения, а величина $d\varphi_0(\varepsilon^r)/d\varepsilon^r$ характеризует интенсивность деформационного упрочнения материала в процессе ползучести. Здесь и далее, с целью упрощения формы записи уравнений, обозначение функциональной зависимости ε^r от t опускается. Ядро наследственности $K(t-\tau)$ в (1.3) выбирается в форме ядра Абеля

$$K(t-\tau) = \frac{\beta}{(t-\tau)^{1-\gamma}} \Rightarrow K(t) = \frac{\beta}{t^{1-\gamma}}, \quad (1.4)$$

а $\varphi_0(\cdot)$ задается степенной функцией

$$\varphi_0(\varepsilon^r) = \frac{H}{q} (\varepsilon^r)^q. \quad (1.5)$$

Здесь β , γ , H , q – материалы константы, методика определения которых изложена в [6–8].

В работе исследуется ползучесть микропластика, двухкомпонентного органопластика и трехкомпонентного (гибридного) органостеклопластика. Микропластик представляет собой высокоориентированное полимерное волокно, пропитанное эпоксидной смолой и подвергнутое специальной термической обработке. Двухкомпонентный органопластик состоит из эпоксидной матрицы, армированной термообработанными полимерными волокнами. Объемное содержание связующего и армирующих волокон в органопластике составляло 0,35 и 0,65 соответственно. Трехкомпонентный органостеклопластик состоит из эпоксидной матрицы ЭДТ-10, армированной стеклянными волокнами ВМПС и высокопрочными органическими волокнами СВМ. Объемное содержание связующего в органостеклопластике сохранялось постоянным и составляло 0,5. Объемное содержание стеклянных и органических волокон варьировалось и изменялось от 0 до 0,5. Задача заключается в определении характера процесса ползучести исследуемых композитных материалов и в предсказании ползучести композитов по свойствам и объемному содержанию их компонентов.

2. Линейность и нелинейность процесса ползучести волокнистых однонаправленных композитов. Исследование характера вязкоупругого деформирования материалов (линейный или нелинейный) осуществляется, как известно, на основе анализа экспериментальных данных на ползучесть или на релаксацию. В настоящей работе эта задача решается с использованием результатов испытаний на ползучесть. Экспериментальные данные в форме первичных кривых ползучести для микропластика и двухкомпонентного органопластика заимствованы из [3], а для трехкомпонентного органостеклопластика – из [4].

Любой вязкоупругий материал или конструкция считаются линейными, если для них выполняется условие пропорциональности и условие суперпозиции [2]. В дальнейшем принято, что материал является линейным вязкоупругим, если результаты экспериментов удовлетворяют хотя бы первому условию. Это условие рассматривается как достаточное. Соответствие вязкоупругого материала достаточному условию линейности проверяется по функциям ползучести. Функция ползучести $J(t)$ определяется по кривым податливости, которые строятся по экспериментальным кривым ползучести для каждого из нескольких уровней напряжений σ_k . Достаточное условие линейности сводится в этом случае к условию существования единой кривой податливости, когда

$$J_1(t) = J_2(t) = \dots J_m(t) = J(t). \quad (2.1)$$

Принято, что $J_k(t) = \varepsilon'(t, \sigma_k) / \sigma_k$. Считается, что материал в заданном диапазоне напряжений и длительностей нагружения обладает линейными вязкоупругими свойствами, если выполняется условие

$$t_{\alpha,k} = \frac{\delta \bar{J}(t_j) \sqrt{n}}{S_J(t_j)} \geq t_{\alpha,k}^*, \quad (2.2)$$

где $t_{\alpha,k}$ и $t_{\alpha,k}^*$ – расчетное и критическое значения квантиля статистики; δ – погрешность оценки линейности; $\bar{J}(t_j)$ – среднее значение функции ползучести; n – число кривых податливостей; $S_J(t_j)$ – выборочное средне квадратичное отклонение величины $\bar{J}(t_j)$.

Величина $\bar{J}(t_j)$ рассчитывается по формуле [9]

$$\bar{J}(t_j) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n J_k(t_j), \quad (2.3)$$

а величина $S_J(t_j)$ – соответственно по формуле

$$S_J(t_j) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (J_k(t_j) - \bar{J}(t_j))^2}. \quad (2.4)$$

Здесь $J_k(t_j)$ – значение функции ползучести в момент времени t_j при напряжении σ_k .

На рис.1 построены кривые податливости для микропластика (а) и двухкомпонентного органопластика (б) по экспериментальным кривым ползучести, заимствованным из [3]. Точками показаны нормированные экспериментальные данные, полученные из первичных кривых ползучести с использованием соотношения (2.1) для напряжений $\sigma_k = 331$ (○), 1000 (●), 1660 (◐), 2330 (◑) МПа и $\sigma_k = 300$ (○), 450 (●), 600 (◐), 800 (◑), 1200 (◒) МПа, соответственно. Тонкими сплошными линиями нанесена аппроксимация функций ползучести кубическими сглаживающими сплайнами [10], на основе которых рассчитывалось

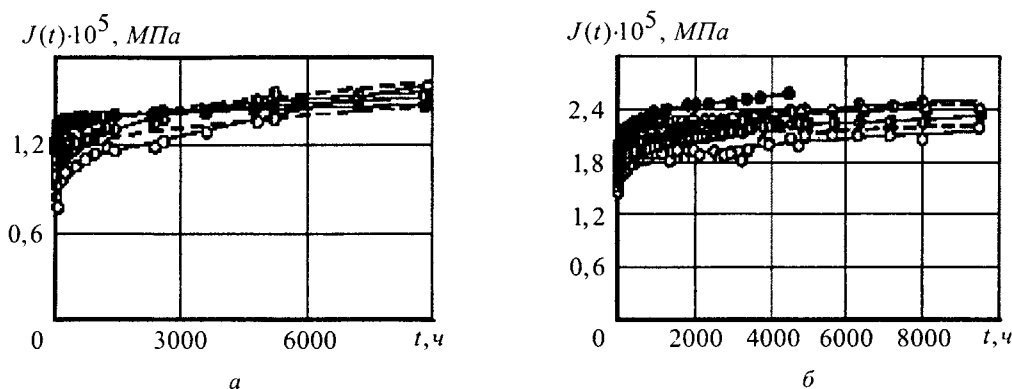


Рис. 1

выборочное среднее $\bar{J}(t_j)$. Штриховыми линиями нанесены границы интервала, соответствующего величине максимальной погрешности $\delta_{\max} = \pm 5\%$ от величины $\bar{J}(t_j)$.

Из данных, представленных на рис.1, видно, что в целом ползучесть микропластика и органоластика является нелинейной. Практически все кривые податливости выходят за пределы допустимого интервала, ограниченного штриховыми линиями. Частично, линейность ползучести подтверждается для микропластика (см. рис.1,а) при длительностях нагружения 4000 часов и более.

Эти данные подтверждаются также результатами сопоставления (рис.2) расчетных $t_{\alpha,k}$ и табличных $t_{\alpha,k}^*$ значений квантиля статистики в соответствии с условием линейности (2.2) для микропластика (а) и органоластика (б). Штриховыми линиями показаны значения $t_{\alpha,k}$, а сплошными линиями – крити-

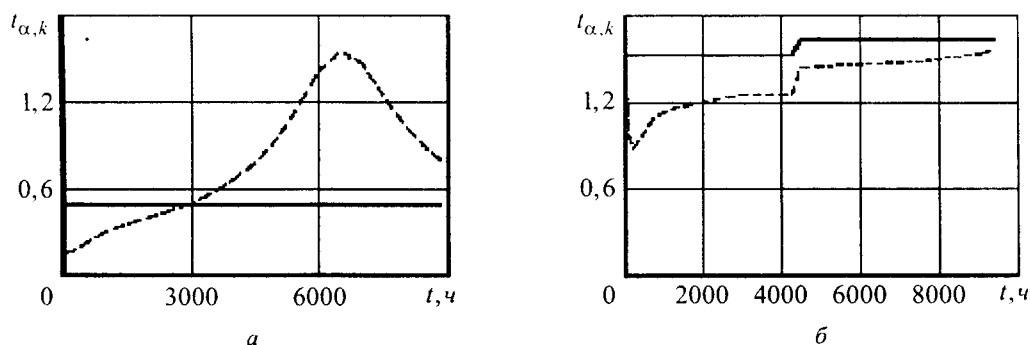


Рис. 2

ческие значения $t_{\alpha,k}^*$. Величина $t_{\alpha,k}^*$ находится по таблицам [9] для вероятности $P = 90\%$ и уровня значимости $k = n - 1$.

3. Прогнозирование деформаций ползучести волокнистых композитов по свойствам компонентов. Задача решается на основе нелинейной модели ползучести (1.3). Подставляя в (1.3) соотношения (1.4) и (1.5) для скорости ползучести композита получаем уравнение

$$\frac{d\varepsilon^r}{dt} = \left[\left(1 + \frac{\beta_{com}}{1 - \alpha_{com}} \right) \delta(t) + \frac{\beta_{com}}{t^{\alpha_{com}}} h(t) \right] \frac{\sigma_k}{H_{com}} (\varepsilon^r)^{1 - q_{com}}, \quad (3.1)$$

интегрируя которое с учетом начальных условий $\varepsilon^r = \varepsilon^e$ при $t = 0$, для зависимости деформации ползучести ε^r от напряжения σ_k и времени t получаем соотношение

$$\varepsilon^r(t) = \left[\frac{\sigma_k q_{com}}{H_{com}} \left(1 + \frac{\beta_{com}}{1 - \alpha_{com}} t^{1 - \alpha_{com}} \right) \right]^{1/q_{com}}. \quad (3.2)$$

Здесь q_{com} , H_{com} , α_{com} , β_{com} – материальные константы, характеризующие нелинейные упругие (q_{com} , H_{com}) и вязкие (α_{com} , β_{com}) свойства композита и определяемые по свойствам компонентов композита; $\delta(t)$ – функция Дирака ($\delta = 1$ при $t = 0$ и $\delta = 0$ при $t \neq 0$). Зависимость констант композита в (3.1) и (3.2) от констант компонентов композита задается с использованием правила смеси [1].

Для двухкомпонентного композита зависимость между константами композита и его компонентов задается соотношениями

$$q_{com} = \mu_m q_m + \mu_f q_f, \quad H_{com} = \mu_m H_m + \mu_f H_f, \quad (3.3)$$

и соответственно соотношениями

$$\alpha_{com} = \mu_m \alpha_m + \mu_f \alpha_f, \quad \beta_{com} = \mu_m \beta_m + \mu_f \beta_f, \quad (3.4)$$

Здесь $\mu_m, q_m, H_m, \alpha_m, \beta_m$ и $\mu_f, q_f, H_f, \alpha_f, \beta_f$ – объемное содержание и значения материальных констант связующего и вязкоупругих волокон.

Для трехкомпонентного композита зависимость между константами композита и его компонентов задается соотношениями

$$q_{com} = \frac{1}{1 - \mu_m} (\mu_{of} q_{of} + \mu_{gf} q_{gf}), \quad H_{com} = \frac{1}{1 - \mu_m} (\mu_{of} H_{of} + \mu_{gf} H_{gf}) \quad (3.5)$$

и соответственно соотношениями

$$\alpha_{com} = \frac{1}{1 - \mu_m} (\mu_{of} \alpha_{of} + \mu_{gf} \alpha_{gf}), \quad \beta_{com} = \frac{1}{1 - \mu_m} (\mu_{of} \beta_{of} + \mu_{gf} \beta_{gf}), \quad (3.6)$$

где q_{of} , H_{of} , α_{of} , β_{of} и q_{gf} , H_{gf} , α_{gf} , β_{gf} – материальные константы вязкоупругих и упругих армирующих волокон; μ_m – объемное содержание матрицы.

Значения материальных констант q , H , α , β компонентов композитов, которые использовались в расчетах, приведены в таблице. Методика определения материальных констант изложена в [6–8].

Компонента композита	θ , °C	q	H , МПа	α	β , час ^{-(1-α)}
Эпоксидное связующее	21	0,9539	2251,94	0,3817	0,00436
Эпоксидная смола ЭДТ-10	20	0,9439	2228,35	0,5836	0,01679
Полимерные волокна	21	0,8602	45473,51	0,8926	0,00962
Органические волокна СВМ	20	1,0000	130000,0	0,8933	0,03713
Стекланные волокна ВМПС	20	1,0000	78000,00	0,8100	0,00083

Результаты расчетов деформаций ползучести исследованных композитов, выполненных по уравнению (3.2) с использованием соотношений (3.3)–(3.6) и данных таблицы, сопоставлены на рис. 3 с экс-

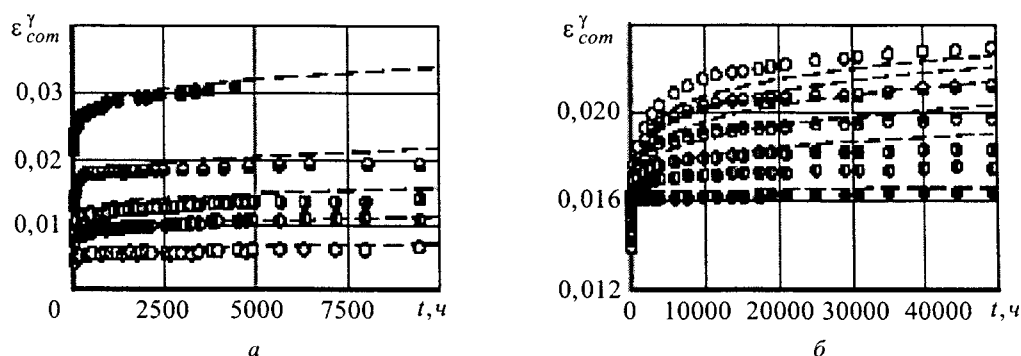


Рис. 3

периментальними даними. Результати розрахунків нанесені штриховими лініями, а дані експериментів – точками. Нелінійна повзучість двохкомпонентного органопластика (а) досліджувалась при напруженнях $\sigma_k = 300$ (○), 450 (●), 600 (◐), 800 (◑) і 1200 (◒) МПа, а трьохкомпонентного органостеклопластика (б) – при напруженні $\sigma_k = 700$ МПа і об'ємному вмісті органічних волокон $\mu_{of} = 0,5$ (○), 0,4 (◐), 0,29 (◑), 0,18 (◒), 0,1 (●), 0 (◐). В цілому, як видно з рисунка, отримано повністю задовільне узгодження розрахунку з експериментальними даними. Максимальна похибка становила 10% і отримана для органостеклопластика при об'ємному вмісті органічного волокна $\mu_{of} = 0$ і тривалості навантаження $t = 50000$ годин.

Робота виконана при фінансовій підтримці Європейського Союзу в відповідності з міжнародним грантом INTAS 03-51-6046.

РЕЗЮМЕ

Розв'язано задачу прогнозування деформацій одновимірної повзучості нелінійних волокнистих односпрямованих композитів за властивостями компонентів. Прогнозування виконано із використанням нелінійної моделі повзучості типу моделі Работнова та правила суміші.

SUMMARY

The problem of the prediction of one-dimensional creep deformations of nonlinear fibrous aligned composites based on the components behaviour has been solved. The prediction is made using a nonlinear creep model of Rabotnov's type and the rule of mixture.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Хорошун Л.П., Маслов Б.П., Шикун Е.Н., Назаренко Л.В. Статистическая механика и эффективные свойства материалов / Под общ. ред. А.Н.Гузя. – К.: Наук. думка, 1993. – 392 с. (Механика композитов: В 12 т. Т. 3).
2. Шепери Р.А. Вязкоупругое поведение композиционных материалов // Композиционные материалы. Т. 2. Механика композиционных материалов / Пер. с англ. – М.: Наука, 1978. – С. 102–195.
3. Соколов Е.А., Максимов Р.Д. Возможности предсказания ползучести армированного полимерными волокнами пластика по свойствам компонентов // Механика полимеров. – 1978. – №6. – С. 1005–1012.
4. Максимов Р.Д., Плумэ Э. Длительная ползучесть органостеклопластика // Механика композитных материалов. – 2001. – Т. 37, №4. – С. 435–450.
5. Golub V.P., Kobzar' Yu.M., and Fernati P.V. An approach to constructing of a rheological model of strain-hardening media // Int. Appl. Mech. – 2004. – Vol. 40, N7. – P. 776–784.
6. Голуб В.П., Кобзарь Ю.М., Фернати П.В. Нелінійна повзучість вязкоупругих епоксидних зв'язуючих при розтягненні // Теорет. і прикладна механіка. – 2005. – Вип.41. – С. 91–97.
7. Golub V.P., Kobzar' Yu.M., and Fernati P.V. Calculating of linear creep strains of viscoelastic fibers under tension // Int. Appl. Mech. 2005. – Vol. 41, N5. – P. 543–551.
8. Golub V.P., Kobzar' Yu.M., and Fernati P.V. Nonlinear creep of viscoelastic organic fibers under tension // Int. Appl. Mech. – 2005. – Vol. 41, N7. – P. 793–802.
9. Степнов М.Н. Статистические методы обработки результатов механических испытаний. – М.: Машиностроение, 1985. – 232 с.
10. Голуб В.П., Погребняк А.Д., Романенко И.Б. О применении сглаживающих сплайн-аппроксимаций в задачах идентификации параметров ползучести // Прикладная механика. – 1997. – Т. 33, № 6. – С. 52–61.

Поступила в редакцію 24.03.06

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ВОЗЛЕ ВКЛЮЧЕНИЙ В УПРУГО-ВЯЗКОМ МАТЕРИАЛЕ ПРИ ДВУМЕРНОМ СТАТИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Б.П.Маслов,

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Определение концентрации напряжений [1] в элементах микроструктуры композитных материалов представляет большой интерес в свете формулировки соответствующих критериев длительной прочности [2]. Существенными являются величины эквивалентных напряжений в материале матрицы и во включениях, длительности нагружения и т.д. В связи с этим для создания алгоритмов проектирования новых функционально армированных материалов необходимо изучение полей локальных напряжений в элементах микроструктуры и вычисление эффективных операторов линейной упругости, пластичности, ползучести [3, 4]. В работах [5, 6] получены решения задач о нахождении эффективных упругих модулей нелинейных сжимаемых и несжимаемых композитных материалов стохастической структуры, образованных из двух компонентов: матрицы и включений. Настоящее исследование представляет собой обобщение этих результатов на случай многофазных упруго-вязких материалов. Другой особенностью является представление процесса деформирования как последовательной деградации физико-механических свойств материала.

1. Постановка задачи об определении реономных свойств материала. Рассмотрим некоторый представительный элемент конструкционного материала или упруго-вязкое тело B в области с границей $\partial\Omega = \Gamma$. Граница Γ элемента B состоит из частей таких, что $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t \cup \bigcup_{i=1}^m \Gamma_c^i$. При этом все внутренние поверхности, соответствующие трещинам различных размеров Γ_c^i ($i = \overline{1, m}$), будем считать свободными от внешних усилий T . Для характеристики степени разрушений материала в уравнение состояния введем дополнительный параметр D – меру поврежденности. Так как в эксперименте можно наблюдать деградацию модуля упругости, увеличение петли гистерезиса и появление микротрещин, то естественно связать этот параметр с количеством микротрещин в представительном элементе материала в окрестности рассматриваемой точки, например, в вершине усталостной трещины. В процессе нагружения величина D изменяется в пределах отрезка $[0, 1]$, при этом $D = 0$ соответствует идеальному состоянию материала в данной точке, а $D = 1$ – полному его разрушению в этой точке. Кинетику поврежденности зададим дополнительным уравнением, которое описывает зависимость скорости меры поврежденности от времени, напряжений и других аргументов. Эквивалентные упруго-вязкие свойства конструкционных материалов с поврежденностью определяем, используя результаты теории деформирования нелинейных сред случайной структуры. Так в работах [5–7] приведены формулы расчета приведенных линейных и нелинейных упругих постоянных для материала, ослабленного хаотично ориентированными дискообразными трещинами.

Процесс распространения усталостной трещины в упруго-вязком материале можно исследовать, учитывая, что его характеристики зависят от меры поврежденности [5]. При действии статического двухосного нагружения поведение материала будем описывать определяющими соотношениями теории наследственной механики сплошных сред [3]. При положительном полуцикле нагружения справедливыми являются соотношения линейной вязко-упругости, а при отрицательном – разгрузка происходит с возникновением в компонентах остаточных, свободных от напряжений, деформаций. Упругие свойства матрицы и зерен могут быть одинаковыми, но собственные начальные деформации являются различными. Такие поля деформаций “трансформации” возникают в результате термического расширения, фазовых переходов, возникновение локальных зон вязко-пластичности и др. Таким образом, компоненты, входящие в объем v_R рассматриваются как гомогенные, их свойства предполагаются известными. Такой подход может быть реализован путем анализа граничной задачи, в которой неоднородное тело B занимает область $\Omega \in R^3$.

На внешней границе Γ области Ω заданы условия относительно вектора перемещения

$$u_i = e_{im}^0 x_m, \quad x \in \partial\Omega, \quad (1.1)$$

где e_{im}^0 – известные величины.

Мезо-неоднородное тело B с доминантной усталостной трещиной, занимающей подобласть Ω_c с

границей Γ_c , будем считать составленным из n подобластей Ω_n , в которых находятся вязкоупругие материалы, идеально контактирующие друг с другом на межфазных поверхностях Γ_{im} , разделяющих i , m компоненты. Здесь под компонентом понимается неоднородность типа армирующих включений, а также зерен, зон вязко-пластичности и др. Свойства материала типа r описываются плотностью упруго-вязкой энергии $W_r(\mathbf{e}, t)$, которая может быть квадратичной функцией деформаций в случае линейной вязко-упругости и предполагается выпуклой в общем нелинейном случае. Тогда плотность энергии для тела B в целом может быть представлена в форме [5]

$$W(\mathbf{e}, \mathbf{x}, t) = \sum_{r=1}^n W_r(\mathbf{e}, t) f_r(\mathbf{x}), \quad (1.2)$$

где $f_r(\mathbf{x})$ – характеристическая функция области Ω_r , занятой материалом типа r , переменная времени обозначена t . Эквивалентная энергия деформации тела B , находящегося под воздействием граничных условий (1), может быть определена ее средним по области Ω значением

$$\tilde{W}(\bar{\mathbf{e}}, t) = \inf_{\Omega} \int W(\mathbf{e}, \mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (1.3)$$

Здесь операция инфинум реализуется на поле деформаций $\mathbf{e}(\mathbf{x}, t)$, связанных с перемещениями $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ соотношениями Коши

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}(\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{H}^T(\mathbf{x}, t)), \quad \mathbf{H} = (\nabla \otimes \mathbf{u})^T, \quad (1.4)$$

где ∇ – оператор дифференцирования по пространственной координате, верхним индексом T обозначены транспонированные матрицы. Тогда, если выбрать некоторый квадратичный по деформациям потенциал $W_0(\mathbf{e}, t)$ тела сравнения и определить

$$W_1^*(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{x}, t) = \sup[\boldsymbol{\tau}(t) \cdot \mathbf{e}(t) - W_1(\mathbf{e}, t)], \quad W_1(\mathbf{e}, t) = W(\mathbf{e}, \mathbf{x}, t) - W_0(\mathbf{e}, t), \quad (1.5)$$

то после ряда преобразований для любого $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{e}$ в момент времени t получаем

$$\tilde{W}(\bar{\mathbf{e}}, t) \geq \inf_{\Omega} \int [\boldsymbol{\tau}(t) \cdot \mathbf{e}(t) + W_0(\mathbf{e}, t) - W_1^*(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{x}, t)] d\mathbf{x}. \quad (1.6)$$

Неравенство (5) представляет собой вариационный принцип типа Виллиса-Хашина-Штрикмана [5] для упруго-вязкого неоднородного материала с учетом поврежденности матрицы. В качестве примера рассмотрим потенциальную функцию $W(\mathbf{e}, \mathbf{x}, t)$ степенного типа [5], используемую для моделирования поведения вязко-пластических материалов

$$\frac{1}{\tilde{\mu}} W(\mathbf{e}, t) = (1 + \frac{1}{2} \tilde{\alpha}_1) I_1^2 - 2I_2 + \tilde{\beta} (I_1^2 - 3I_2)^{\frac{1+n}{2n}}, \quad (1.7)$$

где I_k – главные инварианты тензора деформаций, $\tilde{\mu}$, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ – операторы вязко-упругости, определенные в результате минимизации функционала (5), n – постоянная, характеризующая степень нелинейности материала.

2. Метод решения. Задача определения точной нижней границы (1.3) связана с решением последовательности линейных вязко-упругих задач [3] с использованием функции Грина. Решение каждой из них можно формально представить в виде

$$\mathbf{e} - \Gamma \boldsymbol{\tau} = \bar{\mathbf{e}}, \quad (2.1)$$

где Γ – интегральный оператор, определенный через функцию Грина стохастической задачи линейной теории упругости [6]. В этом случае неравенство (2.11) можно записать в форме

$$\tilde{W}(\bar{\mathbf{e}}, t) \geq \int \left[\boldsymbol{\tau} \cdot \bar{\mathbf{e}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \Gamma \boldsymbol{\tau} - W_1^*(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{x}, t) \right] d\mathbf{x} + W_0(\bar{\mathbf{e}}, t). \quad (2.2)$$

Выберем поле напряжений поляризации $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t)$ в виде [6]

$$\tau(\mathbf{x}, t) = \sum_{r=1}^n \tau^r(t) f_r(\mathbf{x}), \quad (2.3)$$

где $\tau^r(t)$ – средние по r фазе значения. Тогда неравенство (2.14) сводится к выражению

$$\tilde{W}(\bar{\mathbf{e}}, t) \geq \sum_r c_r \left[\tau^r \cdot \bar{\mathbf{e}} - \frac{1}{2} c_r \mathbf{g}^r \tau^r - W_1^*(\tau^r, t) \right] + W_0(\bar{\mathbf{e}}, t). \quad (2.4)$$

Здесь c_r – объемная концентрация r – фазы, $\mathbf{g}^i$ – алгебраический оператор

$$c_r = \int_{\Omega} f_r(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \mathbf{g}^i = \int_{\Omega} \Gamma f_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (2.5)$$

Условие экстремальности правой части выражения (2.16) можно записать в форме

$$\gamma^r + \sum_i \mathbf{g}^i \tau^i = \bar{\mathbf{e}}, \quad (2.6)$$

где обозначено

$$\gamma^r = \partial W_1^*(\tau^r) / \partial \tau^r. \quad (2.7)$$

Подставляя условие (2.18) в (2.16), получаем

$$\tilde{W}(\bar{\mathbf{e}}, t) \geq \sum_r c_r \left[\frac{1}{2} \tau^r \cdot \bar{\mathbf{e}} - \frac{1}{2} \tau^r \cdot \gamma^r + W_1^{**}(\gamma^r, t) \right] + W_0(\bar{\mathbf{e}}, t). \quad (2.8)$$

Здесь введена функция удельной запасенной энергии $W_1^{**}(\gamma^r, t)$, сопряженная с $W_1^*(\tau^r, t)$

$$W_1^{**}(\gamma^r) = \tau^r \cdot \gamma^r - W_1^*(\tau^r, t). \quad (2.9)$$

В данном случае выражение (2.8) используется как вариационная оценка [5,7] для энергии деформации вязко-упругого материала с поврежденностью. В качестве примера рассмотрена потенциальная функция $W(\mathbf{e}, \mathbf{x}, t)$ степенного типа (1.7).

3. Концентрация напряжений на поверхности включений. Используя условия идеального контакта на поверхностях раздела между матрицей и включениями, тензоры напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} , на поверхности Γ_{im} можно разложить на нормальные $\sigma_{ij}^E, \varepsilon_{ij}^E$ и тангенциальные $\sigma_{ij}^F, \varepsilon_{ij}^F$ составляющие [7]

$$\sigma_{ij}^E = E_{ijkl} \sigma_{kl}, \quad \sigma_{ij}^F = F_{ijkl} \sigma_{kl}, \quad \varepsilon_{ij}^E = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad \varepsilon_{ij}^F = F_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (3.1)$$

тогда на границе раздела между включением и матрицей выполняются очевидные условия

$$E(\sigma^{(1)} - \sigma^{(2)}) = 0, \quad F(\varepsilon^{(1)} - \varepsilon^{(2)}) = 0. \quad (3.2)$$

Здесь под произведением тензоров понимается их свертка по паре индексов. Верхний индекс в круглых скобках означает принадлежность компоненту, при этом для определенности будем считать, что индекс 1 соответствует включению, 2 – матрице.

Используя выражения (3.2), напряжения и деформации на внешней стороне поверхности Γ_{im} (в матрице) находим из соотношений

$$\sigma^{(2)} = L^{(2)} (\varepsilon^{F(1)} + \varepsilon^{E(2)}), \quad \varepsilon^{(2)} = M^{(2)} (\sigma^{E(1)} + \sigma^{F(2)}), \quad (3.3)$$

где $L^{(2)}$ – тензор вязко-упругих операторов релаксации; $M^{(2)}$ – тензор вязко-упругих операторов податливостей матрицы композита.

В результате действия на уравнения (2.4) операторами E, F получаем

$$\sigma^{E(1)} = EL^{(2)} (\varepsilon^{F(1)} + \varepsilon^{E(2)}), \quad \varepsilon^{F(1)} = FM^{(2)} (\sigma^{E(1)} + \sigma^{F(2)}), \quad (3.4.)$$

откуда после разделения напряжений и деформаций матрицы и включений следует

$$\varepsilon^{(2)} = A \left(\sigma^{(1)} - L^{(2)} \varepsilon^{F(1)} \right), \quad \sigma^{(2)} = B \left(\varepsilon^{(1)} - M^{(2)} \sigma^{E(1)} \right). \quad (3.5)$$

Здесь

$$A = \left(EL^{(2)}E \right)^{-1} E, \quad B = \left(FM^{(2)}F \right)^{-1} F. \quad (3.6)$$

Перегруппировав члены в уравнениях (2.6) и приняв во внимание структуру операторов (2.7), найдем величину скачков напряжений и деформаций на поверхности Γ_{im}

$$\varepsilon^{(2)} - \varepsilon^{(1)} = A \left(\sigma^{(1)} - L^{(2)} \varepsilon^{(1)} \right), \quad \sigma^{(2)} - \sigma^{(1)} = B \left(\varepsilon^{(1)} - M^{(2)} \sigma^{(1)} \right). \quad (3.7)$$

Таким образом, формулами (3.7) напряженно-деформированное состояние на внешней стороне поверхности Γ_{im} (в матрице) полностью определено через напряжения и деформации на внутренней стороне (во включении) при помощи операторов **A** и **B**. Это дает возможность определения параметров локального напряженно-деформированного состояния и коэффициентов концентрации напряжений на включениях в упруго-вязких неоднородных материалах.

РЕЗЮМЕ

Визначено параметри концентрації напружень біля включень в неоднорідних багатокомпонентних вязкопружних тілах. Вважається, що зовнішнє навантаження є двовимірним, отже коефіцієнти концентрації напружень віднесено до еквівалентних напружень в локальній області. Деградація властивостей матеріалу викликана як вязкістю, так і накопиченням пошкодженості. Застосовано нелінійні визначальні рівняння, отримано варіаційні оцінки функцій повзучості, релаксації та відповідних змінних у часі параметрів концентрації напружень.

SUMMARY

Stress concentration parameters near inclusions in heterogeneous multi-component visco-elastic solids are determined. It is supposed that external load is two-dimensional so the value of stress concentration is referred to equivalent stresses in local domain. Degradation of material properties is triggered both by viscosity and damage accumulation. Nonlinear constitutive equations are used; variational estimates for creep and relaxation functions and time-dependent stress concentration parameters are obtained.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Концентрация напряжений. – К.: Наук. думка, 1998. – 387 с. (Механика композитов: В 12 т. Т.7).
2. Гузь А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. – К.: Наук. думка, 1983. – 296 с.
3. Савін Г.М., Рушицький Я.Я. Елементи механіки спадкових середовищ. – К.: Вища шк., 1976. – 107 с.
4. Калоеров С.А., Мироненко А.Б. Вязкоупругое состояние пластинки с конечным числом упругих включений // Актуальные пробл. механики деформируемого твердого тела: Матер. IV Междунар. конф. Донецк-Мелекино, 12–14 июня 2006 г. – Донецк: Юго-Восток, 2006. – С. 67–69.
5. Маслов Б.П., Бугай С.Н. Нелинейное деформирование и прочность стохастических композитов с поврежденной матрицей // Механика композитных материалов. – 1991. – № 5. – С. 796–803.
6. Маслов Б.П., Шатило Л.В. Рівняння зростання тріщини втомі у пошкодженому матеріалі із зміцненням // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. наук. – 2005. – № 1. – С. 114–124.
7. Talbot D.R.S., Willis J.R. Bounds for the effective constitutive relation of a nonlinear composite // Proc. R. Soc. Lond. A – 2004. – Vol. 460. – P. 2705–2723.

Поступила в редакцию 16.06.2006

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ С ОТВЕРСТИЯМИ И ТРЕЩИНАМИ В СЛУЧАЕ ДЕЙСТВИЯ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА

С.А.Калоеров, Ю.С.Антонов

В работах [1, 2] предложены методы решения задач теплопроводности и термоупругости для анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами при действии различных тепловых факторов. В данной статье приводятся решения задач с проведением численных исследований для случая действия сосредоточенных источников тепла.

Постановка задачи. Рассмотрим анизотропную пластинку с эллиптическими отверстиями или прямолинейными трещинами с контурами L_l ($l = \overline{1, L}$), находящуюся под действием внутренних сосредоточенных источников тепла с мощностями q_j^0 ($j = \overline{1, J}$). На контурах отверстий и трещин относительная температура $T_l^o = T_1 - T_H$ равна нулю или они теплоизолированы. При этом, если все контуры теплоизолированы, то сумма мощностей всех сосредоточенных источников тепла равна нулю (из-за ограниченности температуры на бесконечности) [2, 3].

Определение температурного поля в рассматриваемой пластинке сводится к нахождению комплексного потенциала $F_3(z_3)$, а термонапряженного состояния – производных комплексных потенциалов $\Phi'_k(z_k)$ ($k = 1, 2$) из соответствующих граничных условий. В данном случае эти функции имеют вид [1, 2]

$$F_3(z_3) = c_0 + \sum_{l=1}^L D_{3l} \ln(z_3 - z_{3l}) + \sum_{j=1}^J \delta_{3j} \ln(z_3 - z_{3j}^0) + \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{3ln}}{\zeta_{3l}^n}, \quad (1)$$

$$\Phi'_k(z_k) = \Gamma_k + A'_k(z_k) + \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \phi'_{kln}(z_k). \quad (2)$$

где c_0 – вещественная постоянная, определяемая из граничных условий на контурах отверстий;

$$D_{3l} = -\frac{q_l}{4\pi \alpha}, \quad \delta_{3j} = -\frac{q_j^0}{4\pi \alpha}, \quad \alpha = \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}; \quad (3)$$

$$A'_k(z_k) = \sum_{l=1}^L \left[A_{kl} \ln \zeta_{kl} + \frac{(A_{kl}z_k + B_{kl})\zeta_{kl}}{R_{kl}(\zeta_{kl}^2 - m_{kl})} \right] + \sum_{j=1}^J \alpha_{kj} \ln(z_k - z_{kj}^0); \quad (4)$$

$$\phi'_{kln}(z_k) = -\frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1} R_{kl}(\zeta_{kl}^2 - m_{kl})}; \quad (5)$$

k_{ij} – коэффициенты теплопроводности; Γ_k , A_{kl} , B_{kl} , α_{kj} – постоянные, определяемые из решения задачи теплопроводности; ζ_{kl} – переменные, вычисляемые из неявных зависимостей [1, 2]

$$z_k = z_{0kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right); \quad (6)$$

c_{3ln} , a_{kln} – неизвестные коэффициенты, которые будем определять из граничных условий на контурах пластинки методом наименьших квадратов.

Используя граничные условия задачи теплопроводности, составим функционал, минимизация которого приводит к системе линейных алгебраических уравнений теплопроводности относительно c_0 , D_{3l} , c_{3ln} . После решения этой системы можно в любой точке найти температуру

$$T(x, y) = T_n + 2 \operatorname{Re} F_3(z_3), \quad (7)$$

поток тепла, где T_n – начальная температура пластинки, при которой в ней отсутствуют напряжения. По этим коэффициентам также находятся сперва постоянные Γ_3 , A_{3l} , B_{3l} , а затем из соответствующих систем Γ_k , A_{kl} , B_{kl} при $k=1, 2$. Затем с помощью граничных условий задачи термоупругости снова составим функционал, минимизация которого приводит к системе линейных алгебраических уравнений термоупругости относительно коэффициентов a_{kln} . После решения последней системы можно в любой точке вычислять напряжения [1, 2]

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{6k}) \Phi'_k(z_k), \quad (8)$$

где λ_{1k} , λ_{2k} , λ_{6k} – известные постоянные.

В случае пластинки с одним эллиптическим отверстием или трещиной под действием сосредоточенных источников тепла в точках z_j^0 функции (1) – (2) принимают вид

$$F_3(z_3) = c_0 + \sum_{j=1}^J \delta_{3j} \left[\ln(z_3 - z_{3j}^0) - \ln \zeta_{31} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} c_{31n} \varphi_{31n}(z_3); \quad (9)$$

$$\Phi'_k(z_k) = \Gamma_k + A'_k(z_k) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{k1n} \varphi'_{k1n}(z_k). \quad (10)$$

где

$$A'_k(z_k) = A_{k1} \ln \zeta_{k1} + \frac{(A_{k1} z_k + B_{k1}) \zeta_{k1}}{R_{k1} (\zeta_{k1}^2 - m_{k1})} + \sum_{j=1}^J \frac{\alpha_{kj}}{z_k - z_{kj}^0}; \quad (11)$$

Заметим, что в данном случае приходится иметь дело с односвязными областями и вместо метода наименьших квадратов может применяться метод интегралов типа Коши, который позволяет получить точные решения задач в виде аналитических формул для функций, а также для температуры и напряжений.

Анализ результатов численных исследований. На основе полученного методом наименьших квадратов решения были проведены подробные численные исследования распределения напряжений в анизотропной пластинке с круговым отверстием радиуса a или трещиной длины $2l$ (рис. 1), когда действовал один или два симметрично расположенных источника тепла, причем в случае теплоизолированного контура в силу принятого выше ограничения поведения решения на бесконечности могли действовать только источник и сток тепла одинаковой мощности. Пластинка считалась изготовленной из КАСТ-В изотропного [4] (материал М1), КАСТ-В [4] (М2), молибдата свинца $PbMoO_4$ [5] (М3), дигидрофосфата аммония $NH_4H_2PO_4$ [5] (М4). Тепловые и упругие характеристики этих материалов приведены в табл. 1. Ниже описаны некоторые из полученных результатов, причем все значения величин даны с точностью до мощности источника тепла q_1 как множителя.

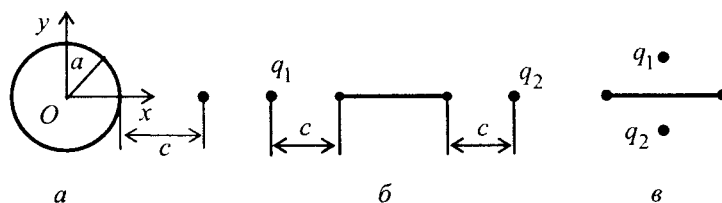


Рис. 1

Для пластинки с круговым отверстием, на контуре которого относительная температура равна нулю ($T^0 = 0$), при действии сосредоточенного источника тепла в табл. 2 приведены значения нормальных напряжений σ_θ вблизи контура отверстия на площадках, перпендикулярных к контуру, в зависимости от отношения c/a расстояния от точки приложения источника тепла до контура отверстия к его радиусу

Таблиця 1

Постоян- ные	Материал			
	М1	М2	М3	М4
$a_{11}, \text{МПа}^{-1}$	$7,21 \cdot 10^{-3}$	$4,98 \cdot 10^{-3}$	$2,10 \cdot 10^{-5}$	$1,75 \cdot 10^{-5}$
$a_{22}, \text{МПа}^{-1}$	$7,21 \cdot 10^{-3}$	$7,21 \cdot 10^{-3}$	$1,66 \cdot 10^{-5}$	$4,35 \cdot 10^{-5}$
$a_{12}, \text{МПа}^{-1}$	$-0,860 \cdot 10^{-3}$	$-0,865 \cdot 10^{-3}$	$-0,490 \cdot 10^{-5}$	$-1,150 \cdot 10^{-5}$
$a_{66}, \text{МПа}^{-1}$	$16,15 \cdot 10^{-3}$	$13,90 \cdot 10^{-3}$	$3,75 \cdot 10^{-5}$	$1,15 \cdot 10^{-4}$
α_1, K^{-1}	$3,0 \cdot 10^{-5}$	$3,0 \cdot 10^{-5}$	$1,0 \cdot 10^{-5}$	$3,7 \cdot 10^{-5}$
α_2, K^{-1}	$3,0 \cdot 10^{-5}$	$4,0 \cdot 10^{-5}$	$2,5 \cdot 10^{-5}$	$0,4 \cdot 10^{-5}$
$k_{11}, \text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$	0,2095	0,2095	0,015	1,2570
$k_{22}, \text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$	0,2100	0,3352	0,015	0,7123

Таблиця 2

Мате- риал	θ , рад	Вели- чина	c/a				
			10	5	1	0,5	0,1
М1	0	$\sigma_\theta \cdot 10$	0,079	0,062	0,038	0,034	0,030
	$\pi/4$	$\sigma_\theta \cdot 10$	0,073	0,052	0,006	-0,004	-0,004
	$\pi/2$	$\sigma_\theta \cdot 10$	0,076	0,058	0,034	0,032	0,032
	$3\pi/4$	$\sigma_\theta \cdot 10$	0,077	0,059	0,026	0,016	0,004
	π	$\sigma_\theta \cdot 10$	0,073	0,051	0,006	-0,008	-0,026
М2	0	$\sigma_\theta \cdot 10$	0,100	0,077	0,042	0,035	0,028
	$\pi/4$	$\sigma_\theta \cdot 10$	0,082	0,059	0,008	-0,006	-0,009
	$\pi/2$	$\sigma_\theta \cdot 10$	0,065	0,050	0,032	0,031	0,033
	$3\pi/4$	$\sigma_\theta \cdot 10$	0,086	0,065	0,027	0,015	-0,001
	π	$\sigma_\theta \cdot 10$	0,095	0,068	0,013	-0,004	-0,026
М3	0	σ_θ	16,27 0	13,19 3	9,831	9,948	10,96 0
	$\pi/4$	σ_θ	26,26 8	18,41 6	1,945	-0,995	0,575
	$\pi/2$	σ_θ	30,47 0	23,23 0	13,18 7	11,91 5	11,10 7
	$3\pi/4$	σ_θ	28,10 3	21,76 4	10,48 1	7,260	3,417
	π	σ_θ	14,39 7	9,756	-0,547	-3,972	-8,182
М4	0	σ_θ	0,011	0,023	0,075	0,097	0,092
	$\pi/4$	σ_θ	0,223	0,143	-0,003	0,002	0,045
	$\pi/2$	σ_θ	1,082	0,843	0,568	0,539	0,519
	$3\pi/4$	σ_θ	0,259	0,208	0,120	0,096	0,068

(рис. 1,а). Из табл. 2 видно, что под действием источника тепла около контура отверстия возникает высокая концентрация напряжений, которая особенно велика вблизи точек перемычки при $c/a \leq 1$ для материалов М1–М3, и невелика для материала М4. Существенное влияние на значения напряжений оказывают теплофизические постоянные материала. Так, максимальные значения напряжений для пластинки из материала М3 в несколько тысяч раз больше, чем для пластинки из материала М1.

Для пластинки с трещиной, на берегах которой $T^o = 0$, при различных расположениях сосредоточенных источников тепла и их количестве (рис. 1,б, 1,в) в табл. 3 приведены значения КИН для концов трещины. Из описанных результатов видно, что уменьшение расстояния между трещиной и двумя сосре-

Таблиця 3

КИН	c/l						
	10^6	10	5	1	0,5	0,1	0,01
На линии трещины действует q_1 , ($q_2=0$)							
k_1^-	0,381	0,066	0,049	0,017	0,007	-0,007	-0,015
На линии трещины действуют q_1 и $q_2=q_1$							
k_1^-	0,762	0,132	0,098	0,034	0,015	-0,014	-0,030
На линии, перпендикулярной к трещине, действует q_1 , ($q_2=0$)							
k_1^-	0,381	0,063	0,044	-0,001	-0,014	-0,019	-0,019
k_2^-	0,000	-0,001	-0,003	-0,014	-0,019	-0,010	-0,001
На линии, перпендикулярной к трещине, действуют q_1 и $q_2=q_1$							
k_1^-	0,762	0,126	0,088	-0,002	-0,027	-0,038	-0,038
На линии, перпендикулярной к трещине действуют q_1 и $q_2=-q_1$							
k_2^-	0,000	-0,003	-0,006	-0,027	-0,039	-0,038	-0,038

доточенными источниками тепла, расположенных на срединном перпендикуляре к трещине приводит к росту значений КИН по модулю. Во всех остальных случаях это уменьшение расстояния приводит к снижению значения КИН.

На рис. 2 и 3 изображены графики изменения КИН для концов теплоизолированной трещины при различных вариантах расположения сосредоточенных источников тепла (рис. 1,б, 1,в). Из этих данных видно, что с уменьшением расстояния между трещиной и сосредоточенными источниками тепла наблюдается существенный рост КИН по абсолютной величине, значительно влияние анизотропии теплофизиче-

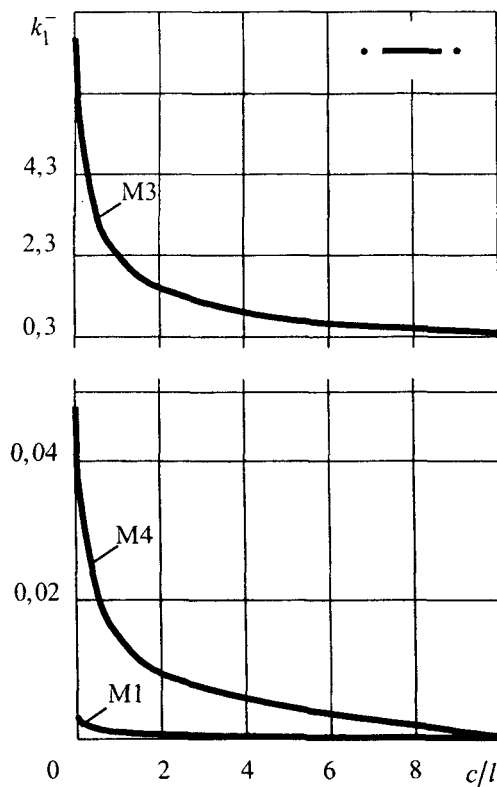


Рис. 2

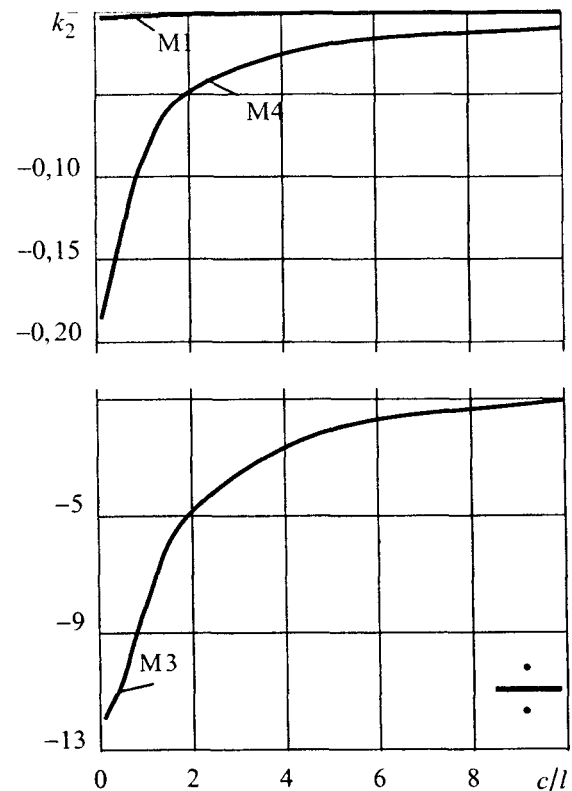


Рис. 3

ских постоянных материала. Так, если источники тепла расположены на линии трещины, то максимальные значения КИН для пластинки из материала М3 превышают аналогичные значения для изотропного материала М1 более чем в 27 раз, а в случае источников на срединном перпендикуляре они превышают значения для М1 более чем в 37 раз.

Заметим, что полученные результаты для изотропной пластинки (из материала М1) с теплоизолированной трещиной при действии двух сосредоточенных источников тепла практически полностью совпадают с известными [6].

РЕЗЮМЕ

Запропоновано розв'язок задачі термопружності для нескінченної багатозв'язної анізотропної платівки з отворами та тріщинами під дією зосереджених джерел тепла з використанням узагальнених комплексних потенціалів. Описано отримані результати чисельних досліджень розподілу напружень та зміни КИН.

SUMMARY

Thermoelasticity problem solution for infinite multiconnected anisotropic plate with holes and cracks under the influence of concentrated heat sources are offered with using generalized complex potentials. Obtained results of numerical investigations of stresses distribution and SIF changing are described.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Калоеров С.А., Антонов Ю.С. Термоупругое состояние анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами при действии линейного потока тепла и температуры на контурах // Теорет. и прикладная механика. – 2005. – Вып. 40. – С. 102–116.
2. Калоеров С.А., Антонов Ю.С. Термонапряженное состояние анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами // Прикладная механика. – 2005. – Т.41, №9. – С.127–136.
3. Космодамианский А.С., Калоеров С.А. Температурные напряжения в многосвязных пластинках. – Донецк: Вища шк., 1983. – 160 с.
4. Амбарцумян С.А., Дургарьян С.М. Некоторые нестационарные температурные задачи для ортотропной пластинки // Изв. АН СССР, Механика и машиностроение. – 1962. – № 3. – С. 120–127.
5. Акустические кристаллы. Справ. / А. А. Блистанов, В. С. Бондаренко, В. В. Чкалова и др.; Под ред. М. П. Шаскольской. – М.: Наука, 1982. – 632 с.
6. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинках и оболочках. – К.: Наук. думка, 1983. – 444 с.

Надійшла до редакції 16.03.06 р.

УДК 539.3

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА МАГНИТОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛА С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ПОЛОСТЯМИ ИЛИ ТРЕЩИНАМИ

О.И.Бороненко, С.А.Калоеров

Исследование упругих и магнитных свойств пьезомагнитных (магнитострикционных) материалов [1, 2], прогнозирование их эффективных физико-механических характеристик [3, 4] и математическое моделирование взаимодействия в них механического и магнитного полей [5, 6] являются актуальными проблемами современной теории магнитоупругости. В работах [7, 8] предложен метод определения двумерного и плоского магнитоупругих состояний пьезомагнитных (магнитострикционных) тел с отверстиями и трещинами, основанный на приложениях обобщенных комплексных потенциалов магнитоупругости. В данной статье этим методом решена двумерная (плоская) периодическая задача магнитоупругости для тела с эллиптическими отверстиями или трещинами.

Постановка задачи. Рассмотрим пьезомагнитное (магнитострикционное) тело с бесконечным рядом одинаковых и одинаково расположенных эллиптических полостей, в поперечном сечении которого плоскостью Oxy имеем многосвязную расширенную плоскость S с эллиптическими отверстиями с контурами L_l ($l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) с полуосями a , b и центрами вдоль одной прямой, принимаемой за ось Ox (рис. 1). Будем считать, что тело находится в условиях двумерного магнитоупругого состояния. На бесконечности действуют σ_x^∞ , σ_y^∞ , τ_{yz}^∞ , τ_{xz}^∞ , τ_{xy}^∞ , B_x^∞ (или H_x^∞), B_y^∞ (или H_y^∞). Угол поворота ω_3^∞ тела как целого равен нулю. На цилиндрических поверхностях заданы значения внешних усилий (или перемещений) и индукции магнитного поля. Главный вектор усилий и суммарная намагниченность на каждой из поверхностей полостей равны нулю. Обозначим расстояния между центрами соседних отверстий и угол наклона полуоси a эллипса к линии центров через h_x и φ соответственно.

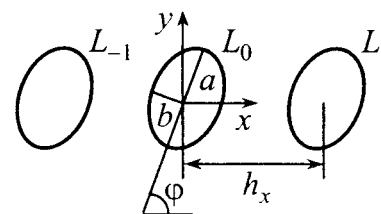


Рис. 1

Определение магнитоупругого состояния рассматриваемого тела сводится [7, 8] к нахождению обобщенных комплексных потенциалов магнитоупругости $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) из граничных условий на контурах отверстий L_l

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 g_{ki} \delta_k \Phi'_k(t_k) = f_{il}(t) \quad (i = \overline{1, 4}), \quad (1)$$

где $\delta_k = \frac{dx}{ds} + \mu_k \frac{dy}{ds} = \frac{x' + \mu_k y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$; s – длина дуги контура, обходимого против часовой стрелки; x' , y' – производные по параметру параметрического задания контура; μ_k – корни известного характеристического уравнения для материала тела; g_{ki} – коэффициенты, зависящие от анизотропии материала; $f_{il}(t)$ – производные по дуге контура от соответствующих заданных усилий и индукции магнитного поля.

Построение решения. Комплексные потенциалы $\Phi_k(z_k)$ определены в бесконечных многосвязных областях S_k , получаемых из заданной области S аффинными преобразованиями

$$z_k = x + \mu_k y, \quad (2)$$

и имеют вид

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \Phi_{kl}(z_k). \quad (3)$$

Здесь Γ_k – постоянные, определяемые из условий на бесконечности

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{4k}, \lambda_{5k}, \lambda_{6k}, \lambda_{7k} \left(-r_k^0 \right), \lambda_{8k} \left(-\mu_k r_k^0 \right), q_k - \mu_k p_k \right) \Gamma_k =$$

$$= \left(\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{yz}^\infty, \tau_{xz}^\infty, \tau_{xy}^\infty, B_x^\infty \left(H_x^\infty \right), B_y^\infty \left(H_y^\infty \right), 2\omega_3^\infty \right); \quad (4)$$

$\Phi_{kl}(z_k)$ – функции голоморфные в областях S_k , ограниченных контурами L_{kl} , получаемыми из L_l аффинными преобразованиями (2); λ_{ik} , p_k , q_k , r_k^0 – коэффициенты, зависящие от постоянных материала тела.

Для построения общего вида функций $\Phi_{kl}(z_k)$ отобразим внешности единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{kl} по формулам

$$z_k = lh_x + R_k \left(\zeta_{kl} + \frac{m_k}{\zeta_{kl}} \right), \quad (5)$$

где lh_x – аффиксы центров контуров L_{kl} (или все равно, что L_l);

$$R_k = \frac{a(\cos \varphi + \mu_k \sin \varphi) + ib(\sin \varphi - \mu_k \cos \varphi)}{2},$$

$$m_k = \frac{a(\cos \varphi + \mu_k \sin \varphi) - ib(\sin \varphi - \mu_k \cos \varphi)}{2R_k}. \quad (6)$$

Разлагая функции $\Phi_{kl}(z_k)$, голоморфные вне кругов $|\zeta_{kl}| > 1$, в ряды Лорана по отрицательным степеням ζ_{kl} , для (3) получаем

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{kln}}{\zeta_{kl}^n(z_k)}. \quad (7)$$

Тогда

$$\Phi'_k(z_k) = \Gamma_k + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \psi_{kln}(z_k), \quad (8)$$

где

$$\psi_{kln}(z_k) = -\frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1} R_k (\zeta_{kl}^2 - m_k)}. \quad (9)$$

В силу периодичности магнитоупругого состояния значения основных характеристик в точках z_k и $z_k + h_x$ будут одинаковыми. Поэтому

$$\Phi'_k(z_k) = \Phi'_k(z_k + h_x). \quad (10)$$

Подставляя (8) в (10), будем иметь

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \psi_{kln}(z_k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \psi_{kln}(z_k + h_x). \quad (11)$$

Из равенств (5) следует, что $\zeta_{k, l-1}(z_k) = \zeta_{kl}(z_k + h_x)$. Учитывая это, из (9) находим

$$\psi_{kln}(z_k + h_x) = \psi_{k, l-1, n}(z_k);$$

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \psi_{kln}(z_k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \psi_{k, l-1, n}(z_k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{k, l+1, n} \psi_{kln}(z_k). \quad (12)$$

Сравнивая в последнем равенстве коэффициенты при функциях $\psi(z_k)$, получаем

$$a_{kln} = a_k, l+1, n = a_{kn}.$$

Тогда функции (7) и их производные (8) примут вид

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} \varphi_{kn}(z_k), \quad \Phi'_k(z_k) = \Gamma_k + \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} \varphi'_{kn}(z_k), \quad (13)$$

где

$$\varphi_{kn}(z_k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \zeta_{kl}^{-n}(z_k), \quad \varphi'_{kn}(z_k) = - \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1} R_k(\zeta_{kl}^2 - m_k)};$$

a_{kn} – постоянные, определяемые из условий на контуре основного отверстия. Исходя из граничных условий (1), составим функционал

$$I = \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^4 \left| \sum_{k=1}^4 \left[g_{ki} \delta_k \Phi'_k(t_{km}) + \bar{g}_{ki} \bar{\delta}_k \overline{\Phi'_k(t_{km})} \right] - f_{im} \right|^2, \quad (14)$$

где $t_m = x_m + \mu_k y_m$ – набор точек на контуре основного отверстия, в которых составляется квадрат невязки между точным и приближенным граничными значениями функций. Удовлетворяя условиям минимума $\partial I / \partial a_{kn} = 0$ функционала (14), для определения коэффициентов a_{kn} получаем систему линейных алгебраических уравнение:

$$\sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^4 \sum_{s=1}^4 \sum_{p=1}^{\infty} A_{ikn} \left[A_{isp} a_{sp} + \overline{A_{isp}} \bar{a}_{sp} \right] = \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^4 A_{ikn} \left(f_{im} - \sum_{s=1}^4 \alpha_{is} \right), \quad (15)$$

где $k = \overline{1, 4}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, $\alpha_{is} = g_{si} \delta_s \Gamma_s + \bar{g}_{si} \bar{\delta}_s \bar{\Gamma}_s$, $A_{ikn} = g_{ki} \delta_k \varphi'_{kn}(t_m)$.

После определения коэффициентов a_{kn} из системы (15) станут известными функции $\Phi'_k(z_k)$, через которые можно найти основные характеристики магнитоупругого состояния в любой точке тела, а в случае трещин – и коэффициенты интенсивности напряжений, индукции и напряженности магнитного поля (КИНИН) [7, 8].

Если имеет место обобщенное плоское магнитоупругое состояние пластинки, то приведенные выше формулы упрощаются. В этом случае во всех формулах нужно суммирование по k проводить от 1 до 3 и положить равными нулю все постоянные и функции, связанные со значением индекса $k = 4$.

Анализ результатов численных исследований. Были проведены численные исследования распределения основных магнитоупругих характеристик (напряжений, индукции и напряженности поля) и изменений КИНИН в зависимости от геометрических параметров пластинки с периодическим рядом круговых отверстий или трещин (рис. 2). Ниже описаны некоторые из полученных результатов. При этом значения всех величин даны с точностью до интенсивности приложенных усилий или напряженности магнитного поля. Считалось, что пластинка изготовлена из магнестрикционного Terfenol-D (материал М1) [6–8] или пьезомагнитной керамики (материал М2) [3, 7, 8].

В табл. 1 для пластинки с периодическим рядом круговых отверстий (рис. 2, а) в зависимости от отношения h_x/a расстояния между центрами отверстий к радиусу отверстия приведены значения нормальных напряжений σ_θ вблизи контура основного отверстия на площадках, перпендикулярных к этому контуру, а также индукции B_θ и напряженности H_θ магнитного поля для различных случаев действия механических усилий или напряженности магнитного поля. При этом θ – центральный угол основного отверстия, отсчитываемый от направления оси Ox против часовой стрелки. Как видно из приведенных и других полученных результатов, при сближении отверстий друг с другом значения на-

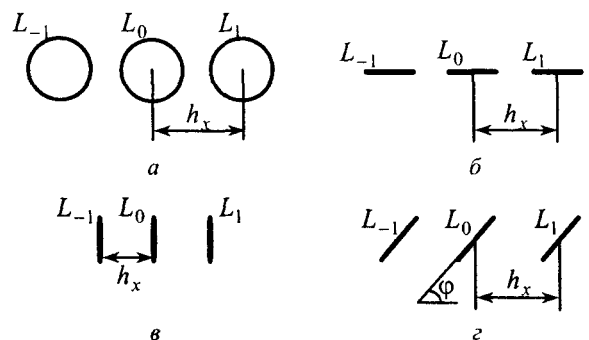


Рис. 2

пряжений, индукции и напряженности магнитного поля около контуров отверстий и в зонах между ними растут, причем наибольших значений эти величины достигают в зоне перемычек. Влияние анизотропии материала на значения основных магнитоупругих характеристик значительно при действии $H_y^\infty = \varepsilon$.

Таблица 1

Материал	h_x/a	Величина	θ , рад						
			0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
M1	3,0 2,5 2,25 2,1	σ_θ	Действие усилий $\sigma_y^\infty = p$						
			3,413	3,488	3,393	2,413	0,776	-0,323	-0,643
			5,216	4,970	4,360	2,956	0,964	-0,286	-0,651
			9,124	7,598	5,429	3,434	1,066	-0,256	-0,683
	M2	3,0 2,5 2,25 2,1	19,764	12,711	6,344	3,769	0,951	-0,169	-0,741
			3,857	3,670	2,993	1,872	0,686	-0,233	-0,594
			5,653	5,095	3,790	2,276	0,840	-0,194	-0,601
			9,610	7,584	4,574	2,621	0,896	-0,157	-0,625
M1	3,0 2,5 2,25 2,1	σ_θ	22,148	11,713	4,607	2,004	0,647	-0,265	-0,371
			Действие поля напряженности $H_y^\infty = \varepsilon$						
			-12,204	-5,698	9,537	19,468	12,320	0,114	-4,706
			-11,061	-3,848	13,369	23,586	13,988	0,422	-4,930
	$B_0 \cdot 10^6$	2,25 2,1 3,0 2,5	-9,726	-0,950	17,018	27,087	14,832	0,770	-5,332
			-14,542	1,450	18,319	28,402	12,909	1,947	-6,399
			18,396	17,193	14,282	10,768	7,170	3,585	0,000
			28,448	25,066	18,464	12,626	7,920	3,858	0,000
		2,25 2,1 3,0 2,5	48,638	38,539	23,491	14,407	8,416	4,056	0,000
			94,414	61,526	27,428	15,559	8,098	4,144	0,000
			3,458	3,228	2,673	2,010	1,337	0,668	0,000
			5,344	4,705	3,456	2,357	1,477	0,719	0,000
	H_θ	2,25 2,1	9,135	7,232	4,397	2,689	1,569	0,756	0,000
		17,730	11,545	5,135	2,905	1,510	0,772	0,000	

В табл. 2 для пластинки с бесконечным рядом трещин, расположенных вдоль оси Ox (рис. 2, б), при действии $\sigma_y^\infty = p$ и $H_y^\infty = \varepsilon$ приведены значения КИНИН (значения, равные нулю, не приведены) для концов трещин в зависимости от отношения h_x/l расстояния между центрами трещин к полудлине

Таблица 2

Воздействие	КИНИН	Материал	h_x/l				
			10,0	3,0	2,5	2,25	2,1
$\sigma_y^\infty = p$	k_1	M1	1,017	1,283	1,559	2,004	2,960
$H_y^\infty = \varepsilon$	$k_B \cdot 10^6$	M1	5,416	6,835	8,304	10,673	15,768
		M2	23,314	29,421	35,745	45,945	67,876
	k_H	M1	1,018	1,285	1,561	2,006	2,964
		M2	1,064	1,343	1,631	2,097	3,098

трещин. В табл. 3 для пластинки из материала М1 с бесконечным рядом трещин, параллельных оси Oy (рис. 2, в), при действии $\sigma_x^\infty = q$ и $H_x^\infty = \varepsilon$ приведены значения тех же величин в зависимости от отношения h_x/l расстояния между центрами трещин к полудлине трещин. Как следует из данных табл. 2, 3, для трещин вдоль одной прямой при их сближении друг с другом КИНИН растет. Для параллельных трещин их сближение ведет к уменьшению КИНИН. В случае действия $\sigma_y^\infty = p$ КИН k_1 , а при действии $H_y^\infty = \varepsilon$ КИНИН k_H не зависят от анизотропии материала пластинки.

Таблица 3

Воздей- ствие	КИНИН	h_x/l					
		10,0	3,0	1,0	0,5	0,25	0,1
$\sigma_x^\infty = q$	k_1	0,968	0,749	0,429	0,307	0,222	0,150
$H_x^\infty = \varepsilon$	$k_B \cdot 10^6$	-5,285	-4,640	-3,043	-2,178	-1,573	-1,059
	k_H	-0,984	-0,864	-0,567	-0,406	-0,293	-0,197

В табл. 4 даны значения КИНИН для пластинки из материала М1 с бесконечным рядом трещин, наклоненных под углом φ (рис. 2, г). При этом считалось, что $h_x/l = 2,5$. Как видно из данных табл. 4,

Таблица 4

Воздей- ствие	КИНИН	φ , рад						
		0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
$\sigma_y^\infty = p$	k_1	1,559	1,668	1,250	0,760	0,357	0,092	0,0
	k_2	0,0	0,125	0,513	0,630	0,540	0,307	0,0
$H_y^\infty = \varepsilon$	k_1	0,0	1,032	0,546	0,333	0,180	0,052	0,0
	k_2	0,0	-0,985	-0,147	0,159	0,254	0,181	0,0
	$k_B \cdot 10^6$	8,304	6,765	4,983	3,572	2,328	1,152	0,0
	k_H	1,561	1,270	0,934	0,668	0,434	0,215	0,0

при растяжении пластинки с трещинами с увеличением угла φ значения k_1 убывают, а k_2 возрастает, пока $\varphi \leq \pi/4$, а затем также убывает. В случае $H_y^\infty = \varepsilon$ при увеличении φ значения k_2 тоже увеличиваются, а остальные КИНИН уменьшаются.

РЕЗЮМЕ

З використанням узагальнених комплексних потенціалів отриманий розв'язок періодичної задачі магнітопружності для п'єземагнітного (магнітострикційного) тіла з нескінченним рядом однакових та однаково розташованих еліптичних отворів або тріщин при дії механічного та магнітного полів. Наведено та проаналізовано результати чисельних досліджень розподілу основних магнітопружних характеристик та зміни КІНІН для п'єземагнітної (магнітострикційної) пластинки з періодичним рядом кругових отворів або тріщин, що знаходиться під дією зовнішніх зусиль або однорідного магнітного поля.

SUMMARY

Using the generalized complex potentials the solution of magnetoelastic periodic problem for a piezomagnetic (magnetostrictive) solid with an infinite series of equal and identically situated elliptic cavities or cracks under mechanical and magnetic surface loads is obtained. There are given and analyzed the numerical investigation results of basic magnetoelastic characteristics distribution and coefficients of stress, magnetic induction and tension intensity behavior for a piezomagnetic (magnetostrictive) plate with a periodic series of circular cavities or cracks under external mechanical or homogeneous magnetic field action.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гузь А. Н., Махорт Ф. Г. Акустоэлектромагнитоупругость. – К.: Наук. думка, 1989. – 279 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5 т. – Т. 3).
2. Berlincourt D. A., Curran D. R., Jaffe H. Piezoelectric and piezomagnetic materials and their function in transducers // Phys. Acoust. – 1964. – №1. – P. 169–270.
3. Маслов Б. П., Лещенко П. В. Прогнозирование эффективных свойств пьезомагнитной керамики, упрочненной дискретными волокнами // Прикладная механика. – 1981. – Т. 17, № 8. – С. 114–118.
4. Shul'ga N. A. Propagation of coupled waves interacting with an electromagnetic field in periodically inhomogeneous media // Int. Appl. Mech. – 2003. – Т. 39, № 10. – P. 1146–1172.
5. Магнитные и диэлектрические приборы: В 2 ч., Ч.1 / Под ред. Г.В.Катца. – М.-Л.:Энергия, 1964. – 416 с.
6. Liu Y. X., Wan J. G., Liu J.-M., Nan C. W. Effect of magnetic bias field on magnetoelectric coupling in magnetoelectric composites // J. Appl. Phys. – 2003. – Vol.94, №8. – P. 5118–5122.
7. Калоеров С. А., Бороненко О. И. Двумерная и плоская задачи для пьезомагнитного тела с отверстиями и трещинами // Теорет. и прикладная механика. – 2005. – Вып. 42. – С. 111–123.
8. Kaloerov S. A., Boronenko O. I. Two-Dimensional Magnetoelastic Problem for a Multiply Connected Piezomagnetic Body // Int. Appl. Mech. – 2005. – Т. 41, № 10. – P. 1138–1148.

Надійшла до редакції 20.03.2006 р.

УДК 539.3

УЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ТЕОРИИ НЕТОНЫХ ОБОЛОЧЕК С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

И.Ю.Хома, Ю.И.Хома,
Институт механики НАН Украины, г. Киев

Исследования устойчивости стержней, пластин и оболочек в рамках трехмерной линеаризированной теории изложены в [1,2]. В работе [3] методом разложения искомых функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра построены уравнения нейтрального равновесия нетонких анизотропных оболочек с начальными напряжениями. Некоторые соотношения для анизотропных оболочек с начальными напряжениями и деформациями приведены в [4]. Данная работа посвящена обобщению, изложенного в [3] метода, на случай учёта температурного поля.

Постановка задачи. Предположим, что оболочка, занимающая область $\Omega = S \times [-h, h]$ трехмерного пространства, отнесена к криволинейной системе координат x^i ($i = 1, 2, 3$), нормально связанной с поверхностью S . Будем считать, что x^α ($\alpha = 1, 2$) являются гауссовыми координатами поверхности S , а x^3 изменяются вдоль нормали $\vec{n}$ к S в пределах толщины оболочки, т.е. $x_3 \in [-h, h]$. Множество таких координатных систем называют S -семейством [5]. Положение любой точки оболочки в S -семействе определяется радиус-вектором $\vec{R}(x^1, x^2, x^3) = \vec{r}(x^1, x^2) + x^3 \vec{n}(x^1, x^2)$, где $\vec{r}(x^1, x^2)$ – радиус-вектор поверхности S . Базисные вектор-функции области Ω имеют вид

$$\bar{g}_j = A_j^i \bar{a}_i = A_{ji} \bar{a}^i; \quad \bar{g}^j = A_j^i \bar{a}^i = A^{ji} \bar{a}_i, \quad (1)$$

где $\partial_i = \partial/\partial x_i$; $\bar{g}_j = \partial_j \vec{R}$ ($j = 1, 2, 3$); $\bar{a}_\alpha = \partial_\alpha \vec{r}$ ($\alpha = 1, 2$); $\bar{a}_3 = \vec{n}$; A_j^i , A_{ji} и A_i^j , A^{ji} – пространственные S -тензоры второго ранга [5]. Обращая формулы (1), получим выражения для базисных вектор-функций $\bar{a}_i$ и $\bar{a}^i$ т.е

$$\bar{a}_i = A_i^j \bar{g}_j = A_{ji} \bar{g}^j; \quad \bar{a}^i = A_j^i \bar{g}^j = A^{ji} \bar{g}_j, \quad (2)$$

Параметризацию области Ω с подвижным базисом (1) будем называть S_g -параметризацией. Если же в качестве подвижного базиса принять вектор-функции $\bar{a}_i$ и $\bar{a}^i$, то будем иметь S_a -параметризацию области. При одновременном использовании введенных базисов отмечают штрихами индексы тензоров, которые относятся к S_a -параметризации области и без штрихов, относящиеся к S_g -параметризации. Соотношения между ковариантными производными $\hat{\nabla}_i$ и $\tilde{\nabla}_i$ в S_g и S_a параметризациях устанавливаются формулами [5]

$$\hat{\nabla}_i u^j = A_{k'}^j \tilde{\nabla}_i u^{k'}; \quad \tilde{\nabla}_i u^{j'} = A_{k'}^{j'} \hat{\nabla}_i u^k \quad (i = i'), \quad (3)$$

Вариационные уравнения. Для построения двумерных уравнений нейтрального равновесия оболочки воспользуемся вариационным уравнением Е. Трефца [6], дополненное температурным членом

$$\iiint_{\Omega} t^{ij} \hat{\nabla}_i \delta u_j d\Omega = 0, \quad (4)$$

где

$$t^{ij} = c^{ijlm} \hat{\nabla}_l u_m + P^{il} \hat{\nabla}_l u^j - \beta^{ij} \theta, \quad (5)$$

и вариационным уравнением установившегося температурного поля [7]

$$\iiint_{\Omega} q^i \partial_i (\delta \theta) d\Omega - \iint_{\partial \Omega} Q \delta \theta da = 0, \quad (6)$$

в котором

$$q^i = -\lambda^{ij} \partial_j \theta. \quad (7)$$

Здесь P^{il} – начальные напряжения; u_j – компоненты вектора перемещения; θ – приращение температуры по сравнению с температурой естественного состояния тела; q^i – вектор притока тепла; Q – заданный приток тепла на граничной поверхности $\partial\Omega$; c^{ijlm} – тензор модулей упругости; $\beta^{ij} = c^{ijlm} \alpha_{lm}$, α_{lm} – коэффициенты температурного линейного расширения и сдвига; λ^{ij} – коэффициенты теплопроводности.

Принимая во внимание формулы (3), уравнение (4) запишем в виде

$$\iint_S dS \int_{-h}^h \vartheta(x^3) A_{j'}^{i'} t^{ij'} \tilde{\nabla}_{i'} \delta u_{j'} dx^3 = 0, \quad (8)$$

а вариационное уравнение (6) представим таким образом

$$\begin{aligned} \iint_S dS \int_{-h}^h \vartheta(x^3) q^i \partial_i (\delta\theta) dx^3 - \int_{\partial S} ds \int_{-h}^h \mu(x^3) Q_{(v)} \delta\theta dx^3 - \\ - \iint_S \left[\vartheta(h) Q_3^+ \delta\theta^+ - \vartheta(-h) Q_3^- \delta\theta^- \right] dS = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $\vartheta(x^3) = \det \|A_{j'}^{i'}\|$; $\mu(x^3) = \sqrt{A_{\alpha}^{\nu} A_{\beta\nu} (x^\alpha)' (x^\beta)'}; (x^\alpha)' = \partial x^\alpha / ds$; ds – элемент длины дуги кривой ∂S .

Уравнения нейтрального равновесия оболочки. Представим компоненты вектора перемещений $u_{j'}$ и приращение температуры θ в виде конечного ряда Фурье по полиномам Лежандра $P_k(\zeta)$, т.е

$$u_{j'} = \sum_{k=0}^N u_{j'}^{(k)}(x) P_k(\zeta); \quad \theta = \sum_{k=0}^N \theta^{(k)}(x) P_k(\zeta). \quad (10)$$

Здесь $x = (x^1, x^2)$; $\zeta = h^{-1} x^3$; $u_{j'}^{(k)}(x)$; $\theta^{(k)}(x)$ – коэффициенты разложений, именуемые ниже моментами. Применяя к первому равенству (10) операцию $\tilde{\nabla}_{i'}$ и используя рекуррентные формулы для полиномов Лежандра, получим выражение

$$\tilde{\nabla}_{i'} u_{j'} = \sum_{k=0}^N \varepsilon_{i'j'}^{(k)}(x) P_k(\zeta), \quad (11)$$

где $\varepsilon_{i'j'}^{(k)}$ – моменты компонент деформаций [4].

Если внести разложения (10) в вариационное уравнение (8) и провести интегрирование по x^3 , то будем иметь уравнение

$$\sum_{k=0}^N \left(k + \frac{1}{2}\right)^{-1} \iint_S t_{(k)}^{ij'} \delta \varepsilon_{ij'}^{(k)} dS = 0, \quad (12)$$

где $t_{(k)}^{ij'}$ – функции, определяемые формулами

$$t_{(k)}^{ij'} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \int_{-h}^h \vartheta(x^3) A_{j'}^{i'} t^{ir} P_k(\zeta) dx^3. \quad (13)$$

После преобразований с использованием формулы Грина из (12) получаем систему уравнений

$$\nabla_\alpha \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} - b_\alpha^\beta t_{(k)}^{\alpha 3} - h^{-1} \underline{t}_{(k)}^{\beta 3} = 0 \quad (\beta = 1, 2) \quad (14)$$

и естественные граничные условия: $t_{(k)}^{\alpha i} v_{\alpha} = 0$.

Согласно формул (3), (10), (11) уравнения состояния (5) примут вид

$$t^{ir} = \sum_{n=0}^N \left[(A_m^{s'} c^{irlm} + A^{rs'} P^{il}) \varepsilon_{ls'}^{(n)} - \beta^{ir} \theta^{(n)} \right] P_n(\zeta). \quad (15)$$

Следует заметить, что начальные напряжения P^{il} , входящие в (15), представляются в виде ряда по полиномам Лежандра, коэффициенты разложений которых определяются из решений линейной краевой задачи [4]. Обычно при исследовании устойчивости оболочек используется лишь первый член данного разложения, т.е. $P^{il} = \vartheta^{-1}(x^3) A_{lr}^{il} P_{(0)}^{il}$. Если внести значения функций (15) в формулу (13), то получим равенство

$$t_{(k)}^{ij} = \sum_{n=0}^N \left(k + \frac{1}{2} \right) \int_{-h}^h \left[\vartheta(x^3) A_{r'}^{s'} \left(c^{irlm} A_m^{s'} \varepsilon_{ls'}^{(n)} - \beta^{ir} \theta^{(n)} \right) + \right. \\ \left. + A_{lr}^{il} A_{r'}^{j'} A^{rs'} P_{(0)}^{il} \varepsilon_{ls'}^{(n)} \right] P_k(\zeta) P_n(\zeta) dx^3. \quad (16)$$

Рассмотрим вариационное уравнение (9). С учётом разложений (10) оно примет вид

$$\sum_{k=0}^N \left(k + \frac{1}{2} \right)^{-1} \left\{ \iint_S \left[q_{(k)}^{\alpha} \partial_{\alpha} \delta \theta^{(k)} + h^{-1} q_{(k)}^3 \delta \underline{\theta}^{(k)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \Phi^{(k)} \delta \theta^{(k)} \right] dS - \int_{\partial S} Q_{(v)}^{(k)} \delta \theta^{(k)} dS \right\} = 0, \quad (17)$$

где

$$q_{(k)}^i = \left(k + \frac{1}{2} \right) \int_{-h}^h \vartheta(x^3) q^i P_k(\zeta) dx^3; \quad \underline{\theta}^{(k)} = (2k+1)(\theta^{(k+1)} + \dots); \\ \Phi^{(k)} = \left(k + \frac{1}{2} \right) \left[\vartheta(h) Q_3^+ - (-1)^k \vartheta(-h) Q_3^- \right],$$

причем $\theta^{(n)} = 0$, если $n > N$. Выполняя аналогичные выше преобразования, из (17) находим систему уравнений

$$\nabla_{\alpha} q_{(k)}^{\alpha} - h^{-1} \underline{q}_{(k)}^3 + \Phi^{(k)} = 0 \quad (k = \overline{0, N}) \quad (18)$$

и соответствующие ей граничные условия: $q_{(k)}^{\alpha} v_{\alpha} = Q_{(v)}^{(k)}$. К уравнениям (18) присоединяются соотношения, связывающие моменты тепловых потоков и приращения температуры, т.е

$$q_{(k)}^i = - \sum_{n=0}^N \left(k + \frac{1}{2} \right) \int_{-h}^h \vartheta(x^3) (\lambda^{i\alpha} \partial_{\alpha} \theta^{(n)} + \lambda^{i3} h^{-1} \underline{\theta}^{(n)}) P_k(\zeta) P_n(\zeta) dx. \quad (19)$$

Если геометрия оболочки такая, что величиной $|k_{\alpha} x^3| \quad \forall x^3 \in [-h, h]$ можно пренебречь по сравнению с единицей, где k_{α} ($\alpha = 1, 2$) – главные кривизны срединной поверхности S , тогда равенства (16) и (19) сводятся к таким

$$t_{(k)}^{ij} = h[(c^{ijlm} + a^{mj} P_{(0)}^{il}) \varepsilon_{lm}^{(k)} - \beta^{ij} \theta^{(k)}], \quad q_{(k)}^i = -h(\lambda^{i\alpha} \partial_{\alpha} \theta^{(k)} + \lambda^{i3} h^{-1} \underline{\theta}^{(k)}). \quad (20)$$

Соотношения (20) совместно с уравнениями (14), (18) составляют замкнутую систему уравнений равновесия оболочек с начальными напряжениями при установившемся температурном поле.

РЕЗЮМЕ

Викладено метод побудови рівнянь рівноваги нетонких анізотропних оболонок з початковими напруженнями

в стаціонарному температурному полі. Редукція тривимірної задачі до двовірної здійснюється варіаційним способом з використанням методу розкладу шуканих функцій в ряди Фур'є за поліномами Лежандра координати товщини.

SUMMARY

A method of a construction of equilibrium equations for non-thin anisotropy shells with initial stresses in a stationary temperature field is presented. By means of a variational method with use of the expansion method of the sought functions into Fourier series in Legendre polynomials of the thickness coordinate a reduction of a three-dimensional problem into a two-dimensional is carried out.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гузь А. Н., Бабич І. Ю. Трехмерная теория устойчивости стержней, пластин и оболочек. – К.: Вища шк., 1980. – 167 с.
2. Гузь А. Н., Бабич І. Ю. Трехмерная теория устойчивости деформируемых тел. – К.: Наук. думка, 1985. – 280 с. (Пространственные задачи теории упругости и пластичности в 6 т. Т.4).
3. Khoma I. Yu. Equations of the generalized Theory of Shells with Initial Stresses // Int. Appl. Mech. – 1996. – Vol. 32., № 11. – P. 876–882.
4. Хома І.Ю., Хома Ю.І. К теорії тонких оболонок з початковими напруженнями і деформаціями // Теорет. і прикладна механіка. – 2004. – Вип. 39. – С. 134–140.
5. Векуа І. Н. Основы тензорного анализа и теории ковариантов. – М.: Наука, 1986. – 296 с.
6. Болотин В. В. О вариационных принципах теории упругой устойчивости // Пробл. механики твердого деформируемого тела. – Л.: Судостроение, 1970. – С. 83–88.
7. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. – М.: Мир, 1986. – 159 с.
8. Khoma I. Yu. Thermopiezoelectric Equations for Nonthin Ceramic Shells / Int. Appl. Mech. – 2005. – Vol. 41., № 2. – P. 118–128.

Надійшла до редакції 23.03.2006 р.

УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ В ПЛАНЕ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ В УТОЧНЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ

А.Я.Григоренко, Н.П.Яремченко,
Институт механики НАН Украины, г. Киев

Широко применимыми конструктивными элементами в современной технике и строительных сооружениях являются пологие оболочки. Условия эксплуатации отмеченных конструкций налагают определенные требования относительно их прочности и надежности. В связи с этим особое значение приобретают разработки эффективных методов численного и экспериментального определения напряженно-деформированного состояния пологих оболочек. В настоящей статье излагается подход к решению задачи о напряженно-деформированном состоянии прямоугольных в плане пологих оболочек переменной толщины в неклассической постановке на основе уточненной модели прямолинейного элемента.

Будем рассматривать прямоугольные в плане пологие оболочки, толщина которых изменяется в двух координатных направлениях, в уточненной постановке, основанной на гипотезе прямой линии [1, 3]. Суть принятой гипотезы состоит в том, что первоначально нормальный к координатной поверхности элемент после деформации остается прямолинейным, но уже не перпендикулярным к деформированной координатной поверхности. При этом принимается, что указанный элемент не изменяет свою длину.

В соответствии с принятой гипотезой перемещения оболочки представим в виде:

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= u(x, y) + z\psi_x(x, y), \\ u_y(x, y, z) &= v(x, y) + z\psi_y(x, y), \\ u_z(x, y, z) &= w(x, y), \end{aligned} \quad (1)$$

где x, y, z – координаты точек оболочки; u_x, u_y, u_z – соответствующие перемещения; u, v, w – перемещения точек координатной поверхности в направлениях x, y, z ; ψ_x, ψ_y – полные углы поворота прямолинейного элемента. В соответствии с (1) выражения для деформаций запишем в виде:

$$\begin{aligned} e_x(x, y, z) &= \varepsilon_x(x, y) + z\kappa_x(x, y), \\ e_y(x, y, z) &= \varepsilon_y(x, y) + z\kappa_y(x, y), \\ e_{xy}(x, y, z) &= \varepsilon_{xy}(x, y) + z2\kappa_{xy}(x, y), \\ e_{xz}(x, y, z) &= \gamma_x(x, y), e_{yz}(x, y, z) = \gamma_y(x, y). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + k_1 w, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + k_2 w, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \kappa_x = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - k_1^2 w, \\ \kappa_y &= \frac{\partial \psi_y}{\partial y} - k_2^2 w, \quad 2\kappa_{xy} = \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x}, \quad \gamma_x = \psi_x - \vartheta_x, \quad \gamma_y = \psi_y - \vartheta_y, \\ \vartheta_x &= -\frac{\partial w}{\partial x} + k_1 u, \quad \vartheta_y = -\frac{\partial w}{\partial y} + k_2 v; \end{aligned} \quad (3)$$

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ – тангенциальные, а $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ – изгибные деформации координатной поверхности; k_1, k_2 – кривизны; ϑ_x, ϑ_y – углы поворота нормали без учета поперечных сдвигов; γ_x, γ_y – углы поворота нормали, обусловленные поперечными сдвигами.

Уравнения равновесия имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - k_1 N_x - k_2 N_y + q = 0, \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x &= 0, \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0, \end{aligned}$$

$$N_{xy} - k_2 M_{yx} - N_{yx} - k_1 M_{xy} = 0, \quad (4)$$

где N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx} – тангенциальные усилия; Q_x, Q_y – перерезывающие усилия; M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx} – изгибающие и крутящие моменты.

Соотношения упругости для ортотропных оболочек симметричной структуры по толщине относительно выбранной координатной поверхности запишем в виде:

$$\begin{aligned} N_x &= C_{11}\varepsilon_x + C_{12}\varepsilon_y, \quad N_y = C_{12}\varepsilon_x + C_{22}\varepsilon_y, \\ N_{xy} &= C_{66}\varepsilon_{xy} + 2k_2 D_{66}\kappa_{xy}, \quad N_{yx} = C_{66}\varepsilon_{xy} + 2k_1 D_{66}\kappa_{xy}, \\ M_x &= D_{11}\kappa_x + D_{12}\kappa_y, \quad M_y = D_{12}\kappa_x + D_{22}\kappa_y, \\ M_{yx} &= M_{xy} = 2D_{66}\kappa_{xy}, \quad Q_x = K_1\gamma_x, \quad Q_y = K_2\gamma_y, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{E_x h}{1 - \nu_x \nu_y}, \quad C_{12} = \nu_y C_{11}, \quad C_{22} = \frac{E_y h}{1 - \nu_x \nu_y}, \quad C_{66} = G_{xy} h, \\ D_{11} &= \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)}, \quad D_{12} = \nu_y D_{11}, \quad D_{22} = \frac{E_y h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)}, \quad D_{66} = \frac{G_{xy} h^3}{12}, \\ K_1 &= \frac{5}{6} h G_{xz}, \quad K_2 = \frac{5}{6} h G_{yz}. \end{aligned} \quad (6)$$

В формулах (6) E_x, E_y, ν_x, ν_y – модули упругости и коэффициенты Пуассона в направлениях x и y ;

G_{xy}, G_{xz}, G_{yz} – модули сдвига; $h = h(x, y)$ – толщина оболочки.

Если ввести обозначения

$$\tilde{u} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \tilde{v} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \tilde{w} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \tilde{\psi}_x = \frac{\partial \psi_x}{\partial x}; \quad \tilde{\psi}_y = \frac{\partial \psi_y}{\partial x}, \quad (7)$$

то разрешающие уравнения относительно функций $u, \tilde{u}, v, \tilde{v}, w, \tilde{w}, \psi_x, \tilde{\psi}_x, \psi_y, \tilde{\psi}_y$ запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \tilde{u}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \tilde{v}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \tilde{w}, \quad \frac{\partial \psi_x}{\partial x} = \tilde{\psi}_x, \quad \frac{\partial \psi_y}{\partial x} = \tilde{\psi}_y, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} &= a_{11}\tilde{u} + a_{12}\frac{\partial u}{\partial y} + a_{13}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_{14}\tilde{v} + a_{15}\frac{\partial v}{\partial y} + a_{16}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + a_{17}w + \\ &\quad + a_{18}\tilde{w} + a_{19}\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + a_{1,10}\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + a_{1,11}\tilde{\psi}_y + a_{2,12}\frac{\partial \tilde{\psi}_y}{\partial y}, \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} &= a_{21}\tilde{u} + a_{22}\frac{\partial u}{\partial y} + a_{23}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + a_{24}v + a_{25}\tilde{v} + a_{26}\frac{\partial v}{\partial y} + a_{27}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + a_{28}w + \\ &\quad + a_{29}\frac{\partial w}{\partial y} + a_{2,10}\tilde{\psi}_x + a_{2,11}\frac{\partial \tilde{\psi}_x}{\partial y} + a_{2,12}\psi_y + a_{2,13}\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + a_{2,14}\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} &= a_{31}u + a_{32}\tilde{u} + a_{33}v + a_{34}\frac{\partial v}{\partial y} + a_{35}w + a_{36}\tilde{w} + a_{37}\frac{\partial w}{\partial y} + \\ &\quad + a_{38}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_{39}\psi_x + a_{3,10}\tilde{\psi}_x + a_{3,11}\psi_y + a_{3,12}\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + a_{3,13}q, \\ \frac{\partial \tilde{\psi}_x}{\partial x} &= a_{41}u + a_{42}w + a_{43}\tilde{w} + a_{44}\psi_x + a_{45}\tilde{\psi}_x + a_{46}\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +a_{47} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + a_{48} \tilde{\psi}_y + a_{49} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + a_{4,10} \frac{\partial \tilde{\psi}_y}{\partial y}, \\
 \frac{\partial \tilde{\psi}_y}{\partial x} = & a_{51} v + a_{52} w + a_{53} \frac{\partial w}{\partial y} + a_{54} \tilde{\psi}_x + a_{55} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + a_{56} \frac{\partial \tilde{\psi}_x}{\partial y} + \\
 & + a_{57} \psi_y + a_{58} \tilde{\psi}_y + a_{59} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + a_{5,10} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2}.
 \end{aligned} \quad (8)$$

Коэффициенты a_{ij} в общем случае зависят от x и y .

Будем рассматривать на краях оболочки следующие граничные условия:

1) шарнирное опирание всех краев оболочки:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial x} = v = w = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} = \psi_y = 0 \quad \text{при } x = 0, x = a, \\
 u = \frac{\partial v}{\partial y} = w = \psi_x = \frac{\partial \psi_y}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0, y = b;
 \end{aligned} \quad (9)$$

2) жесткое закрепление всех краев оболочки:

$$u = v = w = \psi_x = \psi_y = 0 \quad \text{при } x = 0, x = a, \quad y = 0, y = b. \quad (10)$$

Для решения рассматриваемого класса двумерных краевых задач применим подход, основанный на аппроксимации искомого решения в одном координатном направлении с помощью сплайн-функций [2, 4], а для решения полученной при этом одномерной краевой задачи используем устойчивый численный метод дискретной ортогонализации [1, 2].

В систему (8) входят производные от разрешающих функций по координате y не выше второго порядка. На этом основании при аппроксимации решений по координате y можно ограничиться сплайн-функциями третьей степени. Тогда искомое решение краевой задачи для системы уравнений (8) с соответствующими граничными условиями представим в следующем виде [2]:

$$\begin{aligned}
 u(x, y) = \sum_{i=0}^N u_i(x) \phi_{1i}(y), \quad v(x, y) = \sum_{i=0}^N v_i(x) \phi_{2i}(y), \quad w(x, y) = \sum_{i=0}^N w_i(x) \phi_{3i}(y), \\
 \psi_x(x, y) = \sum_{i=0}^N \psi_{xi}(x) \phi_{4i}(y), \quad \psi_y(x, y) = \sum_{i=0}^N \psi_{yi}(x) \phi_{5i}(y),
 \end{aligned} \quad (11)$$

где $u_i(x), v_i(x), w_i(x), \psi_{xi}(x), \psi_{yi}(x)$ – искомые функции переменной x , $\phi_{ji}(y)$ ($j = \overline{1,5}$) – линейные комбинации B -сплайнов третьей степени на равномерной сетке $\Delta: 0 = y_0 < y_1 < \dots < y_N = b$, удовлетворяющие граничным условиям на контурах $y = 0$ и $y = b$.

При этом функции $\phi_{ji}(y)$ формируются таким образом, чтобы были удовлетворены граничные условия. Тогда:

1) Если соответствующая разрешающая функция равна нулю, то

$$\begin{aligned}
 \phi_{j0}(y) = -4B_3^{-1}(y) + B_3^0(y), \quad \phi_{j1}(y) = B_3^{-1}(y) - \frac{1}{2}B_3^0(y) + B_3^1(y), \\
 \phi_{ji}(y) = B_3^i(y) \quad (i = 2, 3, \dots, N-2).
 \end{aligned} \quad (12)$$

2) Если производная по y разрешающей функции равна нулю, то

$$\begin{aligned}
 \phi_{j0}(y) = B_3^0(y), \quad \phi_{j1}(y) = B_3^{-1}(y) - \frac{1}{2}B_3^0(y) + B_3^1(y), \\
 \phi_{ji}(y) = B_3^i(y), \quad (i = 2, 3, \dots, N-2).
 \end{aligned} \quad (13)$$

Аналогично представляются функции $\phi_{j,N-1}(y)$ и $\phi_{j,N}(y)$.

Подставляя решение (11) в разрешающую систему уравнений (8) и в соответствии с методом сплайн-коллокации, требуя их удовлетворения в заданных точках коллокации $\xi_k \in [0, b], k = \overline{0, N}$, полу-

чаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $10(N+1)$ относительно функций $u_i, \tilde{u}_i, v_i, \tilde{v}_i, w_i, \tilde{w}_i, \psi_{xi}, \tilde{\psi}_{xi}, \psi_{yi}, \tilde{\psi}_{yi}$ ($i = 0, \dots, N$), которую можно представить в виде:

$$\frac{d\bar{Y}}{dx} = A\bar{Y} + \bar{f}, \quad (14)$$

где $\bar{Y} = \{u_0, \dots, u_N, \tilde{u}_0, \dots, \tilde{u}_N, v_0, \dots, v_N, \tilde{v}_0, \dots, \tilde{v}_N, w_0, \dots, w_N, \tilde{w}_0, \dots, \tilde{w}_N, \psi_{x0}, \dots, \psi_{xN}, \tilde{\psi}_{x0}, \dots, \tilde{\psi}_{xN}, \psi_{y0}, \dots, \psi_{yN}, \tilde{\psi}_{y0}, \dots, \tilde{\psi}_{yN}\}^T$ – вектор-функция от x ; $\bar{f}$ – вектор правых частей; A – квадратная матрица, элементы которой зависят от x .

Граничные условия для данной системы можно записать так:

$$B_1\bar{Y}(x_0) = \bar{b}_1, \quad B_2\bar{Y}(x_N) = \bar{b}_2. \quad (15)$$

Полученную одномерную краевую задачу (14), (15) решаем устойчивым численным методом дискретной ортогонализации.

Для оценки точности предложенной методики проводилось сравнение напряженного состояния квадратной в плане изотропной полой оболочки постоянной толщины с шарнирно опертыми краями, определенного по методу сплайн-коллокации с последующим применением метода дискретной ортогонализации и методу двойных тригонометрических рядов. Наблюдалось практическое совпадение результатов расчетов.

На основании данного подхода была рассмотрена задача о напряженно-деформированном состоянии квадратной в плане изотропной полой цилиндрической оболочки переменной толщины под действием равномерного нормального давления $q = q_0 = \text{const}$. Оболочка жестко закреплена по всем краям. Толщина оболочки изменяется по следующему закону:

$$h(x) = \left[\alpha \left(6 \frac{x^2}{a^2} - 6 \frac{x}{a} + 1 \right) + 1 \right] h_0, \quad (16)$$

где $h_0 = \text{const}$. При таком изменении толщины вес оболочки остается постоянным. Задача решена при таких значениях исходных данных: $a = b = 10$, $k_1 = \frac{1}{20}$, $k_2 = 0$, $\alpha = 0; 0,2; 0,4$, $\nu = 0,3$, $h_0 = 1$.

x	w/(q ₀ /E)		
	$\alpha = 0$	$\alpha = 0,2$	$\alpha = 0,4$
0	0	0	0
0,5	9,774	8,178	7,022
1	26,007	22,200	19,261
1,5	45,514	40,287	35,953
2	65,892	60,664	56,038
2,5	85,370	81,587	78,104
3	102,670	101,400	100,380
3,5	116,890	118,590	120,850
4	127,420	131,870	137,410
4,5	133,880	140,250	148,220
5	136,060	143,110	151,970

В таблице представлено распределение прогиба изотропной квадратной в плане полой цилиндрической оболочки в зависимости от параметра α , характеризующего изменение толщины оболочки. В силу формы оболочки и характера приложения нагрузки будет наблюдаться симметрия поведения прогиба w . Приведенная в таблице информация дает возможность проследить изменения величины прогиба в конкретных точках оболочки от величины параметра α .

РЕЗЮМЕ

На основі уточненої моделі, побудованої на гіпотезі прямої лінії, досліджено напружений стан прямокутних в плані пологих циліндричних оболонок при певних граничних умовах в залежності від зміни товщини оболонки.

SUMMARY

The paper considers stress-strain state of shallow cylindrical shells of variable thickness within the framework of refined theory for different boundary conditions.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григоренко Я.М. Василенко А.Т.. Теория оболочек переменной жесткости. – К.: Наук. думка, 1981. – 544с.
2. Григоренко Я.М., Шевченко Ю.Н., Василенко А.Т. и др. Численные методы. – К.: «А.С.К.», 2002. – 448 с.
3. Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – К.: Наук. думка, 1973. – 544с.
4. Grigorenko Ya.M., Zakhariichenko L.I. Study into the effect of circumferential variation in thickness and load on the deformation // Int. Appl. Mech. – 2002. – Vol. 38, N 10. – P. 1229 – 1236.

Поступила в редакцию 12.03.2006 г.

ОБ ОДНОМ ВАРИАЦИОННОМ ПРИНЦИПЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В.М.Трач

Национальный университет водного хозяйства и природопользования, г. Ровно

В настоящее время вариационные принципы широко и эффективно используются для решения задач теории упругости [1–4]. С их помощью строятся непротиворечивые модели расчета сложных конструкций при различных физических воздействиях. Широкое использование в практике расчета конструкций численных методов конечных разностей, конечных элементов также связано с вариационными принципами [1, 2, 5, 6]. В то же время достаточно мощный метод решения задач теории упругости с разделяющимися переменными, основным этапом которого является решение канонической системы обыкновенных дифференциальных уравнений [7, 8–10], как правило, не связывается с каким-либо вариационным принципом. Известно, что принцип Рейсснера представляет собой гамильтонову форму принципа Лагранжа [3]. Совокупность необходимых условий стационарности в этом случае формулируется в виде системы уравнений относительно частных производных первого порядка от компонентов вектора перемещений и тензора напряжений. Привести эту систему к стандартному нормальному виду можно только после избавления зависимости функций от двух координат. Трудности получения канонической системы исходя из принципа Рейсснера будут такими же, как и без использования этого принципа, хотя логика принимаемых решений будет выглядеть более обоснованной [7, 11]. Методы преобразования функционалов [1, 12, 13] позволяют сформулировать такой из них, условия стационарности которого записываются в виде системы дифференциальных уравнений относительно выбранных сопряженных переменных. После уменьшения размерности задачи полученная система сразу приобретает стандартный нормальный вид. Уменьшение размерности может быть выполнено путем задания вида решения трехмерной задачи по двум координатам или же путем предварительного использования гипотез прикладных теорий в случае тонкостенных конструкций. Ниже изложена методика преобразования функционала обобщенного принципа Ху-Васидзу к подходящему виду, основываясь на соотношениях линейной теории упругости анизотропного тела, записанных в криволинейной ортогональной системе координат.

1. Принцип Ху-Васидзу. В соответствии с этим принципом [2] действительное решение может быть получено из условий стационарности функционала Π_1 , определяемого как интеграл

$$\Pi_1 = \iiint_V \left\{ W(e_{ij}) + \Phi(u_i) - \sigma_{ij} \left[e_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i;j} + u_{j;i}) \right] \right\} dV + \iint_{S_1} \psi(u_i) dS - \iint_{S_2} p_i(u_i - \bar{u}_i) dS, \quad (1.1)$$

где варьируются без дополнительных условий перемещения u_i , деформации e_{ij} , напряжения σ_{ij} , напряжения p_i на поверхности S_2 , вызванные перемещениями $\bar{u}_i$. В функционале (1.1) $W(e_{ij})$ – потенциальная энергия деформации, $\Phi(u_i)$, $\psi(u_i)$ – потенциалы объемных и поверхностных нагрузок, u_i – компоненты вектора перемещений, точка с запятой перед параметрами i, j обозначает ковариантную производную по координате с соответствующим индексом, $i, j, k = 1, 2, 3$. В векторно-матричном виде

$$W(e_{ij}) = \frac{1}{2} \varepsilon^T A \varepsilon, \quad (1.2)$$

где $\varepsilon^T = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{12})$ и A – матрица коэффициентов упругости. Если ввести вектор $\sigma^T = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12})$, то из условия стационарности $\delta \Pi_1 = 0$ выводим уравнения

$$\sigma = A \varepsilon, \quad (1.3)$$

$$\varepsilon = \varepsilon(u), \quad (1.4)$$

$$\sigma_{ij;j} + f_i = 0, \quad (1.5)$$

а также граничные условия $\sigma_{ij}n_j = \bar{F}_i$ на S_1 и условия $u_i = \bar{u}_i$ на S_2 .

Напряжения $p_i = \sigma_{ij}n_j$ на S_2 . В соотношениях перемещения-деформации (1.4) с помощью $\varepsilon(u)$ обозначены выражения деформаций через перемещения, точка с запятой в уравнении (1.5) обозначает ковариантное дифференцирование по j -й координате. Обратные к соотношениям упругости (1.3) зависимости деформаций от напряжений представим в виде

$$\varepsilon = B\sigma, \quad (1.6)$$

где $B = A^{-1}$. Коэффициенты матрицы A обозначим как a_{ij} , матрицы B – как b_{ij} ($i, j = \overline{1, 6}$). Матрицы A и B – симметричные: $a_{ij} = a_{ji}$, $b_{ij} = b_{ji}$.

2. Модифицированный смешанный принцип. Разделим векторы σ и ε на две части так, чтобы

$$\begin{aligned} \sigma_1^T &= (\sigma_{11}, \sigma_{13}, \sigma_{12}), \quad \sigma_2^T = (\sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}) \\ \varepsilon_1^T &= (\varepsilon_{11}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{12}), \quad \varepsilon_2^T = (\varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Соотношения упругости (1.3) запишем в виде

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

где для блоков A_{ij} в соответствии с принятым разделением (2.1) из матрицы A в (1.3) получим

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{15} & a_{16} \\ a_{15} & a_{55} & a_{56} \\ a_{16} & a_{56} & a_{66} \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{52} & a_{53} & a_{54} \\ a_{62} & a_{63} & a_{64} \end{bmatrix} \\ A_{21} &= \begin{bmatrix} a_{12} & a_{25} & a_{26} \\ a_{13} & a_{35} & a_{36} \\ a_{14} & a_{45} & a_{46} \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Матрицы A_{11} и A_{22} симметричные, а $A_{21} = A_{12}^T$.

Аналогичную перегруппировку выполним в соотношениях (1.6):

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Блоки B_{ij} имеют ту же структуру, что и A_{ij} при замене коэффициентов a_{ij} на b_{ij} . Так как

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12}^T & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & A_{22} \end{bmatrix}^{-1}, \quad (2.5)$$

то

$$B_{11} = -A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}\left(A_{22} - A_{12}^TA_{11}^{-1}A_{12}\right)^{-1}A_{12}^TA_{11}^{-1},$$

$$B_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}\left(A_{22} - A_{12}^TA_{11}^{-1}A_{12}\right)^{-1},$$

$$B_{21} = -\left(A_{22} - A_{12}^T A_{11}^{-1} A_{12}\right)^{-1} A_{12}^T A_{11}^{-1} = B_{12}^T, \quad B_{22} = \left(A_{22} - A_{12}^T A_{11}^{-1} A_{12}\right)^{-1}. \quad (2.6)$$

В отличие от принципа Ху-Васидзу полагаем, что независимыми в функционале (1.1) будут перемещения u_1, u_2, u_3 , деформации $\varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{33}$ и напряжения $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$. Из уравнений

$$\sigma_1 = A_{11}\varepsilon_1 + A_{12}\varepsilon_2, \quad \varepsilon_2 = B_{12}^T \sigma_1 + B_{22}\sigma_2 \quad (2.7)$$

найдем

$$\varepsilon_1 = A_{11}\sigma_1 - A_{12}\varepsilon_2, \quad \sigma_2 = -B_{22}^T B_{12}^T \sigma_1 + B_{22}^{-1} \varepsilon_2. \quad (2.8)$$

Выражение потенциала $W(\varepsilon)$ в новых обозначениях приводится к виду

$$W(\varepsilon) = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_1^T A_{11} \varepsilon_1 + \varepsilon_1^T A_{12} \varepsilon_2 + \varepsilon_2^T A_{12}^T \varepsilon_1 + \varepsilon_2^T A_{22} \varepsilon_2 \right) \quad (2.9)$$

Учитывая (2.8), из $W(\varepsilon)$ исключим ε_1 . Получим

$$W(\sigma_1, \varepsilon_2) = \frac{1}{2} \sigma_1^T A_{11}^{-1} \sigma_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_2^T \left(A_{22} - A_{12}^T A_{11}^{-1} A_{12} \right) \varepsilon_2. \quad (2.10)$$

Преобразуем аналогично выражение $\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$.

Так как $B_{12} B_{22}^{-1} = -A_{11}^{-1} A_{12}$, то

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \sigma_1^T A_{11}^{-1} \sigma_1 + \varepsilon_2^T \left(A_{22} - A_{12}^T A_{11}^{-1} A_{12} \right) \varepsilon_2. \quad (2.11)$$

Исключив из выражения $\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(u)$ составляющую вектора напряжений σ_2 , получим

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(u) = \left(\varepsilon_1^T(u) + \varepsilon_2^T(u) A_{12}^T A_{11}^{-1} \right) \sigma_1 + \varepsilon_2^T(u) \left(A_{22} - A_{12}^T A_{11}^{-1} A_{12} \right) \varepsilon_2. \quad (2.12)$$

Выражения (2.10)–(2.12) позволяют записать потенциал

$$W_1 = W(\varepsilon) - \sigma_{ij} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}(u)) = -\frac{1}{2} \sigma_1^T A_{11}^{-1} \sigma_1 - \frac{1}{2} \varepsilon_2^T \left(A_{11} - A_{12}^T A_{11}^{-1} A_{12} \right) \varepsilon_2 + \\ + \left(\varepsilon_1^T(u) + \varepsilon_2^T(u) A_{12}^T A_{11}^{-1} \right) \sigma_1 + \varepsilon_2^T(u) \left(A_{22} - A_{12}^T A_{11}^{-1} A_{12} \right) \varepsilon_2. \quad (2.13)$$

При учете условия $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(u)$ выражение W_1 примет вид

$$W_1 = -\frac{1}{2} \sigma_1^T A_{11}^{-1} \sigma_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_2^T(u) \left(A_{22} - A_{12}^T A_{11}^{-1} A_{12} \right) \varepsilon_2(u) + \sigma_1^T \left(\varepsilon_1(u) + A_{11}^{-1} A_{12} \varepsilon_2(u) \right). \quad (2.14)$$

Окончательно, функционал Π_1 (1.1) при дополнительных условиях (2.8) преобразуется к виду

$$\Pi_1^* = \iiint_V [W_1 + \phi(u_1)] dV - \iint_{S_1} \psi(u_i) dS - \iint_{S_2} p_i(u_i - \bar{u}_i) dS. \quad (2.15)$$

Этот функционал является частным по отношению к Π_1 , так как в нем сокращено количество независимых величин вследствие выполнения соотношений (2.8) и условий $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(u)$. Вариация функционала Π_1^* , обусловленная изменением компонентов векторов перемещений u и напряжений σ_1 , примет вид

$$\delta \Pi_1^* = \iiint_V \left\{ \left[\varepsilon_1(u) + A_{11}^{-1} A_{12} \varepsilon_2(u) - A_{11}^{-1} \sigma_1 \right]^T \delta \sigma_1 + \left[\sigma_1^T \varepsilon_1'(u) + \left(\left(A_{22} - A_{12}^T A_{11}^{-1} A_{12} \right) \varepsilon_2(u) + \right. \right. \right.$$

$$+ A_{11}^{-1} A_{12} \sigma_1 \Big)^T \varepsilon_2''(u) \Big] \delta u - f^T \delta u \Big\} dV - \iint_{S_1} F^T \delta u ds - \iint_{S_2} (u - \bar{u})^T \delta p ds - \iint_{P_2} P^Y \delta u ds. \quad (2.16)$$

Учитывая, что $\sigma_1^T = (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13})$ и $u = (u_1, u_2, u_3)$, из этого вариационного уравнения выводятся шесть дифференциальных уравнений относительно шести указанных компонентов векторов σ_1 и u . Эти уравнения можно записать, если учесть, что

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ii}(u) &= \frac{1}{2g_{ii}} \left[2g_{ii} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{u_i}{\sqrt{g_{ii}}} \right) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial g_{ij}}{\partial \alpha^j} \frac{u^j}{\sqrt{g_{ii}}} \right], \\ \varepsilon_{ij}(u) &= \frac{1}{2\sqrt{g_{ii}g_{jj}}} \left[g_{ii} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{u^i}{\sqrt{g_{ii}}} \right) + g_{jj} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{u^j}{\sqrt{g_{jj}}} \right) \right] \quad (i \neq j) \end{aligned} \quad (2.17)$$

где g_{ij} – компоненты метрического тензора.

В уравнениях равновесия, которые имеют стандартный вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (\sigma^{11} \sqrt{g_{22}g_{33}})}{\partial \alpha_1} - \sigma^{22} \sqrt{g_{33}} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial \alpha_1} - \sigma^{33} \sqrt{g_{22}} \frac{\partial \sqrt{g_{33}}}{\partial \alpha_1} + \\ & + \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \left[\frac{\partial (\sigma^{12} g_{11} \sqrt{g_{33}})}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial (\sigma^{31} g_{11} \sqrt{g_{22}})}{\partial \alpha^3} \right] + \bar{Y}^1 \sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}} = 0 \quad (\overline{1,2,3}) \end{aligned} \quad (2.18)$$

под σ^{22} , σ^{33} , σ^{23} следует понимать их выражения (2.8) через компоненты векторов σ_1 и ε_2 .

В качестве примера рассмотрим приложение изложенного подхода к расчету осесимметричного напряженно-деформированного состояния анизотропного полого цилиндра, в каждой точке которого имеется одна плоскость упругой симметрии. В цилиндрической системе координат r, θ, z для компонентов метрического тензора имеем

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = 1. \quad (2.19)$$

Из вариационного уравнения (2.16) при учете соотношений (2.17), (2.18) и значений параметров g_{ij} (2.19) получим разрешающую систему уравнений рассматриваемой задачи:

$$\frac{dY_n}{dr} = D_n Y_n + g_n \quad (n = \overline{1, 6}). \quad (2.20)$$

Эта система обыкновенных дифференциальных уравнений нормального вида, записанная относительно амплитудных значений разрешающих функций после разделения переменных. Такое разделение возможно не при всех граничных условиях. Здесь рассматривается случай, когда при $z = 0$ и $z = l$

$$\sigma_{rz} = u_z = u_\theta = 0. \quad (2.21)$$

Условия (2.21) будут удовлетворены, если компоненты σ_1 и ε_1 представить тригонометрическими рядами по функциям $\cos \lambda_n z$ и $\sin \lambda_n z$ в зависимости от их амплитуды ($\lambda_n = n\pi/l$).

Матрица коэффициентов D_n и вектор g_n совпадают с приведенными в [14], поэтому они здесь не даны. Это подтверждает достоверность изложенного выше подхода к построению разрешающих систем уравнений для задач теории упругости, которые можно привести к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. Так же, как и при использовании других численных методов, получение разрешающей системы уравнений как условий стационарности соответствующего смешанного функционала

расширяет область применимости численного метода дискретной ортогонализации [14, 15] к решению сложных задач теории упругости анизотропного тела.

РЕЗЮМЕ

Запропоновано модифікацію змішаного варіаційного принципу, з якого виводяться умови стаціонарності у вигляді змішаної системи рівнянь, розв'язаної відносно перших похідних від компонентів вектору переміщень та компонентів тензору напружень, що діють на площадці, яка перпендикулярна до однієї з осей координат. Використання варіаційного принципу дозволяє провести зменшення розмірності задачі теорії пружності, що призводить отриману систему рівнянь до канонічного вигляду. За допомогою модифікованого змішаного принципу може бути безпосередньо отримана канонічна система рівнянь будь-якого варіанту прикладної теорії.

SUMMARY

The modification of a mixed variational principle is presented, from which the conditions of a stationarity in a form of the mixed system of equations with respect to the first derivatives from components of a displacements vector and components of a stress tensor operating on a area element, that is perpendicular by one of coordinates axes are derived. The use of a variational principle allows to reduce the dimension of the task of the theory of elasticity and thus to adduce the system of equations to a canonical form. With the help of a modified mixed principle the canonical system of equations of any variant of the application theory can directly be obtained.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. – М.: Наука, 1978. – 288 с.
2. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
3. Тонти Э. Вариационные принципы в теории упругости // Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. – 1969. – 5, 117. – С.124–138.
4. Reissner O. On a variational theorem in elasticity // J. Math. And Phys. – 1950. – Vol. 29, N 2. – P.90–95.
5. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
6. Maksimyyuk V.A., Chernyshenko I.S. Mixed Functionals in the Theory of Nonlinearly Elastic Shells // Int. Appl. Mech. – 2004. – Vol. 40, N 11. – P.1226–1263.
7. Григорюк Э.И., Куликов Г.М. Многослойные армированные оболочки. Расчет пневматических шин. – М.: Машиностроение, 1988. – 288 с.
8. Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya., Zakhariychenko L.I. Calculation of Stress-Strain State of Orthotropic Closed and Open Non-Circular Cylindrical Shells // Int. Appl. Mech. – 2005. – Vol. 41, N 7. – P. 778–785.
9. Grigorenko Ya.M., Kryukov N.N., Yakovenko N.S. Using Spline Functions to Solve Boundary-Value Problems for Laminated Orthotropic Trapezoidal Plates of Variable Thickness // Int. Appl. Mech. – 2005. – Vol. 41, N 4. – P. 413–420.
10. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Stress Solution for Transversely Isotropic Corrugated Hollow Cylinders // Int. Appl. Mech. – 2005. – Vol. 41, N 3. – P. 277–282.
11. Рассказов А.О., Соколовская Н.И., Шульга Н.А. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. – К.: Вища шк., 1986. – 191 с.
12. Бениаминов Д.М. Уравнения смешанного метода в теории упругости // Строительная механика и расчет сооружений. – 1975. – №5. – С. 43–46.
13. Ланцош К. Вариационные принципы механики. – М.: Мир, 1965. – 408 с.
14. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек. – М.: Наука, 1992. – 336 с.
15. Василенко А.Т., Григоренко Я.М. Исследование напряженного состояния анизотропных оболочек в различных постановках // Прикладная механика. – 1985. – Т. 21, № 4. – С. 32–41.

Поступила в редакцию 21.03.06

УДК 539.3

ЗГИННІ КОЛИВАННЯ ШАРУ, ПОСЛАБЛЕНОГО НАСКРІЗНИМ ОТВОРОМ ПРИ КОВЗНОМУ ЗАКРІПЛЕННІ ЙОГО ГРАНІВ

Ю.Д.Ковальов,

Сумський державний університет, м. Суми

Перспективними методами в просторовій динаміці пластин є метод суперпозиції [1] і метод однорідних розв'язків [2-4]. У роботі [5] розглянуті динамічні змішані задачі теорії пружності для шару при змішаних умовах на частинах однойменних сторін. У роботі [6] досліджується вплив анізотропії на динамічні характеристики вільних коливань кінцевих циліндрів. Дослідженню особливостей спектра власних коливань трансформованої дискової пластини в околиці крайового резонансу присвячена робота [7]. У випадку "змішаних" умов на гранях шару (ковзне закріплення граней, або торці шару покриті діафрагмою жорсткою на розтяг та гнучкою на згин) гранична задача, що виходить, істотно простіше, ніж змішані задачі, розглянуті в [5]. Процедура розв'язання "змішаних" задач теорії пружності про сталі коливання шару з тунельними неоднорідностями була запропонована в праці [8], де з її використанням отримані зображення для механічних величин у симетричному випадку. Нижче методологія роботи [8] поширюється на косиметричну задачу.

Постановка та побудова розв'язку задачі. Розглянемо пружний шар $-h \leq x_3 \leq h$, $-\infty < x_1, x_2 < \infty$, послаблений тунельними уздовж осі Ox_3 наскрізними порожнинами-отворами, перетин яких являє собою непересічні досить гладкі контури L_j ($j = 1, 2, \dots, k$). На поверхнях порожнин діє згинний пульсуючий тиск $N = \text{Re}(N_0 e^{-i\omega t})$, $N_0 = C x_3$, ($C = \text{const}$), а на нескінченності навантаження відсутнє.

Нехай механічні величини мають вигляд

$$u_i = \text{Re}(U_i e^{-i\omega t}), \quad \sigma_{ij} = \text{Re}(\sigma_{ij}^0 e^{-i\omega t}) \quad (i, j = \overline{1, 3}), \quad (1)$$

амплітуди компонентів заданого навантаження розвиваються в ряди Фур'є за координатою x_3 на $[-h, h]$, а на гранях шару виконуються умови

$$u_3(x_1, x_2, \pm h, t) = 0, \quad \sigma_{13}(x_1, x_2, \pm h, t) = \sigma_{23}(x_1, x_2, \pm h, t) = 0. \quad (2)$$

Запишемо амплітудні компоненти вектора переміщення у вигляді

$$U_i = \sum_{k=0}^{\infty} u_{ik}(x_1, x_2) \sin \gamma_k x_3 \quad (i = 1, 2), \quad U_3 = \sum_{k=0}^{\infty} u_{3k}(x_1, x_2) \cos \gamma_k x_3, \quad (3)$$

де $\gamma_k = (2k+1)\pi/2h$.

Зображення амплітудних компонентів вектора переміщення (3) автоматично задовольняють умови (2) на гранях шару. Для опису стаціонарного хвильового процесу в ізотропному шарі будемо виходити з рівнянь руху

$$\sigma \text{grad } \theta + \Delta \vec{u} = \frac{\rho}{\lambda + \mu} \cdot \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \quad \theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \quad \sigma = \frac{\lambda + \mu}{\mu} = \frac{1}{1 - 2\nu}, \quad (4)$$

де λ, μ – коефіцієнти Ламе.

Підставляючи (1) і вирази (3) для амплітуд переміщень у рівняння руху, приходимо до системи

$$\kappa_k^{(2)} u_{ik} + \sigma \partial_i \theta_k = 0 \quad (i = 1, 2), \quad \kappa_k^{(2)} u_{3k} + \sigma \gamma_k \theta_k = 0, \quad (5)$$

де

$$\kappa_k^{(2)} = \nabla^2 - \beta_k^2, \quad (\beta_k^2 = \gamma_k^2 - \alpha_2^2, \quad \alpha_2 = \omega/c_2), \quad \nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2, \\ \theta_k = \partial_1 u_{1k} + \partial_2 u_{2k} - \gamma_k u_{3k}, \quad \partial_i = \partial/\partial x_i.$$

Безпосередньо із системи (5) знаходимо

$$\kappa_k^{(1)} \theta_k = 0, \quad \kappa_k^{(1)} = \nabla^2 - (\gamma_k^2 - \alpha_1^2) \quad (\alpha_1 = \omega/c_1). \quad (6)$$

Уведемо функцію ψ_k співвідношенням $\theta_k = \kappa_k^{(2)} \psi_k$. З (6) випливає, що $\kappa_k^{(2)} \kappa_k^{(1)} \psi_k = 0$. З урахуванням зв'язку між θ_k і ψ_k інтегрування системи (5) дає

$$u_{ik} = -\sigma \partial_1 \psi_k + \omega_{ik}, \quad u_{3k} = -\sigma \gamma_k \psi_k + \omega_{3k}, \quad \kappa_k^{(2)} \omega_{ik} = 0 \quad (i=1,2). \quad (7)$$

Задавши, щоб співвідношення $\theta_k = \kappa_k^{(2)} \psi_k$ виконувалося фактично, приходимо до рівностей

$$\omega_{1k} = \sigma \partial_2 \Omega_k, \quad \omega_{2k} = -\sigma \partial_1 \Omega_k, \quad \omega_{3k} = -\frac{1}{\gamma_k} (1 + \sigma) \kappa_k^{(1)} \psi_k, \quad (8)$$

де Ω_k – довільний розв'язок рівняння $\kappa_k^{(2)} \Omega_k = 0$.

Враховуючи (7), (8) остаточно одержуємо

$$u_{1k} - i u_{2k} = 2\sigma \frac{\partial}{\partial z} (i \Omega_k - \Omega_k^{(1)} - \Omega_k^{(2)}),$$

$$u_{3k} = -\sigma \gamma_k \Omega_k^{(1)} - \sigma \left[\gamma_k + \frac{1 + \sigma}{\sigma \gamma_k} (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \right] \Omega_k^{(2)}, \quad \theta_k = (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) \Omega_k^{(1)}. \quad (9)$$

Тут $\Omega_k^{(i)}$ – довільний розв'язок рівняння $\kappa_k^{(i)} \phi = 0$; функції Ω_k визначають поворот елемента щодо осі Ox_3 ; u_{ik} – амплітуди відповідних величин.

Інтегральні зображення функцій, які входять в (9) візьмемо у вигляді

$$\Omega_k^{(1)} = \int_L p_{1k} K_0(\lambda_k r) ds + \int_L p_{2k} \frac{\partial}{\partial \zeta} K_0(\lambda_k r) d\zeta + \int_L p_{3k} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} K_0(\lambda_k r) d\bar{\zeta},$$

$$\Omega_k^{(2)} = \int_L q_{1k} K_0(\beta_k r) ds + \int_L q_{2k} \frac{\partial}{\partial \zeta} K_0(\beta_k r) d\zeta + \int_L q_{3k} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} K_0(\beta_k r) d\bar{\zeta},$$

$$\Omega_k = \int_L f_{1k} K_0(\beta_k r) ds + \int_L f_{2k} \frac{\partial}{\partial \zeta} K_0(\beta_k r) d\zeta + \int_L f_{3k} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} K_0(\beta_k r) d\bar{\zeta}. \quad (10)$$

де

$$\lambda_k^2 = \gamma_k^2 - \alpha_1^2, \quad r = |\zeta - z|, \quad \zeta = \xi_1 + i\xi_2 \in L = \cup L_j, \quad z = x_1 + ix_2;$$

$K_0(\gamma r)$ – функція Макдональда нульового порядку; ds – елемент дуги контуру; щільності p_{ik}, q_{ik}, f_{ik} ($i=1,3$) поки що невідомі. Інтегральні зображення функцій (10) задовольняють умови випромінювання на нескінченності.

Крайові умови на L запишемо у формі

$$\begin{aligned} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) - e^{2i\psi} (\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12}) &= 2(N - iT), \\ (\sigma_{11} + \sigma_{22}) - e^{-2i\psi} (\sigma_{22} - \sigma_{11} - 2i\sigma_{12}) &= 2(N + iT), \\ (\sigma_{13} - i\sigma_{23}) e^{i\psi} + (\sigma_{13} + i\sigma_{23}) e^{-i\psi} &= 2Z, \end{aligned} \quad (11)$$

де ψ – кут між зовнішньою нормаллю до контуру L і віссю Ox_1 .

Використовуючи закон Гука і формули (9), запишемо умови (11) у формі

$$\frac{1}{\mu} (N_k - iT_k) = -[\Lambda(1 - \sigma) + \sigma \lambda_k^2] \Omega_k^{(1)} - \sigma \beta_k^2 \Omega_k^{(2)} + 4\sigma e^{2i\psi} \partial_{zz}^2 (i \Omega_k - \Omega_k^{(1)} - \Omega_k^{(2)}),$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu}(N_k + iT_k) &= -[\Lambda(1-\sigma) + \sigma\lambda_k^2]\Omega_k^{(1)} - \sigma\beta_k^2\Omega_k^{(2)} + 4\sigma e^{-2i\psi}\partial_{zz}^2(-i\Omega_k - \Omega_k^{(1)} - \Omega_k^{(2)}), \\ \frac{1}{\mu}Z_k &= e^{i\psi}\partial_z(\tilde{a}_k\Omega_k^{(1)} + \tilde{b}_k\Omega_k^{(2)} + i\tilde{c}_k\Omega_k) + e^{-i\psi}\partial_z(\tilde{a}_k\Omega_k^{(2)} + \tilde{b}_k\Omega_k^{(1)} - i\tilde{c}_k\Omega_k), \end{aligned} \quad (12)$$

де

$$\begin{aligned} \Lambda &= \alpha_2^2 - \alpha_1^2, \quad \tilde{a}_k = a_k - \sigma\gamma_k, \quad \tilde{b}_k = b_k - \sigma\gamma_k, \quad \tilde{c}_k = \sigma\gamma_k, \\ a_k &= -\sigma\gamma_k, \quad b_k = -\sigma\left[\gamma_k + \frac{1+\sigma}{\sigma\gamma_k}(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)\right]. \end{aligned}$$

Крайова задача (12) з урахуванням (10) зводиться за допомогою звичайної процедури до системи, що складається з трьох сингулярних інтегральних рівнянь (для кожного фіксованого k).

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu}(N_k - iT_k) &= \int_L p_{1k}G_{1k}^* ds - p_{2k}r_{1k}^* + \int_L p_{2k}G_{2k}^* ds - p_{3k}r_{2k}^* + \int_L p_{3k}G_{3k}^* ds, \\ \frac{1}{\mu}(N_k + iT_k) &= \int_L p_{1k}\tilde{G}_{1k} ds - p_{2k}\tilde{r}_{1k} + \int_L p_{2k}\tilde{G}_{2k} ds - p_{3k}\tilde{r}_{2k} + \int_L p_{3k}\tilde{G}_{3k} ds, \\ \frac{1}{\mu}Z_k &= -p_{1k}\tilde{r}_{1k}^* + \int_L p_{1k}\tilde{G}_{1k}^* ds + \int_L p_{2k}\tilde{G}_{2k}^* ds + \int_L p_{3k}\tilde{G}_{3k}^* ds, \end{aligned} \quad (13)$$

де

$$\begin{aligned} if_{1k} - p_{1k} - q_{1k} &= 0, \quad if_{1k} + p_{1k} + q_{1k} = 0, \quad \tilde{a}_k p_{2k} + \tilde{b}_k q_{2k} + i\tilde{c}_k f_{2k} = 0, \\ -p_{2k} - q_{2k} + if_{2k} &= 0, \quad \tilde{a}_k p_{3k} + \tilde{b}_k q_{3k} - i\tilde{c}_k f_{3k} = 0, \quad p_{3k} + q_{3k} + if_{3k} = 0; \\ f_{1k} &= 0, \quad q_{1k} = -p_{1k}, \quad f_{2k} = d_{1k}^* p_{2k}, \quad q_{2k} = \tilde{d}_{1k} p_{2k}, \quad f_{3k} = \tilde{d}_{1k}^* p_{3k}, \quad q_{3k} = \tilde{d}_{1k} p_{3k}; \\ d_{1k}^* &= -i(1 + \tilde{d}_{1k}), \quad \tilde{d}_{1k} = -\frac{d_{1k}}{d_{2k}}, \quad d_{1k} = \tilde{a}_k + \tilde{c}_k, \quad d_{2k} = \tilde{b}_k + \tilde{c}_k; \quad \sigma_0 = e^{2i\psi_0}, \\ r_{1k}^* &= r_{1k} - \sigma_0 r_{3k}, \quad r_{2k}^* = r_{2k} - \sigma_0 r_{4k}, \quad \tilde{r}_{1k} = r_{1k} - \bar{\sigma}_0 r_{5k}, \quad \tilde{r}_{2k} = r_{2k} - \bar{\sigma}_0 r_{6k}, \\ \tilde{r}_{1k}^* &= e^{i\psi_0} r_{7k} + e^{-i\psi_0} r_{8k}, \quad r_{1k} = -(l_{1k} + l_{2k} \tilde{d}_{1k}) l_5, \quad r_{2k} = -r_{1k}, \quad r_{3k} = 4\sigma \{l_6(\beta_k) - l_6(\lambda_k)\}, \\ r_{4k} &= 4\sigma \{(1 + 2\tilde{d}_{1k}) l_6(\beta_k) + l_6(\lambda_k)\}, \quad r_{5k} = 4\sigma \{(1 + 2\tilde{d}_{1k}) l_7(\beta_k) - l_7(\lambda_k)\}, \\ r_{6k} &= 4\sigma \{l_7(\beta_k) - l_7(\lambda_k)\}, \quad r_{7k} = (\tilde{a}_k - \tilde{b}_k) l_1, \quad r_{8k} = (\tilde{a}_k - \tilde{b}_k) \bar{l}_1; \\ l_{1k} &= -[\Lambda(1-\sigma) + \sigma\lambda_k^2], \quad l_{2k} = -\sigma\beta_k^2; \quad l_1 = \frac{\pi}{2} e^{-i\psi_0}, \quad l_5 = \frac{\pi i}{2}, \\ l_6(\lambda_k) &= \frac{\pi i \lambda_k^2}{8} e^{-2i\psi_0}, \quad l_6(\beta_k) = \frac{\pi i \beta_k^2}{8} e^{-2i\psi_0}, \quad l_7(\lambda_k) = -\frac{\pi i \lambda_k^2}{8} e^{2i\psi_0}, \\ l_7(\beta_k) &= -\frac{\pi i \beta_k^2}{8} e^{2i\psi_0}; \quad G_{1k}^* = G_{1k} - \sigma_0 G_{4k}, \quad G_{2k}^* = G_{2k} - \sigma_0 G_{5k}, \\ G_{3k}^* &= G_{3k} - \sigma_0 G_{6k}, \quad \tilde{G}_{1k} = G_{1k} - \bar{\sigma}_0 G_{7k}, \quad \tilde{G}_{2k} = G_{2k} - \bar{\sigma}_0 G_{8k}, \\ \tilde{G}_{3k} &= G_{3k} - \bar{\sigma}_0 G_{9k}, \quad \tilde{G}_{1k}^* = e^{i\psi_0} G_{10k} + e^{-i\psi_0} G_{13k}, \quad \tilde{G}_{2k}^* = e^{i\psi_0} G_{11k} + e^{-i\psi_0} G_{14k}, \\ \tilde{G}_{3k}^* &= e^{i\psi_0} G_{12k} + e^{-i\psi_0} G_{15k}, \quad G_{1k} = l_{1k} K_0(\lambda_k r) - l_{2k} K_0(\beta_k r), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{2k} &= -\frac{i}{2} \{ l_{1k} \lambda_k K_1(\lambda_k r) + l_{2k} \tilde{d}_{1k} \beta_k K_1(\beta_k r) \} e^{i(\psi - \alpha_0)}, \\
G_{3k} &= \frac{i}{2} \{ l_{1k} \lambda_k K_1(\lambda_k r) + l_{2k} \tilde{d}_{1k} \beta_k K_1(\beta_k r) \} e^{-i(\psi - \alpha_0)}, \\
G_{4k} &= \sigma \{ \lambda_k^2 K_2^*(\lambda_k r) - \beta_k^2 K_2^*(\beta_k r) \} e^{-2i\alpha_0}, \\
G_{5k} &= 4i\sigma \{ K_3^{**}(\lambda_k r) - K_3^{**}(\beta_k r) \} e^{i(\psi - 3\alpha_0)}, \\
G_{6k} &= \frac{i\sigma}{2} \{ \lambda_k^3 K_1(\lambda_k r) + (1 + 2\tilde{d}_{1k}) \beta_k^3 K_1(\beta_k r) \} e^{-i(\psi + \alpha_0)}, \\
G_{7k} &= \sigma \{ \lambda_k^2 K_2^*(\lambda_k r) - \beta_k^2 K_2^*(\beta_k r) \} e^{2i\alpha_0}, \\
G_{8k} &= -\frac{i\sigma}{2} \{ \lambda_k^3 K_1(\lambda_k r) + (1 + 2\tilde{d}_{1k}) \beta_k^3 K_1(\beta_k r) \} e^{i(\psi + \alpha_0)}, \\
G_{9k} &= -4i\sigma \{ K_3^{**}(\lambda_k r) - K_3^{**}(\beta_k r) \} e^{-i(\psi - 3\alpha_0)}, \\
G_{10k} &= \frac{1}{2} \{ \tilde{a}_k \lambda_k K_1(\lambda_k r) - \tilde{b}_k \beta_k K_1(\beta_k r) \} e^{-i\alpha_0}, \\
G_{11k} &= \frac{i}{4} \{ -\tilde{a}_k \lambda_k^2 K_2^*(\lambda_k r) - (\tilde{b}_k \tilde{d}_{1k} + i\tilde{c}_k d_{1k}^*) \beta_k^2 K_2^*(\beta_k r) \} e^{i(\psi - 2\alpha_0)}, \\
G_{12k} &= \frac{i}{4} \{ \tilde{a}_k \lambda_k^2 K_0(\lambda_k r) + (\tilde{b}_k \tilde{d}_{1k} + i\tilde{c}_k \bar{d}_{1k}^*) \beta_k^2 K_0(\beta_k r) \} e^{-i\psi}, \\
G_{13k} &= \frac{1}{2} \{ \tilde{a}_k \lambda_k K_1(\lambda_k r) - \tilde{b}_k \beta_k K_1(\beta_k r) \} e^{i\alpha_0}, \\
G_{14k} &= -\frac{i}{4} \{ \tilde{a}_k \lambda_k^2 K_0(\lambda_k r) + (\tilde{b}_k \tilde{d}_{1k} - i\tilde{c}_k d_{1k}^*) \beta_k^2 K_0(\beta_k r) \} e^{i\psi}, \\
G_{15k} &= \frac{i}{4} \{ \tilde{a}_k \lambda_k^2 K_2^*(\lambda_k r) + (\tilde{b}_k \tilde{d}_{1k} - i\tilde{c}_k \bar{d}_{1k}^*) \beta_k^2 K_2^*(\beta_k r) \} e^{-i(\psi - 2\alpha_0)}, \\
d_{1k}^* &= -i(1 + \tilde{d}_{1k}), \quad K_3^{**}(\gamma r) = -\left(\frac{\gamma}{2}\right)^3 K_3(\gamma r) + \frac{1}{r^3}, \\
K_2^*(\gamma r) &= K_2(\gamma r) - \frac{2}{\gamma^2 r^2}, \quad \zeta - \zeta_0 = r e^{i\alpha_0}.
\end{aligned}$$

Результати чисельних розрахунків. Як приклад розглянемо шар, послаблений порожниною еліптичного поперечного перерізу

$$\xi_1 = R_1 \cos \varphi, \quad \xi_2 = R_2 \sin \varphi \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

або квадратного поперечного перерізу (квадрат з округленими кутами)

$$\xi_1 = a_0 (\cos \varphi + c_0 \cos 3\varphi), \quad \xi_2 = a_0 (\sin \varphi - c_0 \sin 3\varphi) \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad c_0 = 0,14036.$$

Для характеристики напруженого стану на поверхні порожнини розраховували амплітудні значення величини

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{11} \sin^2 \theta + \sigma_{22} \cos^2 \theta - 2\sigma_{12} \cos \theta \sin \theta \quad (\theta = \psi - \pi) \quad (14)$$

в точці контуру $\varphi = 0$, $x_3 = 0,8h$.

При чисельній реалізації алгоритму систему інтегральних рівнянь методом механічних квадратур [9] зводили до лінійної системи алгебраїчних рівнянь. Послідовність обчислень така: спочатку числово розв'язували систему інтегральних рівнянь крайової задачі (13), далі визначали коефіцієнти Фур'є $\sigma_{ij}^{(k)}$ тензора напружень, потім за формулами (14) розраховували напруження на поверхні порожнини.

Нехай на поверхні порожнини діє згинний пульсуючий тиск, амплітудне значення якого визначається виразом $N_0 = Cx_3$ ($C = \text{const}$).

На рис. 1–4 приведені розподіли відносного амплітудного значення колового напруження $\sigma_1 = |\sigma_{\theta\theta}/C|$ в залежності від зміни безрозмірного хвильового числа $\alpha_1 a$ (a – характерний лінійний розмір) при різних геометричних параметрах отвору і $a = 1$. Рис. 1, 2 побудовані для кругової порожнини ($R_1 = R_2 = 1$) при $h/R_1 = 0,5$ і $h/R_1 = 1$ відповідно. Рис. 3, 4 побудовані для порожнини квадратного поперечного перерізу при $h/a_0 = 0,5$ і $h/a_0 = 1$ відповідно. Точками нанесені результати точного розв'язку відповідної осесиметричної задачі, отриманого методом рядів. Чисельні результати отримані при значенні коефіцієнта Пуассона $\nu = 0,15$ (криві 1), та $\nu = 0,3$ (криві 2).

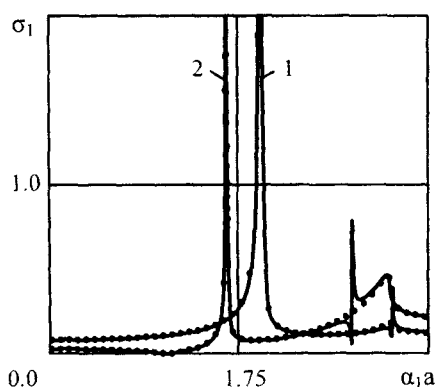


Рис.1

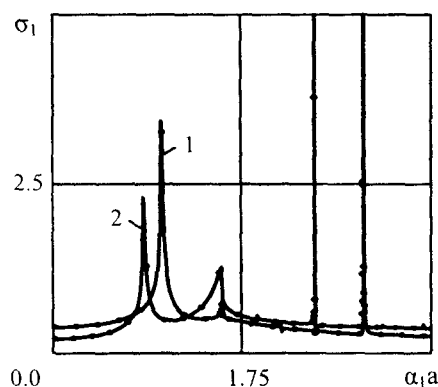


Рис.2

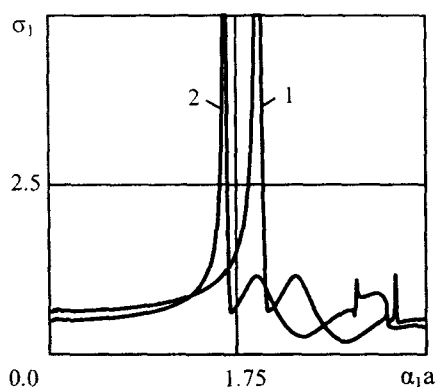


Рис.3

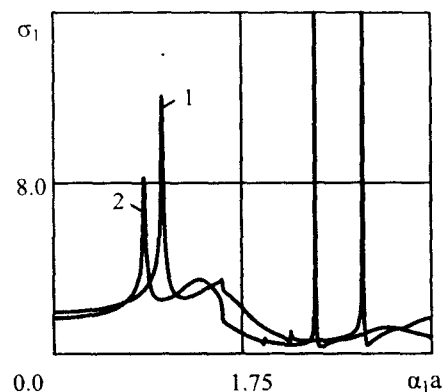


Рис.4

Початкові точки побудованих графіків відповідають відповідним механічним і геометричним параметрам у випадку статичного навантаження.

Таким чином, побудовані аналітичні і чисельні процедури дають можливість ефективно досліджувати динамічну напруженість товстих пластин з отворами в умовах згинних коливань, а також вивчати спектри власних частот при різних збудженнях.

РЕЗЮМЕ

Рассмотрено модельную задачу об изгибных колебаниях изотропного слоя, ослабленного сквозным отверстием при скользящей заделке его торцов. Краевая задача сведена к системе одномерных сингулярных интегральных уравнений второго рода. Результатом численного анализа построенного алгоритма являются амплитудно – частотные характеристики, которые устанавливают зависимость соответствующих (характеристических) напряжений на контуре отверстия от частоты возбуждения.

SUMMARY

The modeling task about bending oscillations of an isotropic layer weakened by the through-the-thickness hole is considered in the case of the slipping seal of layer faces. Boundary problem has been reduced to a system of one-dimensional singular integral equations of the second order. Amplitude and frequency characteristics have been obtained as the result of numerical analysis. The «characteristic» stresses amplitude dependence on driving frequency was explored.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка. – 1981. – 284 с.
2. Алтухов Е. В. Метод И. И. Воровича в трехмерной теории термодинамики пластин // Теорет. и прикладная механика. – 2005. – Вып. 41. – С. 3–8.
3. Космодамианский А. С., Шалдырван В. А. Толстые многосвязные плиты. – Киев: Наук. думка. – 1978. – 239 с.
4. Буглак В. А., Мысовская Р. М., Мысовский Ю. В., Сторожев В. И. Однородные решения задачи о связанных термоупругих колебаниях толстых изотропных пластин // Теорет. и прикладная механика. – 1979. – Вып. 10. – С. 79–84.
5. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. – М.: Наука. – 1979. – 319 с.
6. Григоренко А. Я., Дыак И. И., Макар В. М. Влияние анизотропии на динамические характеристики свободных колебаний конечных цилиндров // Прикладная механика. – 2001. – 37, №5. – С. 74–83.
7. Сторожев В. И., Мысовский Ю. В., Соколова О. Д. Особенности спектра собственных колебаний трансформной дисковой пластины в окрестности краевого резонанса // Теорет. и прикладная механика. – 2003. – Вып. 37. – С. 184–189.
8. Фильштинский Л. А. Периодические решения теории упругости для цилиндра в R^3 // Теорет. и прикладная механика. – Вып. 21. – С. 13–20.
9. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. – М.: Наука, 1985. – 253 с.

Надійшла до редакції 13.03.2006 р.

УДК 539.3: 534.1: 621.3.084

МЕТОД П'ЄЗОТРАНСФОРМАТОРНОГО ДАТЧИКА В ЗАДАЧАХ РЕЗОНАНСНИХ КОЛИВАНЬ ТОНКИХ ДИСКІВ ІЗ П'ЄЗОКЕРАМІКИ*В.Л.Карлаш,**Інститут механіки НАН України, м. Київ*

Експериментальні дослідження електромеханічних резонансних коливань п'єзокерамічних елементів зводяться в більшості випадків до вимірювання резонансних і антирезонансних частот і відповідних до них повних провідностей та до розрахунків за одержаними даними динамічних коефіцієнтів електромеханічного зв'язку (КЕМЗ), які характеризують здатність перетворювати енергію з електричної форми в механічну і навпаки. Безпосереднє вимірювання амплітуд коливань точок поверхні п'єзокерамічних елементів при резонансних коливаннях пов'язане зі значними експериментальними труднощами. У роботі [1], де подовження п'єзокерамічних зразків під впливом статичних електричних полів вимірювалося із використанням інтерферометра Майкельсона, відзначено, що до напруги 1 кВ вимірювання були дуже нестабільними. Автори робіт [2, 3, 4] користувалися в експериментах методом смісного зонду, вимірюючи за його допомогою амплітуду зміщень торця закріпленої у вузлових точках п'єзокерамічної пластини при резонансних коливаннях. За вимірюваною амплітудою зміщень торця розраховувалися аналітичним способом рівні механічних напружень у місцях їхніх концентрацій. Порівняно малі лінійні розміри серійних п'єзокерамічних елементів (діаметри круглих пластин лежать у межах 100 – 2 мм) унеможливають практично застосування відомого апарату резистивних тензодатчиків.

Оригінальний метод експериментальних досліджень напруженого стану п'єзокерамічних елементів конструкцій при їхніх резонансних коливаннях було запропоновано і розвинуто в роботах [5, 6]. Суть методу зводиться до того, що в електродному покритті однієї з головних поверхонь п'єзокерамічної пластини відділяються один або кілька ізольованих один від одного і від основного електродного покриття малих (порівняно з довжиною хвилі механічних деформацій) електродів-датчиків. При резонансних коливаннях п'єзокерамічної пластинки або оболонки на відділених електродах-датчиках наводяться завдяки прямому п'єзоелектричному ефектові певні електричні заряди, амплітуди котрих прямо пропорційні до суми головних механічних напружень, усереднених по їхній площі. Між основним електродним покриттям і відділеними електродами виникає різниця електричних потенціалів. Кожен відділений електрод виконує роль своєрідного мініатюрного п'єзотрансформатора. Саме цим пояснюється його назва – метод п'єзотрансформаторного датчика (МПТрД).

З фізичної точки зору між потенціалом п'єзотрансформаторного датчика і повною провідністю п'єзокерамічного елемента є істотна спільність, адже обидва ці параметри є мірами інтегральних величин – п'єзозарядів. Механічна складова наведеного п'єзозаряду п'єзотрансформаторного датчика прямо пропорційна до усередненої по його площі суми головних механічних напружень, тоді як механічна складова повної провідності п'єзоелемента в цілому також прямо пропорційна до усередненої по всій площі п'єзоелемента суми головних механічних напружень. У МПТрД маємо справу з сумою головних напружень у певному вибраному місці зразка, в той час як у випадку повної провідності наведені по всій поверхні п'єзоелемента електричні заряди нівелюються (вирівнюються) суцільними електродами.

При аналітичному дослідженні радіальних коливань п'єзокерамічних дисків із суцільними та розділеними електродами в більшості публікацій втрати енергії до уваги не беруться, а умовами резонансу та антирезонансу приймаються нескінченна та нульова величини повної провідності. Точний розв'язок побудований у роботі [7] при опрацюванні методики визначення параметрів механічних і п'єзоелектричних втрат енергії.

Ця робота присвячена аналітичному і експериментальному дослідженню компонентів динамічних механічних напружень при резонансних коливаннях тонких п'єзокерамічних дисків із товщиною поляризацією. Пропонується також прямий метод експериментального визначення планарного коефіцієнта електромеханічного зв'язку.

Зв'язок вимірюваного потенціалу п'єзотрансформаторного датчика з механічними напруженнями, визначення складових втрат енергії з радіальних коливань. В роботі [6] відзначено, що кожен відділений від основного електродного покриття датчик можна розглядати, як електричний конденсатор, який має по відношенню до оточуючого і протилежного основних електродів ємності C_p і C_n , котрі додаються до вхідної ємності вольтметра C_v і становлять сумарну ємність вимірювального кола. Еквівалентна електрична схема (рис.1) ілюструє цю думку. Ємність між основними електродами C_0 у сотні разів більша від сумарної ємності $C_p + C_n + C_v$ вимірювального кола, а резистор R є резонансним імпедансом

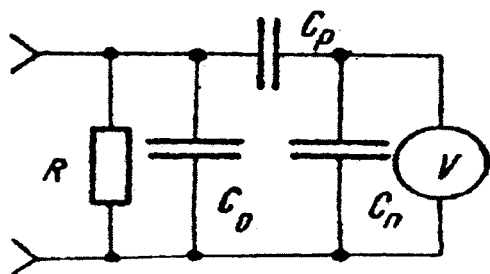


Рис. 1

п'єзокерамічного зразка.

Електричний потенціал п'єзотрансформаторного датчика, котрий вимірюється приєднанням до нього вольтметром, є комплексною сумою двох складових – ємнісного наведення від оточуючого електродного покриття через ємність C_p та потенціалу прямого п'єзо ефекту внаслідок внутрішніх механічних деформацій.

Між виміряною різницею потенціалів V_2 та сумою головних напружень $(\sigma_x + \sigma_y)$ існує простий зв'язок

$$\sigma_x + \sigma_y = -\frac{V_2}{d_{31}S_t}(C_p + C_n + C_v). \quad (1)$$

Багаторічний досвід автора показує, що рівень ємнісного наведення становить від 20 до 50% від напруги збудження, тоді як сумарний потенціал п'єзотрансформаторного датчика перевищує (на резонансних частотах) напругу збудження від кількох до кільканадцяти разів. А це означає, що у багатьох випадках практичного застосування ємнісними наведеннями можна нехтувати.

В роботі [8] одержані більш загальні співвідношення, котрі враховують фазові зсуви між сумою головних напружень і вимірним потенціалом датчика.

В роботах [7, 9] виведені вирази для повної провідності тонкої круглої в'язкопружної п'єзопластины (усі позначення тут і далі з тих робіт) з врахуванням тангенсів механічних S_{11M} , діелектричних ϵ_{33M} і п'єзоелектричних d_{31M} втрат [10] і одержано такий зв'язок між резонансною провідністю пластины Y_{m1} і її планарним коефіцієнтом електромеханічного зв'язку k_{p0}

$$Y_{m1} \cong \frac{4,9 f_{m1} C_0 k_{p0}^2}{S_{11M}} \cong 4,9 f_{m1} C_0 k_{p0}^2 Q_M. \quad (2)$$

Ця формула дає експериментаторові прямий метод визначення дуже важливого для аналізу планарного КЕМЗ по вимірних максимальній провідності Y_{m1} , відповідній до неї частоті f_{m1} , статичній ємності C_0 і механічній добротності Q_M (останню визначають за амплітудно-частотною характеристикою коефіцієнта передачі п'єзотрансформаторного датчика [10])

$$k_{p0}^2 = \frac{Y_{m1}}{4,9 f_{m1} C_0 Q_M}. \quad (3)$$

Похибка, яка виникає при користуванні спрощеною формулою (3), складається із похибок вимірювання частоти максимальної провідності f_{m1} , статичної ємності C_0 , а також із похибок визначення механічної добротності Q_M і максимальної провідності Y_{m1} . В роботі [1], наприклад, показано, що похибка вимірювання частоти електронними частотомірами дорівнює ± 1 одиниці рахунку або $\pm 0,01\%$. Приблизно з такою ж похибкою вимірюється і статична ємність п'єзокерамічного зразка. Оскільки при визначенні повної провідності треба ділити струм через п'єзоелемент на спад напруги на ньому, то похибки вимірювання цих величин додаються і загальна похибка визначення повної провідності сягає $\pm (3 - 7)\%$. Похибка визначення механічної добротності по АЧХ п'єзотрансформаторного датчика є $\pm (0,5 - 1)\%$. Отже, загальна похибка формули (3) становить $\pm (3,5 - 8)\%$ при коефіцієнті Пуассона $\nu = 0,35$ і збільшується до $\pm (5 - 10)\%$ для $\nu = 0,30$ і $\nu = 0,39$.

Знаючи f_m і k_{p0}^2 , за формулами

$$k_{31}^2 = \frac{(1 - \nu^E)}{2} k_p^2, \quad \frac{1}{s_{11}^E} = \frac{\pi^2 d^2 f_m^2 (1 - \nu^E)^2 \rho}{\eta_1^2}, \quad d_{31} = k_{31} \sqrt{\epsilon_{33}^T s_{11}^E}, \quad g_{31} = \frac{d_{31}}{\epsilon_{33}^T} \quad (4)$$

можна визначити поперечний КЕМЗ k_{31} , п'єзомодуль d_{31} , пружну податливість s_{11} і п'єзостанову g_{31} .

Тут: d – діаметр пластины, ρ – її густина, η_1 – найменший позитивний корінь рівняння [11]

$$(1 - \nu^E) J_1(\eta) - \eta J_0(\eta) = 0. \quad (5)$$

Діелектрична стала ϵ_{33}^T визначається через ємність C_0 із формули плоского конденсатора, наприклад

$$\epsilon_{33}^T = 4hC_0 / \pi d^2 = \frac{4 * 2 * 10^{-3} * 51,1 * 10^{-9}}{\pi * 100 * 100 * 10^{-6}} \frac{\Phi}{\text{м}} = 130,2 * 10^{-10} \frac{\Phi}{\text{м}} = 1471 \epsilon_0.$$

Водночас із вимірюванням ємності на частоті 1000 Гц визначаються і діелектричні втрати ϵ_{33M} .

На частоті мінімальної провідності маємо наближене співвідношення

$$\frac{Y_n}{2\pi f_n C_0} = F_n \cong \frac{1}{D_{0n}} (s_{\Sigma} \Delta_{pn}^2 + 0,5 s_{11M} \kappa_{0n} \delta_n \Delta_{pn}). \quad (6)$$

з якого одержуємо формулу для експериментального визначення тангенса п'єзоелектричних втрат

$$d_{31M} \approx \frac{s_{11M} + \epsilon_{33M}}{2} - \frac{Y_n D_{0n}}{4\pi f_n C_0 \Delta_{pn}^2} + \frac{s_{11M} \kappa_{0n} \delta_n}{4 \Delta_{pn}}. \quad (7)$$

Доданки і множники, які входять до формул (6,7) треба брати за таблицями робіт [7, 9]. У нашому прикладі $\Delta_{pn} = 0,128$, $D_{0n} = 0,0165$, $\kappa_{0n} = 2,2$, $\delta_n = -0,868$. За формулою (7) маємо $d_{31M} = 0,0094$.

Відношення D_{0n} / Δ_{pn}^2 без помітної похибки можна замінити одиницею.

Головні механічні напруження в тонкому п'єзокерамічному диску при радіальних коливаннях. При радіальних коливаннях тонкого п'єзокерамічного диска із суцільними електродами радіальні та окружні механічні напруження можна визначити за формулами [12]

$$\sigma_r = \frac{d_{31} E_z}{s_{11}^E (1 - \nu)} \left[\frac{\kappa r J_0(\kappa r) - (1 - \nu) J_1(\kappa r)}{r_1 \Delta(\kappa)} - 1 \right], \quad (8)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{d_{31} E_z}{s_{11}^E (1 - \nu)} \left[\frac{\nu \kappa r J_0(\kappa r) + (1 - \nu) J_1(\kappa r)}{r_1 \Delta(\kappa)} - 1 \right] \quad (9)$$

а їхня сума та різниця становлять

$$\sigma_r + \sigma_{\theta} = \frac{d_{31} E_z}{s_{11}^E (1 - \nu)} \left[\frac{(1 + \nu) \kappa J_0(\kappa r)}{\Delta(\kappa)} - 2 \right] \quad r_1 = r / R, \quad (10)$$

$$\sigma_r - \sigma_{\theta} = \frac{d_{31} E_z}{s_{11}^E (1 - \nu)} \left[\frac{\eta \kappa J_0(\kappa r) - J_1(\kappa r)}{r_1 \Delta(\kappa)} \right] (1 - \nu). \quad (11)$$

Всі ці формули є комплексними, оскільки комплексною є безрозмірна частота κ . На рис. 2 подані криві розподілу вздовж радіуса пластини абсолютних значень компонентів механічних напружень (8 – 11), розділених на множник перед квадратними дужками. Абсолютні значення розраховані для порівняння з експериментальними даними, оскільки в МПТРД серійні електронні вольтметри на фазу різниці потенціалів не реагують, а вимірюють лише їхні ефективні або пікові значення. Криві побудовані для перших трьох радіальних резонансів.

Порівнюючи графіки між собою, можна помітити, що радіальні та кутові компоненти механічних напружень у тонкому п'єзокерамічному диску при радіальних коливаннях різняться насамперед місцями своїх мінімумів на обертонах, а також відмінними від нуля амплітудами кутових напружень на ободі. Поблизу від центру пластини радіальні та кутові напруження збігаються. В міру віддалення від центру аж до точки мінімуму радіальні напруження спадають швидше від колових, а після точок мінімуму радіальні напруження значно переважають по амплітуді колові.

Порівняння з експериментальними даними. При виведенні формул, які зв'язують виміряні потенціали п'єзотрансформаторних датчиків із внутрішніми механічними напруженнями під ними, геометрична форма самих датчиків до уваги не бралася, а в експериментах вони були круглими, бо наносилися гострим вістрям через металеву маску з круглими отворами. Щоб виявити, наскільки геометрична форма та просторова орієнтація п'єзотрансформаторного датчика впливає на його потенціал, були проведені спеціальні експериментальні дослідження, результати котрих розглядаються нижче. В електродному покритті однієї з головних поверхонь диска із кераміки ЦТС-19 діаметром 50 мм при товщині 1,25 мм уздовж радіусів наносилися від центру до країв п'єзотрансформаторні датчики прямокутної форми розміром 4 x 1 та 2,6 x 0,6 мм, орієнтовані своїми поздовжніми осями перпендикулярно до радіусів. Центри датчиків 4 x 1 мм розмістилися на таких відстанях від центру пластини: 1; 2,4; 5,1; 6,3; 8; 9; 10,2; 12; 13;

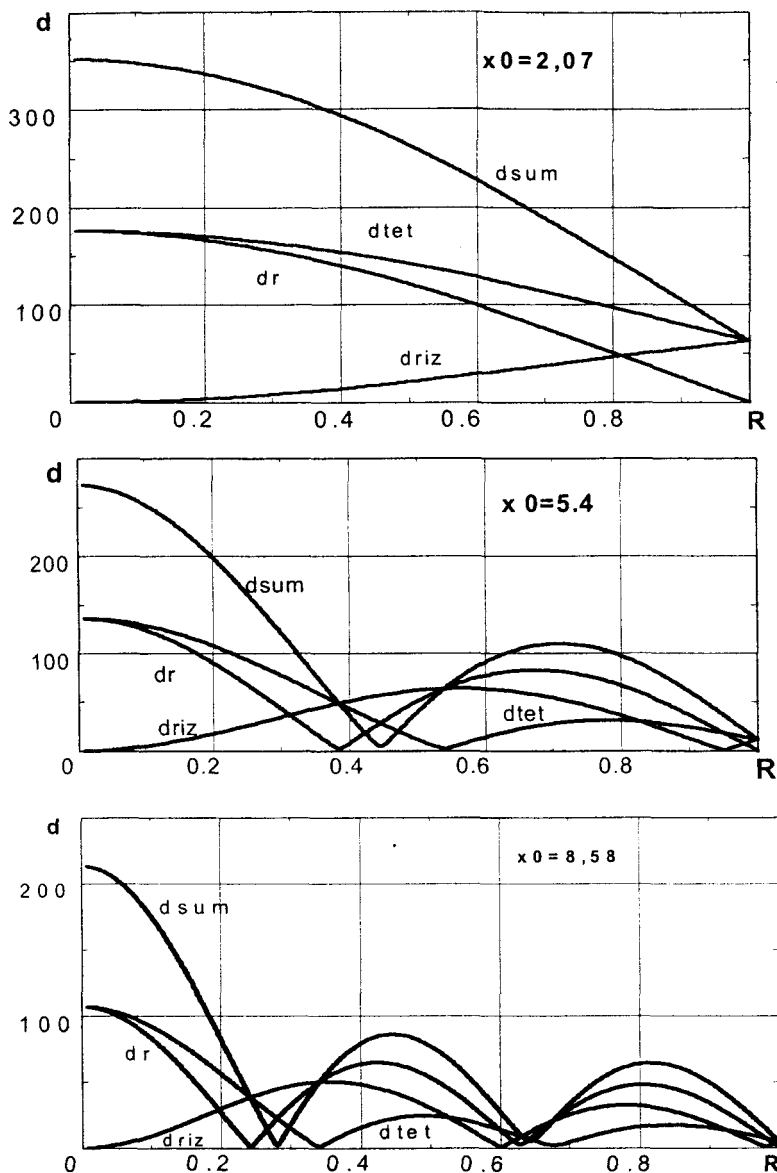


Рис. 2

14,4; 16; 17,5; 18,5; 19,5; 20,5; 22; 23,5; 24,5 мм, тоді як центри датчиків 2,6 x 0,6 мм розташувалися інакше: 2,3; 4; 5,2; 6,1; 7; 7,8; 8,9; 9,5; 10,3; 11,7; 13; 14,2; 15,5; 17; 18,3; 19,7; 20,7; 21,8; 22,4; 24; 24,7 мм – деякі датчики виявилися дуже близькими один до одного, їх віддаляє лише лінія розділення.

Оскільки ширина прямокутних датчиків щонайменше в чотири рази менша від їхньої довжини й орієнтовані вони були перпендикулярно до радіусів, то можна було надіятися, що такі датчики мають реагувати перш за все на азимутальні напруження, котрі не залежать при радіальних коливаннях від азимуту. Вклад радіальних напружень у вимірюваний потенціал прямокутного п'єзотрансформаторного датчика, орієнтованого перпендикулярно до радіусу, мусить бути набагато меншим від азимутальних напружень. Такими міркуваннями керувався автор при проведенні експериментальних досліджень.

На рис.3 наведені графіки розподілу вздовж радіуса коефіцієнтів трансформації п'єзотрансформаторних датчиків 2,6 x 0,6 мм на трьох перших радіальних модах. Під час вимірювань було виявлено значний вплив сусідніх датчиків один на одного через взаємну ємність – потенціали близьких датчиків були на 15 – 25% вищі від очікуваних. Позбутися вказаного недоліку вдалося шляхом “закорочування” найближчих сусідніх датчиків при вимірюванні потенціалу обраних.

У випадку прямокутних датчиків 4 x 1 мм коефіцієнти трансформації підвищуються, а характер їхніх радіальних залежностей зберігається (рис.4). Для круглих датчиків діаметром 3 мм маємо залежності рис.5 (датчиків лише 7 штук), котрі загалом схожі на попередні.

Порівнюючи експериментальні дані з теоретичними, можна помітити тенденцію до зміни місця мінімуму на азимутальних датчиках, але прямої відповіді на питання про можливість розділення ком

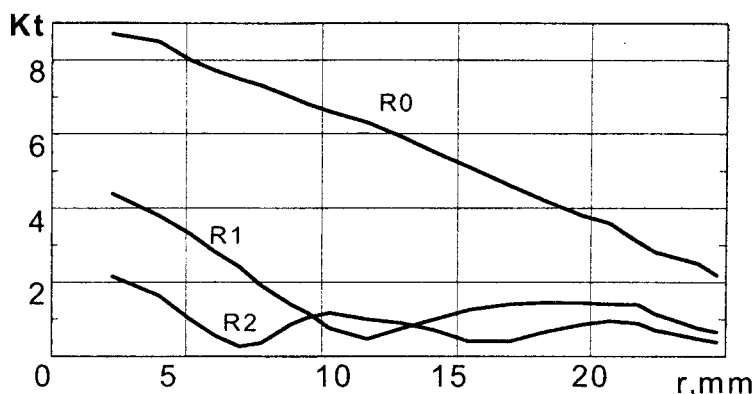


Рис. 3

понентів механічних напружень за допомогою добору форми і орієнтації п'єзотрансформаторних датчиків ці експериментальні дані не дають.

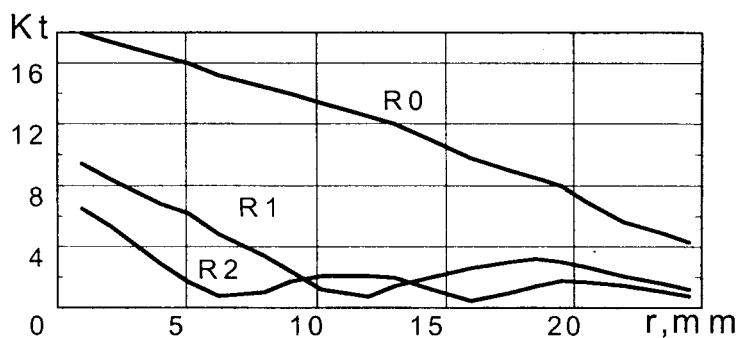


Рис. 4

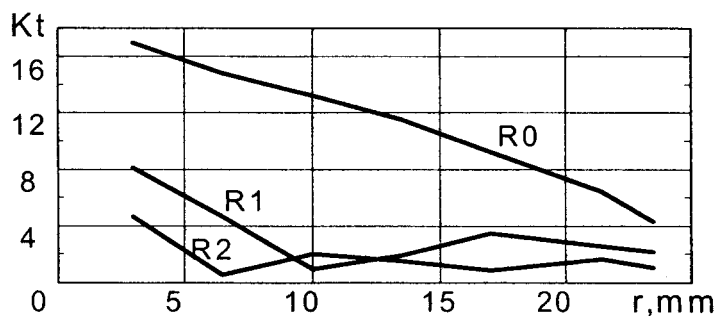


Рис. 5

Висновки. Проведене аналітичне і експериментальне дослідження компонентів динамічних механічних напружень при резонансних коливаннях тонких п'єзокерамічних дисків із товщиною поляризації. Встановлено, що радіальні й азимутальні механічні напруження в центрі пластини збігаються, а біля краю є тільки азимутальні напруження. Різниця радіальних і азимутальних напружень у тонкому п'єзокерамічному диску є менш інформативною, ніж їхня сума.

Запропонований прямий метод експериментального визначення планарного коефіцієнта електро-механічного зв'язку по виміряній резонансній провідності і визначеній з використанням методу п'єзотрансформаторного датчика механічній добротності. Одержані за цим методом дані використані для розрахунку кругів повної провідності для диска з кільцевим концентричним розділенням електродного покриття.

Питання про можливість розділення компонентів механічних напружень за допомогою певним чином орієнтованих п'єзотрансформаторних датчиків прямокутної форми при радіальних коливаннях

п'єзопластини залишається відкритим. Використання п'єзотрансформаторних датчиків не круглої форми може підвищити роздільну здатність методу, проте супроводиться їх помітним взаємним впливом.

Метод п'єзотрансформаторного датчика успішно застосовувався при дослідженні розподілу суми головних механічних напружень в п'єзокерамічних пластинах і оболонках, зокрема в п'єзотрансформаторах [13, 14, 15]

РЕЗЮМЕ

Работа посвящена аналитическому и экспериментальному исследованию компонент динамических механических напряжений при резонансных колебаниях тонких пьезокерамических дисков с толщиной поляризации. Предлагается прямой метод экспериментального определения планарного коэффициента электромеханической связи. Ил. 5. Библиогр. 15 назв.

SUMMARY

A paper is devoted to analytic and experimental investigation of the mechanic dynamic stress components at resonant vibrations of the thin piezoceramic disks with thickness polarizations. A direct method of an experimental planar electromechanical coupling factor determination is proposed.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Писаренко Г.Г. Прочность пьезокерамики. – К.: Наук. думка, 1987. – 232 с.
2. Бородин В.З., Литвин А.Ф., Пикалев М.М. Релаксационные явления в пьезокерамике при изменении температуры и амплитуды внешнего воздействия // Изв. АН СССР. Сер. физич. – 1984. – 48, № 6. – С. 1090–1093.
3. К вопросу о повышении циклической прочности пьезокерамических материалов / Гавриляченко В.Г., Данцигер А.Я., Дорошенко В.А., Житомирский Г.А., Пикалев М.М., Ревенко Л.Г., Фесенко Е.Г. // Доклады П Всесоюз. Семина. Прочность материалов и элементов конструкций при звуковых и ультразвуковых частотах нагружения. – К.: Наук. думка. – 1980. – С. 194–198.
4. Electromechanical nonlinearity of polycrystalline ferroelectrics under resonant excitation / Litvin A.F., Pikalev M.M., Doroshenko V.A., Borodin V.Z. // Ferroelectrics. – 1984. – 51, No 3-4. – P. 159–172.
5. Карлаш В.Л., Улитко А.Т. Про один спосіб дослідження радіальних коливань тонкої п'єзокерамічної пластинки // ДАН УРСР, сер. А. – 1974. – №9. – С. 804–807.
6. Карлаш В.Л., Улитко А.Ф. Исследование колебаний пьезокерамических элементов методом пьезотрансформаторного датчика / Экспериментальные исследования тонкостенных конструкций / Под ред. А.Н. Гузя, В.А.Заруцкого. – К.: Наук. думка, 1984. – С. 178–196.
7. Карлаш В.Л. Диссипация энергии при колебаниях тонких пьезокерамических круглых пластин // Прикладная механика. – 1984. – 20, № 5. – С. 77–82.
8. Карлаш В.Л. Амплитудно-фазовые соотношения в методе пьезотрансформаторного датчика // Прикл. механика. – 1983. – 19, № 10. – С. 95–101.
9. Karlash V.L. Resonant electromechanical vibrations of piezoelectric plates // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, N 7. – P. 709–747.
10. Holland R. Representation of dielectric, elastic and piezoelectric losses by complex coefficients // IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics. – 1967. – SU-14. – P. 18–20.
11. IRE Standards on Piezoelectric Crystals: Measurements of Piezoelectric Ceramics. 1961 // Proc. IRE. – 1961. – 49. – P. 1161–1169.
12. Колебания пьезоэлектрических тел / Шульга Н.А., Болкисев А.М.; Отв. ред. Б.П. Маслов; АН УССР. Ин-т механики. – Киев: Наук. думка, 1990. – 228 с.
13. Karlash V. Longitudinal and lateral vibrations of a planar piezoceramic transformer // Jpn. J. Appl. Phys. – 2005. – 44, No 4A. – P. 1852–1856.
14. Karlash V.L. Electroelastic vibrations and transformation ratio of a planar piezoceramic transformer // J. Sound Vib. – 2004. – 277. – P. 353–367.
15. Шульга М., Карлаш В. Ефективність електромеханічного перетворення енергії при резонансних коливаннях елементів конструкцій із п'єзокераміки // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2006. – Вип. 3. – С. 225–237.

Надійшла до редакції 10.03.2006 р.

УДК 539.3

ДИФРАКЦИЯ УПРУГИХ ВОЛН НА ЖЕСТКОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВКЛЮЧЕНИИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

А.М.Назаренко, А.М.Ложкин, Б.Е.Панченко,

Сумской государственной университет

Динамические задачи для круговых цилиндров различной природы рассмотрены в [1]. Дифракция плоских гармонических волн на эллиптической полости исследована в [2]. В случае неоднородностей сложной геометрической формы эффективно работает метод интегральных уравнений [3]. В [4] этим методом исследуется плоская задача о колебаниях изотропной среды с упругим включением. В данной работе метод интегральных уравнений распространяется на случай жесткого цилиндрического включения произвольного поперечного сечения.

Постановка задачи. Рассмотрим в неограниченной среде абсолютно жесткий бесконечно длинный вдоль оси Ox_3 цилиндр, поперечное сечение которого ограничено замкнутым контуром L типа Ляпунова. В среде перпендикулярно к оси цилиндра распространяется гармоническая (зависимость от времени выражается множителем $e^{-i\omega t}$) волна расширения-сжатия (P -случай)

$$U_1^{(0)} = 0, \quad U_2^{(0)} = \tau_1 e^{-i\gamma_1 x_2}, \quad \gamma_1 = \frac{\omega}{c_1}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad \tau_1 = \text{const} \quad (1)$$

или волна сдвига (SV -случай)

$$U_1^{(0)} = \tau_2 e^{-i\gamma_2 x_2}, \quad U_2^{(0)} = 0, \quad \gamma_2 = \frac{\omega}{c_2}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad \tau_2 = \text{const}, \quad (2)$$

где λ, μ, ρ – коэффициенты Ламе и плотность материала среды; c_1 и c_2 – скорости продольной и поперечной волн в матрице, $i^2 = -1$. Взаимодействуя с включением, падающая волна порождает отраженные продольные и поперечные волны. Их совокупность определяет напряженно-деформированное состояние среды. Следуя принципу суперпозиции, общее поле амплитуд перемещений и компонент тензора напряжений будем искать в виде

$$U_n = U_n^{(0)} + U_n^{(1)}, \quad \tau_{mn} = \tau_{mn}^{(0)} + \tau_{mn}^{(1)}, \\ \tau_{mn} = \lambda \delta_{mn} (U_{1,1} + U_{2,2}) + \mu (U_{m,n} + U_{n,m}) \quad (m, n = 1, 2). \quad (3)$$

Здесь $U_n^{(0)}, \tau_{mn}^{(0)}$ и $U_n^{(1)}, \tau_{mn}^{(1)}$ – амплитуды компонент вектора перемещений, тензора напряжений падающего и отраженного волновых полей соответственно, δ_{mn} – символ Кронекера.

Отраженное поле перемещений должно удовлетворять условиям излучения на бесконечности и уравнениям движения [1]. Кроме того, на поверхности жесткого включения должны выполняться граничные условия

$$U_1 = B_1 - \omega_0 \eta, \quad U_2 = B_2 + \omega_0 \xi, \quad \zeta = \xi + i\eta \in L, \quad (4)$$

где B_1, B_2 и ω_0 – амплитуды поступательного движения и жесткого поворота включения.

Метод исследования. Представления амплитуд перемещений отраженного волнового поля будем искать в виде потенциалов типа простого слоя [4] (суммирование по $n = 1, 2$)

$$U_k^{(1)}(M) = \int_L V_n^{(k)}(M, P) p_n(s) ds \quad (k = 1, 2), \quad (5)$$

где $p_n(s)$ – неизвестные плотности; $V_n^{(k)}$ – компоненты матрицы Грина, представляющие собой амплитуды перемещений в точке M при действии гармонической силы, приложенной в точке $P \in L$ и направленной вдоль оси Ox_1 ($k = 1$) или вдоль оси Ox_2 ($k = 2$).

Амплитуды перемещений $V_n^{(k)}$ и соответствующих компонент тензора напряжений $\sigma_{mn}^{(k)}$ определяются из соотношений ($k, m, n = 1, 2$)

$$V_n^{(k)} = (-1)^{n+k} L_{nk} G, \quad \sigma_{mn}^{(k)} = \lambda \delta_{mn} (V_{1,1}^{(k)} + V_{2,2}^{(k)}) + \mu (V_{m,n}^{(k)} + V_{n,m}^{(k)}), \quad (6)$$

$$(\Delta + \gamma_1^2)(\Delta + \gamma_2^2)G = c\delta(x_1 - \xi, x_2 - \eta), \quad c = -\frac{1}{\mu(\lambda + 2\mu)},$$

$$G(M, P) = \frac{c}{4i} \frac{H_0^{(1)}(\gamma_1 r) - H_0^{(1)}(\gamma_2 r)}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2}.$$

Здесь $H_j^{(1)}(x)$ – функция Ханкеля первого рода j -го порядка, Δ – оператор Лапласа.

Используя фундаментальное решение $G(M, P)$, для комбинаций перемещений $V_n^{(k)}$ получаем следующие выражения:

$$V_1^{(1)} + iV_2^{(2)} = d \left(\frac{\chi}{4} \Phi_{20} - (0,5 - \nu) \gamma_2^2 \Phi_{00} \right), \quad V_1^{(2)} = V_2^{(1)}, \quad (7)$$

$$e^{2i\alpha} \left(V_1^{(1)} - 2iV_1^{(2)} - V_2^{(2)} \right) = e^{-2i\alpha} \left(V_1^{(1)} + 2iV_1^{(2)} - V_2^{(2)} \right) = \frac{d}{4} \Phi_{22},$$

$$\Phi_{l,j} = \frac{\gamma_1^l H_j^{(1)}(\gamma_1 r) - \gamma_2^l H_j^{(1)}(\gamma_2 r)}{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}, \quad z - \zeta = re^{i\alpha}, \quad z = x_1 + ix_2,$$

$$\chi = 3 - 4\nu, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad d = \frac{i}{4\mu(1 - \nu)}.$$

Из формул (7) следует, что функции $V_1^{(1)} - 2iV_1^{(2)} - V_2^{(2)}$ и $V_1^{(1)} + 2iV_1^{(2)} - V_2^{(2)}$ непрерывны в нуле, а функция $V_1^{(1)} + iV_2^{(2)}$ обладает логарифмической особенностью. Это означает, что удовлетворение граничных условий (4) сводит краевую задачу к системе интегральных уравнений с логарифмическими ядрами, численная реализация которых затруднительна. Поэтому, с целью получения сингулярных интегральных уравнений с ядрами типа Коши, граничные условия (4) дифференцировались по дуговой координате s_0 и записывались в виде:

$$\frac{d(U_1 + iU_2)}{ds_0} \Big|_L = i\omega_0 e^{i\varphi_0}, \quad \frac{d(U_1 - iU_2)}{ds_0} \Big|_L = -i\omega_0 e^{-i\varphi_0}, \quad \frac{dW}{ds_0} \Big|_L = \left(\frac{\partial W}{\partial z} e^{i\varphi_0} + \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} e^{-i\varphi_0} \right)_{z \rightarrow \zeta_0}, \quad (8)$$

где φ_0 – угол положительной касательной к L в точке $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in L$ с осью Ox_1 , $\bar{z} = x_1 - ix_2$.

Удовлетворяя граничные условия (8), приходим к системе сингулярных интегральных уравнений первого рода с ядрами типа Коши (суммирование по $n = 1, 2$):

$$\int_L B_{mn}(s_0, s) f_n(s) ds - M_m(s_0) \omega_0 = -N_m(s_0) \quad (m = 1, 2), \quad (9)$$

$$B_{12} = \frac{d}{8} \left(-\frac{2}{\pi i} \frac{e^{i\varphi_0} - e^{i(2\alpha_0 - \varphi_0)}}{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0} + F_{31}^0 e^{i(\varphi_0 + \alpha_0)} - F_{33}^0 e^{i(3\alpha_0 - \varphi_0)} \right),$$

$$B_{21} = \frac{d}{8} \left(-\frac{2}{\pi i} \frac{e^{-i\varphi_0} - e^{-i(2\alpha_0 - \varphi_0)}}{\zeta - \zeta_0} + F_{31}^0 e^{-i(\varphi_0 + \alpha_0)} - F_{33}^0 e^{-i(3\alpha_0 - \varphi_0)} \right),$$

$$B_{11} = B_{22} = -d \left(\frac{\chi}{2\pi i} \frac{\cos(\varphi_0 - \alpha_0)}{r_0} + \left(\frac{\chi}{4} F_{31}^0 - (0,5 - \nu) \gamma_2^2 \Phi_{11}^0 \right) \cos(\varphi_0 - \alpha_0) \right),$$

$$f_1(s) = p_1(s) + ip_2(s), \quad f_2(s) = p_1(s) - ip_2(s), \quad M_1 = i\omega_0 e^{i\varphi_0}, \quad M_2 = \bar{M}_1,$$

$$\Phi_{lj}^0 = \frac{\gamma_1' H_j^{(1)}(\gamma_1 r_0) - \gamma_2' H_j^{(1)}(\gamma_2 r_0)}{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}, \quad \zeta_0 - \zeta = r_0 e^{i\alpha_0}, \quad F_{31}^0 = -\frac{2i}{\pi r_0} + \Phi_{31}^0, \quad F_{33}^0 = -\frac{2i}{\pi r_0} + \Phi_{33}^0,$$

$N_1 = -N_2 = \gamma_1 \tau_1 e^{-i\gamma_1 \eta_0} \sin \varphi_0$ в P -случае, $N_1 = N_2 = -i\gamma_2 \tau_2 e^{-i\gamma_2 \eta_0} \sin \varphi_0$ - в SV -случае.

Анализ ядер системы уравнений (9) показывает, что ядра B_{11} и B_{22} являются сингулярными, а B_{12} и B_{21} – непрерывными.

Необходимые для замыкания алгоритма три дополнительных условия вытекают из законов поступательного и вращательного движения абсолютно жесткого тела. Для поступательного движения, исходя из второго закона Ньютона, получаем:

$$\int_L S_1 ds = -\omega^2 \rho_0 S_0 B_1, \quad \int_L S_2 ds = -\omega^2 \rho_0 S_0 B_2, \quad (10)$$

а уравнение, описывающее вращательное движение, запишем в виде:

$$\int_L (S_1(\eta - a_2) - S_2(\xi - a_1)) ds = -\omega^2 J_A \omega_0, \quad (11)$$

где S_1 и S_2 – амплитуды компонент вектора напряжения на контуре L ; S_0 – площадь включения, ограниченного контуром L ; J_A – момент инерции включения относительно точки $A(a_1, a_2)$; постоянные B_1 и B_2 определяются согласно (4).

Результаты численных исследований. При численной реализации алгоритма использовался метод механических квадратур [5]. В качестве примера рассматривалась среда, содержащая цилиндрическое жесткое включение эллиптического поперечного сечения

$$\xi = a \sin \beta, \quad \eta = -b \cos \beta \quad 0 \leq \beta \leq 2\pi. \quad (12)$$

На границе включения проводилось вычисление безразмерных напряжений

$$\sigma_n = |\tau_n|/P, \quad \sigma_s = |\tau_s|/P, \quad \sigma_{ns} = |\tau_{ns}|/P, \quad (13)$$

где τ_n и τ_{ns} – амплитуды нормального и тангенциального напряжений на L ; τ_s определяется из соотношения $\tau_s + \tau_n = \tau_{11} + \tau_{22}$; P – максимальное напряжение в падающей волне, равное $\gamma_1 \tau_1 (\lambda + 2\mu)$ в случае набега на цилиндр P -волны (1) и $\gamma_2 \tau_2 \mu$ - в случае SV -волны (2).

На рис. 1 и 2 приведены распределения напряжений σ_n и σ_{ns} вдоль контура эллиптического жесткого включения (12) в случае набега P - и SV -волны соответственно при

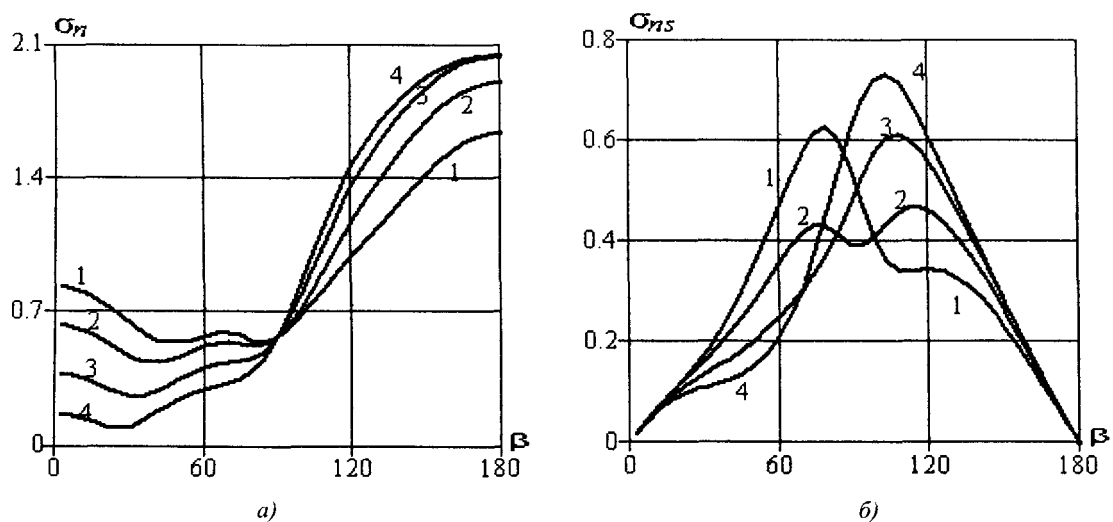


Рис. 1

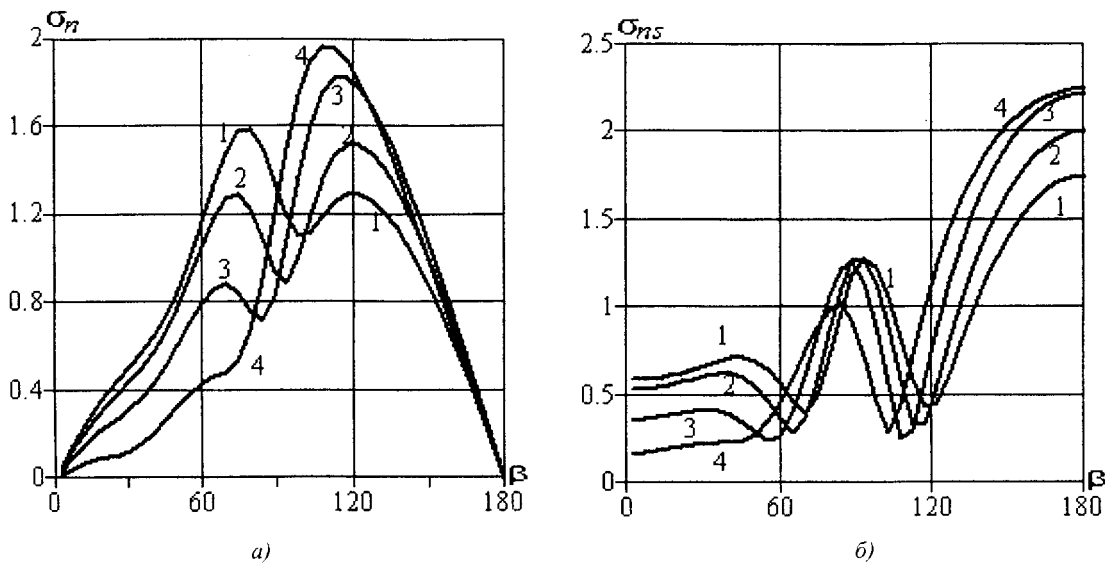


Рис. 2

$a/b = 0,5$; $\nu = 0,3$; $\lambda_0/2a = 1,0$ (λ_0 - длина падающей волны: $\lambda_0 = 2\pi/\gamma_1$ в P -случае и $\lambda_0 = 2\pi/\gamma_2$ в SV -случае). Кривые 1, 2, 3 и 4 соответствуют значениям $\rho_0/\rho = 0,5$; 1,0; 2,0 и 5,0. Расчеты показывают, что существует принципиальное различие в распределении контурных напряжений при набегании на жесткое включение волны расширения-сжатия (1) или волны сдвига (2). В P -случае напряжение σ_n достигает абсолютного и локального максимума в лобовой $\beta = 180^\circ$ и теневой $\beta = 0^\circ$ точках соответственно; в SV -случае напряжение σ_n в этих точках равно нулю и достигает максимума в окрестности точки соскальзывания ($\beta = 90^\circ$). Напряжения σ_{ns} в P -случае в лобовой и теневой точках равны нулю, а их максимум достигается вблизи точки соскальзывания; в SV -случае напряжение σ_{ns} принимает максимальное значение в лобовой точке и имеет локальный максимум вблизи точки $\beta = 90^\circ$. При увеличении параметра ρ_0/ρ наблюдается увеличение напряжений σ_n в P -случае и σ_{ns} в SV -случае вблизи лобовой точки и их уменьшение в окрестности теневой точки, а максимум напряжений σ_{ns} в P -случае и σ_n в SV -случае смещается из теневой области ($60^\circ < \beta < 90^\circ$) в освещенную ($90^\circ < \beta < 120^\circ$). Кроме того, в P -случае преобладающим является напряжение σ_n , а изменение параметра ρ_0/ρ практически не влияет на значение этого напряжения в точке соскальзывания $\beta = 90^\circ$.

Отметим, что при дифракции продольной (1) или поперечной (2) волны на жестком эллиптическом включении (12) напряжение σ_s всегда меньше σ_n и связано с ним соотношением $\sigma_s = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_n$.

На рис. 3 приведено распределение максимальных контурных напряжений σ_n и σ_{ns} в зависимости от отношения плотностей включения и матрицы ρ_0/ρ при $a/b = 0,5$; $\nu = 0,3$. Кривые 1, 2, 3 и 4 отвечают значениям $\lambda_0/2a = 1/3$; 0,5; 1,0 и 2,5. Видно, что с увеличением параметра ρ_0/ρ напряжения σ_n сначала возрастают, а затем при достижении определенного значения (зависящего от отношения длины волны к оси эллипса) они начинают постепенно стабилизироваться, что соответствует случаю неподвижного включения. Напряжения σ_{ns} , наоборот, сначала убывают, а затем наступает процесс стабилизации. Причем, в случае коротких волн ($\lambda_0/2a = 1/3$ и 0,5) жесткое включение начинает вести себя как неподвижное уже при $\rho_0/\rho = 3$ (так, при $\lambda_0/2a = 1/3$ максимальные напряжения на контуре жесткого включения при $\rho_0/\rho = 3$ отличаются от соответствующих напряжений на контуре неподвижного включения менее чем на 2%). В случае длинных волн ($\lambda_0/2a = 2,5$) даже при довольно больших отношениях плотностей включения и матрицы максимальные на-

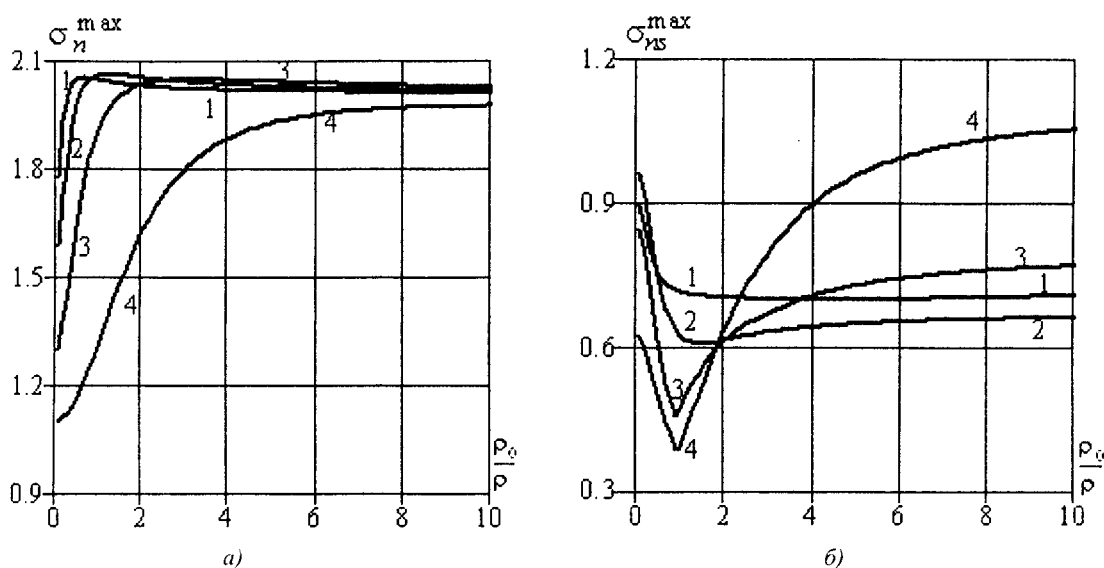


Рис. 3

пряжения σ_n и σ_{ns} продолжают изменяться с увеличением ρ_0 / ρ (для значений $\rho_0 / \rho < 10$). В данном случае стабилизация напряжений происходит при $\rho_0 / \rho > 10$.

РЕЗЮМЕ

Методом сингулярных интегральных рівнянь розв'язується плоска задача дифракції пружних гармонічних хвиль на циліндричному жорсткому включенні довільного поперечного перерізу. Отримана система сингулярних інтегральних рівнянь розв'язується чисельно методом механічних квадратур. Проводиться аналіз напружено-деформованого стану середовища на границі включення.

SUMMARY

Method of integral equations apply for solve the plane problem of diffraction elastic harmonic waves on the hard cylindrical insertion arbitrary cross-section. Obtained system of singular integral equations solve numerically, using mechanical quadrature method. Give analysis of medium deflected mode on inclusion body.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. – К.: Наук. думка, 1978. – 307 с.
2. Волобуева Т.В., Сторожев В.И. Рассеяние плоских гармонических волн на цилиндрической полости эллиптического сечения в ортотропной среде. //Теорет. и прикладная механика. – 1999. – Вып. 29. – С. 66–79.
3. Фильштинский Л.А. Дифракция упругих волн на трещинах, отверстиях, включениях в изотропной среде // Механика твердого тела. – 1991. – №4. – С. 119–127.
4. Назаренко А.М. Дифракция гармонических волн на цилиндрическом упругом включении в условиях плоской деформации //Динамические системы. Межвед. науч. сб. – 2005. – Вып. 19. – С. 54–60.
5. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. – К.: Наук. думка, 1984. – 344 с.

Надійшла до редакції 12.03.06 р.

УДК 539.3

РАСТЯЖЕНИЕ, РАЗДУВАНИЕ И КОАКСИАЛЬНОЕ КРУЧЕНИЕ ОДНОРОДНЫХ И АРМИРОВАННЫХ НИТЯМИ ЭЛАСТИЧНЫХ ЦИЛИНДРОВ

В.М.Ахундов, Т.А.Скрипочка,

Национальная металлургическая академия Украины, г. Днепропетровск

В задаче о деформации коаксиального кручения полого цилиндра моделируется поведение эластичных амортизаторов закручивания, которые находят широкое применение в подвесках различных узлов современных транспортных средств. Деформация закручивания полого цилиндра из однородного материала рассматривается в монографии [1]. В случае так называемого «полулинейного» материала задача сведена к системе двух трансцендентных уравнений относительно эйлеровых радиальной и окружной координат в деформируемой конфигурации. Но при этом анализ конкретных случаев деформации закручивания цилиндров не производится. В [2] приведено точное аналитическое решение задачи закручивания цилиндра из несжимаемого материала на основе использования наиболее простой однопараметрической формы упругого потенциала. Описание деформации закручивания в отдельности или в сочетании с другими видами деформации цилиндров, армированных системами нитей, в доступных литературных источниках не обнаружили.

В настоящей статье представляем моделирование растяжения, раздувания и коаксиального кручения (закручивания) полых цилиндров из сжимаемого и слабоармированного нитями эластомерного материала в условиях цилиндрически симметричной деформации. Применяется модель армированного материала, которая обосновывается в [3]. Нити при малой плотности расположения заменяются их осевыми линиями, наделенными соответствующими механическими характеристиками. Макроскопические напряжения определяются как аддитивно обусловленные напряжениями в матрице и усилиями одноосного растяжения или стесненного сжатия нитей арматуры. На основе полученных уравнений и решения соответствующих краевых задач исследуется деформация закручивания эластичных цилиндров в отсутствии и при наличии нитей радиальной системы армирования.

1. Постановка задачи. Достаточно длинное цилиндрическое тело с поперечным сечением круговой кольцевой формы находится в условиях растяжения, раздувания и коаксиального кручения (рис.1). Деформация закручивания обуславливается поворотом наружной поверхности цилиндра относительно внутренней на некоторый угол $\hat{\phi}_b$. Деформация растяжения или сжатия задается кратностью $\hat{L}$ удлинения цилиндра. Деформация раздувания определяется давлениями $\hat{p}_a$ и $\hat{p}_b$ на внутренней и наружной поверхностях цилиндра, задаваемых радиусами $r = a$ и $r = b$.

Цилиндрическое тело изготовлено из однородного или армированного нитями материала, в общем случае ортотропного с цилиндрической симметрией упругих свойств. Осевые линии нитей систем армирования располагаются в поперечных и меридиональных сечениях. Нити в указанных сечениях могут располагаться по прямым или кривым

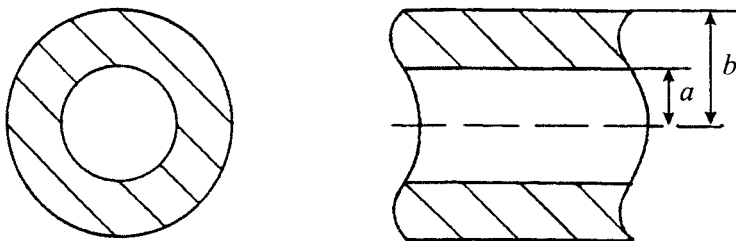


Рис. 1

линиям, в том числе по радиусам и окружностям в поперечных сечениях (радиально-окружная схема армирования), радиусам и направляющим в меридиональных сечениях (радиально-аксиальная схема армирования). Параметры нитей и геометрии их расположения находятся в зависимости только от радиальной координаты.

Цилиндрическое тело относим к материальной (лагранжевой) системе коаксиально связанных с ним цилиндрических координат $\hat{\theta}^1, \hat{\theta}^2, \hat{\theta}^3$, из которых $\hat{\theta}^1$ – осевая, $\hat{\theta}^2$ – окружная, $\hat{\theta}^3$ – радиальная координаты. В отсчетной конфигурации систему координат $\hat{\theta}^1, \hat{\theta}^2, \hat{\theta}^3$ рассматриваем как пространственную (эйлеровую) систему координат t, ϕ, r , из которых t – осевая, ϕ – окружная, r – радиальная координаты:

$$t \rightarrow \hat{\theta}^1, \phi \rightarrow \hat{\theta}^2, r \rightarrow \hat{\theta}^3. \quad (1)$$

Физические компоненты векторных и тензорных величин относительно применяемой отсчетной системы координат сопровождаем нижними координатными индексами, заключенными в круглые скобки. Величины, относящиеся к макроскопически деформированной конфигурации цилиндра, отмечаем сверху циркумфлексом. Исключением являются лагранжевы координаты $\hat{\theta}^1, \hat{\theta}^2, \hat{\theta}^3$, которые в исходной и деформированной конфигурациях отмечены циркумфлексом. Условия симметрии задачи приводят к линейной зависимости осевой компоненты $\hat{u}_{(1)}$ по осевой координате t и зависимостям окружной $\hat{u}_{(2)}$ и радиальной $\hat{u}_{(3)}$ компонент перемещений цилиндра относительно системы координат в отсчетной конфигурации как функциям радиальной координаты r :

$$\hat{u}_{(1)} = \hat{L}t - t, \quad \hat{u}_{(2)} = \hat{u}_{(2)}(r), \quad \hat{u}_{(3)} = \hat{u}_{(3)}(r). \quad (2)$$

На рис. 2 представлена схема компонент $\hat{u}_{(2)}$ и $\hat{u}_{(3)}$ вектора перемещения произвольной материальной точки r – координатной линии (радиального отрезка между внутренней и наружной поверхностями цилиндра) относительно системы координат в недеформированном цилиндре. Тонкие линии относятся к исходной конфигурации цилиндра, утолщенные – к деформированной конфигурации.

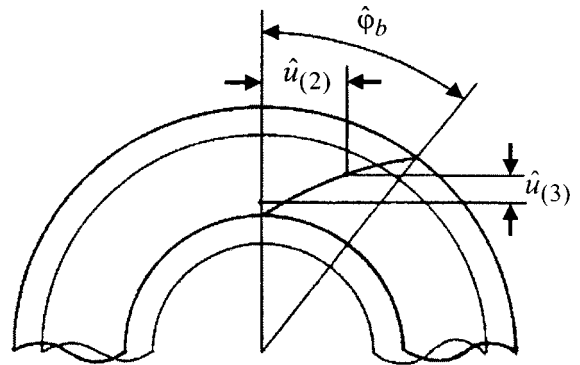


Рис. 2

2. Деформационные соотношения. Исходим из общих соотношений нелинейной механики деформирования, определяющих компоненты тензора деформации Коши–Грина, применительно к рассматриваемой модели армированного материала [3, 4]. Применяя известные правила вычисления ковариантных производных на основании (2) с использованием системы цилиндрических координат (1) приходим к следующим выражениям для физических компонент тензора деформации:

$$\begin{aligned} \hat{q}_{(11)} &= \hat{\lambda}_1^2 = \hat{L}^2, \quad \hat{q}_{(22)} = \hat{\lambda}_2^2 = (r + \hat{u}_{(2)})^2 / r^2 + \hat{u}_{(2)}^2 / r^2, \quad \hat{q}_{(33)} = \hat{\lambda}_3^2 = (1 + d\hat{u}_{(3)} / dr)^2 + (d\hat{u}_{(2)} / dr)^2, \\ \hat{q}_{(23)} &= \hat{\lambda}_2 \hat{\lambda}_3 \cos \hat{\omega}_{23} = (1 + \hat{u}_{(3)} / r) d\hat{u}_{(2)} / dr - (1 + d\hat{u}_{(3)} / dr) \hat{u}_{(2)} / r \end{aligned} \quad (3)$$

($\hat{q}_{(12)} = \hat{q}_{(13)} = 0$). Здесь $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3$ – кратности удлинения цилиндра по направлениям $t(\hat{\theta}^1)$, $\varphi(\hat{\theta}^2)$, $r(\hat{\theta}^3)$ – координатных линий соответственно; $\hat{\omega}_{23}$ – координатный угол в деформированном цилиндре между $\hat{\theta}^2$ и $\hat{\theta}^3$ – координатными линиями.

3. Физические соотношения. Компоненты тензора напряжений Коши армированного материала определяем суммируя напряжения матрицы и обусловленные усилиями в нитях систем напряжения арматуры [3]:

$$\begin{aligned} \hat{J}\hat{\sigma}_{(11)} &= \hat{J}\hat{\sigma}_{m(11)} + \sum_n \hat{J}\hat{\sigma}_{n(11)}, \quad \hat{J}\hat{\sigma}_{(22)} = \hat{J}\hat{\sigma}_{m(22)} + \sum_n \hat{J}\hat{\sigma}_{n(22)}, \\ \hat{J}\hat{\sigma}_{(33)} &= \hat{J}\hat{\sigma}_{m(33)} + \sum_n \hat{J}\hat{\sigma}_{n(33)}, \quad \hat{J}\hat{\sigma}_{(23)} = \hat{J}\hat{\sigma}_{m(23)} + \sum_n \hat{J}\hat{\sigma}_{n(23)} \end{aligned} \quad (4)$$

($\hat{\sigma}_{(12)} = \hat{\sigma}_{(13)} = 0$). В случае сжимаемого и слабосжимаемого материала матрицы компоненты тензора ее напряжений связаны с компонентами тензора деформации армированного материала соотношениями [5]

$$\hat{J}\hat{\sigma}_{m(ij)} = 2 \sum_p \frac{\partial W_m}{\partial p} \cdot \frac{\partial \psi_p}{\partial \hat{q}_{(ij)}}, \quad i, j = 1, \dots, 3, \quad (5)$$

где $W_m = W_m[\psi_1(\hat{q}_{(ij)}), \psi_2(\hat{q}_{(ij)}), \dots, \psi_q(\hat{q}_{(ij)})]$ – упругий потенциал материала матрицы, определяемый в зависимости от инвариантов $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_q$ тензора деформации. (В силу постановки задачи компоненты тензора макроскопической деформации армированного материала совпадают с компонентами тензора локальной деформации матрицы).

Компоненты тензора макроскопических напряжений n -й системы армирования относительно применяемой системы координат определяются как [3]

$$\hat{J}\hat{\sigma}_{n(ij)} = \hat{T}_n I_n n_i n_j / \hat{\lambda}_n, \quad (6)$$

где I_n – плотность расположения нитей n -й системы в исходном состоянии; n_i – направляющие косинусы ориентации нити n -й системы относительно применяемой системы ортогональных координат; $\hat{T}_n$ – усилие одноосного растяжения или стесненного сжатия нити n -й системы, определяемое в зависимости от кратности осевого удлинения $\hat{\lambda}_n$ из расчета на основе потенциала материала нити [6]:

$$\hat{T}_n = \hat{T}_n(\hat{\lambda}_n), \quad \hat{\lambda}_n = [\hat{q}_{ij} n_i n_j]^{1/2}. \quad (7)$$

Компоненты $\hat{J}\hat{\sigma}_{(ij)}$ выражаются через компоненты $\hat{p}_{(ij)}$ векторов напряжений на $\hat{\theta}^1, \hat{\theta}^2, \hat{\theta}^3$ – координатных поверхностях, отнесенных к единичным длинам векторного базиса координатной системы в деформированной конфигурации цилиндра, по формулам [7]

$$\begin{aligned} \hat{J}\hat{\sigma}_{(11)} &= \hat{\lambda}_1^{-1} \hat{\lambda}_2 \hat{\lambda}_3 \sin \hat{\omega}_{23} \hat{p}_{11}, \quad \hat{J}\hat{\sigma}_{(22)} = \hat{\lambda}_2^{-1} \hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_3 \hat{p}_{22}, \\ \hat{J}\hat{\sigma}_{(33)} &= \hat{\lambda}_3^{-1} \hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2 \hat{p}_{33}, \quad \hat{J}\hat{\sigma}_{(23)} = \hat{\lambda}_1 \hat{p}_{23}. \end{aligned} \quad (8)$$

Результаты решения краевой задачи удобно представлять в компонентах векторов напряжений на координатных поверхностях эйлеровой системы координат t, φ, r относительно ее нормированного базиса. На рис. 3 показан в плане макроэлементарный объем цилиндра в деформированном состоянии. Данный объем выделен цилиндрической и меридиональной лагранжевыми поверхностями, меридиональной эйлеровой и двумя поперечными эйлеровыми, равно как и лагранжевыми, поверхностями. В этом состоянии объем представляет собой (с точностью до малых второго порядка) прямую призму с прямоугольным треугольником в основании. На грани объема в лагранжевой цилиндрической поверхности показаны составляющие напряжений $\hat{p}_{32}$ и $\hat{p}_{33}$, а на грани объема в лагранжевой меридиональной поверхности – составляющие $\hat{p}_{22}$ и $\hat{p}_{23}$ относительно лагранжевой системы координат $\hat{\theta}^1, \hat{\theta}^2, \hat{\theta}^3$. На гранях в цилиндрической и меридиональной поверхностях как эйлеровых показаны составляющие напряжений $\hat{p}_{32}^-, \hat{p}_{33}^-$ и $\hat{p}_{22}^-, \hat{p}_{23}^-$ относительно эйлеровой системы координат t, φ, r . Из условий равновесия макроэлементарной призмы приходим к формулам, выражающим эйлеровые напряжения через лагранжевые

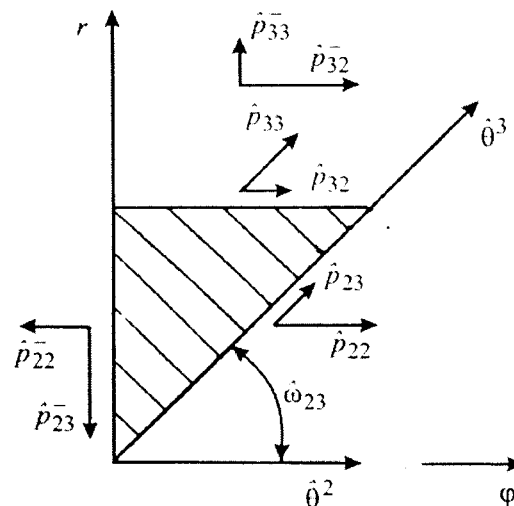


Рис.3

Заметим, что к формулам (9) также приходим на основе процедуры преобразования компонент тензора напряжений Коши при переходе от лагранжевых к эйлеровым координатам.

4. Уравнения равновесия и разрешающая система уравнений краевой задачи. Воспользуемся общими уравнениями макроскопического равновесия армированного тела при больших деформациях, отнесенных к метрике исходной конфигурации [8]. Данные уравнения в условиях использования системы цилиндрических координат (1) и одномерной подстановки, характеризуемой соотношениями (2), приводятся к виду

$$r \frac{d\hat{t}^{32}}{dr} + 2\hat{t}^{32} + \hat{t}^{23} + \rho r \hat{F}^2 = 0, \quad r \frac{d\hat{t}^{33}}{dr} + \hat{t}^{33} - r^2 \hat{t}^{22} + \rho r \hat{F}^3 = 0; \quad (10)$$

$\hat{F}^2 = \hat{F}_{(2)}/r$, $\hat{F}^3 = \hat{F}_{(3)}$. Здесь $\hat{t}^{ij}$ – компоненты несимметричного тензора макроскопических напряжений Пиола-Кирхгофа, представляемые в условиях рассматриваемой деформации цилиндра выражениями

$$\hat{t}^{32} = \frac{\hat{J}\hat{\sigma}_{(32)}}{r} \left[1 + \frac{\hat{u}_{(3)}}{r} \right] + \frac{\hat{J}\hat{\sigma}_{(33)}}{r} \cdot \frac{d\hat{u}_{(2)}}{dr}, \quad \hat{t}^{33} = \hat{J}\hat{\sigma}_{(33)} \left[1 + \frac{d\hat{u}_{(3)}}{dr} \right] - \frac{\hat{J}\hat{\sigma}_{(32)}}{r} \hat{u}_{(2)}; \quad (11)$$

$$\hat{t}^{22} = \frac{\hat{J}\hat{\sigma}_{(22)}}{r^2} \left[1 + \frac{\hat{u}_{(3)}}{r} \right] + \frac{\hat{J}\hat{\sigma}_{(23)}}{r^2} \cdot \frac{d\hat{u}_{(2)}}{dr}, \quad \hat{t}^{23} = \frac{\hat{J}\hat{\sigma}_{(23)}}{r} \left[1 + \frac{d\hat{u}_{(3)}}{dr} \right] - \frac{\hat{J}\hat{\sigma}_{(22)}}{r^2} \hat{u}_{(2)}; \quad (12)$$

ρ – макроскопическая плотность армированного материала в исходном состоянии; $\hat{F}_{(2)}$, $\hat{F}_{(3)}$ – окружная и радиальная компоненты вектора макроскопической плотности массовых сил.

В качестве основных искоемых величин принимаются окружная $\hat{u}_{(2)}$ и радиальная $\hat{u}_{(3)}$ компоненты вектора перемещений и окружная $\hat{t}_{(32)}$ и радиальная $\hat{t}_{(33)}$ компоненты тензора напряжений на r -координатных поверхностях. В соответствии с этим систему основных разрешающих уравнений краевой задачи получаем, добавляя к уравнениям равновесия (10) физические уравнения (11). Компоненты $\hat{t}^{22}$ и $\hat{t}^{23}$, содержащиеся в (10), выражаются через компоненты перемещений $\hat{u}_{(2)}$ и $\hat{u}_{(3)}$ в соответствии с (3)–(7) и (12).

В качестве граничных условий краевой задачи задаем окружное $\hat{u}_{(2)}$ и радиальное $\hat{u}_{(3)}$ перемещения и (или) касательное $\hat{p}_{(32)}$ и нормальное $\hat{p}_{(33)}$ напряжения на внутренней и наружной поверхностях цилиндра. Например, в случае цилиндра, жестко соединенного с недеформируемыми обоймами по граничным поверхностям, при неподвижной внутренней обойме и перемещении наружной, определяемом углом ее поворота $\hat{\phi}_b$, граничные условия запишутся в виде

$$\hat{u}_{(2)}(a) = 0, \quad \hat{u}_{(3)}(a) = 0, \quad \hat{u}_{(2)}(b) = b \cdot \sin \hat{\phi}_b, \quad \hat{u}_{(3)}(b) = b \cdot \cos \hat{\phi}_b - b. \quad (13)$$

5. Схема численного решения краевой задачи. Производные первого порядка от величин $\hat{u}_{(2)}$, $\hat{u}_{(3)}$, $\hat{p}_{32}$, $\hat{p}_{33}$, содержащиеся в основных уравнениях краевой задачи (10), (11) и дополняющих уравнениях (3), (12), аппроксимировали с помощью конечно-разностных соотношений второго порядка точности. Вместе с привлечением соответствующих граничных условий в итоге формируется система нелинейных уравнений относительно значений основных искоемых величин в узловых точках интервала краевой задачи $a \leq r \leq b$. Полученная система уравнений решается на основе процедуры дискретного метода Ньютона [9]. Решение производится поэтапно на основе продолжения по параметрам $\hat{\phi}_b$, $\hat{L}$, перемещениям $\hat{u}_{(2)}$, $\hat{u}_{(3)}$ и напряжениям $\hat{p}_{(32)}$, $\hat{p}_{(33)}$ на внутренней и наружной поверхностях цилиндра в соответствии с историей нагружения цилиндра. После решения краевой задачи и определения из соотношений (8) координатных напряжений $\hat{p}_{ij}$ производится вычисление истинных напряжений $\hat{p}_{ij}^*$ в цилиндрических, меридиональных и поперечных сечениях деформированного цилиндра по формулам (9).

6. Результаты численного исследования деформации закручивания. Проведены исследования деформации закручивания однородного и радиально армированного цилиндров, жестко связанных с недеформируемыми обоймами, при повороте одной обоймы относительно другой. Резиновый материал цилиндра или его матрицы описывали с помощью трехконстантного потенциала Левинсона-Бружеса [10] с упругими параметрами $E_m = 4$ МПа, $\nu_m = 0,49$, $\beta_m = 1$. Материал нитей армирующей системы моделировали на основе двухконстантного потенциала Блейтца [11] со значениями упругих параметров, отвечающих эффективному поведению нитей капронового корда $E_f = 1240$ МПа, $\nu_f = 0,4$. Для диаметра нитей принимали значение $d_f = 0,5$ мм.

Исходная конфигурация однородного и армированного цилиндров характеризуется радиусами внутренней $a = 100$ мм и наружной $b = 200$ мм поверхностей, находящихся в жестком контакте с соответствующими поверхностями обойм-втулок. Пространственная плотность I_f нитей радиальной ориентации изменяется от значения $I_f = 1/4 \text{ мм}^{-2}$ возле внутренней поверхности (на радиусе $r = a$) до зна-

чения $I_f = 1/8 \text{ мм}^{-2}$ возле наружной поверхности (на радиусе $r = b$). Объемное наполнение нитями изменяется по радиальной координате в пределах $0,05 \geq k_f \geq 0,025$.

Нагружение цилиндров задавали, изменяя величину угла поворота наружной поверхности цилиндра вокруг его осевой линии в диапазоне $0 \leq \hat{\phi}_b \leq 50^\circ$ (здесь и далее пользуемся градусной мерой). Внутреннюю поверхность цилиндра считали неподвижной. Кратность осевого удлинения цилиндра задается как $\hat{L} = 1$. Граничные условия соответствующей краевой задачи задаются соотношениями (13).

На рис. 4 показана деформация меридиональных сечений однородного (а) и армированного (б) цилиндров при углах закручивания $\hat{\phi}_b = 10^\circ, 20^\circ, \dots, 50^\circ$. Деформация меридиональных сечений имеет место как результат их перемещений $\hat{u}_{(2)}$ и $\hat{u}_{(3)}$ и представляется кривыми линиями в поперечных сечениях, которые трансформируется прямолинейный отрезок с радиальной ориентацией в исходном состоянии ($\hat{\phi}_b = 0^\circ$). Отметим, что угол сдвига возле внутренней обоймы $\pi/2 - \hat{\omega}_{23}$ для однородного цилиндра больше, чем соответствующий угол для армированного цилиндра. Возле наружной обоймы, напротив, угол сдвига $\pi/2 - \hat{\omega}_{23}$ для однородного цилиндра является меньшим по сравнению с соответствующим углом для армированного цилиндра. В случае армированного цилиндра кривые представляют собой траектории, по которым располагаются радиальные нити армирования в деформируемом цилиндре. На рисунке также показаны кривые, по которым перемещаются материальные точки $r = 120 \text{ мм}, 140 \text{ мм}, \dots, 200 \text{ мм}$ при деформации цилиндра в интервале нагружения $0 \leq \hat{\phi}_b \leq 50^\circ$.

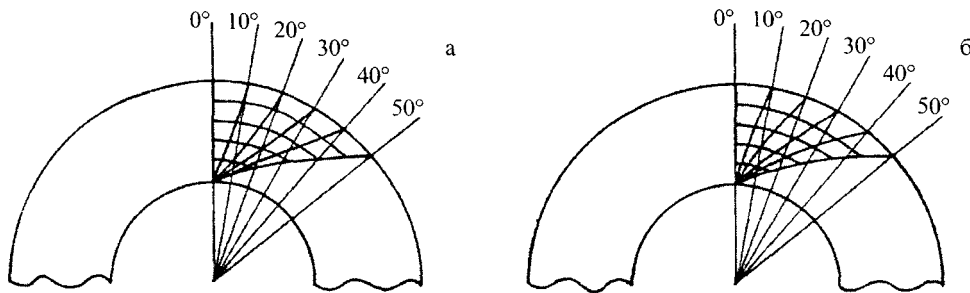


Рис. 4

На рис. 5-7 и рис. 10 представлены изменения параметров деформации цилиндров по толщине их стенок при угле закручивания для обоих цилиндров $\hat{\phi}_b = 50^\circ$. На рис. 5 изображены зависимости для кратностей удлинений $\hat{\lambda}_2$ (кривые 1), $\hat{\lambda}_3$ (кривые 2) однородного (а) и армированного (б) цилиндров в окружном и радиальном направлениях. Кратность удлинений ϕ -координатных линий (окружностей) на внутренней $r = a$ и наружной $r = b$ поверхностях цилиндра $\hat{\lambda}_2 = 1$ в силу граничных условий (13). Для внутренних точек цилиндра $a < r < b$ деформация $\hat{\lambda}_2 < 1$. При этом для однородного цилиндра $\hat{\lambda}_2 \approx 1$ (минимальное $\hat{\lambda}_2 = 0,998$ при $r = 13 \text{ мм}$). Это свидетельствует о том, что изменения $\hat{u}_r = \hat{r} - r$ радиусов окружностей для однородного цилиндра практически отсутствуют. В случае армированного цилиндра изменения радиусов окружностей малы, хотя и несколько большие, чем в случае однородного цилиндра. Окружная деформация изменяется в диапазоне $1 \leq \hat{\lambda}_2 \leq 0,98$. Радиальная деформация $\hat{\lambda}_3$ цилиндров сильно изменяется по толщине стенки цилиндров, возрастая по направлению от наружной поверхности $r = b$ к внутренней $r = a$. При этом для однородного цилиндра диапазон изменения деформации $1,16 \leq \hat{\lambda}_3 \leq 2,52$ более широкий по сравнению с диапазоном деформации $1,42 \leq \hat{\lambda}_3 \leq 1,81$ для армированного цилиндра. В силу радиальной ориентации армирующих нитей радиальная деформация цилиндра задает при этом деформацию осевого удлинения нитей $\hat{\lambda}_f = \hat{\lambda}_3$.

На рис. 6 приведены зависимости для координатного угла $\hat{\omega}_{23}$, составляемого $\hat{\theta}^2$ и $\hat{\theta}^3$ -координатными линиями. Данный угол убывает в направлении от наружной поверхности цилиндра к внутренней в диапазонах $22,9^\circ \leq \hat{\omega}_{23} \leq 60,6^\circ$ и $27,3^\circ \leq \hat{\omega}_{23} \leq 48,7^\circ$ для однородного (а) и армированного

(б) цилиндров соответственно. Диапазон изменения координатного угла $\hat{\omega}_{23}$ является более узким для армированного цилиндра по причине влияния натяжения нитей радиальной системы.

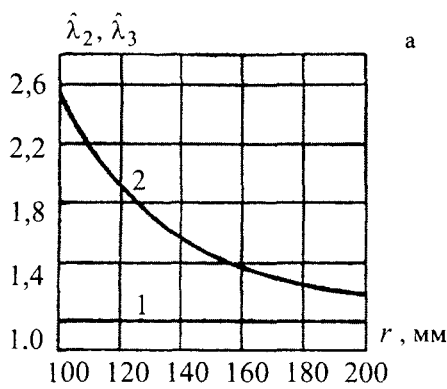


Рис. 5

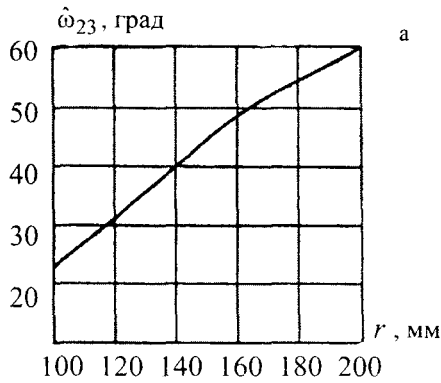
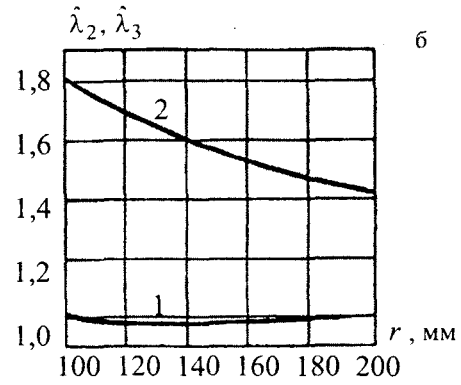


Рис. 6

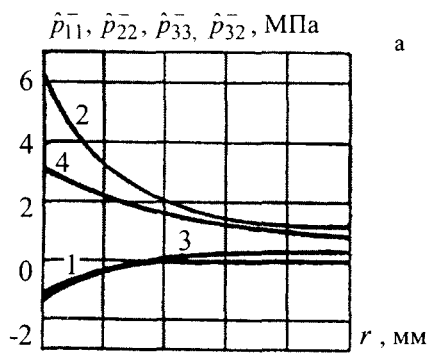
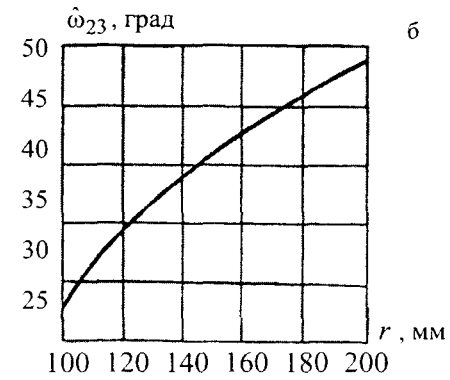


Рис. 7

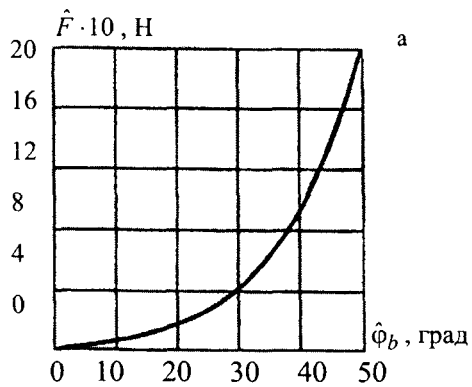
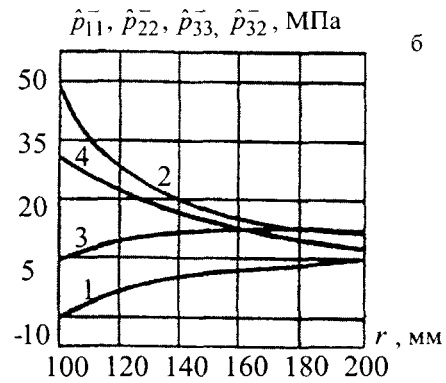
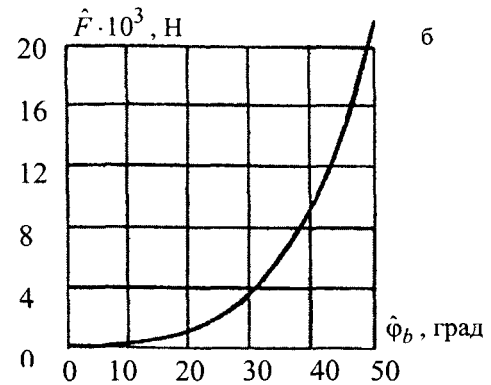


Рис. 8



На рис. 7 показаны изменения по толщине стенки цилиндров нормальных напряжений $\hat{p}_{11}^-$ (кривые 1) и $\hat{p}_{22}^-$ (кривые 2) в поперечных и меридиональных сечениях, нормальных и касательных напряжений в цилиндрических сечениях $\hat{p}_{33}^-$ (кривые 3) и $\hat{p}_{32}^-$ (кривые 4) деформированного цилиндра. Для однородного (а) цилиндра осевые $\hat{p}_{11}^-$ и радиальные $\hat{p}_{33}^-$ напряжения отличаются между собой незначительно, практически совпадая вблизи внутренней поверхности. Для армированного (б) цилиндра напряжения $\hat{p}_{11}^-$ и $\hat{p}_{33}^-$ существенно различаются. Осевое напряжение $\hat{p}_{11}^-$ в обоих случаях является сжимающим вблизи поверхности $r = a$ и растягивающим вблизи поверхности $r = b$. В случае армированного цилиндра радиальное напряжение $\hat{p}_{33}^-$ всюду растягивающее. Для обоих цилиндров $\hat{p}_{22}^-$ убывает, а $\hat{p}_{32}^-$ возрастает в направлении от внутренней поверхности к наружной. Значение касательного напряжения $\hat{p}_{32}^-$ на внутренней поверхности в 4 раза превосходит значение этого же напряжения на наружной поверхности для каждого из цилиндров в соответствии с отношением радиусов поверхностей $b/a = 2$. При этом касательное напряжение для армированного цилиндра примерно на порядок превосходит соответствующее напряжение для однородного цилиндра при одинаковом значении толщинной координаты r .

На рис. 8 показано изменение результирующей осевой силы в поперечных сечениях однородного (а) и армированного (б) цилиндров $\hat{F} = \int_a^b 2\pi r \hat{p}_{11}^- dr$ в зависимости от угла $\hat{\phi}_b$ поворота наружной поверхности цилиндра относительно внутренней. Осевая сила для обоих цилиндров является силой растяжения. В случае однородного цилиндра при $\hat{\phi}_b = 50^\circ$ она близка к значению $\hat{F} \approx 200$ Н. Столь сравнительно малое значение осевой силы является следствием слабой сжимаемости эластомерного материала матрицы ($\nu_m = 0,49$). При этом в интервале $0 \leq \hat{\phi}_b \leq 30^\circ$ осевая сила для однородного цилиндра практически прямо пропорциональна квадрату угла закручивания. Данное обстоятельство является обратным эффекту Пойтинга, имеющим место при стесненном торцевом кручении круглых однородных цилиндров, когда в поперечном сечении возникает осевая сила сжатия, пропорциональная квадрату угла закручивания [1]. В случае армированного цилиндра при $\hat{\phi}_b = 50^\circ$ осевая сила ($\hat{F} \approx 21800$ Н) на два порядка превосходит соответствующую силу для однородного цилиндра. Эффект, обратный эффекту Пойтинга, для армированного цилиндра не обнаруживается даже на очень малых интервалах угла закручивания ($0 \leq \hat{\phi}_b \leq 1^\circ$).

На рис. 9 даны зависимости моментов $\hat{T}_c = 2\pi r^2 \hat{p}_{32}^-$ закручивания цилиндров, приходящихся на единицу их длины, от угла $\hat{\phi}_b$ поворота наружной поверхности $r = b$ относительно внутренней $r = a$. Зависимости построены для интервала угла закручивания цилиндров $0 \leq \hat{\phi}_b \leq 50^\circ$. В случае однородного (а) цилиндра момент практически прямо пропорционален углу закручивания $\hat{\phi}_b$. В случае армированного (б) цилиндра кривая зависимости момента $\hat{T}_c$ от $\hat{\phi}_b$ имеет существенно нелинейный характер. Лишь на малом интервале $0 \leq \hat{\phi}_b \leq 1^\circ$ данная зависимость практически линейная. При $\hat{\phi}_b = 50^\circ$ удельный момент закручивания армированного цилиндра ($\hat{T}_c = 19,1 \cdot 10^5$ Н) на порядок превосходит удельный момент закручивания однородного цилиндра

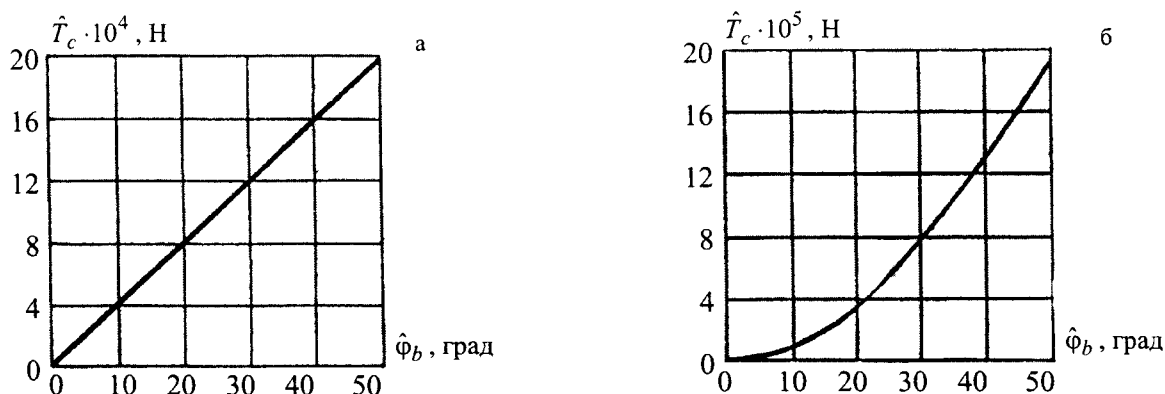


Рис. 9

($\hat{T}_c = 19,6 \cdot 10^4$ Н). Тогда как при $\hat{\phi}_b \leq 1^\circ$ моменты закручивания цилиндров являются практически одинаковыми

ввиду незначительных отклонений нитей от радиальных направлений и их незначительных усилий натяжения.

На рис. 10 отображается изменение усилия растяжения $\hat{T}_f$ нити радиальной системы армирования цилиндра вдоль ее осевой линии (при $\hat{\phi}_b = 50^\circ$). В соответствии с наибольшим удлинением нити $\hat{\lambda}_f (= \hat{\lambda}_3)$ максимальное значение силы растяжения $\hat{T}_f = 128$ Н достигается на внутренней поверхности цилиндра. Возле наружной поверхности сила растяжения нити принимает наименьшее значение $\hat{T}_f = 77$ Н.

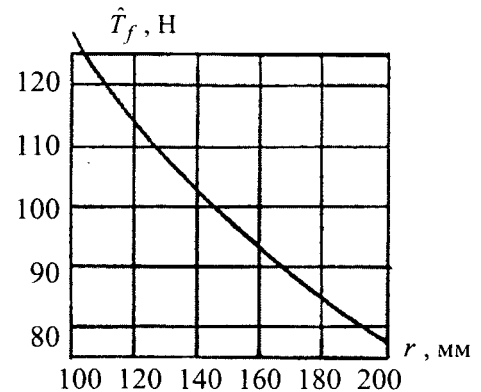


Рис. 10

Получены уравнения однородных и армированных нитями эластичных цилиндров при больших деформациях растяжения, раздувания и коаксиального кручения. На их базе проведено исследование жестко связанных с недеформируемыми обоймами цилиндров из резинового материала в отсутствии и при наличии радиальных нитей армирования. Устанавливается, что деформационная характеристика однородного цилиндра, определяющая момент закручивания в зависимости от угла взаимного поворота наружной и внутренней поверхностей практически линейна на рассмотренном интервале значений угла поворота. Деформационная характеристика цилиндра с радиальной схемой армирования является существенно нелинейной. Результирующие осевые силы в поперечных сечениях однородного цилиндра при больших углах закручивания малы по сравнению с соответствующими силами в поперечных сечениях цилиндра с радиальной системой армирования.

РЕЗЮМЕ

Отримані рівняння однорідних і армованих нитками еластичних циліндрів при великих деформаціях розтягання, роздування та коаксiального кручення. На їх базі проведено дослідження жорстко пов'язаних з обоймами, що не деформуються, циліндрів з гумового матеріалу у відсутності і за наявності радіальних ниток армування. Встановлюється, що деформаційна характеристика однорідного циліндра, що визначає момент закручування залежно від кута взаємного повороту зовнішньої і внутрішньої поверхонь практично лінійна на розглянутому інтервалі значень кута повороту. Деформаційна характеристика циліндра з радіальною схемою армування є істотно нелінійною. Результируючі осеві сили в поперечних перетинах однорідного циліндра при великих кутах закручування малі в порівнянні з відповідними силами в поперечних перетинах циліндра з радіальною системою армування.

SUMMARY

The equations of homogeneous and filament reinforced elastic cylinders under large tensile, blowing and coaxial torsion deformations are presented. On their base research of cylinders from rubber material is conducted of with holders which are not deformed, in absence and at presence of radial filaments of reinforcing. It is set that deformation description of homogeneous cylinder which determines the moment of twirling depending on the corner of mutual turn of external and internal surfaces are practically linear on the considered interval of values of corner of turn. Deformation description of cylinder with the radial chart of reinforcing is substantially nonlinear. Resulting axial forces in the transversal crossings of homogeneous cylinder at the large corners of twirling are small as compared to the proper forces in the transversal crossings of cylinder with the radial system of reinforcing.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
2. Лавендел Э.Э. Расчет резино-технических изделий. – М.: Машиностроение, 1976. – 232 с.
3. Ахундов В.М. Прикладная теория композитов с малыми наполнениями нитями при больших деформациях // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2001. – Т.7, №1. – С.3-15.
4. Введение в механику сплошных сред. Под ред. К.Ф. Черных. – Л.: Изд. Ленинград. Ун-та, 1984. – 280 с.
5. Черных К.Ф. Введение в анизотропную упругость. – М.: Наука, 1988. – 192 с.
6. Ахундов В.М. Метод расчета деформационных характеристик композитов с малыми наполнениями нитями при больших деформациях // Вісник Дніпропетровського Ун-ту. Серія Механіка. – 2001. – Вип. 5, Т. 1. – С. 151-160.
7. Ахундов В.М. Анализ эластомерных композитов на основе систем волокон. 1. Разработка методики расчета композитных материалов // Механика композитных материалов. – 1998. – Т. 34, № 6. – С. 733-745.
8. Ахундов В.М. Структурная теория эластомерных композитов на основе систем нитей. Инвариантное описание // Механика композитных материалов. – 1996. – Т. 32, №2. – С. 226-255.
9. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – М.: Мир, 1975. – 558 с.
10. Levinson M. and Burgess I.W. A comparison of some simple constitutive relations for slightly compressible rubber-like materials // Int. J. Mech. Sci. – 1971. – V. 13. – P. 563-572.
11. Blatz P.J. Application of finite elastic theory in predicting the performance of solid propellant rocket motors. – Calif. Inst. of Techn. GALCJISM, 1960. – P. 60-125.

Надійшла до редакції 20.05.2006 р.

УДК 533.6.013.42:531.36

О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ УПРУГИХ ПЛАСТИНОК, РАЗДЕЛЯЮЩИХ МНОГОСЛОЙНУЮ ЖИДКОСТЬ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СОСУДЕ С УПРУГИМ ДНОМ

Ю.Н.Кононов, В.П.Шевченко

В работах [1–4] исследованы собственные колебания упругих пластин и мембран, расположенных на свободной и внутренних поверхностях многослойной идеальной несжимаемой жидкости, заполняющей цилиндрический сосуд с абсолютно жестким дном. В настоящем сообщении обобщается ранее рассмотренная задача на случай плоского упругого дна. Задача о влиянии упругости дна на частоты колебаний жидкости была решена в работах [5–8]. С позиции функционального анализа эта задача была исследована в монографии [5] и статьях [6–7].

Постановка задачи. Рассмотрим механическую систему, состоящую из m идеальных несмещающихся жидкостей с плотностями ρ_i , частично заполняющих цилиндрический сосуд произвольного поперечного сечения S до глубин h_i . Цилиндрический сосуд состоит из абсолютно жесткой боковой поверхности и плоского упругого дна. На свободной поверхности верхней жидкости ($i = 1$) и на поверхностях раздела (внутренних поверхностях) многослойной жидкости находятся упругие пластинки или мембраны с растягивающими усилиями T_i в срединной плоскости. Пластинки и мембраны жестко закреплены по краю. Пластинки считаются изотропными и обладают изгибной жесткостью D_i . В дальнейшем при $D_i = 0$ под пластинкой будем подразумевать мембрану с растягивающими усилиями T_i . Движения жидкости и пластинок будем рассматривать в системе координат $Oxuz$, расположенной так, что плоскость Oxy находится на невозмущенной плоской свободной поверхности S_1 ($i = 1$), а ось Oz направлена противоположно вектору ускорения силы тяжести $\vec{g}$. Задачу будем решать в рамках линейной теории, полагая совместные колебания жидкостей и пластинок безотрывными, т.е. без кавитации, а движения жидкостей – потенциальными.

Метод решения. Собственные частоты и собственные формы колебаний рассматриваемой гидроупругой системы определяются из следующей краевой задачи:

$$\Delta \varphi_i = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial \nu} \right|_{\Sigma} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} = i \sigma w_i \quad \text{при } z = -H_i \quad (i = \overline{1, m});$$

$$\frac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \quad \text{при } z = -H_i \quad (i = \overline{2, m});$$

$$(D_i \Delta_2^2 - T_i \Delta_2 + g \Delta \rho_i - k_{0i} \sigma^2) w_i = i \sigma (\rho_{i-1} \varphi_{i-1} - \rho_i \varphi_i) \quad \text{при } z = -H_i \quad (i = \overline{1, m+1});$$

$$w_i|_{\gamma} = 0, \quad \left. \frac{\partial w_i}{\partial \nu} \right|_{\gamma} = 0;$$

$$w_i, \nabla w_i < \infty, \quad \int_S w_i ds = \int_S w_{i+1} ds \quad (i = \overline{1, m+1}).$$

Здесь потенциал скорости i -ой жидкости Φ_i и нормальный прогиб i -ой пластинки W_i представлены в виде $\Phi_i = e^{i\sigma t} \varphi_i$ и $W_i = e^{i\sigma t} w_i + W_{0i}$; W_{0i} – статический прогиб пластинок; Σ – абсолютно твердая боковая цилиндрическая поверхность; Δ_2 – двумерный оператор Лапласа; ρ_{0i} , δ_{0i} – соответственно плотность и толщина i -ой пластинки, $k_{0i} = \rho_{0i} \delta_{0i}$; γ – контур области S ; $\vec{\nu}$ – орт внешней нормали к контуру γ ; $\Delta \rho_i = \rho_i - \rho_{i-1}$, ($\rho_0 = 0$); $H_i = \sum_{k=1}^{i-1} h_k$, ($H_1 = 0$).

Существенную роль в дальнейшем исследовании будет играть знак входящего в (2) выражения $g \Delta \rho_i - k_{0i} \sigma^2$ или условия

$$\sigma^2 > \omega_{0i}^2 \text{ или } \sigma^2 < \omega_{0i}^2 \quad (\omega_{0i}^2 = g\Delta\rho_i/k_{0i}). \quad (4)$$

Легко заметить, что все эти трудности возникают из-за учета массовых характеристик пластинок. Если бы пластинки были безинерционными ($k_{0i} \equiv 0$), то эти трудности отсутствуют и задача упрощается.

Функции φ_i и w_i представим в виде [2-3]

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \sum_n \left(A_{in} e^{k_n z} + B_{in} e^{-k_n z} \right) \psi_n(x, y), \\ w_i &= A_i w_{i1}^0 + B_i w_{i2}^0 + \sum_n \tilde{C}_{in} \psi_n(x, y) = \sum_n \zeta_{in} \psi_n(x, y). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь w_{i1}^0 и w_{i2}^0 – два линейно независимых, ограниченных решения однородного уравнения (2);

$$\begin{aligned} \zeta_{in} &= \alpha_{in} A_i + \beta_{in} B_i + \tilde{C}_{in}, \\ \alpha_{in} &= \frac{1}{N_n^2} \int_S w_{i1}^0 \psi_n ds, \quad \beta_{in} = \frac{1}{N_n^2} \int_S w_{i2}^0 \psi_n ds, \quad N_n^2 = \int_S \psi_n^2 ds. \end{aligned} \quad (6)$$

В случае упругих мембран ($D_i \equiv 0$) второе граничное условие в (3) исключается из рассмотрения и в формулах (5)-(6) полагается $B_i \equiv 0$.

Подставив ряды (5) в (1)-(2) и, воспользовавшись ортогональностью функции ψ_n , получим

$$\begin{aligned} k_n \left(A_{in} e^{-k_n H_i} - B_{in} e^{k_n H_i} \right) &= i\sigma \zeta_{in} \quad (i = \overline{1, m+1}), \\ (A_{i-1n} - A_{in}) e^{-k_n H_i} - (B_{i-1n} - B_{in}) e^{k_n H_i} &= 0 \quad (i = \overline{2, m}); \end{aligned} \quad (7)$$

$$d_{in} \tilde{C}_{in} = -i\sigma \left[(\rho_i A_{in} - \rho_{i-1} A_{i-1n}) e^{-k_n H_i} + (\rho_i B_{in} - \rho_{i-1} B_{i-1n}) e^{k_n H_i} \right] \quad (i = \overline{1, m+1}), \quad (8)$$

где $d_{in} = (D_i k_n^2 + T_i) k_n^2 + \Delta\rho_i g - k_{0i} \sigma^2$.

Система уравнений (7) имеет решение

$$\begin{aligned} A_{in} &= i\sigma \frac{e^{k_n H_i}}{2k_n \operatorname{sh} \kappa_{in}} \left(e^{\kappa_{in}} \zeta_{in} - \zeta_{i+1n} \right), \\ B_{in} &= i\sigma \frac{e^{k_n H_i}}{2k_n \operatorname{sh} \kappa_{in}} \left(e^{-\kappa_{in}} \zeta_{in} - \zeta_{i+1n} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Подставив (9) в (8) с учетом (6), имеем

$$b_{i-1n} \tilde{C}_{i-1n} + \tilde{T}_{in} \tilde{C}_{in} + b_{in} \tilde{C}_{i+1n} = -b_{i-1n} \tilde{A}_{i-1n} + a_{in} \tilde{A}_{in} - b_{in} \tilde{A}_{i+1n} \quad (i = \overline{1, m+1}), \quad (10)$$

где $\tilde{A}_{in} = A_i \alpha_{in} + B_i \beta_{in}$.

Решение системы (10) можно записать в матричной форме

$$\tilde{C}_n = (D_n^{-1} T_n - E) \tilde{A}_n. \quad (11)$$

Здесь

$$D_n = \begin{pmatrix} \tilde{T}_{1n} & b_{1n} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b_{1n} & \tilde{T}_{2n} & b_{2n} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{m-2n} & \tilde{T}_{m-1n} & b_{m-1n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{m-1n} & \tilde{T}_{mn} \end{pmatrix}, \quad \tilde{C}_n = \begin{pmatrix} \tilde{C}_{1n} \\ \vdots \\ \tilde{C}_{mn} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_n = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{1n} \\ \vdots \\ \tilde{A}_{mn} \end{pmatrix};$$

$$\tilde{T}_{in} = T_{in} - a_{in}, \quad T_{in} = \frac{k_n d_{in}}{\sigma^2}, \quad b_{in} = \frac{\rho_i}{\operatorname{sh} \kappa_{in}}, \quad a_{in} = \rho_{i-1} \operatorname{cth} \kappa_{i-1, n} + \rho_i \operatorname{cth} \kappa_{in}, \quad \tilde{C}_{m+1, n} = 0;$$

T_n – диагональная матрица с элементами T_{in} ; E – единичная матрица. Так как D_n является симметрич-

ной линейчатой матрицей, то и обратная матрица D_n^{-1} также будет симметричной.

Из граничных условий жесткого закрепления пластинок (3) следует однородная система уравнений относительно неизвестных A_i и B_i ($i=\overline{1, m+1}$)

$$B_{i1}A_i + B_{i2}B_i + \sum_n B_n^* \tilde{C}_{in} = 0, \quad C_{i1}A_i + C_{i2}B_i = 0, \quad (12)$$

где $B_n^* = \psi_n|_\gamma$, $B_{ij} = w_{ij}^0|_\gamma$, $C_{ij} = \frac{\partial w_{ij}^0}{\partial \nu}|_\gamma$ ($j=1,2$).

С учетом (11) представим в матричном блочном виде частотное уравнение свободных колебаний гидроупругой системы: многослойная жидкость-упругие пластинки-упругое дно

$$\begin{vmatrix} B_1 + \sum_n B_n^* (D_n^{-1} T_n - E) \alpha_n & B_2 + \sum_n B_n^* (D_n^{-1} T_n - E) \beta_n \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$

Здесь B_1 , B_2 , C_1 , C_2 , α_n и β_n – диагональные матрицы $(m+1) \times (m+1)$ с элементами B_{i1} , B_{i2} , C_{i1} , C_{i2} , α_{in} , β_{in} ($i=\overline{1, m+1}$).

Если воспользоваться разложением функций w_{i1}^0 и w_{i2}^0 по собственным функциям ψ_n , то уравнение (13) примет вид

$$\begin{vmatrix} \sum_n B_n^* D_n^{-1} T_n \alpha_n & \sum_n B_n^* D_n^{-1} T_n \beta_n \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (14)$$

При абсолютно жестком днище ($T_{m+1} = \infty$ или $D_{m+1} = \infty$) уравнения (13)-(14) совпадают с [1-3].

В случае упругих мембран ($D_i \equiv 0$) уравнения (13)-(14) примут вид

$$\left| B_{11} + \sum_n B_n^* (D_n^{-1} T_n - E) \alpha_n \right| = 0 \quad (15)$$

$$\left| \sum_n B_n^* D_n^{-1} T_n \alpha_n \right| = 0. \quad (16)$$

Запишем уравнение (17) в развернутой форме [1]

$$\begin{vmatrix} \sum_n \frac{B_n^*}{\Delta_n} g_{11n} T_{1n} \alpha_{1n} & \cdots & \sum_n \frac{B_n^*}{\Delta_n} g_{1m+1n} T_{m+1n} \alpha_{m+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_n \frac{B_n^*}{\Delta_n} g_{m+11n} T_{1n} \alpha_{1n} & \cdots & \sum_n \frac{B_n^*}{\Delta_n} g_{m+1m+1n} T_{m+1n} \alpha_{m+1n} \end{vmatrix} = 0 \quad (17)$$

где $D_n^{-1} = \frac{1}{\Delta_n} \|g_{ijn}\|_{i,j=1}^{m+1}$, $\Delta_n = |D_n|$, $g_{ijn} = g_{jin}$.

Коэффициент α_{in} зависит от условий (4), что сильно усложняет исследования уравнения (17). Во многих задачах этот коэффициент можно представить в виде $\alpha_{in} = \tilde{\alpha}_{in} f_i(\sigma^2)$. В этом случае уравнение (17) существенно упрощается [2].

Если одна из глубин заполнения $h_k = \infty$ ($b_{kn} = g_{kk+1n} = g_{k+1kn} = 0$), то уравнение (17) распадается на два уравнения

$$\begin{vmatrix} \sum_n \frac{B_n^*}{\Delta_n} g_{11n} T_{1n} \alpha_{1n} & \cdots & \sum_n \frac{B_n^*}{\Delta_n} g_{1kn} T_{kn} \alpha_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_n \frac{B_n^*}{\Delta_n} g_{k1n} T_{1n} \alpha_{1n} & \cdots & \sum_n \frac{B_n^*}{\Delta_n} g_{kkn} T_{kn} \alpha_{kn} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \sum_n \frac{B_n^*}{\Delta_n} g_{k+1\ k+1n} T_{k+1n} \alpha_{k+1n} & \cdots & \sum_n \frac{B_n^*}{\Delta_n} g_{k+1\ m+1n} T_{m+1n} \alpha_{mn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_n \frac{B_n^*}{\Delta_n} g_{m+1\ k+1n} T_{k+1n} \alpha_{k+1n} & \cdots & \sum_n \frac{B_n^*}{\Delta_n} g_{m+1\ m+1n} T_{m+1n} \alpha_{m+1n} \end{vmatrix} = 0, \quad (18)$$

где $D_{kn}^{-1} = \frac{1}{\Delta_{kn}} \|g_{ijn}\|_{i,j=1}^k$, $D_{k+1n}^{-1} = \frac{1}{\Delta_{k+1n}} \|g_{ijn}\|_{i,j=k+1}^{m+1}$, $\Delta_{kn} = |D_{kn}|$, а если же все $h_i = \infty$, то распадается на $m+1$ уравнение

$$\sum_n \frac{B_n^*}{\Delta_n} g_{iin} T_{in} \alpha_{in} = 0 \quad (i = \overline{1, m+1}). \quad (19)$$

Здесь $g_{iin} = 1$, $\Delta_n = \tilde{T}_{in}$.

Аналогичная картина наблюдается и для уравнений (13)–(14). Так, например, если все $h_i = \infty$ ($g_{ijn} = 0$ ($i \neq j$)), то эти уравнения имеют вид

$$\sum_n \frac{B_n^*}{\Delta_n} (C_{i2} \alpha_{in} - C_{i1} \beta_{in}) g_{iin} T_{in} = 0 \quad (i = \overline{1, m+1}); \quad (20)$$

$$\sum_n \frac{B_n^*}{\Delta_n} g_{iin} T_{in} \alpha_{in} = 0 \quad (i = \overline{1, m+1}). \quad (21)$$

Таким образом, если k -ый слой жидкости имеет бесконечную глубину, то частотные уравнения (13)–(14) и (15)–(16) распадутся на два уравнения. Первое уравнение описывает собственные частоты колебаний k -слойной жидкости, разделенной упругими пластинками с абсолютно твердым дном, а второе – $m-k$ -слойной жидкости с абсолютно твердой “крышкой”. Если же все $h_i = \infty$, то эти уравнения распадутся на m уравнений.

Следует отметить, что учет инерционности пластинок или мембран ($k_{0i} \neq 0$) приведет к зависимости коэффициентов $B_{ij}, C_{ij}, \alpha_{in}, \beta_{in}$ от неизвестной частоты σ^2 , а при $k_{0i} = 0$ эта зависимость отсутствует. Таким образом, наличие ненулевой плотности пластинок вносит принципиальное влияние на свойства спектра частот рассматриваемой гидроупругой системы.

Рассмотрим некоторые частные случаи уравнений (13)–(16).

1. Однородная жидкость ($m=1$) и $T_1 = \infty$. В этом случае уравнения (13)–(14) запишутся следующим образом

$$C_{22} B_{21} - C_{21} B_{22} + \sum_n B_n^* \left(\frac{g_{11n} T_{2n}}{\Delta_n} - 1 \right) (C_{22} \alpha_{2n} - C_{21} \beta_{2n}) = 0 \quad (22)$$

или

$$\sum_n \frac{B_n^*}{\Delta_n} (C_{22} \alpha_{2n} - C_{21} \beta_{2n}) g_{11n} T_{2n} = 0, \quad (23)$$

где $g_{11n} = 1$, $\Delta_n = \tilde{T}_{2n}$, $\rho_1 = \rho$.

В первом приближении ($n = 1$) множество корней уравнения (23) содержит корень

$$\sigma^2 = \frac{(D_2 k_1^2 + T_2) k_1^2 - g \rho}{k_{02}}.$$

Из последнего соотношения следует, что для положительности σ^2 необходимо

$$(D_2 k_1^2 + T_2) k_1^2 > g \rho. \quad (24)$$

Условие (24) не зависит от глубины заполнения жидкости h и массовых характеристик упругого дна. Таким образом, при невыполнении этого условия может произойти потеря устойчивости плоской формы равновесия упругого дна.

2. Двухслойная жидкость ($m=2$), $T_1 = \infty$ и $T_2 \equiv 0$, $D_2 \equiv 0$. В этом случае уравнения (14) имеет вид

$$\sum_n \frac{B_n^*}{\Delta_n} (C_{22} \alpha_{2n} - C_{21} \beta_{2n}) (\Delta_n - \sigma^2 \tilde{\Omega}_{2n}) = 0. \quad (25)$$

Здесь

$$\Delta_n = \frac{1}{a_{2n}^* a_n} \left\{ \left[(a_{2n}^* + k_{03} k_n) \sigma^2 - k_n (D_3 k_n^2 + T_3) k_n^2 - g \rho_2 \right] \left[a_n \sigma^2 - k_n g \Delta \rho \right] - \frac{2 a_{2n}^*}{\operatorname{sh} 2 \kappa_{2n}} \right\},$$

$$\tilde{\Omega}_{2n} = \left(1 - \frac{2 \rho_2}{a_n \operatorname{sh} 2 \kappa_{2n}} \right) \sigma^2 - \frac{g \Delta \rho k_n}{a_n}, \quad a_n = \rho_1 \operatorname{cth} \kappa_{1n} + \rho_2 \operatorname{cth} \kappa_{2n},$$

$$a_{2n}^* = \rho_2 \operatorname{cth} \kappa_{2n}, \quad \Delta \rho = \rho_2 - \rho_1.$$

В первом приближении ($n = 1$) множество корней уравнения (25) содержит корни

$$\sigma_1^2 = \frac{(D_3 k_1^2 + T_3) k_1^2 - g \rho_2}{k_{03}}, \quad \sigma_2^2 = \frac{g \Delta \rho k_1}{a_1}. \quad (26)$$

Из соотношений (26) следует, что для положительности σ^2 необходимо потребовать, чтобы

$$(D_3 k_1^2 + T_3) k_1^2 > g \rho_2 \quad \text{и} \quad \rho_2 > \rho_1. \quad (27)$$

Первое условие (27) не зависит от глубин заполнения жидкостей h_1 , h_2 и массовых характеристик упругого дна. Второе условие требует, чтобы более тяжелая жидкость находилась ниже менее тяжелой. При невыполнении этих условий может произойти потеря устойчивости плоской формы равновесия упругого дна.

Условия устойчивости (24) и (27) могут быть уточнены за счет учета большего числа членов в рядах (23) и (25) или из условий положительной определенности потенциальной энергии системы [4].

В случае прямого кругового цилиндров радиуса a условие (24) с учетом четырех членов при $D_2 = 0$ имеет вид

$$T_2 > 617.970 \cdot 10^{-4} g \rho a^2, \quad (28)$$

где $k_1 a = 1.8412$, $J_1'(\mu) = 0$, $\mu = ka$.

Следует отметить, что условия, аналогичные (24) и (27)-(28) можно получить из решения статической задачи для W_{0i} [9]. Так, например, для прямого кругового цилиндра радиуса a при $T_2 = 0$ условие, аналогичное (24) будет следовать из решения уравнения

$$J_1(\mu) J_1'(\mu) - J_1'(\mu) I_1(\mu) = 0, \quad (29)$$

где $\mu = \sqrt[4]{g \rho / D_2 a}$.

Обозначая через $\mu_1 = 4.6109$ первый положительный корень уравнения (29), получим в статической постановке условие устойчивости плоского равновесного положения упругого дна в виде упругой пластинки

$$D_2 > 221.237 \cdot 10^{-5} g \rho a^4. \quad (30)$$

Для упругого дна в виде мембраны ($D_2 \equiv 0$, $T_2 \neq 0$) уравнение (29) имеет вид $J_1(\mu) = 0$

($\mu = \sqrt{g\rho/T_2 a}$, $\mu_1 = 3.8317$), а условие устойчивости (24) --

$$T_2 > 681.107 \cdot 10^{-4} g \rho a^2. \quad (31)$$

Из соотношений (28) и (31) следует удовлетворительное совпадение условий устойчивости, полученных из динамического и статического подходов. Таким образом, в первом приближении критические значения изгибной жесткости и натяжения могут быть определены из статического анализа задачи.

РЕЗЮМЕ

Отримано рівняння власних частот коливань багат шарової рідини розділеної, пружними пластинками. Багат шарова рідина знаходиться в циліндричній посудині довільного поперечного перерізу з абсолютно твердою бічною стінкою і плоскою пружною основою. Умови стійкості стану рівноваги плоскої пружної основи отримано на підставі динамічного і статичного підходів.

SUMMARY

The equation of fundamental frequencies of oscillations of the multilayer liquid divided elastic plates is obtained. The multilayer liquid is in a cylindrical vessel of an arbitrary cross-section with absolutely rigid lateral area and a flat elastic bottom. Conditions of stability of position of balance of the flat elastic basis are received on the basis of dynamic and static approaches.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кононов Ю. Н., Шевченко В. П. Свободные колебания многослойной стратифицированной жидкости, разделенной упругими мембранами // Теорет. и прикладная механика. -- 1999. -- Вып.29. -- С.151-163.
2. Кононов Ю. Н., Шевченко В. П. Свободные колебания двухслойной жидкости с упругими инерционными мембранами на свободной и внутренней поверхностях // Теорет. и прикладная механика. -- 2001. -- Вып. 32. -- С. 158-163.
3. Кононов Ю. Н. Колебания пластин, разделяющих многослойную жидкость // Тр. III Всеросс. конфер. по теории упругости с международ. участием. Ростов-на-Дону-Азов, 13-16 октября 2003. -- Ростов-на-Дону: Новая книга, 2004. -- С. 227-229.
4. Кононов Ю. Н., Шевченко В. П. Об устойчивости упругих пластинок, разделяющих многослойную жидкость // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. -- 2005. -- Вип.1. -- Ч. 1. -- С.127-130.
5. Колпачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуи Кан Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. -- М.: Наука, 1989. -- 416 с.
6. Андронов А.В. О малых колебаниях идеальной жидкости в сосуде с упругими днищами / Симфер. ун-т. -- Симферополь, 1983. -- 26 с. -- Рукопись в УкрНИИНТИ 30.12.83, № 1478.
7. Нго Зуи Кан. О движении несмешивающихся жидкостей в сосуде с плоским упругим днищем // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. -- 1979. -- № 5. -- С. 143-154.
8. Петренко М.П. Собственные колебания жидкости со свободной поверхностью и упругого днища цилиндрической полости // Прикладная механика. -- 1969. -- Т.5, № 6. -- С. 44-50.
9. Самодаев В.Е. Влияние перегрузки на частоты собственных колебаний жидкости в жестком цилиндрическом баке с мембраной на свободной поверхности // Тр. семинара «Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью». -- Томск, 1972. -- С. 180-186.

Надійшла до редакції 16.03.2006 р.

ВЛИЯНИЕ ПЕРЕГРУЗКИ НА СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОЛЬЦЕВОЙ МЕМБРАНЫ, РАСПОЛОЖЕННОЙ НА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

В.П.Шевченко, А.Ю.Карнаух

В работе [1] исследовано влияние перегрузки на собственные частоты колебаний упругой безинерционной мембраны, расположенной на свободной поверхности идеальной однородной жидкости, находящейся в прямом круговом цилиндре. Статья [2] обобщает эту задачу на случай двухслойной идеальной жидкости с упругими мембранами на свободной и внутренней поверхностях, а [3] – на случай многослойной идеальной жидкости, разделенной упругими безинерционными мембранами. Инертность мембран учтена в работе [4]. Плоская задача о свободных колебаниях упругой мембраной, расположенной на свободной поверхности идеальной однородной жидкости, находящейся в прямоугольном канале, исследована в работе [5]. Во всех рассмотренных работах поверхность мембраны полагается односвязной. Многосвязные области существенно усложняют рассмотренные выше задачи, т.к. требуют удовлетворения дополнительных граничных условий.

В настоящей работе исследованы свободные колебания двухсвязной кольцевой безинерционной мембраны, расположенной на свободной поверхности однородной жидкости, находящейся в коаксиальном цилиндрическом сосуде. Оценено влияние перегрузки на первую собственную частоту в зависимости от геометрии полости, натяжения мембраны и глубины заполнения жидкостью. Показано, что критические значения величины натяжения мембраны и отрицательной перегрузки с точностью до трех значащих цифр могут быть определены из статической задачи.

Рассмотрим коаксиальный цилиндрический сосуд внешнего радиуса a и внутреннего b , заполненный до глубины h идеальной однородной несжимаемой жидкостью. На свободной поверхности жидкости находится упругая кольцевая мембрана с погонным усилием T . Мембрана жестко закреплена по внешнему и внутреннему контуру и считается невесомой. Движение жидкости и мембраны будем рассматривать в системе координат $Oxyz$, расположенной так, что плоскость Oxy совпадает со свободной поверхностью жидкости в не возмущенном положении, а ось Oz параллельна образующим цилиндра и направлена противоположно вектору ускорения силы тяжести $\vec{g}$. Задачу будем рассматривать в рамках линейной теории, считая движение жидкости потенциальным.

Уравнения движения рассматриваемой механической системы имеют вид [1]

$$\Delta\Phi = 0; \quad \left. \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right|_{r=a} = 0, \quad \left. \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right|_{z=-h} = 0; \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{\partial W}{\partial t}; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} = \frac{\rho}{T} \left(\left. \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right|_{z=0} + gW \right); \quad (2)$$

$$W|_{r=a} = 0. \quad (3)$$

Здесь Φ – потенциал скорости жидкости; ρ – плотность жидкости; W – прогиб мембраны.

Ограничиваясь первой модой по угловой координате, собственные колебания задачи (1)–(3) будем искать в виде

$$\Phi(r, \theta, z, t) = \sigma \cos \sigma t \cos \theta \varphi(r, z) \\ W(r, \theta, t) = \sin \sigma t \cos w(r). \quad (4)$$

Функцию $\varphi(r, z)$ предоставим следующим образом

$$\varphi(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n Z_n(z) R_1(k_n r) \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} Z_n(z) &= \frac{\operatorname{ch} k_n(z+h)}{\operatorname{ch} \kappa_n}, \quad \kappa_n = k_n h, \quad k_n a = \mu_n, \quad \varepsilon = \frac{b}{a}, \\ R_1(k_n r) &= \frac{[J_1(k_n r) + \gamma_n Y_1(k_n r)]}{J_1(k_n a) + \gamma_n Y_1(k_n a)}, \quad \gamma_n = -\frac{J_1'(\mu_n)}{Y_1'(\mu_n)} = -\frac{J_1'(\varepsilon \mu_n)}{Y_1'(\varepsilon \mu_n)}, \\ J_1'(\mu) Y_1'(\varepsilon \mu) - J_1'(\varepsilon \mu) Y_1'(\mu) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Собственные функции $R_1(k_n r)$ образуют на $[b, a]$ полную и ортогональную с весом r систему функций, а собственные числа k_n находятся из трансцендентного уравнения (6) [8]. При $\varepsilon = 0$ ($\gamma_n = 0$) уравнение (6) имеет вид $J_1'(\mu) = 0$.

Подставив (4), (5) в (2), получим

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} - \frac{1}{r^2} w = \frac{\rho}{T} \sum_{n=1}^{\infty} (\omega_n^2 - \sigma^2) a_n R_1(k_n r), \quad (7)$$

где $\omega_n^2 = g k_n \operatorname{th} \kappa_n$.

Общее решение уравнение (7) будем искать в виде

$$w = Ar + \frac{B}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho}{T k_n^2} (\sigma^2 - \omega_n^2) a_n R_1(k_n r). \quad (8)$$

Разложим функции r и $\frac{1}{r}$ в ряд по собственным функциям $R(k_n r)$

$$r = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n R_1(k_n r), \quad \frac{1}{r} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n R_1(k_n r). \quad (9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{a^3}{\mu_n^2} \frac{1 - \varepsilon r_n}{N_n^2}, \quad \beta_n = -\frac{a}{\mu_n^2} \frac{1 - \frac{1}{\varepsilon} r_n}{N_n^2}; \\ N_n^2 &= \frac{a^2}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{\mu_n^2} \right) - \left(\varepsilon^2 - \frac{1}{\mu_n^2} \right) r_n^2 \right], \quad r_n = R_1(\mu_n \varepsilon). \end{aligned} \quad (10)$$

Подставив (4) в (2) с учетом (5), (8) и (9), найдем константу a_n

$$a_n = \frac{A \alpha_n + B \beta_n}{k_n \operatorname{th} \kappa_n - \frac{\rho}{T k_n^2} (\sigma^2 - \omega_n^2)}.$$

Воспользовавшись условием жесткого закрепления мембраны (3), получим однородную систему для определения неизвестных констант A и B

$$\begin{aligned} A \left(a - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n \right) + B \left(\frac{1}{a} - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n f_n \right) &= 0, \\ A \left(b - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n r_n \right) + B \left(\frac{1}{b} - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n f_n r_n \right) &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$f_n(\sigma^2) = \frac{(\sigma^2 - \omega_n^2) \frac{\rho}{T k_n^2}}{k_n \operatorname{th} \kappa_n - \frac{\rho}{T k_n^2} (\sigma^2 - \omega_n^2)}.$$

Из равенства нулю определителя системы (11) следует частное уравнение совместных колебаний упругой мембраны и жидкости

$$\left(a - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n\right) \left(\frac{1}{b} - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n f_n r_n\right) - \left(\frac{1}{a} - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n f_n\right) \left(b - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n r_n\right) = 0, \quad (12)$$

Перепишем частотное уравнение (12) в безразмерных переменных

$$\Omega^2 = \frac{\omega^2 a}{g_0}, \quad \beta = \frac{T}{\rho g_0 a^2}, \quad g = g_0 n_x, \quad \tilde{\alpha}_n = \frac{\alpha_n}{a},$$

$$f_n(\Omega^2) = \frac{\Omega^2 - n_x \mu_n \operatorname{th} \kappa_n}{\Omega^2 - \mu_n (n_x + \beta \mu_n^2) \operatorname{th} \kappa_n}, \quad \tilde{\beta}_n = \beta_n a.$$

$$\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_n f_n\right) \left[\frac{1}{\varepsilon} - \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\beta}_n f_n r_n\right] - \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\beta}_n f_n\right) \left[\varepsilon - \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_n f_n r_n\right] = 0. \quad (13)$$

После несложных преобразований, основанных на свойствах разложений (9), уравнение (13) можно переписать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_n \tilde{f}_n \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\beta}_n \tilde{f}_n r_n - \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\beta}_n \tilde{f}_n \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_n \tilde{f}_n r_n = 0, \quad (14)$$

где

$$\tilde{f}_n(\Omega^2) = \frac{\mu_n^3 \operatorname{th} \kappa_n}{\Omega^2 - \mu_n (n_x + \beta \mu_n^2) \operatorname{th} \kappa_n}.$$

При $\varepsilon = 0$ уравнения (13) и (14) запишутся следующим образом

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_n \tilde{f}_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_n \tilde{f}_n = 0$$

и совпадают с уравнениями [1].

Были проведены численные исследования зависимости первой безразмерной собственной частоты Ω от перегрузки n_x ($-2 < n_x < 8$) для значений β , равных 0; 0,25; 0,5 и значений ε , равных 0 и 0,8.

По итогам проведенных вычислений можем сделать вывод, что при отрицательных перегрузках ($n_x < 0$) происходит существенное уменьшение частот колебаний гидроупругой системы мембрана-жидкость и при некоторых значениях перегрузки частота колебаний системы обращается в нуль, что соответствует потере устойчивости плоского равновесного положения мембраны.

По аналогии с работой [1] получим из статического анализа критические соотношения между натяжением β и перегрузкой $|n_x|$. Для этого в статической постановке рассмотрим уравнения (1)–(3). С учетом соотношений (4), (2)–(3) будем иметь

$$AJ_1(k) + BY_1(k) = 0, \quad AJ_1(k\varepsilon) + BY_1(k\varepsilon) = 0. \quad (15)$$

Здесь $k = \sqrt{|n_x|/\beta}$.

Из равенства нулю определителя системы (15) следует уравнение для определения критических значений натяжения β и перегрузки $|n_x|$

$$J_1(k) Y_1(k\varepsilon) - Y_1(k) J_1(k\varepsilon) = 0. \quad (16)$$

Обозначая через k_1 первый положительный корень уравнения (15), запишем условие устойчивости плоского равновесного положения упругой мембраны при отрицательной перегрузки

$$\beta > \beta_{кр}, \quad \beta_{кр} = k_1^2 / |n_x|. \quad (17)$$

Полученные из соотношений (17) критические значения натяжения β и перегрузки $|n_x|$ с точностью до трех значащих цифр совпадают с точками пересечения кривых ($\beta = 0$, $\beta = 0.25$, $\beta = 0.5$) с осью абсцисс. Хорошее совпадение значений критических нагрузок из динамического и статического подходов возможно связано с отсутствием массовых характеристик мембраны.

На основании проведенных исследований следует, что с увеличением ε от 0 до 0.1 собственные частоты возрастают, а от 0.1 до 0.8 – убывают. При $0.6 < \varepsilon < 1$ наблюдается слабое влияние перегрузки и натяжения мембраны на собственные частоты. При определенных значениях отрицательной перегрузке происходит потеря устойчивости плоского равновесного положения мембраны. Статический подход с достаточной для практики точностью дает значение критического натяжения β и перегрузки $|n_x|$. Отмечается слабая зависимость корней уравнений (13)–(14) от глубины заполнения.

РЕЗЮМЕ

Оцінено вплив перевантаження на першу власну частоту в залежності від геометрії порожнини, натягу кільцевої мембрани і глибини заповнення рідини. Показано, що критичні значення натягу кільцевої мембрани і перевантаження можуть бути визначені зі статичної задачі.

SUMMARY

Influence of an overload on first own frequency is appreciated depending on geometry of a cavity, a tension of a ring membrane and depth of filling of a liquid. It is shown, that critical values of size of a tension of a ring membrane and an overload can be determined from a static problem.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Самодаев В. Е. Влияние перегрузки на частоты собственных колебаний жидкости в жестком цилиндрическом баке с мембраной на свободной поверхности // Тр. семинара «Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью». – Томск, 1972. – С. 180–186.
2. Кононов Ю. Н., Шевченко В. П. Свободные колебания стратифицированной жидкости с упругой мембраной на свободной и внутренней поверхностях жидкости // Современные проблемы концентрации напряжений: Тр. междунар. конф. Донецк, 21-25 июня 1998 г. – Донецк, 1998. – С. 125–131.
3. Кононов Ю. Н., Шевченко В. П. Свободные колебания многослойной стратифицированной жидкости, разделенной упругими мембранами // Теорет. и прикладная механика. – 1999. – Вып. 29. – С. 151–163.
4. Кононов Ю. Н., Шевченко В. П. Свободные колебания двухслойной жидкости с упругими инерционными мембранами на свободной и внутренней поверхностях // Теорет. и прикладная механика. – 2001. – Вып. 32. – С. 158–163.
5. Троценко В. А. Свободные колебания жидкости в прямоугольном канале с упругой мембраной на свободной поверхности // Прикладная механика. – 1995. – Т. 31. – № 8. – С. 74–81.
6. Моисеев Н. Н., Петров А. А. Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. – М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1966. – 270 с.

Надійшла до редакції 19.03.06 р.

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ КОРПУСА ПОРОХОВОЙ ГИДРОПУШКИ ПРИ ВЫСТРЕЛЕ

О.А.Русанова, А.Н.Семко

Водоструйные технологии могут применяться в различных областях промышленности, имеют большие перспективы. Эти системы могут быть компактных размеров, безопасны в использовании и требуют меньше энергии, чем соответствующие системы непрерывных струй. Однако, крайне необходима дальнейшая работа [1, 2], направленная на повышение надежности устройств, оптимизацию сопла и получение новых знаний, которые приведут к пониманию механизма поведения материала под действием импульсной струей жидкости.

Одной из причин, по которой гидроимпульсные технологии не получили широкого распространения, является низкая надежность корпуса гидроустройства и низкий срок эксплуатации [1, 3]. Это связано с тем, что эти устройства работают в предельном режиме при ультравысоких давлениях (1 ГПа – 3 ГПа), которые вызывают напряжения, находящиеся на пределе прочности материала конструкции.

Настоящая работа посвящена расчету напряженно-деформируемого состояния корпуса пороховой гидропушки с учетом нестационарной кавитации, импульсного характера нагружения, динамики процесса и геометрии устройства. Результаты работы позволят оптимизировать массогабаритные и тактические характеристики гидроустройства.

Устройство, принцип работы и математическая модель пороховой гидропушки. В работе [4] подробно описаны несколько конструкций гидропушек: гидропушка с поршнем безударного и ударного действия, гидропушка с уступом во входном сечении в сопло, гидропушка с пороховым приводом. Теоретически внутренняя баллистика гидропушки исследовалась разными авторами в разных постановках [5 – 8]. Ряд исследований [9] показали преимущество пороховой гидропушки по сравнению с гидропушками с другим источником энергии, так как она компактна, мобильна, имеет большую удельную мощность, не имеет подвижных частей, что повышает ее надежность. Использование пороха является небезопасным с экологической точки зрения, что является недостатком данного устройства. Указанные исследования привели к созданию конструкции, чертеж сопловой части которой приведен на рис. 1 [9].

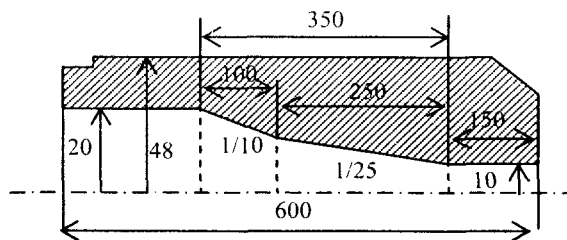


Рис. 1

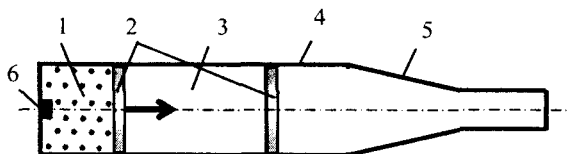


Рис. 2

Пороховая гидропушка (рис. 2) состоит из камеры сгорания 1, цилиндрического ствола 4, в котором между пыжами 2 находится водяной заряд 3, сужающегося сопла 5, которое заканчивается цилиндрическим коллиматором. Процессы в такой гидропушке начинаются с момента воспламенения пороха с помощью капсюля 6. Пороховые газы приводят в движение водяной заряд и разгоняют его в стволе.

При втекании в сужающееся сопло вода продолжает ускоряться, увеличивая скорость многократно, и истекает наружу с большой скоростью. Обычно сопло заканчивается коллиматором – цилиндрическим участком, который служит для стабилизации струи и выравнивания скорости по ее длине.

Осесимметричное напряженно-деформируемое состояние корпуса описывается следующими уравнениями в лагранжевой форме

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\sigma_{xy}}{y} = \rho \ddot{x}, \quad \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\sigma_{yy} - \sigma_{\theta\theta}}{y} = \rho \ddot{y},$$

$$\sigma_{xx} = -p + s_{xx}, \quad \sigma_{yy} = -p + s_{yy}, \quad \sigma_{\theta\theta} = -p + s_{\theta\theta},$$

$$\frac{\dot{V}}{V} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\dot{y}}{y}, \quad \dot{E} = -p \dot{V} + V (s_{xx} \dot{\epsilon}_{xx} + s_{yy} \dot{\epsilon}_{yy} + s_{\theta\theta} \dot{\epsilon}_{\theta\theta} + \sigma_{xy} \dot{\epsilon}_{xy}),$$

$$\dot{s}_{xx} = 2\mu \left(\dot{\varepsilon}_1 - \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V} \right) + \delta_{xx}, \quad \dot{s}_2 = 2\mu \left(\dot{\varepsilon}_2 - \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V} \right) + \delta_{yy}, \quad \dot{s}_3 = 2\mu \left(\dot{\varepsilon}_3 - \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V} \right),$$

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x}, \quad \dot{\varepsilon}_{yy} = \frac{\partial \dot{y}}{\partial y}, \quad \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = \frac{\dot{\theta}}{\theta}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial x}$$

где x, y – пространственные координаты, ρ – плотность, V – относительный объем, p – гидростатическое давление, E – внутренняя энергия на единицу объема, $\sigma_{ii}, s_{ii}, \varepsilon_{ii}, i = x, y, \theta$ – соответственно полные напряжения, компоненты девиатора напряжений и деформации, σ_{xy} – касательное напряжение, δ – поправка на поворот. Точка над величинами, входящими в уравнение, означает производную по времени вдоль траектории частицы. Данная система уравнений замыкается уравнением состояния в виде

$$p = nB \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) + e(n-1)\rho,$$

где B – постоянная Тэга, n – показатель адиабаты, ρ_0 – плотность при нормальных условиях.

Будем считать, что при выполнении неравенства Мизеса, материал переходит в пластическую стадию, а эквивалентные напряжения становятся равными пределу текучести и остаются постоянными при выполнении указанного условия

$$\sigma_{eq} = \sqrt{1/2 \left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2 \right)} \leq [\sigma].$$

Ствол рассматриваемой гидропушки [9] изготовлен из стали марки 30ХГСА, термически обработанной (закалка 880 °С, отпуск 300 °С), имеет предел текучести $[\sigma] = 1520$ МПа.

Жидкость считается идеальной и сжимаемой, вязкостью, теплопроводностью и радиальным течением пренебрегается (квазиодномерное приближение) [4]. Влияние пыжей не учитывается. Граница раздела «пороховые газы – вода» считается плоской в течение всего выстрела. За начальный принимается момент воспламенения пороха, начало координат располагается у входа в сопло, ось x направлена вдоль оси установки.

В принятой постановке квазиодномерное движение воды в гидропушке описывалось системой уравнений нестационарной газовой динамики [5]

$$\frac{\partial \rho F}{\partial t} + \frac{\partial \rho v F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho v F}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v^2 + p) F}{\partial x} = p \frac{dF}{dx}, \quad p = B \left[(\rho/\rho_0)^n - 1 \right]$$

с начальными и граничными условиями

$$v(0, x) = 0, \quad p(0, x) = 0, \quad \rho(0, x) = 0 \quad x_{g0} \leq x \leq x_{f0},$$

$$p(t, x_f) = 0, \quad p(t, x_g) = p_g, \quad v(t, x_g) = v_g.$$

Здесь t – время, x – координата, v – скорость, F – площадь поперечного сечения сопла, p и ρ – давление и плотность, $B = 304,5$ МПа, $n = 7,15$, $\rho_0 = 1$ г/см³ – постоянные в уравнении состояния воды в форме Тэга [5], x_{g0} , x_{f0} и x_g , x_f – начальные и текущие координаты контактной и свободной поверхностей, p_g и v_g – давление и скорость пороховых газов на контактной поверхности.

Горение пороха рассматривалось в квазистационарном приближении при допущениях, характерных для задач внутренней баллистики в артиллерии [10]: порох воспламеняется мгновенно и горит адиабатически параллельными слоями по геометрическому закону; химический состав продуктов сгорания постоянный, их параметры одинаковые по объему и связаны упрощенным уравнением Ван-дер-Ваальса, учитывающим только собственный объем молекул. Система уравнений и начальные условия, описывающие квазистационарное горение пороха, имеют вид

$$\frac{dz}{dt} = \frac{u_1 p_g}{h_1}, \quad Q_g = m_{p0} \chi_1 \sigma(z) \frac{u_1 p_g}{h_1}, \quad \frac{1}{k-1} \frac{d(p_g V_g)}{dt} + p_g F u_g = q Q_g,$$

$$dV_g/dt = Q_g (1/\rho_p - \alpha) + v_g F, \quad v_g = dx_g/dt, \quad z = 0, \quad V_g = V_{g0}, \quad p_g = p_{g0}, \quad x_g = x_{g0}.$$

Здесь h_1 – половина толщины порохового зерна; z – толщина сгоревшего слоя, отнесенная к h_1 ; u_1 – постоянная скорости горения; p_g – давление пороховых газов; Q_g – скорость прихода пороховых газов; χ_1 и $\sigma(z)$ – коэффициент и функция, зависящие от формы порохового зерна; например, для зерна трубчатой формы $\chi_1 = 1 + h_1/c$, $\sigma(z) = 1 - 2h_1z/(c + h_1)$; c – половина длины порохового зерна; α – коволюм (поправка на собственный объем молекул); m_{p0} – начальная масса пороха; k – показатель адиабаты пороховых газов; q и ρ_p – удельная теплота сгорания и плотность пороха; V_g – объем пороховых газов; V_{g0} , p_{g0} – параметры газа после срабатывания воспламенителя.

Анализ результатов численного расчета. Уравнения, описывающие движение жидкости и горение пороха, решались численно методом Годунова [11], по алгоритмам описанным в [4, 9, 12, 13, 14]. Течение рассчитывалось с момента воспламенения пороха до окончания истечения струи жидкости. Расчеты проводились на регулярной подвижной сетке, которая опиралась на контактную и свободную поверхности с координатами x_g и x_f . Уравнения (1) – (5) решались численно, методом VIS [15].

На рис. 3 приведены зависимости скорости истечения струи и давления в разных сечениях от времени для полевой гидропушки (рис. 1) ствол, которой в начальный момент времени был полностью заполнен водой. Масса водяного снаряда 500 г, было использовано 120 г пороха марки «Крук», объем камеры сгорания 130 см³, начальное давление пороховых газов 5 МПа, прорывное давление пороховых газов 50 МПа, показатель адиабаты продуктов сгорания 1,257, коволюм пороховых газов 0,00121 м³/кг. Рассматриваемый режим является предельным для данной конструкции. Кривые 1 – 3 соответственно давление в камере сгорания, у входа в сопло, 1/2 от входа в сопло, у конца сопла. Кривая 4 – скорость истечения. Из графика видно, что максимальная скорость достигается в момент времени 0,75 мс и равна 1070 м/с. Давления в сопле в момент выстрела изменяется от 700 до 1450 МПа.

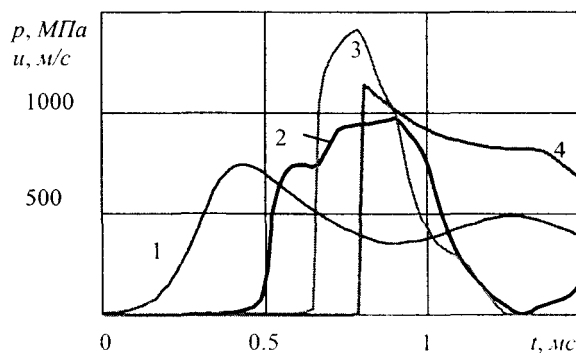


Рис. 3

На рис. 4 приведены эквивалентные напряжения на разные моменты времени, которые наглядно демонстрируют динамику процесса. Первоначально, быстро повышается давление пороховых газов и прилегающих к этой области слоев жидкости. Возникающее давление вызывает в начале незначительные напряжения и деформации корпуса в небольшой зоне. Как видно из рис. 4 напряжения распространяются как в поперечном, так и в продольном направлении. На начальной стадии процесса эквивалентные напряжения в описанной зоне изменяются от 400 до 1400 МПа (рис. 4 а) и находятся далеко от предела прочности, и даже предела текучести материала конструкции гидропушки.

К моменту времени 0,7 – 0,75 мс, что соответствует времени возникновения максимальных давлений жидкости внутри установки, в корпусе гидропушки возникают максимальные эквивалентные напряжения, которые достигают предела текучести. Самым опасным местом является сопряжение цилиндрической и конической частей. Этот факт согласуется с выводами теории сопротивления материалов, так как такие соединения являются концентраторами напряжений. Для уменьшения напряжений, рекомендуется избегать таких соединений, заменяя их плавными сопряжениями. Отметим, что при таком изменении геометрии гидродинамические параметры практически не изменяются.

Из графиков хорошо видна динамика развития напряжений в установке. За время от 0,55 мс до 0,75 мс зона больших напряжений разрастается и охватывает почти весь корпус (рис. 4 б), что свидетельствует о волновом характере протекания процессов, который должен быть учтен для достоверной оценки напряженно-деформированного состояния корпуса гидропушки. В дальнейшем с 0,8 мс начинается истечение струи, которое сопровождается уменьшением давления, что в свою очередь приводит к уменьшению эквивалентных напряжений в корпусе установки. Большие напряжения в середине процесса приводят к появлению остаточных деформаций, как видно из рис. 4 с, что можно расценивать как самопроизвольное упрочнение корпуса методом автофреттажа.

Расчеты показали, что в зоне концентратора напряжений пластические деформации проникают далеко вглубь цилиндра, что при неоднократном нагружении может привести к разрушению конструкции в этом месте. Поэтому целесообразно создать предварительное напряжение корпуса путем навивки проволоки [16] или при помощи банджа с образованием упругой зоны необходимых размеров для рационального распределения напряжений в корпусе установки (рис. 4 б). Кроме того, исследования показали, в какой зоне установки целесо-

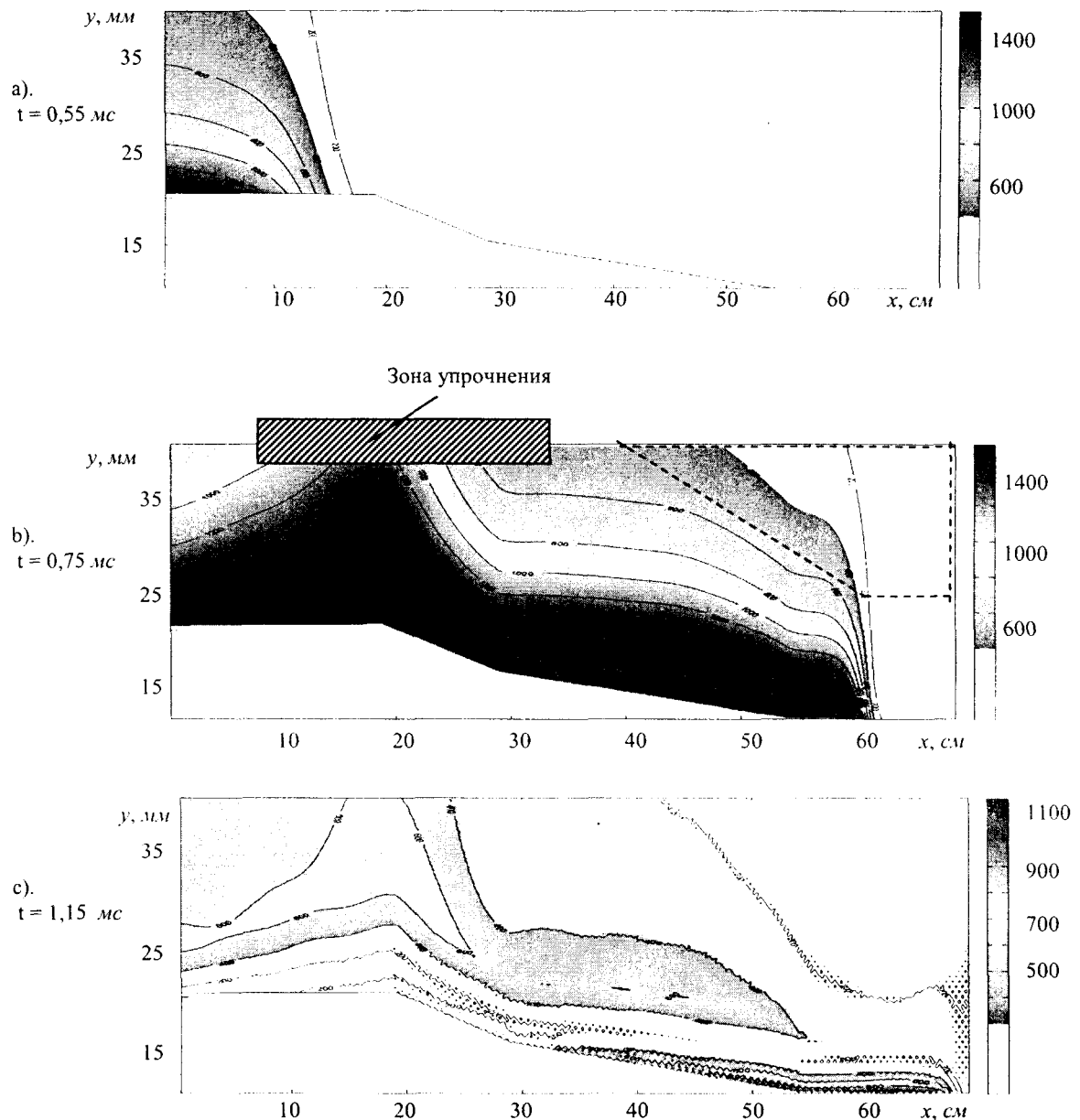


Рис. 4

образно проводить упрочнение, и где можно уменьшить габариты. Так в правой части (зона, отмеченная пунктиром на рис. 4 б) эквивалентные напряжения не превышают 500 МПа, и, тогда, внешний диаметр этой части можно уменьшить, что приведет к снижению металлоемкости (рис. 4 б).

По методике, описанной в [17–19], был проведен приближенный расчет напряженно-деформированного состояния по максимальному стационарному распределению давления при помощи коммерческого пакета ANSYS. Показано, что при таком подходе расчетные значения эквивалентных напряжений имеет заниженное значение. Кроме того, было рассчитано напряженно-деформированное состояние корпуса гидропушки на основании теории сопротивления материалов при максимальном значении давления жидкости в момент выстрела. Показано, что полученные значения напряжений находятся за пределом текучести материала, не отражают реальной картины напряженно-деформируемого состояния и не имеют физического смысла. Вследствие упрощенной модели расчета напряженно-деформированного состояния, конструкторы были вынуждены создавать устройства с большим запасом прочности, что приводило к большой массе конструкции и низкой мобильности. Таким образом, для получения адекватной картины напряженно-деформированного состояния корпуса гидропушки необходим комплексный подход совместного расчета упруго-пластических деформаций корпуса и движения идеальной сжимаемой жидкости, учитывающий динамику процесса.

РЕЗЮМЕ

У роботі наведено аналіз напружено-деформованого стану порохової гідрогармати з урахуванням сумісності деформацій рідини та матеріалу конструкції, пружно-пластичних деформацій та імпульсного характеру навантаження. Наведено рекомендації з раціонального конструювання пристрою.

SUMMARY

The analyses of stressed-deformed state of the powder hydrocannon is presented. The analyses was carried out on the bases of mathematical model taking into account the deformation compatibility of the workspace (liquid) and barrel material, elastic-plastic deformation, impulse load. The recommendations on efficient design of hydrocannon have been given.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Vijay M.M. Properties and parameters of water jets // Proc. International Conference Geo-mechanics 91. – Rotterdam, Balkema. – 1991. – P. 207-222.
2. Cooley W.C. Advances in the technology of fluid jets: past, present and targets for the 21st century // Proc. 5th Pacific Rim International Conference on Water Jet Technology WJTSJ. – Tokyo, Japan&ISWJT, Ottawa, Canada. – 1998. – P.1-8.
3. Lei Y.Y., Wan X., Yang L., Tang C. L. Ultra-high speed pulsed water jet – a potential tool for stone material machining // Key Engineering Materials. Trans Tech Publications. – 2004. – Vols. 259–260. – P. 602–608
4. Атанов Г. А. Гидроимпульсные установки для разрушения горных пород. – К: Вища шк., 1987. – 155 с.
5. Cheng, D.Z., Liang G.L., Lu C.X., Xu Y. Relationship between water cannon desing, pulsed water jet anatomy and rock breaking effect // Proc. 3rd U.S. Water Jet Conference WJTA. – St. Louis, USA – 1985. – P. 309 – 326.
6. Semko A.N. The powder hydro-cannon. // Proc. of International Summer Scientific School «High Speed Hydrodynamics» (HSH 2002).- Cheboksary, Russian/ Washington, USA: Cheboksary, Russian, June 16 – 23, – 2002. – P. 419 – 424.
7. Атанов Г.А., Губский А.Н., Семко А.Н. Внутренняя баллистика пороховой гидропушки // Изв. РАН. МЖГ. – 1997. – № 6. – С. 191-194.
8. Атанов Г. А., Семко А. Н., Украинский Ю. Д. Исследование внутренней баллистики гидропушки // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1983. – №4. – С. 168 -170.
9. Атанов Г., Гескин Э., Ковалев А., Семко А. Пороховая гидропушка широкого спектра действия // Прикладна гідромеханіка. – 2004. – №4. – С. 3 – 9.
10. Проектирование ракетных и ствольных систем / Под ред. Орлова Б. В. – М.: Машиностроение. 1974. – 828 с
11. Численное решение многомерных задач газовой динамики / Под ред. Годунова С.К. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
12. Atanov G., Gubsky V., Semko A. The Pressure Rise Factor For Powder Hydro-cannon // Proc. 13 th International Conference on Jetting Technology. – Sardinia, Italy. – 1996. – P. 91–103.
13. Атанов Г.А., Губский А.Н., Семко А.Н. Внутренняя баллистика пороховой гидропушки // Изв. РАН, Механика жидкости и газа. – 1997. – № 6. – С. 191–194.
14. Atanov G.A., Semko A.N. The powder hydro-cannon // Proc. International Summer Scientific School «High Speed Hydrodynamics» (HSH 2002).- Cheboksary, Russian/ Washington, USA: Cheboksary, Russian. – 2002. – P. 419 – 424.
15. Русанова О.А. Расчет напряженно-деформированного состояния корпуса гидропушки // Вісн. Хмельницьк. ун-ту: Техн. науки. – 2006. – № 2. – С. 38 – 42.
16. Русанова О.А. Расчет напряженно-деформированного состояния пороховой гидропушки при упрочнении навивкой высокопрочной стальной проволоки // Прогрессивные технологии и системы машиностроения. Междунар. сб. науч.тр. – Донецк, 2005. – № 29. – С. 159–165.
17. Geskin E., Petrenko O., Rusanova O., Semko A., Bitardse T. Application of Numerical Techniques for Optimization of the Water Cannon Design // Proc. 2005 WJTA American Water Jet Conference. – Houston (USA). –2005. – P. 3A–1 – 11.
18. Русанова О.А. Анализ различных способов упрочнения корпуса гидропушки // Механіка та інформатика: Зб. матеріалів 3 укр.-пол. наук. конф. молод. вчених. – Хмельницький, 2005. – С. 175–178.
19. Гескин Е.С., Петренко О.П., Русанова О.А., Семко А.Н. Прочностной расчет и оптимизация ствола пороховой гидропушки // Проблемы прочности. – 2006. – №2. – С. 137–146.

Надійшла до редакції 13.03.06 р.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ НЕУПРУГИХ
АРМИРОВАННЫХ ПЛАСТИНОК И ПЛАСТИНЧАТЫХ
СИСТЕМ С ПРОЕМАМИ*В.М.Левин, Ю.В.Грицук, В.А.Митраков,**Донбасская национальная академия строительства и архитектуры, г. Макеевка*

Пластинчатые системы, чаще всего в упругой постановке, рассматривались многими исследователями. Учет же упругопластических свойств материала и наличие в них проемов приводит к существенным трудностям решения задач определения их напряженного состояния. Сложные деформативные свойства реальных конструкционных материалов (в первую очередь, таких как железобетон) предопределили необходимость применения численных методов. В работе [1] для анализа напряженно-деформированного состояния складчатых оболочечных систем, ослабленных проемами при действии распределенных и местных нагрузок, была предложена методика решения соответствующих задач при условии, что эти системы могут быть выполнены из неупругого армированного материала типа железобетона. При этом было учтено изменение геометрии всего сооружения в процессе длительного формирования напряженно-деформированного состояния. В [1, 2] учтены деформативные и прочностные свойства материала типа железобетона. Вопросы дискретизации системы и аппроксимации полей перемещений, деформаций и напряжений в рамках принятой полудискретной схемы (модели Власова-Канторовича) рассматривались в [1, 3]. В данной статье предложена методика численного решения задачи об упруговязкопластическом состоянии элементов сооружений с отверстиями.

Постановка задачи. Рассмотрим складчатые системы прямоугольных пластинок. Они могут быть ослаблены прямоугольными проемами, находиться под действием распределенной и местной нагрузок. Будем предполагать, что материал пластинок обладает упруговязкопластическими свойствами, пластинки армированы упругопластическими волокнами, ориентированными параллельно их сторонам. Количество арматуры кусочно постоянно. Будем считать, что в процессе загрузки длины складок могут увеличиваться (наращивание высоты сооружения при возведении). Отдельные пластины и образуемые ими складчатые системы находятся в обобщенном плоском напряженном состоянии. Загружение происходит в два этапа: на первом этапе сооружение несет только собственный вес, на втором этапе происходит только догружение кратковременными нагрузками (ветровые, технологические, сейсмические и т.д.). На первом этапе следует различать две стадии: первая реализуется при возведении сооружения (из-за наращивания по высоте граница области смещается вверх), вторая – в процессе «спокойной» эксплуатации до приложения кратковременных нагрузок высокого уровня. Уровень напряжений в бетоне на первом этапе относительно невысок. Кратковременное догружение происходит за столь короткий промежуток времени, что деформациями ползучести на втором этапе можно пренебречь. При определении напряжений в бетоне на втором этапе учитывается сумма «силовой» части деформации первого этапа и приращение деформаций второго этапа. Эти деформации рассчитываются по достигнутым к концу первого этапа напряжениям исходя из обобщенного закона Гука. В наиболее нагруженных зонах сооружения (окрестности углов проемов, области локализации значительных местных нагрузок) процесс загрузки бетона близок к простому; его направление либо близко к направлению траектории загрузки первого этапа (при догружении), либо направлено навстречу ему (при разгрузке).

Будем рассматривать материал типа железобетона, когда матрица (из бетона) является упруговязкопластической, а армирующие волокна (из стали) – упругопластические. В соответствии с допущениями для первого из указанных выше этапов загрузки с учетом известного свойства бетона интенсивно стареть в раннем возрасте будем использовать линейную наследственную теорию старения в релаксационной форме [4–6] с учетом неодновременного «зарождения» бетона на различных участках сооружения по высоте, а также ядро релаксации, предложенное в работе [7]. Экспериментально было установлено, что в интересующем нас диапазоне напряжений ядра релаксации для сдвига и гидростатического сжатия можно принять одинаковыми [7, 8]. Для ядра релаксации бетона при $r \rightarrow t$ (r – время воздействия, t – время наблюдения) характерно наличие резкого «всплеска», локализованного на отрезке длиной около 0,5 суток (при длительности процесса, измеряемого месяцами).

На втором из указанных выше этапов загрузки в процессе кратковременного догружения в общем случае на некоторых участках (у углов проема, у середины горизонтальных сторон) при определенном уровне нагрузки образуются трещины. Действующие нормы в конструкциях рассматриваемого типа допускают образование этих трещин, но ограничивают ширину их раскрытия.

Деформативные свойства бетона на участках, где трещины отсутствуют, на основании приведен-

ных выше допущений описываются деформационной теорией пластичности бетона. Можно использовать различные варианты такой теории. В данной работе принят вариант, описанный в [9] и основанный на экспериментальных результатах Купфера. Эта теория отличается от теории Генки неупругим характером гидростатического деформирования и раздельными законами упругопластического деформирования в гидростатическом и сдвиговом состояниях.

На первом этапе и на первой стадии (до образования трещин) второго этапа железобетон рассматривается как сплошное армированное тело, в котором матрица и арматура деформируются совместно. При этом нормальное усилие N_x , N_y в любом сечении определяется простым суммированием усилий в бетонной части сечения и в арматуре.

В областях, где одно из главных напряжений является растягивающим, при увеличении нагрузки в определенный момент изображающая точка достигает предельной кривой (в пространстве σ_1 , σ_2 или ε_1 , ε_2) и образуется трещина, ориентированная по нормали к первому главному направлению. После образования первой трещины в ее окрестности деформационные и прочностные соотношения скачкообразно изменяются. Здесь нарушается совместность перемещений матрицы и арматуры, по мере раскрытия трещины арматурный стрежень выдвигается в нее, и между арматурой и матрицей возникают касательные напряжения сцепления, зависящие от их взаимного смещения. В этом состоянии деформативные свойства железобетона описываются моделью одиночной, или дискретной трещины. При некотором увеличении нагрузки образуются трещины на некотором расстоянии от первоначальной и друг от друга. После того, как сформируется система трещин, деформационные зависимости изменяются, они отвечают модели дисперсных трещин; наиболее полно разработан ее вариант в работе Н.И. Карпенко [10]. Согласно этой модели армированная среда с трещинами заменяется некоторой модельной сплошной ортотропной несимметричной средой с осями ортотропии, направленными по нормали к трещине и вдоль нее. Деформационные соотношения имеют вид

$$\overline{F}_k = D_k (\overline{F}_x, \overline{F}_y, \alpha) \overline{\varepsilon} = D_{k1} (\overline{\varepsilon}, \alpha) \overline{\varepsilon}, \quad k = x, y, \quad (1)$$

где $\overline{F}_x = (N_x, T_{xy})^T$, $\overline{F}_y = (N_y, T_{xy})^T$ – вектора внутренних усилий в сечениях $x = const$ и $y = const$; $\overline{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}^*, \gamma_{yx}^*)^T$ – вектор деформаций, средних на шаге трещин; D_x, D_y, D_{x1}, D_{y1} – представления матрицы материала; α – угол между нормалью к трещине и осью Ox .

Данная модель предусматривает различный вклад величин $\gamma_{xy}^* = \partial v / \partial x$ и $\gamma_{yx}^* = \partial u / \partial y$ во внутренние усилия.

Дискретизация рассчитываемого объекта. При решении задачи был использован метод неполной дискретизации (модель Канторовича – Власова): пластина или складка разбивалась на узкие вертикальные полоски. Перемещения в пределах полоски аппроксимируются линейными комбинациями координатных функций, для плосконапряженного состояния – линейных. Такая дискретизация приводит к разрешающей системе обыкновенных дифференциальных уравнений [1, 3]. Для линеаризации последней в случае кратковременного нагружения применяется метод фиктивных нагрузок А.А. Ильющина.

Аналогичный подход можно использовать в случае длительного нагружения. На основании наследственной теории старения в форме, предложенной в [4–6], можно для векторов $\overline{F}_k = \overline{F}_x$, $\overline{F}_k = \overline{F}_y$ записать

$$\overline{F}_k = \overline{F}_k^e(t) - \int_{\tau}^t \overline{F}_k^e(\tau) \overline{R}(t - \tau_0(z), \tau - \tau_0(z)) d\tau. \quad (2)$$

Здесь $\overline{F}_k$ – вектор усилий по (1) или (2); $\overline{F}_k^e$ – его значение, определяемое при заданных деформациях обобщенным законом Гука; t, τ – глобальные (общие для всего объекта) время наблюдения и время реализации импульса воздействия; τ_{01} – момент начала возведения на глобальной шкале времени; $\tau_0(z)$ – время «зарождения» бетона на отметке z ; $t - \tau_0(z)$, $\tau - \tau_0(z)$ – возраст бетона на отметке z в момент наблюдения и в момент реализации импульса воздействия; $\overline{R}(t, \tau)$ – приведенное ядро релаксации (принято по данным [7]).

В работе [3] показано, что исходная система уравнений имеет вид:

$$X_2 = K_{11} \frac{\partial X_1}{\partial z} + K_{12} X_1 + \Delta X_2; \quad (3)$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial z} + K_{21} \frac{\partial X_1}{\partial z} + K_{22} X_1 + P_2^\Phi + P_2 = 0, \quad (4)$$

где $X_1 = X_1(z, t)$, $X_2 = X_2(z, t)$ – обобщенные усилия и перемещения; $K_{ij}(z, t)$ – жесткостные матрицы; P_2 , P_2^Φ – подвекторы действительных и фиктивных нагрузок.

Исходя из (3), можно подвектор поправки к вектору обобщенных усилий в сечении $z = const$ для i -го узла сечения записать в виде

$$\begin{aligned} \Delta X_{2i} &= - \sum_{p \in P_i} C_{ip}^T \int_0^{l_p} \Phi_{ip}^T \Delta F_y dx = \\ &= \sum_{p \in P_i} C_{ip}^T \int_0^{l_p} \Phi_{ip}^T \left(\int_{\tau_{01}}^t \Delta F_y^e(\tau) \bar{R}(t - \tau_0(z), \tau - \tau_0(z)) d\tau \right) dx = \\ &= \int_{\tau_{01}}^t \left(\sum_{p \in P_i} C_{ip}^T \int_0^{l_p} \Phi_{ip}^T \Delta F_y^e(\tau) dx \right) \bar{R}(t - \tau_0(z), \tau - \tau_0(z)) d\tau = \\ &= \int_{\tau_{01}}^t X_{2i}^e(\tau) \bar{R}(t - \tau_0(z), \tau - \tau_0(z)) d\tau. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь P_i – множество номеров граней, инцидентных i -му узлу, p – текущий номер грани.

Первый подвектор поправок согласно работы [1] $P_1^\Phi = -K_{11}^{-1} \Delta X_2$. В статье [2] приведена аппроксимация $\bar{R}(t, \tau)$, учитывающая наличие «всплеска» при $\tau \rightarrow t$, локализованного на весьма малой области (менее суток при общей продолжительности процесса, измеряемой месяцами). С этой целью ядро было представлено в виде суммы регулярной спокойно изменяющейся по τ части $\bar{R}_0(t, \tau)$ и сингулярного слагаемого $A_R \delta(t - \tau)$, где A_R – площадь «всплеска» $\bar{R}(t, \tau)$ над $\bar{R}_0(t, \tau)$, $\delta(t - \tau)$ – дельта-функция Дирака. Имея ввиду применение метода вырожденного ядра, эта аппроксимация принята в виде

$$\bar{R}(t, \tau) = \sum_{j=1}^n T_j(t) \Theta_j(\tau) + A_R \delta(t - \tau). \quad (7)$$

Подставив (7) в (5) и (6), а полученное в результате выражение в (3) и (4), применив метод конечных сумм Боголюбова-Крылова, получим:

$$\begin{aligned} X_2 &= K_{11}(t, z) + \frac{\partial X_1(t, z)}{\partial z} + K_{12}(t, z) X_1(t, z) - \sum_{j=1}^n T_j(t) \sum_{m=1}^{M-1} \left(K_{11}(\tau_m, z) \frac{\partial X_1(\tau_m, z)}{\partial z} + \right. \\ &+ K_{12}(\tau_m, z) X_1(\tau_m, z) \left. \right) \Theta_j(\tau_m - \tau_0(z)) \frac{\Delta \tau_m + \Delta \tau_{M+1}}{2} + K_{11}(\tau_m, z) \frac{\partial X_1(\tau_m, z)}{\partial z} + \\ &+ K_{12}(\tau_m, z) X_1(\tau_m, z) \left(R(t, t) \frac{\Delta \tau_m}{2} + A_R \right) = K_{11}^*(t, z) \frac{\partial X_1(t, z)}{\partial z} + K_{12}^*(t, z) X_1(t, z) - \\ &- \sum_{j=1}^n T_j(t) \sum_{m=1}^{M-1} \left(K_{11}(\tau_m, z) \frac{\partial X_1(\tau_m, z)}{\partial z} + K_{22}(\tau_m, z) X_1(\tau_m, z) \right) \times \\ &\times \Theta_j(\tau_m - \tau_0(z)) \frac{\Delta \tau_m + \Delta \tau_{m+1}}{2}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$K_{ij}^* = K_{ij} \left(1 - \left(R(t, t) \frac{\Delta \tau_m}{2} + A_R \right) \right). \quad (9)$$

Аналогичные (5) преобразования дают также сумму модифицированной «упругой» части уравнения с заменой K_{ij} на $K_{ij}^* = K_{ij} \left(1 - \left(R(t, t) \frac{\Delta \tau_m}{2} + A_R \right) \right)$, вектора поправок на ползучесть бетона.

Следует отметить одну особенность решения задачи: в окрестности идеального проема конструкции возникают бесконечные деформации; учет неупругой работы материала и неровностей сторон в окрестности вершины угла проема снимает эту проблему. последняя ситуация рассмотрена в [11], где предложены соответствующие рекомендации. Ниже даны примеры использования приведенной методики расчетов.

Пусть пластинка с проемом, нагруженная кратковременной сжимающей нагрузкой (рис. 1, использована симметрия), изготовлена из бетона класса В20 толщиной 0,25 м, а арматура класса А-III, рядовая горизонтальная в количестве 5 см²/м, вертикальная – 20 см²/м; проем окаймлен дополнительной арматурой. Разрушающая нагрузка приложена за 12 неравных шагов (применен шагово-итерационный метод с итерациями по А.А. Ильюшину). Результаты расчета для этого случая представлены на рис. 3, где для сечения I-I даны распределения нормальных напряжений в бетоне σ_y^b (рис. 2, а) и арматуре σ_y^s (рис. 2, б). Кривые 1-6 относятся к 3, 6, 9, 10, 11, 12 шагам нагрузки. На графиках видны возмущения полей напряжений в окрестности угла проема. Как следует из результатов расчета, напряжения в окаймляющей арматуре на 12 шаге возрастают к середине проема существенно быстрее, так как после 11 шага над проемом образовывается вертикальная трещина.

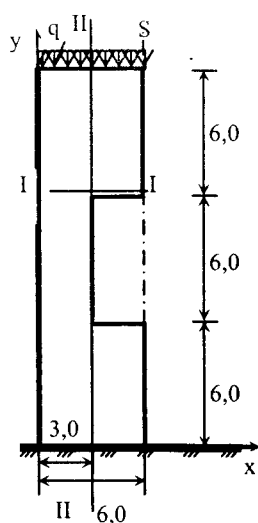


Рис. 1

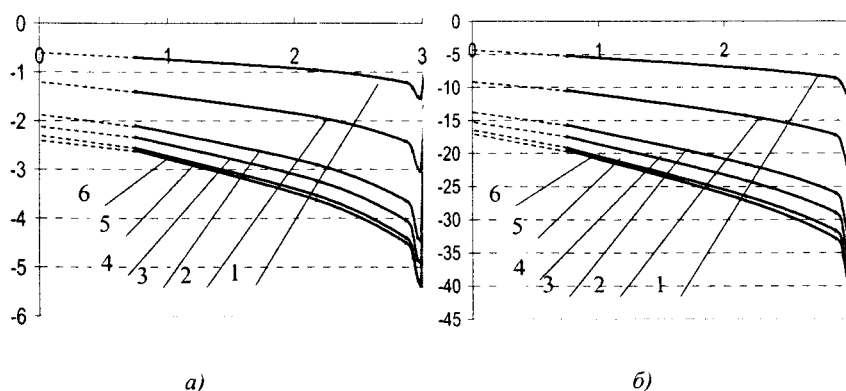


Рис. 2

Рассмотрим пластину с проемом, нагруженную собственным весом (рис. 3). Она возводится со скоростью 2 м/сутки, после чего выдерживается под нагрузкой 10 суток; конструкция и материалы аналогичны принятым в предыдущем примере. Результаты расчета представлены на рис. 4. Обозначения рис. 4 аналогичны ранее принятым, однако 1–6 соответствуют разные моменты времени.

Таким образом, предложена методика, основанная на неполной дискретизации системы, на анализе длительных процессов в ней путем совместного применения методов вырожденных ядер и конечных сумм и анализе кратковременных процессов шагово-итерационным методом. Эта методика позволяет проследить изменение напряженно – деформированного состояния упругопластической системы по мере ее загрузки и упруговязкопластической системы – во времени, по мере ее возведения и эксплуатации.

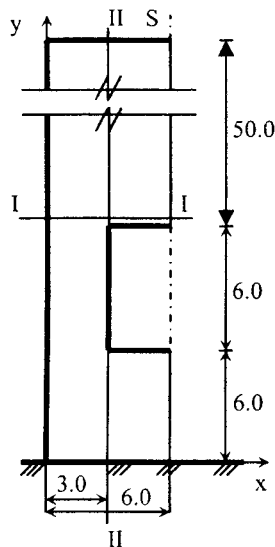


Рис. 3

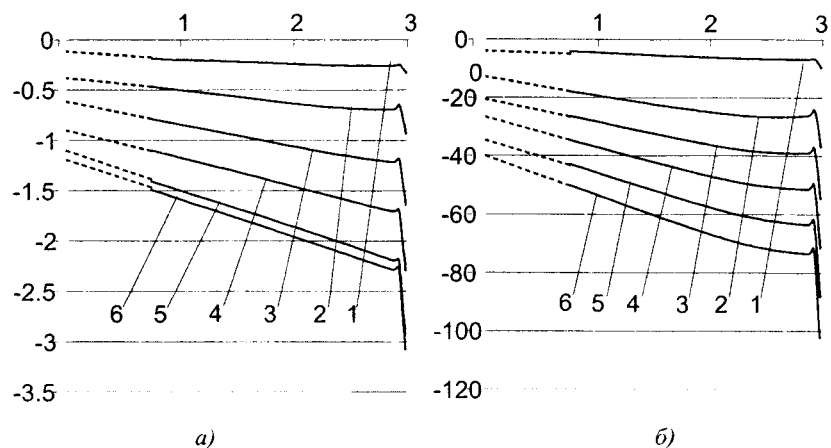


Рис. 4

РЕЗЮМЕ

Запропоновано методику чисельного розв'язання граничної задачі пружнопластичного деформування та початково-гранична задача пружнов'язкопластичного деформування пластин та систем пластин з отворами стосовно до залізобетонних баштових споруд. В основу методики покладено метод неповної дискретизації, метод Гальоркіна, метод скінчених сум та метод вироджених ядер для аналізу тривалих процесів та кроково-ітераційна лінеаризація для аналізу короточасних процесів.

SUMMARY

The method of numerical solution of boundary and initial – boundary tasks of deformation of plates and systems of plates with opens conformably to reinforced concrete towers. This method is founded on methods: of partial discretisation, of Galerkin, of finite sums and of degenerated kernels (for analysis of long processes) and step-iteration method (for analysis of short-term processes).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Левин В.М. Железобетонные башенные сооружения. Исследования, расчет. – Макеевка, 1999 – 230 с.
2. Левин В.М. Полудискретная математическая модель деформирования неупругой складчатой системы // Вісн. Донец. ун-та. Сер. А. Природничі науки. – 2004. . Вип. 2, ч. 1. – С. 171–178.
3. Левин В.М. Упруговязкопластическое деформирование складчатых систем // Актуальные пробл. механики деформируемого твердого тела: Матер. IV Междунар. науч. конф. Донецк–Мелекино, 12-14 июня 2006 г. – Донецк: Юго-Восток, 2006. – С. 91-93.
4. Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б. Теория ползучести неоднородных тел. – М.: Наука, 1983. – 336 с.
5. Арутюнян Н.Х., Дроздов А.Д., Наумов В.Э. Механика растущих вязкоупругопластических тел. – М.: Наука, 1987. – 472 с.
6. Арутюнян Н.Х., Зевин А.А. Расчет строительных конструкций с учетом ползучести. – М.: Стройиздат, 1988. – 256 с.
7. Александровский С.В. Расчет бетонных и железобетонных конструкций на изменения температуры и влажности с учетом ползучести. – М.: Стройиздат, 1973. – 432 с.
8. Прокопович И.К., Зедгенидзе В.А. Прикладная теория ползучести. – М.: Стройиздат, 1980. – 240 с.
9. Крутлов В.М., Козачевский А.И. Основные физические соотношения для бетона в плоском напряженном состоянии // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1989. –Вып. 55. – С. 71-77.
10. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. – М.: Стройиздат, 1996. – 416 с.
11. Левин В.М., Райгородецкий В.Е. Исследование напряженного состояния несущих стен железобетонных башенных сооружений в зоне проемов // Простран. конструкции зданий и сооружений. – 1992. – Вып. 7. – С. 37-39.

Надійшла до редакції 12.03.2006 р.

УДК 539.3

ДИСПЕРСИОННЫЕ СПЕКТРЫ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ВОЛН В ПРОДОЛЬНО-ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРАХ С СЕКТОРНЫМ ВЫРЕЗОМ В КРУГОВОМ ПОПЕРЕЧНОМ СЕЧЕНИИ

В.В. Пузырев

Введение. Исследование закономерностей распространения свободных нормальных упругих волн в протяженных цилиндрических телах является одной из классических, но сохраняющих до сегодняшнего дня актуальность задач динамики деформируемого тела [1, 2]. Это связано с многообразием геометрической формы поперечных сечений цилиндрических тел, учетом различных особенностей в свойствах материалов (анизотропии, неоднородности, нелинейности, диссипативных свойств, эффектов связанности физико-механических полей). При этом анализ закономерностей распространения связанных электроупругих нормальных волн в пьезоактивных цилиндрах является одним из актуальных направлений в теории упругих волноводов. В работе [3] проведен теоретический анализ распространения осесимметричных связанных электроупругих волн вдоль оси пьезокерамического кругового цилиндра, поляризованного в осевом направлении. Серия исследований по распространению электроупругих волн в полых однослойных и многослойных пьезокерамических цилиндрах с различными типами поляризации выполнена в работах [4-7]. Вместе с тем, проблема распространения связанных электроупругих волн в цилиндрах неканонического сечения остается во многом открытой. Это относится и к рассматриваемым в данной работе задачам о распространении свободных нормальных электроупругих волн в круговых цилиндрических пьезоактивных волноводах из материалов гексагональной системы с секторным вырезом в круговом поперечном сечении.

В данной работе представлена методика получения дисперсионных уравнений, описывающих полные спектры свободных нормальных волн в поляризованных вдоль оси пьезокерамических цилиндрах, сечение которых представляет собой круговую область с секторным вырезом произвольной угловой меры. Построены и проанализированы диаграммы дисперсионных кривых для волн отдельных мод спектра в волноводах из пьезокерамики ВаСаTiO₃.

Постановка задачи. Рассмотрим предварительно поляризованный в аксиальном направлении цилиндрический волновод бесконечной протяженности из пьезокерамического материала гексагональной системы, поперечным сечением которого является круг с вырезом секторной формы (рис. 1). С волноводом свяжем нормированные безразмерные системы координат – прямоугольную $Ox_1x_2x_3$ и цилиндрическую $Or\theta z$ таким образом, что в поперечном сечении волновода получается область $V = \{0 < r \leq R, \theta \in [\alpha, 2\pi - \alpha]\}$.

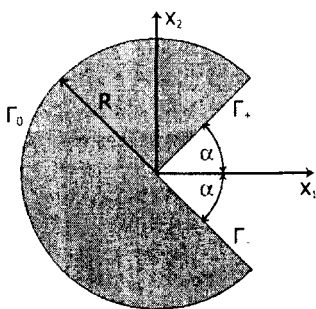


Рис. 1

Уравнения динамического электроупругого деформирования волновода относительно отнесенных к нормирующему параметру R^* безразмерных компонент вектора волновых упругих перемещений $\vec{U} = (u_1, u_2, u_3)$ и отнесенного к параметру Φ^* безразмерного потенциала квазистатического электрического поля Φ могут быть в рассматриваемом случае представлены в форме

$$\|L_{ij}\| \vec{\Phi} = 0, \quad (1)$$

где $\vec{\Phi} = (u_1, u_2, u_3, \Phi)^T$; $\|L_{ij}\|$ – матрица с элементами

$$\begin{aligned} L_{11} &= c_{11}\partial_1^2 + c_{66}\partial_2^2 + c_{44}\partial_3^2 - \rho R^*/c^* \partial_t^2, \quad L_{12} = L_{21} = (c_{12} + c_{66})\partial_1\partial_2, \\ L_{13} &= L_{31} = (c_{13} + c_{44})\partial_1\partial_3, \quad L_{14} = -L_{41} = -(e_{31} + e_{15})\partial_1\partial_3, \\ L_{22} &= c_{66}\partial_1^2 + c_{11}\partial_2^2 + c_{44}\partial_3^2 - \rho R^*/c^* \partial_t^2, \quad L_{23} = L_{32} = (c_{13} + c_{44})\partial_2\partial_3, \\ L_{24} &= -L_{42} = -(e_{31} + e_{15})\partial_2\partial_3, \quad L_{33} = c_{44}\partial_1^2 + c_{44}\partial_2^2 + c_{33}\partial_3^2 - \rho R^*/c^* \partial_t^2, \\ L_{34} &= -L_{43} = -e_{15}(\partial_1^2 + \partial_2^2) - e_{33}\partial_3^2, \quad L_{44} = \epsilon_{11}(\partial_1^2 + \partial_2^2) + \epsilon_{33}\partial_3^2; \end{aligned} \quad (2)$$

c_{ij} – отнесенные к c_* безразмерные постоянные материала волновода; e_{ij} – отнесенные к c_*/E_* безразмерные пьезомодули; ε_{ij} – отнесенные к c_*/E_*^2 безразмерные диэлектрические проницаемости; ρ – плотность; $\partial_j = \partial/\partial x_j$, $\partial_t = \partial/\partial t$.

Распространение в волноводе нормальных связанных электроупругих волн с функциями напряженности для вектора упругих динамических перемещений $\bar{U} = \text{Re}(\bar{U}_0(x_1, x_2) \cdot e^{-i(\omega t - kx_3)})$ и потенциала квазистатического электрического поля $\varphi = \text{Re}(\varphi^{(0)}(x_1, x_2) \cdot e^{-i(\omega t - kx_3)})$ описывается однородной спектральной задачей относительно компонент амплитудных комплексных функций $\bar{U}_0^T = (u_1^{(0)}(x_1, x_2), u_2^{(0)}(x_1, x_2), u_3^{(0)}(x_1, x_2))$, $\varphi^{(0)}(x_1, x_2)$ включающей систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$\|\bar{L}_{ij}\|\bar{\Phi}^{(0)} = 0, \quad \bar{\Phi}^{(0)T} = (u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, u_3^{(0)}, \varphi^{(0)}) \quad (3)$$

и краевые условия для $u_j^{(0)}$, $\varphi^{(0)}$ на различных участках внешней граничной поверхности волновода. Элементы матрицы операторов в уравнениях (3) имеют представления вида (2) с формальной заменой $\partial_3 \rightarrow ik$, $\partial_t \rightarrow -i\omega$, где k – безразмерное отнесенное к R_*^{-1} волновое число рассматриваемой нормальной волны. Граничные условия для системы уравнений (3) спектральной задачи отражают физические предположения о состоянии различных участков внешней границы волновода.

Рассмотрим случаи, когда внешняя цилиндрическая поверхность волновода жестко закреплена либо свободна от механических усилий и покрыта сверхтонкими проводящими безинерционными электродами, а на поверхностях секторного выреза имеются сверхтонкие проводящие нерастяжимые мембранные покрытия, короткозамкнутые с электродным покрытием цилиндрической поверхности. Сформулированные краевые условия в исходной форме имеют вид

$$(u_r)_{\Gamma_0} = (u_\theta)_{\Gamma_0} = (u_z)_{\Gamma_0} = (\varphi)_{\Gamma_0} = 0, \quad (4)$$

$$(\sigma_{rr})_{\Gamma_0} = (\sigma_{r\theta})_{\Gamma_0} = (\sigma_{rz})_{\Gamma_0} = (\varphi)_{\Gamma_0} = 0, \quad \Gamma_0 = \{r = R, \theta \in [\alpha, 2\pi - \alpha]\}, \quad (5)$$

$$(\sigma_{\theta\theta})_{\Gamma_\pm} = (u_r)_{\Gamma_\pm} = (u_z)_{\Gamma_\pm} = (\varphi)_{\Gamma_\pm} = 0, \quad \Gamma_\pm = \{r \in [0, R], \theta = \pm\alpha\}, \quad (6)$$

где u_α и $\sigma_{\alpha\beta}$ – соответственно упругие перемещения и механические напряжения на основных площадках цилиндрической координатной системы.

Интегрирование системы волновых уравнений. Для интегрирования уравнений (3) введем следующие представления искомых функций $u_j^{(0)}$, $\varphi^{(0)}$ через обобщенные волновые потенциалы φ_j :

$$u_1^{(0)} = \partial_1 \varphi_1 + \partial_2 \varphi_4, \quad u_2^{(0)} = \partial_2 \varphi_1 - \partial_1 \varphi_4, \quad u_3^{(0)} \equiv \varphi_2, \quad \varphi^{(0)} \equiv \varphi_3. \quad (7)$$

В результате система уравнений (3) приводится к виду

$$\begin{aligned} & \partial_1 \left[(c_{11}D^2 - c_{44}k^2 + \Omega^2)\varphi_1 + ik(c_{13} + c_{44})\varphi_2 - ik(e_{31} + e_{15})\varphi_3 \right] + \\ & \quad + \partial_2 \left[(c_{66}D^2 - c_{44}k^2 + \Omega^2)\varphi_4 \right] = 0, \\ & \partial_2 \left[(c_{11}D^2 - c_{44}k^2 + \Omega^2)\varphi_1 + ik(c_{13} + c_{44})\varphi_2 - ik(e_{31} + e_{15})\varphi_3 \right] - \\ & \quad - \partial_1 \left[(c_{66}D^2 - c_{44}k^2 + \Omega^2)\varphi_4 \right] = 0, \\ & [ik(c_{13} + c_{44})\varphi_1 + c_{44}\varphi_2 - e_{15}\varphi_3]D^2 + (\Omega^2 - c_{33}k^2)\varphi_2 + e_{33}k^2\varphi_3 = 0, \\ & [ik(e_{31} + e_{15})\varphi_1 + e_{15}\varphi_2 + \varepsilon_{11}\varphi_3]D^2 - e_{33}k^2\varphi_2 - \varepsilon_{33}k^2\varphi_3 = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $D^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2$ – двумерный оператор Лапласа.

Первые два уравнения системы (8) можно совместно записать в форме

$$\text{grad } F_1 + \text{rot}[(0, 0, F_2)] = 0, \quad (9)$$

в которой

$$\begin{aligned} F_1 &= (c_{11}D^2 - c_{44}k^2 + \Omega^2)\varphi_1 + ik(c_{13} + c_{44})\varphi_2 - ik(e_{31} + e_{15})\varphi_3, \\ F_2 &= (c_{66}D^2 - c_{44}k^2 + \Omega^2)\varphi_4. \end{aligned} \quad (10)$$

Из (9) как следствие получаем

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0. \quad (11)$$

Таким образом, следствием (3) является система уравнений

$$\begin{aligned} L_{11}\varphi_1 + L_{12}\varphi_2 + L_{13}\varphi_3 &= 0, \quad L_{21}\varphi_1 + L_{22}\varphi_2 + L_{23}\varphi_3 = 0, \\ L_{31}\varphi_1 + L_{32}\varphi_2 + L_{33}\varphi_3 &= 0, \quad L_{44}\varphi_4 = 0; \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} L_{11} &= c_{11}D^2 - c_{44}k^2 + \Omega^2, \quad L_{12} = ik(c_{13} + c_{44}), \quad L_{13} = -ik(e_{31} + e_{15}), \\ L_{21} &= ik(c_{13} + c_{44})D^2, \quad L_{22} = c_{44}D^2 + \Omega^2 - c_{33}k^2, \quad L_{23} = -e_{15}D^2 + e_{33}k^2, \\ L_{31} &= ik(e_{31} + e_{15})D^2, \quad L_{32} = e_{15}D^2 - e_{33}k^2, \quad L_{33} = \varepsilon_{11}D^2 - \varepsilon_{33}k^2, \\ L_{44} &= c_{66}D^2 - c_{44}k^2 + \Omega^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Вводя для функций φ_j представления

$$\varphi_j = A_j \chi(x_1, x_2), \quad (14)$$

в которых $\chi(x_1, x_2)$ – удовлетворяющие уравнению $D^2\chi(x_1, x_2) + \gamma^2\chi(x_1, x_2) = 0$ метагармонические функции, получаем в качестве следствия из (12) однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно A_j с определителем, зависящим от параметра γ :

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{11}A_1 + \tilde{L}_{12}A_2 + \tilde{L}_{13}A_3 &= 0, \quad \tilde{L}_{21}A_1 + \tilde{L}_{22}A_2 + \tilde{L}_{23}A_3 = 0, \\ \tilde{L}_{31}A_1 + \tilde{L}_{32}A_2 + \tilde{L}_{33}A_3 &= 0, \quad \tilde{L}_{44}A_4 = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Операторы $\tilde{L}_{ij}$ получены из операторов (13) формальной заменой $D^2 \rightarrow -\gamma^2$.

Система (15) распадается на независимую подсистему относительно постоянных A_1, A_2, A_3 и отдельное уравнение для A_4 . Формулируя условие нетривиальной разрешимости подсистемы для A_1, A_2, A_3 , т.е. приравнявая нулю определитель этой подсистемы, получаем характеристическое уравнение для значений параметра γ :

$$\alpha_1\gamma^6 + \alpha_2\gamma^4 + \alpha_3\gamma^2 + \alpha_4 = 0, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -c_{11}e_{15}^2 - c_{11}c_{44}\varepsilon_{11}, \quad \alpha_2 = (e_{15}^2 + c_{44}\varepsilon_{11} + c_{11}\varepsilon_{11})\Omega^2 + \\ &\quad + (2c_{13}e_{15}^2 - c_{44}e_{31}^2 - c_{11}c_{44}\varepsilon_{33} + c_{13}^2\varepsilon_{11} - c_{11}c_{33}\varepsilon_{11} + 2c_{13}c_{44}\varepsilon_{11} + 2c_{13}e_{15}e_{31} - 2c_{11}e_{15}e_{33})k^2, \\ \alpha_3 &= (-c_{11}e_{33}^2 - c_{33}e_{31}^2 - c_{33}e_{15}^2 - 2c_{33}e_{31}e_{15} + 2c_{13}c_{44}\varepsilon_{33} - c_{11}c_{33}\varepsilon_{33} - \\ &\quad - c_{33}c_{44}\varepsilon_{11} + c_{13}^2\varepsilon_{33} + 2c_{13}e_{31}e_{33} + 2c_{13}e_{15}e_{33} + 2c_{44}e_{31}e_{33})k^4 + \\ &\quad + (e_{31}^2 + c_{44}\varepsilon_{33} + e_{15}^2 + c_{44}\varepsilon_{11} + 2e_{15}e_{31} + c_{33}\varepsilon_{11} + c_{11}\varepsilon_{33} + 2e_{15}e_{33})\Omega^2k^2 - \varepsilon_{11}\Omega^4, \\ \alpha_4 &= k^2(c_{44}k^2 - \Omega^2)(-c_{33}\varepsilon_{33}k^2 - e_{33}^2k^2 + \varepsilon_{33}\Omega^2). \end{aligned} \quad (17)$$

Каждому найденному из (16) $\gamma^2 = \gamma_j^2$ ($j = \overline{1,3}$) соответствует определенное с точностью до постоянного множителя нетривиальное решение в виде

$$\vec{A}_j = (A_{1j}, A_{2j}, A_{3j}) = \vec{A}_j \cdot (\beta_{1j}, \beta_{2j}, \beta_{3j}) \quad (18)$$

где β_{pj} – параметры, которые можно выбрать в форме домножаемых на одинаковый нормирующий множитель алгебраических дополнений любой из строк матрицы $\|\tilde{L}_{nm}\|$. Если в качестве указанной строки выбрать первую строку матрицы $\|\tilde{L}_{nm}\|$, а нормирующим множителем L_{33}^{-1} , то получим:

$$\begin{aligned} \beta_{1j} &= \tilde{L}_{22}^{(j)} - \tilde{L}_{23}^{(j)} \cdot \tilde{L}_{32}^{(j)} / \tilde{L}_{33}^{(j)}, \quad \beta_{2j} = -\tilde{L}_{21}^{(j)} + \tilde{L}_{31}^{(j)} \cdot \tilde{L}_{23}^{(j)} / \tilde{L}_{33}^{(j)}, \\ \beta_{3j} &= (\tilde{L}_{21}^{(j)} \cdot \tilde{L}_{32}^{(j)} - \tilde{L}_{31}^{(j)} \cdot \tilde{L}_{22}^{(j)}) / \tilde{L}_{33}^{(j)}; \quad \tilde{L}_{nm}^{(j)} = \tilde{L}_{nm} \Big|_{\gamma=\gamma_j}. \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом, представления для функций φ_p ($p = 1, 3$) имеют форму

$$\varphi_p = \sum_{j=1}^3 A_j \beta_{pj} \chi_j(x_1, x_2), \quad (20)$$

в которой χ_j – метагармонические функции, являющиеся решениями уравнений

$$D^2 \chi_j + \gamma_j^2 \chi_j = 0. \quad (21)$$

Представляя решение однородного уравнения для φ_4 в форме (14), получаем

$$\varphi_4 = A_4 \chi_4(x_1, x_2), \quad (22)$$

где $\gamma_4^2 = (\Omega^2 - c_{44} k^2) c_{66}^{-1}$.

Окончательно для компонент комплексного амплитудного вектора нормальных волн будем иметь

$$\begin{aligned} u_1^{(0)} &= \sum_{j=1}^3 A_j \beta_{1j} \partial_1 \chi_j(x_1, x_2) + A_4 \partial_2 \chi_4(x_1, x_2), \\ u_2^{(0)} &= \sum_{j=1}^3 A_j \beta_{1j} \partial_2 \chi_j(x_1, x_2) - A_4 \partial_1 \chi_4(x_1, x_2), \\ u_3^{(0)} &= \sum_{j=1}^3 A_j \beta_{2j} \chi_j(x_1, x_2), \quad \varphi^{(0)} = \sum_{j=1}^3 A_j \beta_{3j} \chi_j(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (23)$$

Получение основных дисперсионных соотношений. Дисперсионные соотношения для семейств нормальных волн в рассматриваемых волноводах получаются из граничных условий (4)-(6). Необходимые для их получения выражения компонент вектора волновых смещений $\{u_r, u_\theta, u_z\} = \{u_r^{(0)}, u_\theta^{(0)}, u_z^{(0)}\} \cdot e^{-i(\omega t - kx_3)}$, квазистатического электрического потенциала $\varphi = \varphi^{(0)} \cdot e^{-i(\omega t - kx_3)}$ и тензора напряжений на основных площадках цилиндрической системы координат $\|\sigma_{\alpha\beta}\| = \|\sigma_{\alpha\beta}^{(0)}\| \cdot e^{-i(\omega t - kx_3)}$ следуют из известных соотношений связи компонент электроупругого состояния в прямоугольной декартовой и цилиндрической координатных системах и имеют вид

$$\begin{aligned} u_r^{(0)} &= \sum_{j=1}^3 A_j \beta_{1j} \partial_r \chi_j + A_4 r^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta} \chi_4, \quad u_\theta^{(0)} = \sum_{j=1}^3 A_j \beta_{1j} r^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta} \chi_j - A_4 \partial_r \chi_4, \\ u_z^{(0)} &= \sum_{j=1}^3 A_j \beta_{2j} \chi_j, \quad \varphi^{(0)} = \sum_{j=1}^3 A_j \beta_{3j} \chi_j; \\ \sigma_{\theta\theta}^{(0)} &= \sum_{j=1}^3 A_j \left(\beta_{1j} (c_{11} (r^{-1} \partial_r + r^{-2} \partial_\theta^2) + c_{12} \partial_r^2) + \beta_{2j} i k c_{13} - \beta_{3j} i k e_{31} \right) \chi_j - \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
 & -A_4(c_{12} - c_{11})(r^{-2}\partial_\theta - r^{-1}\partial_r\partial_\theta)\chi_4, \\
 \sigma_{rr}^{(0)} &= \sum_{j=1}^3 A_j \left(\beta_{1j}(c_{12}(r^{-1}\partial_r + r^{-2}\partial_\theta^2) + c_{11}\partial_r^2) + \beta_{2j}ikc_{13} - \beta_{3j}ike_{31} \right) \chi_j + \\
 & + A_4(c_{12} - c_{11})(r^{-2}\partial_\theta - r^{-1}\partial_r\partial_\theta)\chi_4, \\
 \sigma_{r\theta}^{(0)} &= \sum_{j=1}^3 A_j \left(\beta_{1j}(c_{12} - c_{11})(r^{-2}\partial_\theta - r^{-1}\partial_r\partial_\theta) \right) \chi_j + A_4(c_{12} - c_{11})/2(\partial_r^2 - \\
 & - r^{-1}\partial_r - r^{-2}\partial_\theta^2)\chi_4, \\
 \sigma_{rz}^{(0)} &= \sum_{j=1}^3 A_j \left(\beta_{1j}c_{44}\partial_r\partial_z + \beta_{2j}c_{44}\partial_r - \beta_{3j}e_{15}\partial_r \right) \chi_j + A_4c_{44}r^{-1}\partial_\theta\partial_z\chi_4, \\
 \sigma_{\theta z}^{(0)} &= \sum_{j=1}^3 A_j \left(\beta_{1j}c_{44}r^{-1}\partial_\theta\partial_z + \beta_{2j}c_{44}r^{-1}\partial_\theta - \beta_{3j}e_{15}r^{-1}\partial_\theta \right) \chi_j - A_4c_{44}\partial_r\partial_z\chi_4; \quad (25)
 \end{aligned}$$

где $\partial_r = \partial/\partial r$, $\partial_\theta = \partial/\partial \theta$, $\partial_z = \partial/\partial z$.

Множество волн исследуемого типа является суперпозицией независимых подмножеств волн с различной четностью функций волновых перемещений в области сечения волновода. Дисперсионные соотношения целесообразно получать в отдельности для волн "симметричного" типа с четностью

$$\begin{aligned}
 u_r^{(0)}(r, \theta) &= u_r^{(0)}(r, -\theta), \quad u_\theta^{(0)}(r, \theta) = -u_\theta^{(0)}(r, -\theta), \\
 u_z^{(0)}(r, \theta) &= u_z^{(0)}(r, -\theta), \quad (r, \theta) \in V, \quad (26)
 \end{aligned}$$

и волн "антисимметричного" типа, в которых

$$\begin{aligned}
 u_r^{(0)}(r, \theta) &= -u_r^{(0)}(r, -\theta), \quad u_\theta^{(0)}(r, \theta) = u_\theta^{(0)}(r, -\theta), \\
 u_z^{(0)}(r, \theta) &= -u_z^{(0)}(r, -\theta), \quad (r, \theta) \in V. \quad (27)
 \end{aligned}$$

Для волн "симметричного" типа в волноводах с закрепленным либо свободным от напряжений цилиндрическим участком электропроводящей граничной поверхности вводятся априори удовлетворяющие условию (6) представления χ_j , характеризующие независимые семейства волн с различными показателями изменчивости n по угловой координате

$$\begin{aligned}
 \chi_{jn} &= J_{\lambda_n}(\gamma_j r) \cos \lambda_n \theta, \quad \chi_{4n} = J_{\lambda_n}(\gamma_4 r) \sin \lambda_n \theta, \\
 \lambda_n &= (2n+1)\pi/2\alpha, \quad (j = \overline{1,3}; n = \overline{0,\infty}). \quad (28)
 \end{aligned}$$

При этом для волн "симметричного" типа с различными показателями n в волноводах с закрепленным либо свободным участком Γ_0 из краевых условий (4) и (5) с учетом ортогональности систем функций $\{\cos \lambda_n \theta\}$, $\{\sin \lambda_n \theta\}$ на интервале $\theta \in [\alpha, 2\pi - \alpha]$ соответственно следуют дисперсионные уравнения вида

$$F_n^{(u)}(\Omega, k) = \det \left\| \Delta_{nij}^{(u)} \right\| = 0 \quad (i, j = \overline{1,4}), \quad (29)$$

$$F_n^{(\sigma)}(\Omega, k) = \det \left\| \Delta_{nij}^{(\sigma)} \right\| = 0 \quad (i, j = \overline{1,4}), \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned}
 \Delta_{n1j}^{(u)} &= \beta_{1j} \left(\lambda_n R^{-1} J_{\lambda_n}(\gamma_j R) - \gamma_j J_{\lambda_{n+1}}(\gamma_j R) \right), \quad \Delta_{n14}^{(u)} = \lambda_n R^{-1} J_{\lambda_n}(\gamma_4 R), \\
 \Delta_{n2j}^{(u)} &= -\beta_{1j} \left(\lambda_n R^{-1} J_{\lambda_n}(\gamma_j R) \right), \quad \Delta_{n24}^{(u)} = - \left(\lambda_n R^{-1} J_{\lambda_n}(\gamma_4 R) - \gamma_4 J_{\lambda_{n+1}}(\gamma_4 R) \right), \\
 \Delta_{n3j}^{(u)} &= \beta_{2j} J_{\lambda_n}(\gamma_j R), \quad \Delta_{n34}^{(u)} = 0, \quad \Delta_{n4j}^{(u)} = \beta_{3j} J_{\lambda_n}(\gamma_j R), \quad \Delta_{n44}^{(u)} = 0 \quad (j = \overline{1,3}). \quad (31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_{n1j}^{(\sigma)} &= (c_{11} + c_{12})/2(-\gamma_j^2)\beta_{1j}J_{\lambda_n}(\gamma_j R) + ikc_{13}\beta_{2j}J_{\lambda_n}(\gamma_j R) - ike_{31}\beta_{3j}J_{\lambda_n}(\gamma_j R) - \\
 &\quad - \beta_{1j}(c_{12} - c_{11})/2\left(-\gamma_j^2J_{\lambda_n}(\gamma_j R) - 2\lambda_n R^{-2}J_{\lambda_n}(\gamma_j R) + \right. \\
 &\quad \left. + 2\gamma_j R^{-1}J_{\lambda_n+1}(\gamma_j R) + 2\lambda_n^2 R^{-2}J_{\lambda_n}(\gamma_j R)\right), \\
 \Delta_{n14}^{(\sigma)} &= (c_{12} - c_{11})\left(\lambda_n R^{-2}J_{\lambda_n}(\gamma_4 R) - \lambda_n R^{-1}(\lambda_n R^{-1}J_{\lambda_n}(\gamma_4 R) - \gamma_4 J_{\lambda_n+1}(\gamma_4 R))\right), \\
 \Delta_{n2j}^{(\sigma)} &= -\beta_{1j}(c_{12} - c_{11})\left(\lambda_n R^{-2}J_{\lambda_n}(\gamma_j R) - \lambda_n R^{-1}(\lambda_n R^{-1}J_{\lambda_n}(\gamma_j R) - \gamma_j J_{\lambda_n+1}(\gamma_j R))\right), \\
 \Delta_{n24}^{(\sigma)} &= (c_{12} - c_{11})/2\left(-\gamma_4^2J_{\lambda_n}(\gamma_4 R) - 2\lambda_n R^{-2}J_{\lambda_n}(\gamma_4 R) + \right. \\
 &\quad \left. + 2\gamma_4 R^{-1}J_{\lambda_n+1}(\gamma_4 R) + 2\lambda_n^2 R^{-2}J_{\lambda_n}(\gamma_4 R)\right), \\
 \Delta_{n3j}^{(\sigma)} &= (c_{44}(\beta_{2j} + ik\beta_{1j}) - e_{15}\beta_{3j})\left(\lambda_n R^{-1}J_{\lambda_n}(\gamma_j R) - \gamma_j J_{\lambda_n+1}(\gamma_j R)\right), \\
 \Delta_{n34}^{(\sigma)} &= c_{44}ik\lambda_n R^{-1}J_{\lambda_n}(\gamma_4 R), \quad \Delta_{n43}^{(\sigma)} = \beta_{3j}J_{\lambda_n}(\gamma_j R), \quad \Delta_{n44}^{(\sigma)} = 0 \quad (j = \overline{1,3}).
 \end{aligned} \tag{32}$$

По аналогичной схеме для семейств волн "антисимметричного" типа при выборе:

$$\begin{aligned}
 \chi_{jn} &= J_{\eta_n}(\gamma_j r) \sin \eta_n \theta, \quad \chi_{4n} = J_{\eta_n}(\gamma_4 r) \cos \eta_n \theta, \\
 \eta_n &= n\pi/\alpha, \quad (j = \overline{1,3}; n = \overline{1, \infty});
 \end{aligned} \tag{33}$$

следуют дисперсионные соотношения:

$$\tilde{F}_n^{(u)}(\Omega, k) = \det \|\tilde{\Delta}_{nij}^{(u)}\| = 0 \quad (i, j = \overline{1,4}), \tag{34}$$

$$\tilde{F}_n^{(\sigma)}(\Omega, k) = \det \|\tilde{\Delta}_{nij}^{(\sigma)}\| = 0 \quad (i, j = \overline{1,4}), \tag{35}$$

где выражения для $\tilde{\Delta}_{nij}^{(u)}$ и $\tilde{\Delta}_{nij}^{(\sigma)}$ имеют структуру, качественно сходную со структурой выражений (31) и (32) соответственно.

Конкретный анализ дисперсионных спектров для исследуемых типов нормальных волн осуществлен применительно к волноводам из аксиально-поляризованной пьезокерамики ВаСаТiО₃ [3, 8] с физико-механическими параметрами $c_{11} = 15.8$, $c_{12} = 6.9$, $c_{13} = 6.75$, $c_{33} = 15.0$, $c_{44} = 4.5$, $e_{31} = -3.1$, $e_{33} = 13.5$, $e_{15} = 10.9$, $\epsilon_{11} = 88.5$, $\epsilon_{33} = 80.535$. Приведенные нормированные значения постоянных соответствуют выбору нормирующих параметров $c^* = 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $E^* = 10^{10} \text{ Н/К}$.

Анализ ветвей действительных и мнимых корней дисперсионных уравнений проводился методом бисекции интервала перемены знака функции. Программный пакет для расчета корней реализован на языке C++. Алгоритм построен по схеме, сочетающей нахождения значений k для фиксируемых величин параметра Ω и нахождения значений Ω для фиксируемых величин параметра k . Безразмерный частотный параметр Ω варьировался в пределах $\Omega \in [0; 32]$, безразмерное волновое число – в пределах $\text{Re } k \in [0; 10]$, $\text{Im } k \in [0; 10]$.

На рис. 2-4 приведены распределения действительных и мнимых ветвей дисперсионных спектров нормальных волн "симметричного" типа с показателем $n = 0$ для закрепленных по цилиндрическому участку границы волноводов с изменяющейся угловой мерой секторного выреза, принимающей значения $\alpha = \pi/8$ (рис. 2), $\alpha = \pi/4$ (рис. 3), $\alpha = \pi/2$ (рис. 4). Характерным является отсутствие в спектрах мод бегущих волн с нулевой частотой заперения и наличие в мнимой части спектра фрагментов, которые объединяются в "почти вертикальные" дисперсионные кривые, характерные для спектров связанных электроупругих волн [4-7]. Увеличение угловых

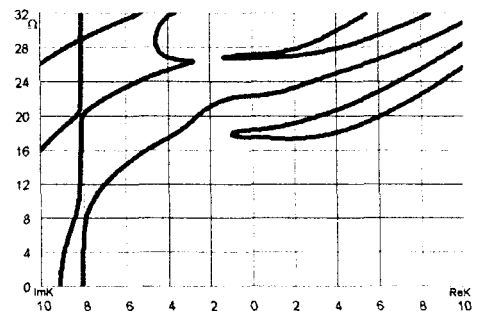


Рис. 2

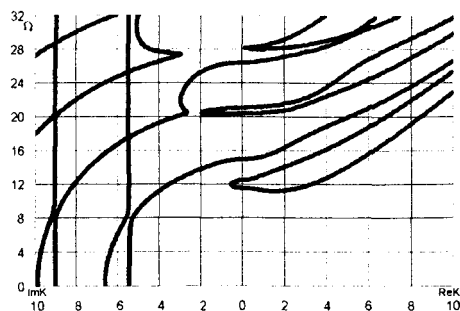


Рис. 3

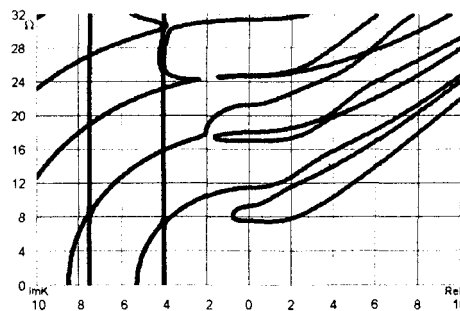


Рис. 4

размеров выреза ведет к снижению частот запирания бегущих волн при сохранении качественной картины чередования дисперсионных кривых. Для всех приводимых спектров низшая действительная мода имеет участок, соответствующий обратным волнам и групповая скорость обратных волн на этом участке уменьшается с ростом α . Характерным также является уменьшение значений $\text{Im}k$, соответствующих появлению "почти вертикальных" фрагментов спектра, при увеличении α .

На рис. 5–6 приведены дисперсионные спектры для волн "симметричного" типа с показателем $n = 1$ в волноводах с вырезами угловой меры $\alpha = \pi/4$ (рис. 3), $\alpha = \pi/2$ (рис. 4). Сопоставление рис. 3–4 и рис. 5–6 позволяет охарактеризовать изменения в спектрах волн "симметричного" типа при значениях показателя окружающей изменяемости $n = 0$ и $n = 1$. При значительном качественном сходстве дисперсионных спектров для волноводов с $\alpha = \pi/2$ (рис. 4, 6) с увеличением n частоты запирания бегущих волн возрастают, однако качественная структура спектров в этих сопоставляемых случаях сохраняется. При уменьшении угловой меры выреза до $\alpha = \pi/4$ (рис. 5) спектр волн "симметричного" типа с $n = 1$ имеет уже качественно отличный характер от сопоставляемого спектра на рис. 3: меняется порядок чередования "петлеобразных" и "непетлеобразных" дисперсионных кривых, "вертикальный" фрагмент в мнимой части спектра сдвигается в область существенно больших значений $\text{Im}k$, мода обратных волн исчезает при одновременном существенном росте частот запирания бегущих волн.

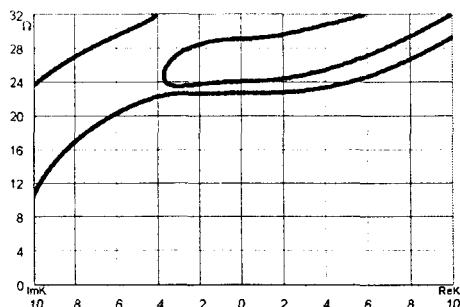


Рис. 5

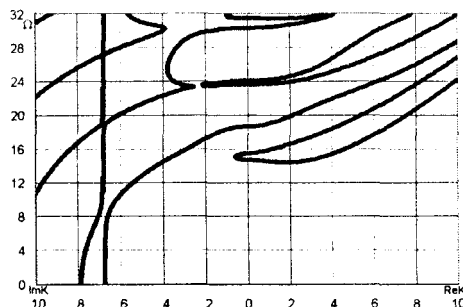


Рис. 6

Наконец, на рис. 7–8 приведены распределения действительных и мнимых ветвей дисперсионных спектров для волн "антисимметричного" типа с $n = 1$ в волноводах, имеющих секторные вырезы угловой меры $\alpha = \pi/4$ и $\alpha = \pi/2$ соответственно. Можно отметить значительное качественное сходство спек-

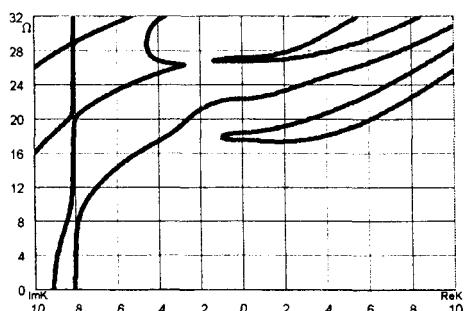


Рис. 7

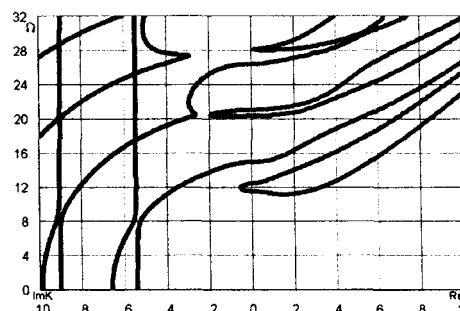


Рис. 8

тров на рис. 4 и рис. 8, однако в последнем случае частоты запираания бегущих волн становятся более высокими и возрастают значения $\text{Im } k$ возникновения "вертикальных" фрагментов в мнимой части спектра. Вместе с тем, для волновода с меньшим по угловой мере секторным вырезом (рис. 7) родственный спектр изменяется более существенно в действительной и мнимой части по сравнению со спектрами «симметричных» волн с низшим показателем изменяемости $n = 0$ при сохранении тех же качественных особенностей перестройки спектров.

Проведенные численные исследования подтверждают гипотезу о возможности существенной коррекции и управления структурой дисперсионных спектров нормальных волн в пьезоактивных цилиндрических волноводах за счет создания в них продольных секторных вырезов различной угловой меры.

РЕЗЮМЕ

Представлено методологію знаходження дисперсійних рівнянь, що описують повні спектри вільних нормальних хвиль у поляризованих уздовж осі п'єзокерамічних циліндрах, перерізом яких є кругова область із секторним вирізом довільної кутової міри. Побудовано та проаналізовано діаграми дисперсійних кривих для хвиль окремих мод спектра в хвильоводах з п'єзокераміки BaCaTiO_3 .

SUMMARY

The methodology of obtaining of the dispersion equations that describe full spectra of free normal waves in axially polarized piezoceramic cylinders with sector cut of arbitrary angular measure in cross section is proposed. Dispersion curve diagrams for waves of several modes of spectrum in waveguides made of ceramic material BaCaTiO_3 are obtained and analysed.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Микер Т., Мейтцлер А. Волновое распространение в протяженных цилиндрах и пластинках. - М.: Мир, 1966. - С. 140-203. (Физическая акустика / Под ред. У. П. Мэзона. Т. 1. Ч. А).
2. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. - К.: Наук. думка, 1981. - 284 с.
3. Ивина Н. Ф., Касаткин Б. А. Нормальные волны в анизотропном пьезоактивном волноводе // Дефектоскопия. - 1975. - № 4. - С. 27-33.
4. Шульга Н. А., Болкисев А. М. Колебания пьезоэлектрических тел. - К.: Наук. думка, 1990. - 228 с.
5. Шульга Н. А., Григоренко А. Я., Лоза И. А. Осесимметричные электроупругие волны в полом пьезокерамическом цилиндре // Прикладная механика. - 1984. - Т. 20, № 1. - С. 79-86.
6. Григоренко А. Я., Лоза И. А., Шульга Н. А. Распространение осесимметричных волн в пьезокерамическом полом цилиндре // ДАН УССР. Сер. А. - 1983. - № 3. - С. 34-37.
7. Shulga N.A. Propagation of harmonic waves in anisotropic piezoelectric cylinders. Waveguides with complicated properties // Int. Appl. Mech. - 2002. - 38, N 12. - P. 1440-1463.
8. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях. - М.: Мир, 1966. - С. 204-326. (Физическая акустика / Под ред. У. П. Мэзона. Т. 1. Ч. А).
9. Моисеенко И. А., Пузырев В. В. Моды распространяющихся нормальных волн в трансверсально-изотропном цилиндре секторного сечения // Теорет. и прикладная механика. - 2003. - Вып. 38. - С. 182-187.

Надійшла до редакції 14.03.2006 р.

ПРОДОЛЬНЫЕ ВИХРЕВЫЕ СТРУКТУРЫ ПРИ ОБТЕКАНИИ
КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

А.В.Воскобойник, В.А.Воскобойник,
Институт гидромеханики НАН Украины, г. Киев

1. Введение

Одним из важных факторов движения тел обтекания при оптимальной скорости – это минимум энергетических потерь, что связано с уменьшением сопротивления трения на поверхности тел и сопротивления давления (формы). Если движение происходит при числах Рейнольдса больших 10^6 , то методы управления направлены на изменение структуры турбулентного пограничного слоя. В зависимости от среды, в которой движется тело, методы управления имеют свои особенности. Так для турбулентного течения воды применимы методы снижения сопротивления с помощью введения высокомолекулярных добавок, поверхностно активных веществ, мелкодисперсных пузырьков воздуха в пристеночную область турбулентного пограничного слоя, так как эти методы используют изменение локальной реологии среды, а также применение полимерных покрытий. Вместе с тем, ряд методов, связанный с генерацией вихревых систем в пристеночном потоке, такие как риблеты, LEBU, продольная кривизна, применимы как для сжимаемой, так и для несжимаемой среды. Вихревые системы, формирующиеся в пристеночной области, в значительной мере определяют динамические характеристики обтекаемых тел. Масштабы вихревых структур и их интенсивность влияют на значения аэродинамического сопротивления движущихся тел. Поэтому вопрос изучения вихревых структур, естественно формируемых в турбулентном пограничном слое, условий их возникновения и развития остается актуальным и сегодня, несмотря на то, что этой проблеме посвящено огромное число экспериментальных и теоретических работ. Многообразие исследований в этой области определяется как важностью проблемы, так и ее сложностью. Тонкая структура пристеночных турбулентных течений, разделение этой структуры на случайную и детерминированную, определение масштабов соответствующих структур, степень воздействия искусственных возмущений на эти структуры – это объект изучения современных и будущих исследований.

Неустойчивости основного течения обычно являются началом или источником перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный в ограниченных сдвиговых потоках, обладающих низкой степенью турбулентности. Имеется ряд механизмов, которые приводят к разрушению ламинарного пограничного слоя, например, искривление профилей и вязкие неустойчивости, вторичные неустойчивости и поперечное течение. Рейлей показал, что для невязкого сдвигового течения над вогнутой поверхностью, подверженного действию центробежной силы, необходимым и достаточным условием существования невязкой осесимметричной неустойчивости является:

$$d(\Gamma^2)/dr < 0, \quad (1)$$

где Γ – циркуляция, определенная как $\Gamma = rU$. В литературе этот критерий неустойчивости носит название циркуляционного критерия Рейля. По-существу, неспособность локального градиента давления, при условиях (1), выдержать угловое количество движения жидкой частички, перемещающейся по направлению от стенки, приводит к неустойчивости.

Условия устойчивости определяются распределением значения скорости $|U_0|$ по сечению пограничного слоя [1 – 3]. Разделим, например, пограничные слои на две категории. То есть, пограничные слои с монотонными профилями скорости и пограничные слои с немонотонным распределением скорости. В случае монотонного профиля скорости, экстремумы скорости могут иметь место только на краях сдвиговых слоев, как, например, в случае с пограничным слоем Блазиуса. Немонотонный профиль скорости обладает экстремумами скорости, наблюдаемыми внутри пограничного слоя, как, например, в случае с пристеночными струями. Течения с немонотонным распределением скорости состоят из слоев, где амплитуда скорости $|U_0|$ увеличивается или уменьшается и, следовательно, они нарушают критерий невязкой устойчивости, независимо от того является ли форма стенки выпуклой или вогнутой. Потоки с монотонным распределением скорости в пограничном слое являются устойчивыми в случае вогнутых стенок тогда, когда значения скорости уменьшаются с удалением от стенки. Для неподвижной поверхности скорость на стенке является нулевой и растет с удалением от нее, удовлетворяя неравенство (1). Это приводит к тому, что все пограничные слои над неподвижной вогнутой стенкой являются потенциально неустойчивыми (рис. 1а). Течения над выпуклыми стенками с монотонным профилем скорости являются ус-

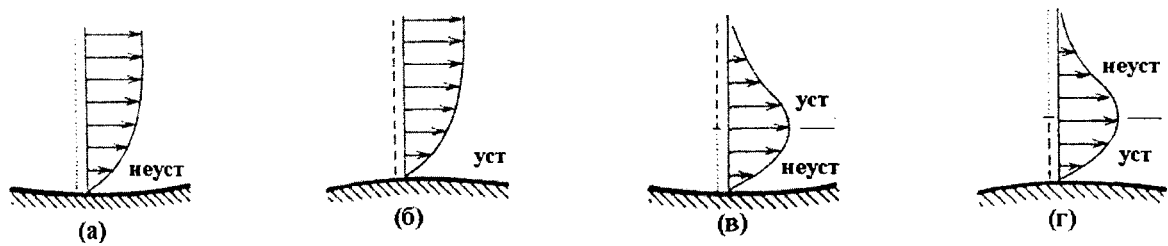


Рис. 1. Сдвиговые слои и их устойчивость в пограничном слое Блазиуса ((а) и (б)) и пристеночных струях ((в) и (г)) на криволинейной поверхности

тойчивыми, если значения скорости растут с увеличением расстояния от стенки (смотри, рис. 1б). В случае пристеночной струи над выпуклой стенкой, критерий устойчивости нарушается в области между точкой максимума скорости и краем пограничного слоя. Здесь начинается неустойчивое движение. Течение состоит из двух отчетливо различных слоев относительно свойств устойчивости (рис. 1г). В случае пристеночной струи над вогнутой стенкой, критерий устойчивости нарушается в области между стенкой и точкой максимума скорости. И здесь опять наблюдается явление неустойчивости. Течение также состоит из двух слоев с четко определенными свойствами устойчивости. Однако их местоположение противоположно случаю выпуклой стенки (см., рис. 1в). Для таких течений известно [2, 3], что вязкость оказывает только стабилизирующее воздействие на неустойчивости, обусловленные действием центробежных сил.

Неустойчивость вязких течений с пограничными слоями над вогнутыми поверхностями получила имя Гертлера, а возмущения в таких течениях обусловлены наличием вихрей Гертлера. Следует отметить, что эта неустойчивость не ограничивается вогнутой геометрией, а неустойчивость Гертлера может быть присуща для пристеночной струи над выпуклой поверхностью [2].

На основе теоретического анализа Гертлер показал, что неустойчивость имеет место в пограничном слое над вогнутой стенкой. Неустойчивость возникает тогда, когда параметр, который впоследствии был назван числом Гертлера

$$Go = (U_{\infty} \delta_x / \nu) (\delta_x / R)^{1/2} = (Re_{\delta_x})^{3/2} (Re_R)^{-1/2} \quad (2)$$

либо

$$Go_{\theta} = Go_{\delta^{**}} = (U_{\infty} \delta^{**} / \nu) (\delta^{**} / R)^{1/2} = (Re_{\delta^{**}})^{3/2} (Re_R)^{-1/2}, \quad (3)$$

достигает определенного критического значения. Здесь U_{∞} обозначает скорость набегающего потока, ν – кинематическая вязкость жидкости, $\delta_x = cX(Re_x)^{-1/2}$ – толщина пограничного слоя, c – константа, X – расстояние от переднего края, $Re_x = XU_{\infty} / \nu$ – число Рейнольдса вдоль криволинейной поверхности, R – радиус кривизны стенки, δ^{**} – толщина потери импульса. При анализе было принято, что течение является суперпозицией пограничного слоя и противоположно вращающихся вихревых пар, чьи оси были параллельны направлению набегающего потока, как показано на рис. 2. На вогнутой стенке ламинарный пограничный слой становится турбулентным при меньшем числе Рейнольдса, чем на плоской пластине и на выпуклой стенке. Этот эффект обусловлен появлением неустойчивости Гертлера, а число Гертлера дает состоятельную оценку механизму устойчивости.

В пограничном слое, формируемом над вогнутой поверхностью, зарождается неустойчивость, обусловленная взаимодействием центробежных сил и сил давления. Она способствует образованию продольно ориентированных стационарных вихрей Гертлера, которые играют существенную роль при переходе в пограничном слое из ламинарного режима обтекания в турбулентный на лопатках турбин и компрессоров, на лопастях двигателей и гребных винтов, на стенках сверхзвуковых сопел и т.д. Неустойчивость Гертлера встречается не только в пограничных слоях у вогнутой поверхности, она возникает также в окрестности точки растекания потока у обтекаемого тела, где набегающий поток меняет направление и линии тока искривлены. Аналогичные условия наблюдаются при обтекании клина или вблизи линии отрыва пограничного слоя. В пограничных слоях над вогнутой поверхностью удовлетворяется критерий циркуляции Релея (1) и течение подвержено действию центробежной неустойчивости [3] в виде стационарных противоположно вращающихся вихрей Гертлера (рис. 2). Сарик [4] представил аргументы, при изучении течения на вогнутой стенке, и показал, что неустойчивость Гертлера кардинально отличается от неустойчивостей Тейлора и Диана. Неустойчивость Гертлера является важной неустойчивостью пограничных слоев, которая, при определенных условиях, ускоряет переход к турбулентности. Кроме того, гертлеровская вихревая структура существует в турбулентных пограничных слоях над вогнутой

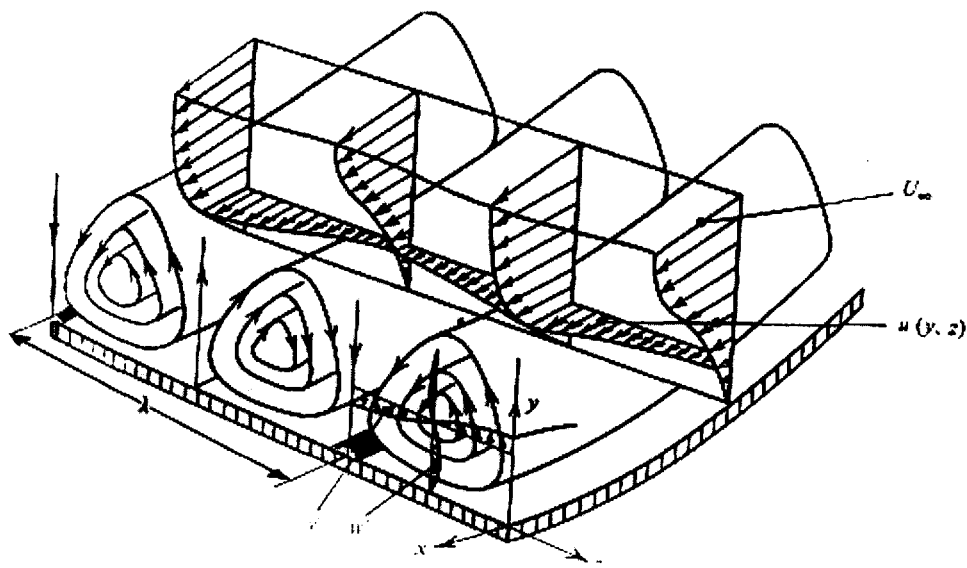


Рис. 2. Схема вихрей Гертлера с профилями скорости и следами намыва сажи на расстоянии λ .

поверхностью, над такой, как лопадки турбокомпрессоров. Известно, что переход к турбулентности в присутствии вихрей Гертлера обычно происходит через сильную вторичную неустойчивость, обусловленную нарушением монотонности профиля скорости.

Визуализация потока, при исследовании неустойчивости Гертлера, является широко используемой техникой, главным образом, из-за возможности регистрации трехмерного характера течения. В исследованиях обтекаемая поверхность покрывается тонким слоем смываемого красителя, чья скорость смыва пропорциональна поверхностным касательным напряжениям. Неустойчивость в виде вихрей Гертлера увеличивает касательные напряжения в местоположениях, соответствующих потоку жидкости, устремляющейся к стенке, и уменьшает их в областях, где жидкость подымается от стенки. В эксперименте белое бифениловое покрытие, нанесенное на черную стенку, дает возможность получить контрастную картину. Белые полосы соответствуют подъему покрытия, а черные полосы отвечают высокоскоростному движению жидкости по направлению к обтекаемой поверхности, с которой смыто контрастное покрытие. Поперечное расстояние между соседними двумя полосками одного и того же цвета отвечает одной паре противоположно вращающихся вихрей и определяет поперечную длину волны неустойчивости ($\lambda_z = 2\pi/\alpha$, где α - волновое число). Форма струек демонстрирует, что длина волны для данных условий эксперимента остается неизменной в продольном направлении.

Данная работа посвящена исследованию неустойчивости Гертлера в случае, когда на неподвижную вогнутую поверхность набегают пристеночная струя, на которую воздействуют сносящие потоки.

2. Экспериментальный стенд, программа и методика измерений

Экспериментальные исследования проводились на аэродинамической установке, представляющей собой вихревую камеру с заглушенным торцом, работающую на всасывание воздуха из лабораторного помещения. Экспериментальный стенд состоит из аэродинамической вихревой камеры, измерительного комплекса, содержащего пневмометрическую и термоанемометрическую аппаратуру фирмы Диза, комплекса спектроанализирующей аппаратуры фирмы Брюль и Кьер, оборудования лазерного контроля положения датчиков, средств визуализации и регистрации экспериментальных данных (видео-, фотоаппаратуры и четырехканальный измерительный магнитофон). Схема рабочего участка экспериментальной установки представлена на рис. 3. Рабочий участок представляет собой прозрачную, изготовленную из органического стекла, вихревую камеру с фиксируемым в различных положениях глухим торцом [5]. Вихревая камера – это цилиндрическая труба внутренним диаметром $d=102 \cdot 10^{-3}$ м и длиной $l_0=635 \cdot 10^{-3}$ м. Подвод воздуха осуществлялся через одиночные сменные сопла прямоугольного поперечного сечения $41 \cdot 10^{-3} \times 25 \cdot 10^{-3}$ м² со скруглениями при вершинах. На входе в рабочий участок направление воздуха соответствует направлению впускного сопла и образует угол тангенциальности γ к оси рабочего участка (смотри, рис. 3). Углы тангенциальности во время измерений варьировались: $\gamma=32^\circ \dots 90^\circ$ (0,559 рад...1,571 рад). Диапазон изменения чисел Рейнольдса, определенных по средней скорости воздуха в сопле и его эквивалентному диаметру, составлял $Re_c=U_\infty d/\nu \approx (5 \dots 8) \cdot 10^4$. Расстояние от торца до со-

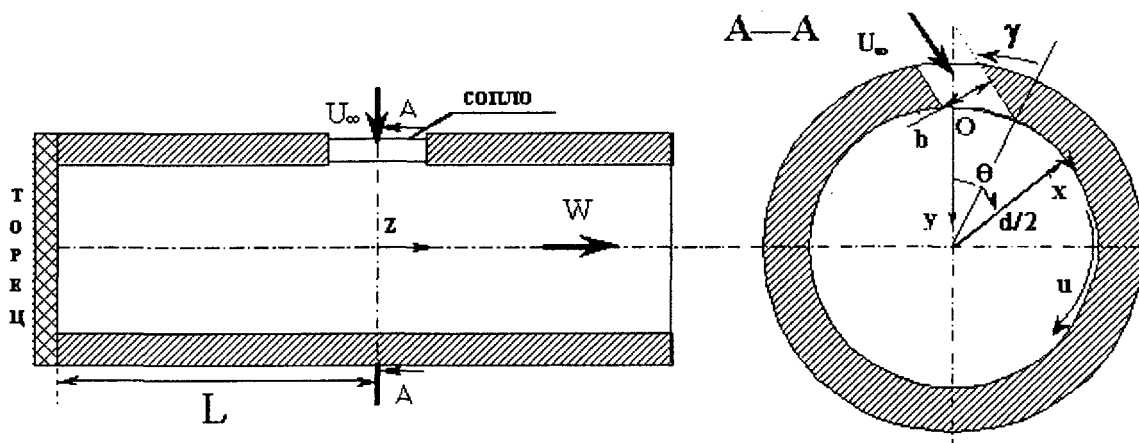


Рис. 3. Схема рабочего участка с координатными осями, расположением и точками отсчета углов γ и θ пла $L/d=4,4$. Использовалась криволинейная система координат с центром на внутренней поверхности сопла при $\theta=0^\circ$, ось OY направлялась по нормали к внутренней поверхности вихревой камеры в сторону ее оси, ось OZ – по оси вихревой камеры, а ось OX – по внутренней поверхности вихревой камеры.

Контроль и измерение экспериментальных данных осуществлялись при помощи контрольно-измерительной аппаратуры (вольтметры, осциллографы, частотомеры, усилители), пневмометрических трубок Пито, Пито-Прандтля, термоанемометрической аппаратуры фирмы Диза, а также спектроанализирующей аппаратуры фирмы Брюль и Кьер.

В ходе экспериментальных исследований проводилась оценка погрешности измерений для ряда характерных параметров исследуемых потоков. Погрешность измерения геометрических и осредненных кинематических характеристик вихревого течения и формируемых когерентных вихревых структур в пристеночной области вихревой камеры составляла не более 10 % при доверительном интервале 0,95, что соответствует дисперсии 2σ .

3. Результаты исследований

Для изучения процессов, происходящих в пристеночной области вихревой камеры, а также определения характерных областей в ней, был использован метод визуализации с помощью смеси сажи и керосина. Эта смесь наносилась тонким слоем по всей внутренней поверхности цилиндра в районе рабочего сопла ($-0,6 < z/d < 0,6$) (смотри, рис. 3). После включения стенда смесь начинала перемещаться по внутренним стенкам цилиндра под действием поверхностных касательных напряжений. Керосин испарялся, и на стенках оставались неравномерные следы сажи, которые представляли собой чередующиеся линии, отражающие кинематику потока в пристеночной области вихревой камеры. Для регистрации картин визуализации использовалась фотосъемка. Кроме того, полученные картины визуализации зарисовывались на кальку, которая оборачивалась вокруг трубы [6].

На основании результатов исследований формирования гертлеровских вихревых систем построена нейтральная кривая, которая приведена на рис. 4. Здесь представлены результаты расчетов и экспериментов параметров продольных вихревых систем при обтекании жесткой криволинейной поверхности [7 – 9]. Расчет полученных экспериментальных данных, показанных на рис. 4, приведен ниже. Нейтральные кривые, представленные на рис. 4 показывают, что в то время, как пограничный слой Блазиуса неустойчив для всех возмущений с волновыми числами $\alpha < 1,5$, пристеночная струя неустойчива для возмущений с волновыми числами $\alpha > 1,5$. Причина этого явления может быть выяснена из рассмотрения полей скоростей возмущений. Например, вихри, соответствующие волновым числам $\alpha > 1,5$, являются очень маленькими по размеру и концентрируются вблизи стенки, где большое воздействие оказывает механизм неустойчивости. При этом необходимо обратить внимание на значения градиента скорости. Так, например, увеличение угловой скорости внутреннего цилиндра, в случае течения между концентрически вращающимися цилиндрами, увеличивает градиент радиальной скорости и усиливает механизм неустойчивости. По аналогии пограничный слой, который имеет выше градиент скорости в области близкой к стенке, соответствует случаю концентрических цилиндров с внутренним цилиндром, вращающимся более быстро и, следовательно, обладает повышенной неустойчивостью. Установлено [2, 10], что течения с монотонным распределением скорости становятся неустойчивыми раньше, чем течения с немонотонным профилем скорости.

В представленных исследованиях повышенный интерес уделялся картинам течения непосредственно под соплом в окрестности $-0,15 < z/d < 0,15$ при $70^\circ < \theta < 160^\circ$ и $-0,2 < z/d < 0,2$ при $200^\circ < \theta < 320^\circ$. Именно в этих пристеночных областях есть все необходимые условия для существования вихрей Гертлера. Картины визуализации, полученные при $\gamma > 55^\circ$, это подтверждают. В случае, когда угол тангенциальности

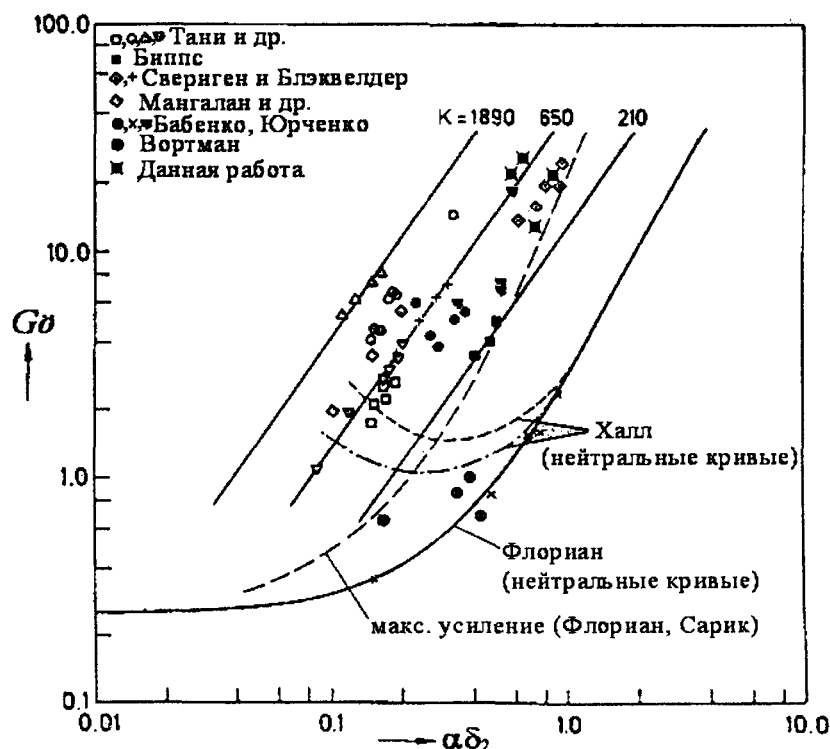


Рис. 4. Нейтральная кривая гертлеровских вихрей с экспериментальными точками

$\gamma < 50^\circ$ происходит отрыв пограничного слоя. Входящая в вихревую камеру струя ударяется о внутреннюю стенку вихревой камеры, когда $\theta > 70^\circ$, где вихри Гертлера не формируются.

На рис. 5 показаны фотографии сажевой визуализации для соотношений в вихревой камере $L/d=4,4$, $\alpha=0^\circ$ и $\gamma=67^\circ$ при $\theta=90^\circ$. Здесь зафиксирована мелкая сетка вымытых светлых полосок. Только в плоскости оси сопла полоски направлены параллельно оси OX. Далее они расходятся, образуя на внутренней поверхности вихревой камеры неравнобедренную трапецию ABCD с криволинейными боковыми

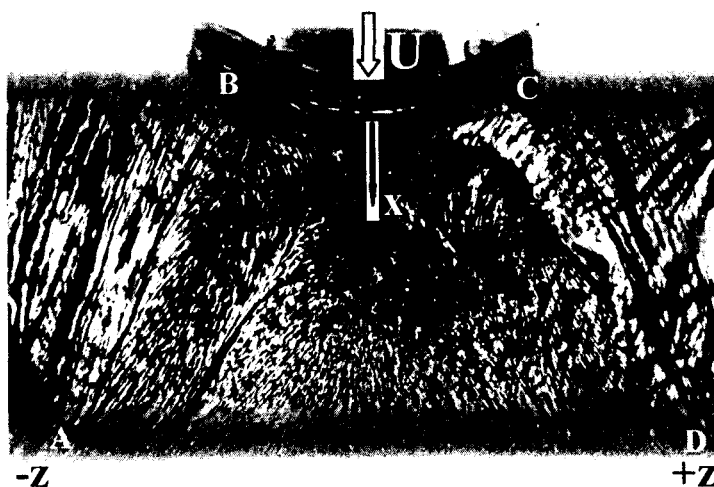


Рис. 5. Визуализация потока в районе сопла вихревой камеры: $L/d=4,4$; $Re_c=7,8 \cdot 10^4$; $\gamma=67^\circ$; $\alpha=0^\circ$; $\theta=90^\circ$

сторонами AB и CD. Если трапецию ABCD развернуть на плоскость, то угол следа между полоской сажи AB и осью OX будет равен 28° , между CD и осью OX – 33° . Расхождение полосок обусловлено тем, что внутри вихревой камеры существует сложное вихревое движение. Так, согласно [6], внутри вихревой

камеры, в торцевой ее области ($z < 0$), существуют как минимум четыре крупномасштабные когерентные вихревые структуры. Они имеют разнонаправленные компоненты осевой скорости в вихревой камере. В результате чего, входящая в вихревую камеру струя оказывается под воздействием растягивающих усилий со стороны потоков, которые движутся в противоположных направлениях.

Пристеночная струя, истекающая из входного сопла, переносится с окружной скоростью, превышающей осевую скорость в трубе. Эта струя, сделав полный оборот в поперечной плоскости сечения вихревой камеры, в районе сопла натекает на себя и раздваивается. Поэтому на передней стенке ($\theta = 90^\circ$) более явно видно расхождение вымытых линий от оси OX , чем при $\theta = 270^\circ$. Таким образом, боковые стороны AB и CD неравнобедренной трапеции на рис. 5 представляют собой следы границы между входящей струей и ее разделяющимися частями. Раздваивающиеся части в свою очередь воздействуют на входящую пристеночную струю, вытягивая ее в поперечном направлении по оси z вдоль вихревой камеры.

Измеряя масштаб размыва сажи под соплом (рис. 5), были получены расстояния между следами $\Delta z = (0,9 \div 1,2)$ мм при $70^\circ < \theta < 160^\circ$. Эти расстояния определяют длину волны для вихрей Гертлера: $\lambda = \Delta z$ (рис. 2). Были проведены оценочные расчеты для определения нахождения полученных экспериментальных результатов на нейтральной кривой гертлеровских вихрей (рис. 4). Из термоанемометрических измерений непосредственно под соплом были построены профили скорости (рис. 3), которые хорошо согласуются с профилями, полученными в работах [4, 11]. Числа Гертлера были вычислены по формуле (2) для измеренных толщин пограничного слоя δ и толщин потери импульса δ^{**} . Для $U_\infty = 37,6$ м/с, $R = 5,1 \cdot 10^{-2}$ м и данного диапазона значений θ и λ имеем: $0,9 \text{ мм} < \lambda < 1,2 \text{ мм}$; $0,88 \text{ мм} < \delta < 1,2 \text{ мм}$; $0,11 \text{ мм} < \delta^{**} < 0,16 \text{ мм}$; $11,9 < Go < 22,1$.

Подобные картины визуализации получены тогда, когда фотоаппарат располагался под углом $\theta = 270^\circ$ относительно рабочего участка (рис. 6). При этом зафиксирована более крупная сетка вымытых светлых полосок в отличие от измерений под углом $\theta = 90^\circ$. Сажевые полоски расходятся под меньшим углом, около 7° , как в сторону вентилятора, так и в сторону торца вихревой камеры. Для углов $200^\circ < \theta < 320^\circ$ измерены масштаб размыва сажи под соплом (рис. 6) – $\Delta z = (1,5 \div 2)$ мм при $200^\circ < \theta < 320^\circ$. Отсюда для данного диапазона значений U_∞ и λ , при $200^\circ < \theta < 320^\circ$ имеем: $1,5 \text{ мм} < \lambda < 2 \text{ мм}$; $1,4 \text{ мм} < \delta < 1,8 \text{ мм}$; $0,18 \text{ мм} < \delta^{**} < 0,23 \text{ мм}$; $26,0 < Go < 37,2$.

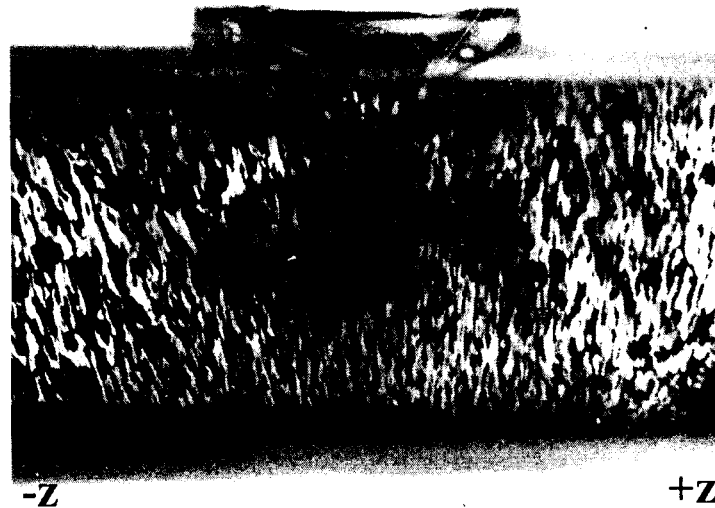


Рис. 6. Визуализация потока в районе сопла вихревой камеры: $L/d = 4,4$; $Re_c = 7,8 \cdot 10^4$; $\gamma = 67^\circ$; $\alpha = 0^\circ$; $\theta = 270^\circ$

Вычисленные значения чисел Гертлера показаны на рис. 4 и они лежат в области неустойчивости. Если учесть, что λ – длина волны вихревой пары (см. рис. 2), то поперечный масштаб вихрей Гертлера будет меньше толщины пограничного слоя. Поскольку представленные расчетные результаты находятся в зоне неустойчивости, то вихри Гертлера должны развиваться, что приводит к увеличению их масштаба. Поэтому при перемещении вдоль окружности вихревой камеры вблизи сопла гертлеровские вихри укрупняются, увеличиваясь по оси OY и OZ (рис. 5, рис. 6). Измеренное поперечное сечение вихрей Гертлера, характеризуемое отношением длины их волны к толщине пограничного слоя, в представленных измерениях коррелируют с результатами работ [7, 11] для жесткой вогнутой поверхности.

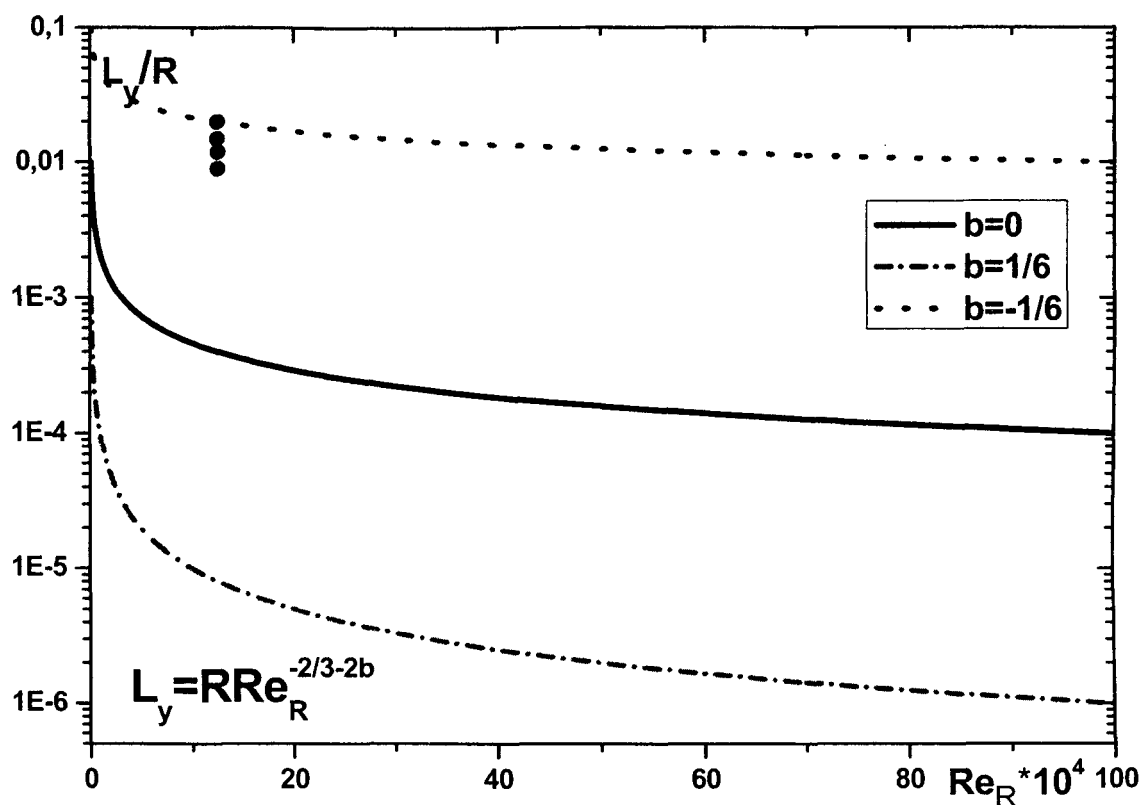


Рис. 7. Графік впливу інерційних і вязких сил на вихри Гертлера

Согласно [12, 13], можно провести оценку доминирующей силы, которая влияет на формирование и развитие продольных вихревых структур вблизи входного сопла вихревой камеры. Из уравнения сохранения импульса по нормали и уравнения неразрывности есть возможность записать: $(V_* U_* / L_x) \square (U_*^2 / R) \cdot (V_* / L_y) \square (U_*^2 / L_x)$, откуда следует связь между характерными пространственными масштабами L_x , L_y , L_z : $L_x^2 / L_y = L_z^2 / L_y = R$. Это соотношение масштабов показывает, что $L_x / R < 1$. Если центробежные силы и силы вязкости уравниваются градиентом давления, то можно записать: $(P_* / L_y) \square (U_*^2 / R) + (v V_* / L_y^2)$. Равенство инерционных сил и вязких сил дает значения характерных пространственных масштабов $L_x / R = Re_R^{-1/3}$, а следовательно $L_y / R = L_z / R = Re_R^{-2/3}$. Однако это не обязательно [12], так как $(R / L_x)^3 / Re_R$ можно положить как существенно больше 1 (преобладание вязких сил), так и меньше 1 (преобладание центробежных). При этом изменяется зависимость этих масштабов от числа Re_R , но не изменяется соотношение этих масштабов. Поэтому всегда можно положить $L_x / R = Re_R^{-1/3-b}$ либо $L_y / R = L_z / R = Re_R^{-2/3-2b}$. Величина масштаба соответственно меняется на разных расстояниях от поверхности:

- а) при $b > 0$ доминируют вязкие эффекты;
- б) при $b = 0$ вклад инерционных и вязких сил одинаков;
- в) при $b < 0$ инерционные силы доминируют;
- г) при $b = -1/3$ масштабы перестают зависеть от Re_R .

Эти оценки подтверждаются численными расчетами на криволинейной поверхности [12]. Для определения доминирующего влияния сил на формирование и развитие вихрей Гертлера в исследуемом потоке была построена кривая $L_z / R = Re_R^{-2/3-2b}$, на которую нанесены экспериментальные точки (рис. 7). Из графика следует, что для исследуемого режима обтекания на вихри Гертлера доминирующее влияние оказывают инерционные силы.

Из диаграммы устойчивости Гертлера, в соответствии с [13], определен минимальный масштаб продольных вихрей λ_{min} согласно зависимости $K = U_\infty (\lambda_{min}^3 / R)^{1/2} / v = 30$. Откуда: $\lambda_{min} = \sqrt[3]{900 R v^2 / U_\infty^2} \approx 9 R Re_R^{-2/3}$, где $Re_R = R U_\infty / v$. Для исследуемого случая $Re_c = 7,8 \cdot 10^4$, $U_\infty = 37,6$ м/с, $R = 5,1 \cdot 10^{-2}$ м, $v = 1,51 \cdot 10^{-5}$ м²/с имеем $Re_R = 1,25 \cdot 10^5$, тогда $\lambda_{min} \approx 0,195 \cdot 10^{-3}$ м. Следовательно,

масштабы, полученные на основании картин визуализации потока, соответствуют масштабам гортлеровской нейтральной кривой.

4. Выводы

Сажевая визуализация позволила получить картины течения в пристеночной области вихревой камеры в районе сопла. Именно в этой области есть все необходимые условия для существования вихрей Гортлера, и все картины визуализации, полученные при $\gamma > 55^\circ$, это подтверждают. Установлено, что исследуемые вихри Гортлера имеют большие углы расхождения, порядка 7° , которые в классической постановке не регистрируются. Из расчетов масштабов вихрей Гортлера, показано, что полученные результаты находятся в зоне неустойчивости, а на формирование и развитие вихрей Гортлера доминирующее влияние оказывают силы инерции.

РЕЗЮМЕ

Робота присвячена дослідженню вихорів Гортлера, які виникають на внутрішній криволінійній поверхні вихрової камери під поодиноким впускним соплом, яке розташоване під кутом тангенціальності $\gamma > 55^\circ$. Проведені оціночні розрахунки масштабу вихорів Гортлера. Показано, що сили інерції мають визначальний вплив на досліджувані поздовжні вихрові структури.

SUMMARY

This report is devoted to investigation of the Gortler instability of boundary layer over concave wall of vortex chamber. The scale calculations of the Gortler vortices are carried out. The inertia force has defining influence on the investigated longitudinal vortical structures.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Никишов В. И., Олексюк В. В., Пихур С. В. Экспериментальные исследования развития вихрей Тейлора-Гортлера на выпуклой поверхности изогнутой пластины, движущейся по криволинейной траектории // Прикладная гидромеханика – 2005. 3-4. – С. 86 – 97.
2. Floryan J. M. On the Gortler instability of boundary layers // TR 1120T. – National Aerospace Laboratory (Japan), 1991. – 23 p.
3. Saric W. S. Control of Gortler vortices // AGARD FDP Workshop on High Speed Body Motion in water. – Kiev (Ukraine), 1997. – P. 8-1 – 8-5.
4. Saric W. S. Gortler vortices // Annu. Rev. Fluid Mech. – 1994. – 26. – P. 379-409.
5. Бабенко В. В., Блохин В. А., Воскобойник В. А., Турик В. Н., Воскобойник А. В. Структура закрученного потока, входящего в вихревую камеру // Технологические системы: Научные разработки и результаты исследований. – 2002. – № 2 (13), Вып. 1. – С. 102-106.
6. Babenko V. V., Turick V. N., Voskoboynick V. A., Voskoboynick A. V. Swirling jets and coherent structures in vortex chambers // The 5th Euromech Fluid Mechanics Conference: "EFMC - 2003". – Toulouse (France). – 2003. – P. 397.
7. Юрченко Н. Ф., Бабенко В. В. Критерий устойчивости трехмерных возмущений на вогнутых эластичных поверхностях // Инж.-физ. ж. – 1987. – Т. 52, № 5. – С. 781-787.
8. Bippes H. Experimentelle untersuchungen des laminar turbulent umschlags an einer parallel angeströmten konkaven wand // Heidelb. Akad. Wiss., Math. Naturwiss. Kl., Sitzungsberg. – 1972. – 3 Abhandlung, P. 103-108.
9. Wortman F. X. Visualization of transition // J. Fluid Mech. – 1969. – Vol. 38, Part 3. – P. 473-480.
10. Floryan J. M., Saric W. S. Stability of Gortler vortices in boundary layers. // AIAA J. – 1982. – 20, № 3. – P. 316-324.
11. Формирование турбулентности в сдвиговых течениях / Козлов Л. Ф., Цыганюк А. И., Бабенко В. В. и др. – Киев: Наукова думка, 1985. – 284 с.
12. Воропаев Г. А. Характерные масштабы в пограничном потоке на криволинейной поверхности // Годичный отчет ИГМ НАНУ за 2003 год. – К., 2004. – С. 66-67.
13. Никифорович Е. И. Асимптотические пространственно-временные свойства ламинарных пограничных слоев над искривленными поверхностями // Прикладна гідромеханіка. – 1999. – Том 1 (73), № 1. – С. 38-51.

Надійшла до редакції 10.03.2006 р.

УДК 532.517.2:518.12

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛАМИНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ТРУБАХ С ПЕРИОДИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ (ТПИПС)

Н.В. Фиошин, Д.В. Богданов, А.Е. Попова

1. Введение

Экспериментальным и теоретическим исследованиям ламинарных течений в трубах с периодически изменяющимся поперечным сечением (ТПИПС) посвящено достаточно много работ. Исследование данного вида течения связано с их практическим применением. Данную задачу можно разделить на несколько направлений. Во-первых, исследование течений крови в кровеносных сосудах со стенозом, во-вторых, исследование задач теплообмена в теплообменниках, в третьих, моделирование вторичного извлечения нефти при ее движении через пористую среду и т.д.

Известен ряд работ, в которых отмечен факт снижения полного гидродинамического сопротивления в трубах с периодически изменяющимся поперечным сечением малой амплитуды (до 10% от среднего радиуса трубы). Однако, данные по влиянию геометрии трубы переменного сечения на перепад давления довольно противоречивые и недостаточно изучено влияние формообразующей стенки на гидродинамические поля.

В данной работе предложен алгоритм, позволяющий найти решения уравнения Навье-Стокса в ТПИПС с использованием ступенчатой аппроксимации на нерегулярной сетке с интерполяцией граничного условия для функции тока. Результаты расчета качественно согласовываются с работой Ральфа [1].

2. Математическая постановка и метод ее решения

2.1. Геометрия течения. ТПИПС состояла из одинаковых секций. Схема одной такой секции приведена на рис.1. В качестве основных геометрических параметров выбраны: l_g – длина диффузорного участка, l_k – длина конфузорного участка, a – амплитуда, l_0 – длина секции ($l_0 = l_g + l_k$).

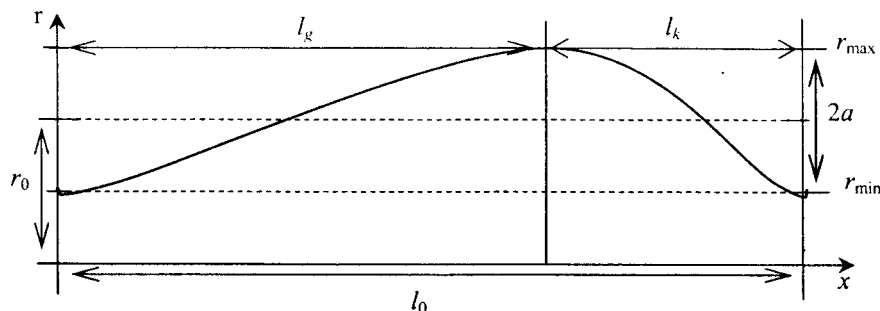


Рис.1. Секция трубы с периодически изменяющимся поперечным сечением

На рис.1 также обозначены, средний радиус трубы r_0 ; радиус минимального и максимального сечений соответственно – r_{min} , r_{max} ; x – осевая координата, r радиальная координата.

Радиус трубы r_{mp} изменялся по синусоидальному закону в диффузорном и конфузорном участках секции и был записан в следующем виде:

$$r_{mp} = \begin{cases} r_0 - a \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{l_g}\right) & 0 \leq x \leq l_g, \\ r_0 + a \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot (x - l_g)}{l_k}\right) & l_g < x \leq l_0. \end{cases}$$

Следовательно, при изменении x от $x = 0$ до $x = l_g$ имеет место диффузорное течение, а в области от $x = l_g$ до $x = l_0$ – конфузорное.

2.2. Уравнения и граничные условия. Расчет течений осуществлялся при следующих допущениях: течение двумерное осесимметричное, стабилизированное и периодическое с периодом l_0 ; жидкость несжимаемая, ньютоновская; массовые силы отсутствуют. Так как расчетная область имеет цилиндрическую симметрию, используется цилиндрическая система координат, в которой исходное уравнение Навье-Стокса и уравнение неразрывности в безразмерном виде имеют следующий вид:

в проекции на ось x :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right), \quad (1)$$

на ось r :

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r^2} \right), \quad (2)$$

уравнение неразрывности:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r \cdot V)}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

где P – давление U, V – составляющие скорости, x и r осевая и радиальная координата соответственно.

Система уравнений (1)–(3) дополнена следующими граничными условиями

$$\text{на оси: } \frac{\partial U}{\partial r} = 0, \quad V = 0 \text{ при } r = 0, \quad \text{на стенке: } U = 0, \quad V = 0 \text{ при } r = r_{\text{ст}}. \quad (4)$$

2.3. Метод решения. Воспользуемся традиционным подходом вычислительной гидродинамики, определим функцию тока ψ и завихренность ω как

$$U = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad V = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \omega = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial r}.$$

Тогда задача сводится к решению уравнения переноса завихренности и уравнения Пуассона для функции тока. В безразмерном виде эти уравнения будут иметь следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\omega}{r^2} = \text{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\omega}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right), \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -r \cdot \omega. \quad (6)$$

Система уравнений (5)–(6) дополняется следующими граничными условиями:

$$\psi = \frac{1}{2 \cdot \pi}; \quad \omega = \frac{(7\psi_{i,jc} - 8\psi_{i,jc-1} + \psi_{i,jc-2})}{2h_r^2} \quad \text{при } r = r_{\text{ст}} \text{ (на стенке);} \quad (7)$$

$$\psi = 0; \quad \omega = 0; \quad \text{при } r = 0 \text{ (на оси);}$$

где $\psi_{i,jc}$ – значение функции тока на стенке.

В уравнении (7) указано граничное условие для завихренности второго порядка точности [2].

Система уравнений (5)–(7) решалась методом чередующих направлений [3] до $\varepsilon = 10^{-6}$, где $\varepsilon = \max |\omega^{n+1}_{i,j} - \omega^n_{i,j}|$ с нулевыми начальными полями для ω, ψ , используя конечно-разностную аппроксимацию второго порядка точности.

Так как, функции ψ и ω в пристеночной области будут претерпевать существенные изменения, тогда введем переменный шаг по радиальной координате. Минимальный шаг подберем таким, чтобы граница исследуемой области после аппроксимации была более гладкой, тем самым точнее удовлетворим граничным условиям. Таким образом, была получена нерегулярная сетка с плавным сгущением к стенке, для нее алгебраический аналог первой и второй производной имеет следующий вид:

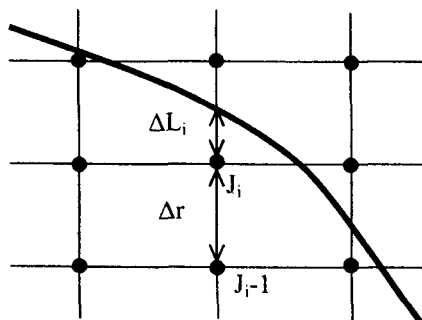


Рис.2. Конечно-разностная сетка вблизи нерегулярной границы

$$\frac{\partial A}{\partial r} = \frac{1}{2} \left(\frac{A_{i,j+1} - A_{i,j}}{h_{j+1}} + \frac{A_{i,j} - A_{i,j-1}}{h_j} \right),$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} = \frac{1}{h} \left(\frac{A_{i,j+1} - A_{i,j}}{h_{j+1}} - \frac{A_{i,j} - A_{i,j-1}}{h_j} \right), \quad (2.29)$$

$$\text{где } h = 0,5 \cdot (h_{j+1} + h_j).$$

В связи с криволинейностью границы расстояние от внутреннего узла сетки до границы непостоянно и отлично от шага сетки. Воспользуемся линейной интерполяцией для определения значения функции ψ в

каждом узле разностной сетки, отстоящем от границы области на расстоянии, меньше шага сетки. Интерполяция проводится по заданному значению функции ψ на границы области и ее значениям в узлах сетки, соседних с узлом, прилежащим к границе. Значение функции ψ в точке J_i можно определить по формуле: $\psi(i, J_i) = \psi(i, J_{i-1}) + \Delta r / [\Delta r + \Delta L_i] \cdot [\psi_{gr} - \psi(i, J_{i-1})]$ где $\psi(i, J_i)$ – искомая функция, ψ_{gr} – значение на границы (рис.2) [3].

3. Результаты расчета

Для проверки алгоритма сравним полученные результаты с работой Ральфа [1]. Отметим сразу, что используемый алгоритм не устойчив для данной геометрии при Рейнольдсах выше 300. В связи с этим не удалось сравнить результаты при $Re=500$.

На рис.3(I) приведены линии тока, полученные по выбранному алгоритму для чисел Рейнольдса в пределах $Re = 5 \div 100$ с геометрией $ld = lk; l_0 = 2,5; a = 0,5$, где жирная линия указывает линию тока равной значению на стенки. На рис.3(II) показаны линии тока, взятые из статьи.

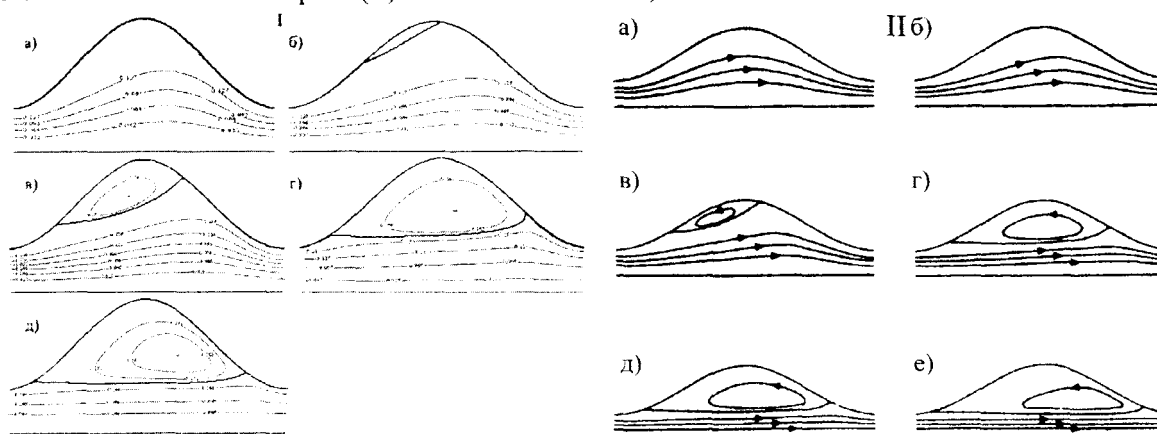


Рис. 3. Функция тока:
I – для используемого алгоритма, II – работа Ральфа
(а– $Re=5$; б– $Re=10$; в– $Re=15$; г– $Re=40$; д– $Re=100$; е– $Re=500$)

Из рис.3 видно, что линии тока качественно согласуются, только в исследуемом случае отрыв потока наступает при $Re=10$, а у Ральфа М.Е. [1] при $Re=12$.

На рис.4 приведены изолинии завихренности для выбранного алгоритма, для чисел Рейнольдса в пределах от $Re = 5 \div 100$, (+) и (–) – зоны положительной и отрицательной завихренности ω . На рис.4(II) показаны линии тока, взятые из статьи.

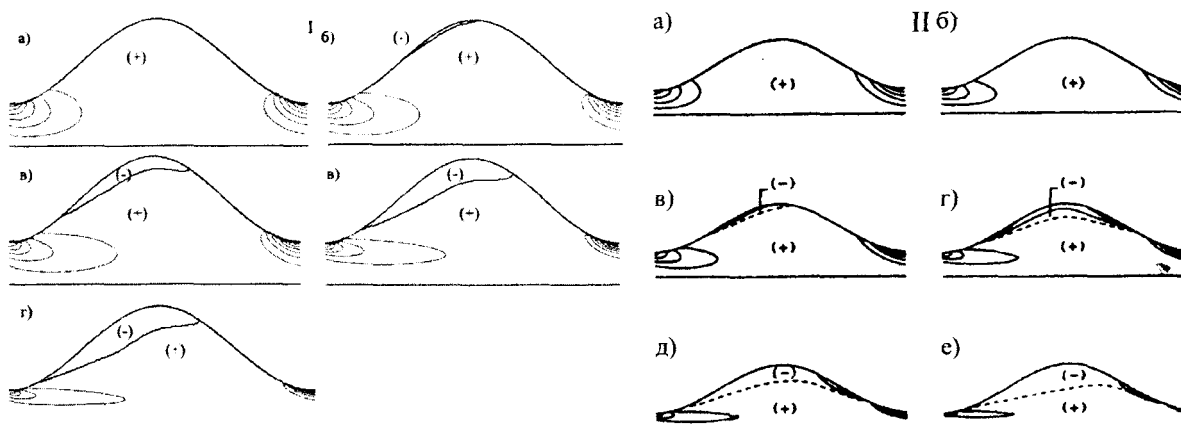


Рис.4. Изолинии завихренности для выбранного алгоритма:
I – для используемого алгоритма, II – работа Ральфа
(а– $Re=5$; б– $Re=10$; в– $Re=15$; г– $Re=40$; д– $Re=100$)

Из рис.4 видно, что изолинии завихренности имеет одинаковый вид для соответствующих чисел Рейнольдса.

Сравним профили скорости для осевой и радиальной составляющих в сужении и расширении. На рис.5 приведены профили скорости для выбранного алгоритма, а на рис.6 из работы Ральфа.

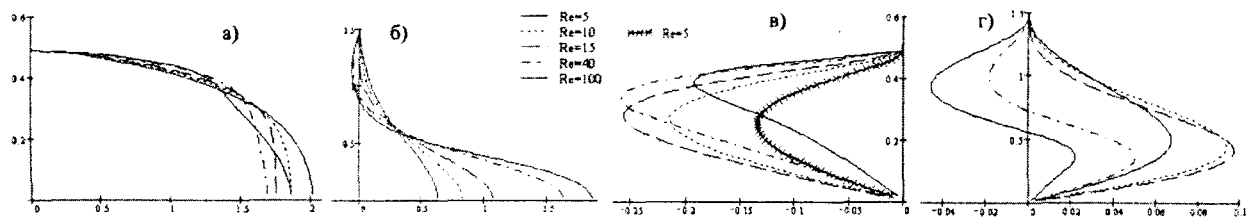


Рис.5. Профили скорости для выбранного алгоритма
а) –осевая скорость в сужении, б) –осевая скорость в расширении, в) –радиальная скорость в сужении, г) – радиальная скорость в расширении

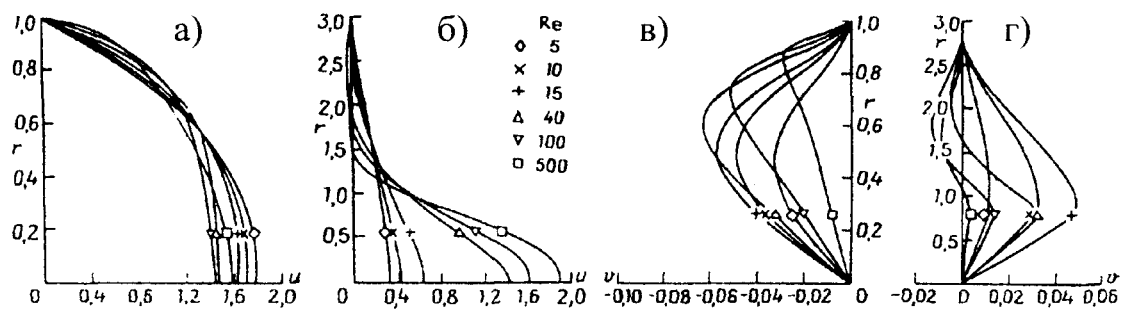


Рис.6. Изолинии завихренности, взятые из статьи Ральфа [1]

Из рисунков 5 и 6 видно, что профили скорости качественно согласуются. Таким образом, результаты расчета по выбранному алгоритму качественно согласовываются с работой Ральфа М.Е. Проанализируем поведение завихренности на стенке. На рис.7 приведен график зависимости $\omega(x)$ на стенке для геометрии с параметрами $a=0,5$; $l_0=2,5$.

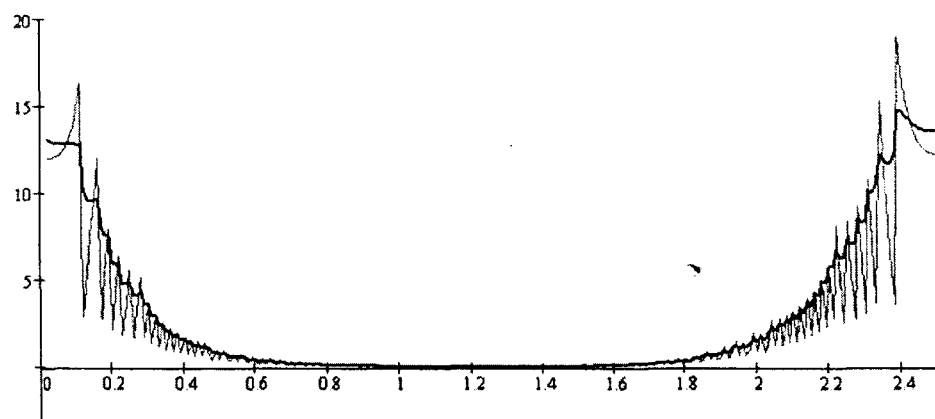


Рис.7. Зависимость ω от x на стенке ($a=0,5$; $l_0=2,5$)
— без использования интерполяции граничного условия для ψ ;
— с интерполяцией

Из рис.7 видно, что использование интерполяции граничного условия для функции тока существенно снижает эффект ступенчатой аппроксимации. Однако, при $l_0=8$; $a=0,2$ (рис.8) то есть при меньшем угле раскрытия диффузора данный недостаток не может быть устранен таким способом.

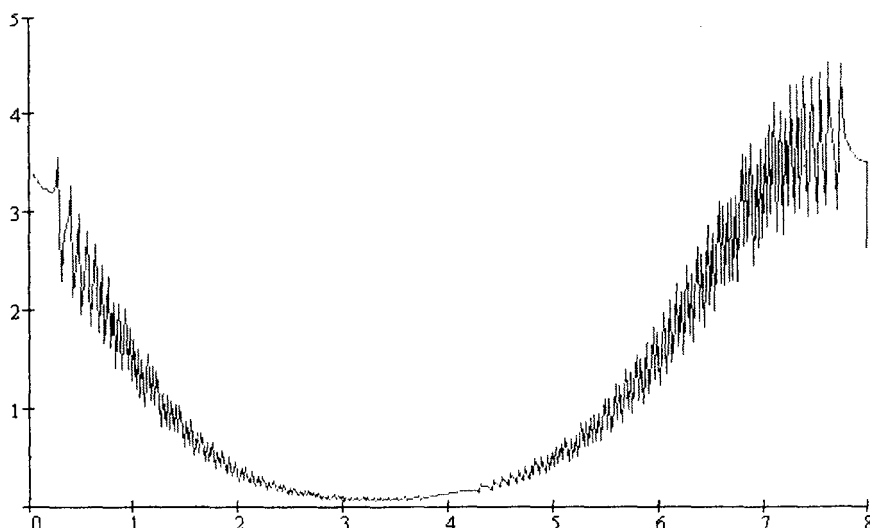


Рис.8. Зависимость ω от x на стенке ($a=0.2$; $l_0=8$)

Выводы:

1. Результаты предложенного алгоритма решения качественно согласуются с работой Ральфа [1].
2. Использование интерполяции граничных условий для функции тока снижает эффект ступенчатой аппроксимации при большом угле раскрытия диффузора.
3. Данный алгоритм применим только при больших углах раскрытия диффузора.

РЕЗЮМЕ

Розроблено математичну модель чисельного рішення задачі ламінарної течії в трубах, в яких періодично змінюється поперечний переріз. Проведено тестові розрахунки полів компонент швидкості, функцій струмені і вихору. Отримано гарний збіг результатів розрахунку з роботою Ральфа [1].

SUMMARY

A mathematical model of numerical solution of a sum of the laminar flow in pipes with a periodically changing cross-section is worked out. Test accounts of velocity profiles, stream functions and vorticity are carried out. A good coincidence of the account results with the work of the author is obtained.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ральф М.Е. Стационарные структуры течения и перепады давления в трубах с волнистой стенкой. // Теоретические основы инженерных расчетов. – 1988, №2. – 243-252 с.
2. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 400 с.
3. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидродинамика и теплообмен. – М.: Мир, 1990. – 392 с.

Надійшла до редакції 17.05.2006 р.

УДК 532.517.4

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ТРУБАХ С ПЕРИОДИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ (ТППС)

Е.Н.Кожекина, Н.В.Финошин

1. Введение

Интерес к исследованию процессов, происходящих около волнистых поверхностей, обусловлен широким кругом практических задач. Технические устройства с гофрированными сложными поверхностями широко используются в химической и вибрационной технологиях, тепло- и массообменниках; их влияние необходимо учитывать и в расчетах сварных трубопроводов, аэродинамике поверхностей летательных аппаратов. Модели течений в искусственных артериях и лёгких (гофрированная мембрана) представляют интерес для физиологии и медицины. К этой проблеме следует отнести также интенсивно ведущиеся исследования в биомедицине по изучению течения биологических жидкостей в сосудах с сужениями типа стенозов [1].

Теоретические исследования процессов, происходящих около волнистых поверхностей, затрудняются необходимостью корректного учета геометрически сложных границ и неспособностью абсолютного большинства моделей турбулентности адекватно отражать особенности таких течений. Одним из открытых вопросов при исследовании вязких течений с чередованием сужений и расширений остаётся вопрос о влиянии геометрии трубы на перепад давления.

2. Математическая постановка задачи и методы ее решения

В данной работе была сделана попытка разработать алгоритм, позволяющий численно рассчитать гидродинамические характеристики вблизи волнистой стенки при турбулентном режиме течения.

Рассматривается движение жидкости в трубе переменного по длине сечения (рис.1) при следующих допущениях: течение жидкости является двумерным, осесимметричным, стабилизированным и периодическим с периодом l_0 , жидкость несжимаемая, ньютоновская, массовые силы отсутствуют.

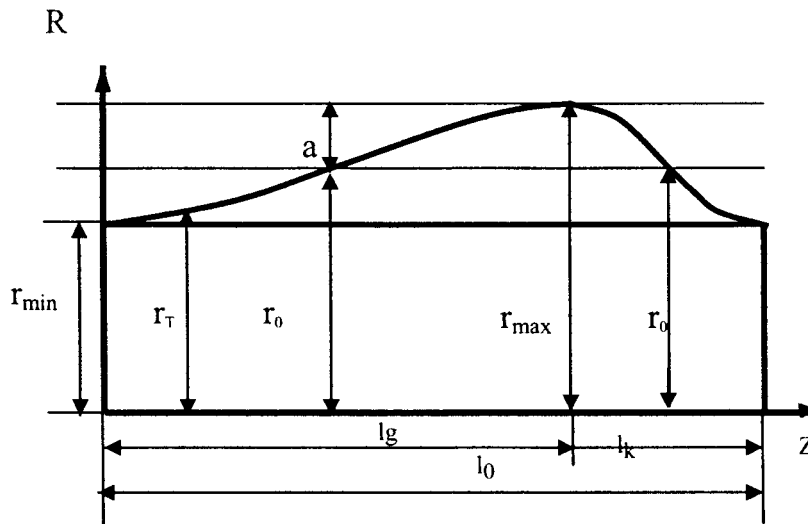


Рис. 1. Труба переменного по длине сечения

Исследование движения жидкости в рассматриваемом случае сводится к решению осредненной по Рейнольдсу системы уравнений Навье-Стокса, которая записана в безразмерных и преобразованных переменных вихрь – функция тока ($\psi-\omega$) и представлена в дивергентной форме [2]:

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(R \frac{\partial \psi}{\partial Z} \right) = 2 \frac{\partial \psi}{\partial R} - \omega R^2 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\partial \psi}{\partial R} \omega \right) - \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\partial \psi}{\partial Z} \omega \right) = \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \psi}{\partial R} (v_{\text{эф}} \omega) \right) + \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \psi}{\partial R} (v_{\text{эф}} \omega) \right) - \frac{\omega}{K} (v_{\text{эф}} + \omega) + Rf - \frac{2}{3} \frac{\partial K}{\partial Z}, \quad (2)$$

где

$$f = \frac{\partial^2 v_{\phi}}{\partial Z \partial R} \left(\frac{\partial V_R}{\partial R} - \frac{\partial V_Z}{\partial Z} \right) + \frac{\partial^2 v_{\phi}}{\partial Z^2} \frac{\partial V_Z}{\partial R} - \frac{\partial^2 v_{\phi}}{\partial R^2} \frac{\partial V_R}{\partial Z}.$$

Для замыкания системы уравнений (1)-(2) использовалась модель Лэма-Бремхорста [1,3]. Уравнения k - ε модели записанные в безразмерном виде и представленные в обобщенной форме имеют вид:

$$\left[\frac{\partial}{\partial Z} \left(K \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) - \frac{\partial}{\partial Z} \left(K \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial R} \left(R \left(\frac{1}{Re} + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial K}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(R \left(\frac{1}{Re} + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial K}{\partial Z} \right) + RD + R\varepsilon, \quad (3)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial Z} \left(\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) - \frac{\partial}{\partial Z} \left(\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial R} \left(R \left(\frac{1}{Re} + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(R \left(\frac{1}{Re} + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial Z} \right) + RDC_{\varepsilon 1} f_1 \frac{\varepsilon}{K} + C_{\varepsilon 1} f_1 \left(\frac{\varepsilon}{K} \right) \varepsilon \quad (4)$$

Здесь D, ε – члены, определяющие рост турбулентной энергии и её диссипацию, причем $D=2v_t\theta$, где

$$\theta = \left(\frac{\partial V_R}{\partial R} \right)^2 + \left(\frac{V_R}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_Z}{\partial R} + \frac{\partial V_R}{\partial Z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_Z}{\partial Z} \right)^2;$$

коэффициенты обезразмеривания имеют вид:

$$r = Rr_{\min}; z = Zr_{\min}; v_r = \frac{V_R}{U_{cp}}, v_z = \frac{V_Z}{U_{cp}}, \\ Re = \frac{U_{cp} r_{\min}}{\nu}, \psi = \frac{\psi^0}{U_{cp} r_{\min}^2}, \omega = \frac{\omega^0 R}{U_{cp}}, k = KU_{cp}^2, \varepsilon = \frac{\varepsilon^0 r_{\min}}{U_{cp}^3}, v_t = \frac{v_t^0}{U_{cp} r_{\min}};$$

$v_t = f_\mu C_\mu \frac{K^2}{\varepsilon}$ – безразмерная турбулентная вязкость; f_μ – функция, предназначенная для описания прямого влияния молекулярной вязкости на касательные напряжения в окрестности стенки. Для модели Лэма-Бремхорста, $f_\mu = [1 - \exp(-0,0165R_y)]^2 (1 + 20,5/R_T)$. Здесь $R_y = Re\sqrt{K}R$; $R_T = Re\frac{K^2}{\varepsilon}$ – турбулентное число Рейнольдса [1,3].

Значения для постоянных и функций модели турбулентности, входящих в состав обобщенных уравнений (3)-(4) представим в виде таблицы 1.

Таблица 1. Постоянные и функции модели турбулентности

Модель	ε_w	C_μ	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	σ_k	σ_ε	f_1	f_2
Лэма-Бремхорста	$\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = 0$	0,09	0,09	0,92	1,0	1,3	$1 + (0,05/f_\mu)^3$	$1 - \exp(-R_T^2)$

Систему (1)-(4) решаем при следующих граничных условиях: на входе и выходе трубы соблюдается условие периодичности $\Phi(R, Z) = \Phi(R, Z+1)$, где под Φ понимается одна из величин: $\omega, \psi, \varepsilon, K$; 1 – период. Граничные условия на твердой стенке и оси приведены в таблице 2 [2,5].

Таблица 2. Граничные условия на твердой стенке и оси

на оси	на твердой стенке
$\psi=0$	$\psi=0$
$\omega=0$	$\omega = - \left[\frac{3(\psi_{w-1} - \psi_w)}{R\Delta\Delta^2} + \frac{\omega_{w-1}}{2} \right]$
$\frac{\partial K}{\partial R} = 0$	$K=0$
$\frac{\partial \varepsilon}{\partial R} = 0$	$\frac{\partial \varepsilon}{\partial R} = 0$

Вычисление членов уравнения для энергии пульсаций D и её диссипация ε в смежных с твердыми стенками узлах расчетной сетки проводилось в соответствии с методом пристеночных функций. Более

детальное описание этого метода представлено в работе [3].

Начальные поля функции тока и вихря заданы, исходя из того, что профиль составляющей скорости определяется степенным законом, по которому заданному числу Рейнольдса соответствует определённый показатель степени. Кинетическая энергия турбулентных пульсаций и скорость её диссипации были приняты постоянными порядка 10^{-3} [4].

Исходные уравнения (1)-(4) представим в обобщённом виде:

$$a \left[\frac{\partial}{\partial Z} \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial R} \right) - \frac{\partial}{\partial R} \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial R} \left(Rb \frac{\partial}{\partial R} (h\Phi) \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(Rb \frac{\partial}{\partial Z} (h\Phi) \right) + S. \quad (5)$$

Здесь под Φ понимается одна из величин: ψ , ω , K , ε . При этом каждой из них соответствует свой набор параметров a , b , h , S , найденных из сопоставления форм записи уравнений (1)-(4) и (5). Это соответствие представлено в таблице 3.

Таблица 3. Значения параметров обобщенного уравнения

Φ	Параметры			
	a	b	h	S
ω	1	1	$v_{\omega\Phi} = 1/Re + v_t$	$-\frac{\omega}{R}(v_{\omega\Phi} + \omega) + 2Rf$
ψ	0	1	1	$2\frac{\partial \psi}{\partial R} - \omega R^2$
ε	1	$1/Re + v_t/\sigma_\varepsilon$	1	$DRC_\varepsilon f_1 \frac{\varepsilon}{K} + C_\varepsilon 2f_2 R \left(\frac{\varepsilon}{K} \right) \varepsilon$
K	1	$1/Re + v_t/\sigma_K$	1	$DR + R\varepsilon$

Переход от дифференциальных уравнений (5) к алгебраическим осуществлялся интегральным методом при этом использовались противопоточная аппроксимационная схема [4,5] и схема Самарского [6]. Полученные алгебраические уравнения решались методом смещения [2,5]. Формула смещений имеет вид

$$\Phi_{i,j} = \Phi_{i-1,j} C_{i-1,j} + \Phi_{i,j-1} C_{i,j-1} + \Phi_{i,j+1} C_{i,j+1} + \Phi_{i,j-1} C_{i,j-1} + M_{i,j}, \text{ где}$$

$$M_{i,j} = d_{i,j}(R_{i,j-1} - R_{i,j-1})(Z_{i+1,j} - Z_{i-1,j})/\Sigma;$$

$$\Sigma = A_{\max}(A_{i+1,j}) - A_{\min}(A_{i-1,j}) + A_{\max}(A_{i,j+1}) - A_{\min}(A_{i,j-1}) + h_{i,j}(\chi_{i,j+1}B_{i,j+1} + \chi_{i,j-1}B_{i,j-1} + \chi_{i-1,j}B_{i-1,j} + \chi_{i+1,j}B_{i+1,j});$$

$$C_{i+1,j} = \frac{-A_{\min}(A_{i+1,j}) + \chi_{i+1,j}B_{i+1,j}h_{i+1,j}}{\Sigma}; \quad C_{i-1,j} = \frac{A_{\max}(A_{i-1,j}) + \chi_{i-1,j}B_{i-1,j}h_{i-1,j}}{\Sigma};$$

$$C_{i,j+1} = \frac{-A_{\min}(A_{i,j+1}) + \chi_{i,j+1}B_{i,j+1}h_{i,j+1}}{\Sigma}; \quad C_{i,j-1} = \frac{A_{\max}(A_{i,j-1}) + \chi_{i,j-1}B_{i,j-1}h_{i,j-1}}{\Sigma};$$

Таблица 4. Выражения для коэффициента χ противопоточной схемы и схемы Самарского

Противопоточная схема	$\chi=1$
Схема Самарского	$\chi_{i,j+1} = 1 / \left(1 + 0,5 \frac{a F_{j+1} }{B_{i,j+1}h_{i,j+1}} \right); \quad \chi_{i,j-1} = 1 / \left(1 + 0,5 \frac{a F_{j-1} }{B_{i,j-1}h_{i,j-1}} \right);$
	$\chi_{i+1,j} = 1 / \left(1 + 0,5 \frac{a F_{i+1} }{B_{i+1,j}h_{i+1,j}} \right); \quad \chi_{i-1,j} = 1 / \left(1 + 0,5 \frac{a F_{i-1} }{B_{i-1,j}h_{i-1,j}} \right).$

$A_{\max}$ – функция, обнуляющая коэффициент от конвективных членов, если он меньше нуля, $A_{\min}$ – функция, обнуляющая коэффициент от конвективных членов, если он больше нуля. Для улучшения сходимости итерационного процесса был применён метод нижней релаксации [2,5]. Окончательное значение Φ на k -м итерационном шаге берётся в виде

$$\Phi_{i,j}^k = \Phi_{i+1,j}^{k-1} + \left(\bar{\Phi}_{i,j}^k - \Phi_{i,j}^{k-1} \right) R = (1-R)\Phi_{i,j}^{k-1} + R\bar{\Phi}_{i,j}^k$$

3. Результаты расчета

Итерационным методам решения свойственны ошибки округления, обусловленные тем, что вычислительные машины могут выполнять расчеты лишь с ограниченным числом значащих цифр. Чтобы

проверить чувствительность метода к этому виду погрешности, одна и та же задача была решена с восемью и шестнадцатью значащими цифрами. На рис. 1.1 и 1.2 представлены результаты расчета профиля скорости в прямой трубе для противопоточной схемы и схемы Самарского при $Re=10^5$ с восемью значащими цифрами и с шестнадцатью значащими цифрами. Полученные решения отличаются на пренебрежимо малую величину.

В случае моделирования турбулентных течений преобладающее влияние на точность полученных результатов оказывает дискретизация конвективных членов уравнений переноса. Численная диффузия (схемная вязкость), обусловленная ошибками аппроксимации исходных членов уравнений в дифференциальной форме, может затенить реальные процессы диффузионного переноса и практически не позволит определить влияние на решение выбранной модели турбулентности. Для оценки влияния схемной вязкости были проведены расчеты с использованием двух аппроксимационных схем первого порядка точности противопоточной схемы [2,5] и монотонной схемы Самарского [6].

В ходе работы были проделаны тестовые расчеты полей скорости для прямой цилиндрической трубы для чисел $Re=4000$, $Re=10^5$, $Re=3,4 \cdot 10^6$ на сетке с различным количеством точек расчетной области и для симметричной трубы переменного сечения для $Re=3,4 \cdot 10^6$. Расчетные данные, полученные для симметричной области переменного сечения, сравнивались с экспериментальными данными, представленными в работе [7]. На рис. 1.3, 1.4 представлены участки профилей скорости для прямой трубы в пристеночной области с использованием противопоточной схемы и схемы Самарского при различных числах Re . Тестовые расчеты для прямой трубы показали, что схема Самарского дает лишь незначительный выигрыш по времени по сравнению с противопоточной.

На рис. 1.5 – 1.7 представлены зависимости продольной компоненты скорости от радиуса в симметричной трубе переменного сечения для противопоточной схемы и схемы Самарского при $Re=3,4 \cdot 10^6$.

Расчетные данные, полученные для симметричной области переменного сечения, сравнивались с экспериментальными данными, представленными в работе [7]. Учитывая, что профиль скорости при турбулентном движении можно описать степенным законом $V_z = (1-R)^{1/N}$ знаменатель показателя степени N в законе сравнивался с показателем степени, полученным в ходе эксперимента в работе [7].

Расчет поля скорости в симметричной по длине трубе переменного сечения показал, что решения с использованием рассмотренных аппроксимационных схем, близки и дают хорошее согласование с экспериментальными данными. Однако решение с использованием схемы Самарского зависит от определенного выбора соотношения узлов расчетной сетки в продольном и поперечном направлениях. Противопоточная схема не зависит от выбора узлов расчетной сетки, но ее ошибка аппроксимации превосходит ошибку схемы Самарского и в большей степени искажает результаты расчета.

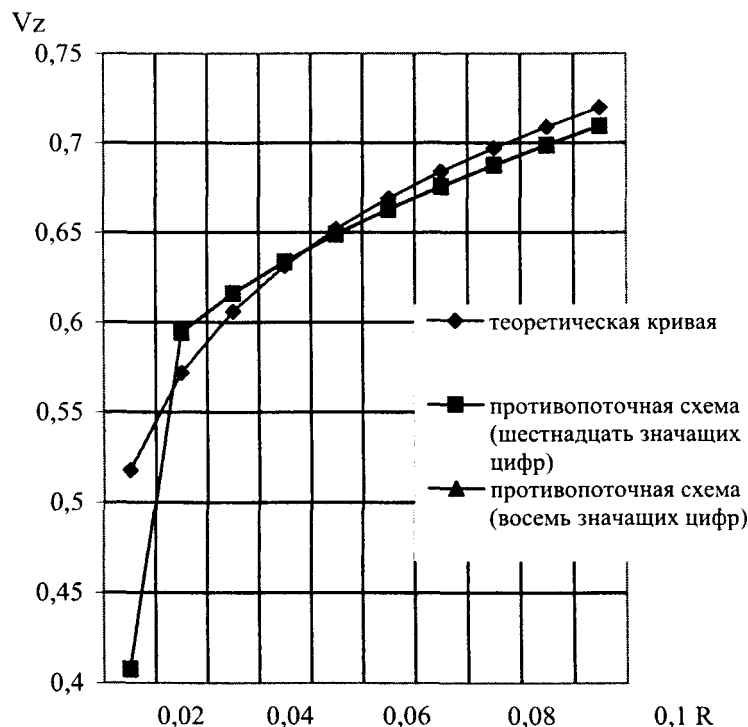


Рис. 1.1. Участок профиля скорости для противопоточной схемы в прямой трубе при $Re=100000$

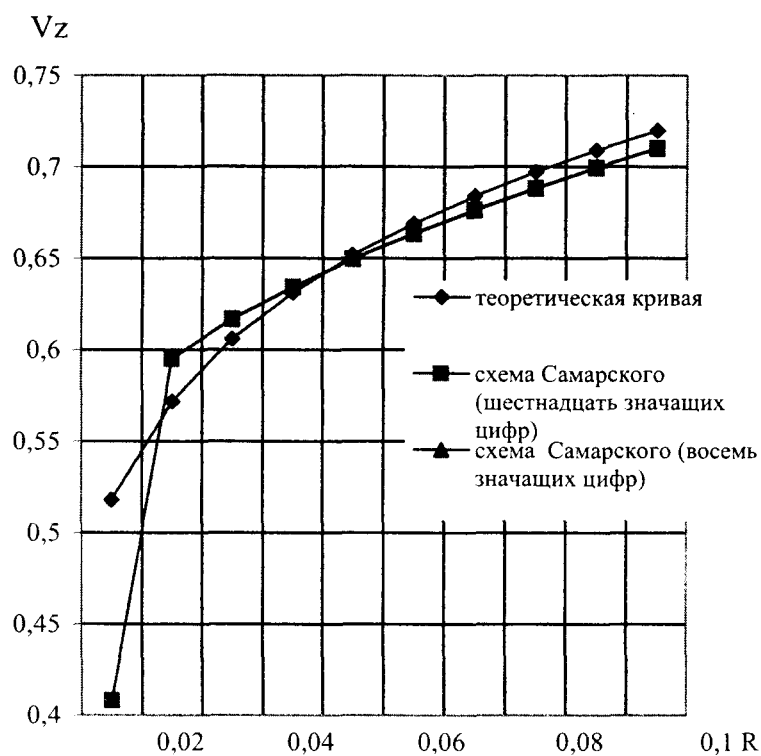


Рис. 1.2. Участок профиля скорости для схемы Самарского в прямой трубе при $Re=100000$

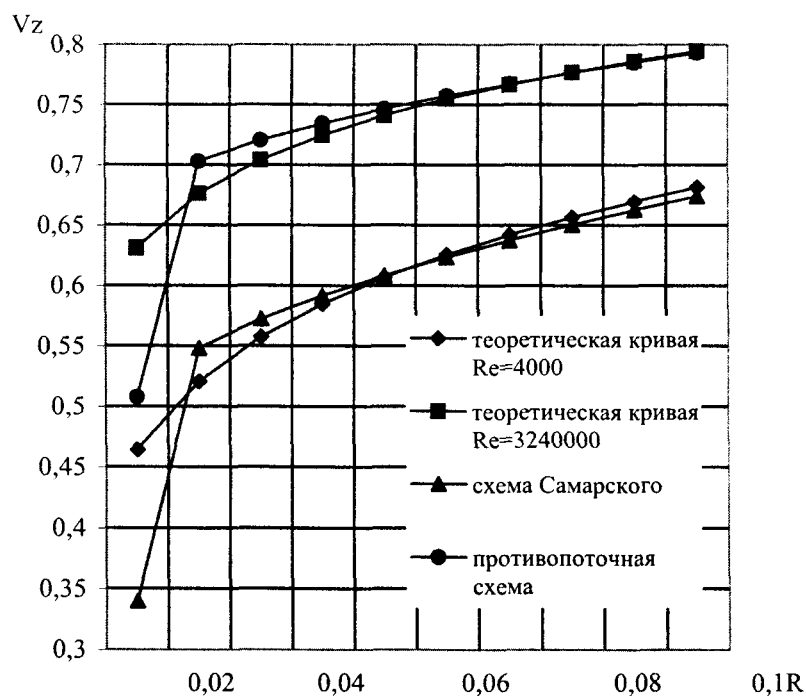


Рис. 1.3. Профили скорости для противопоточной схемы и схемы Самарского в пристеночной области при $Re=4000$ и $Re=3240000$

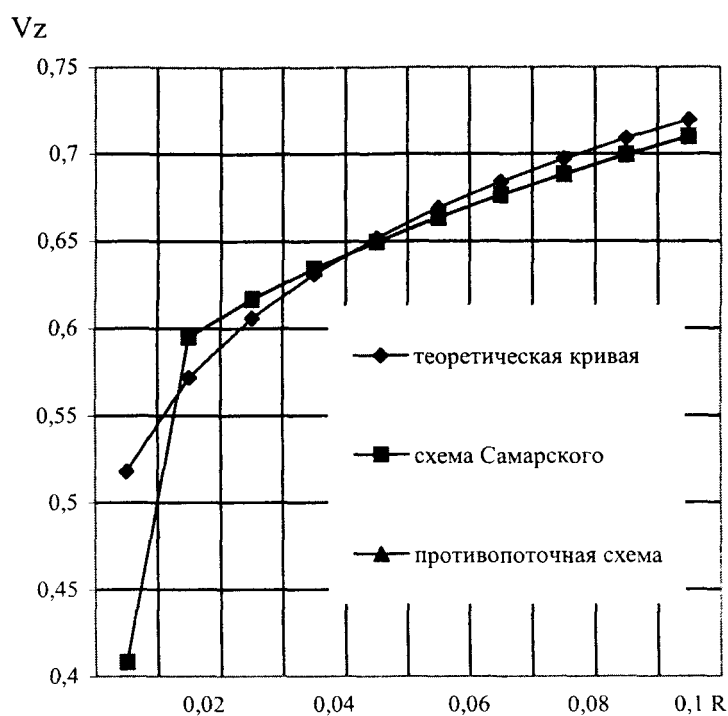


Рис. 1.4. Профили скорости для противопоточной схемы и схемы Самарского в пристеночной области при $Re=100000$

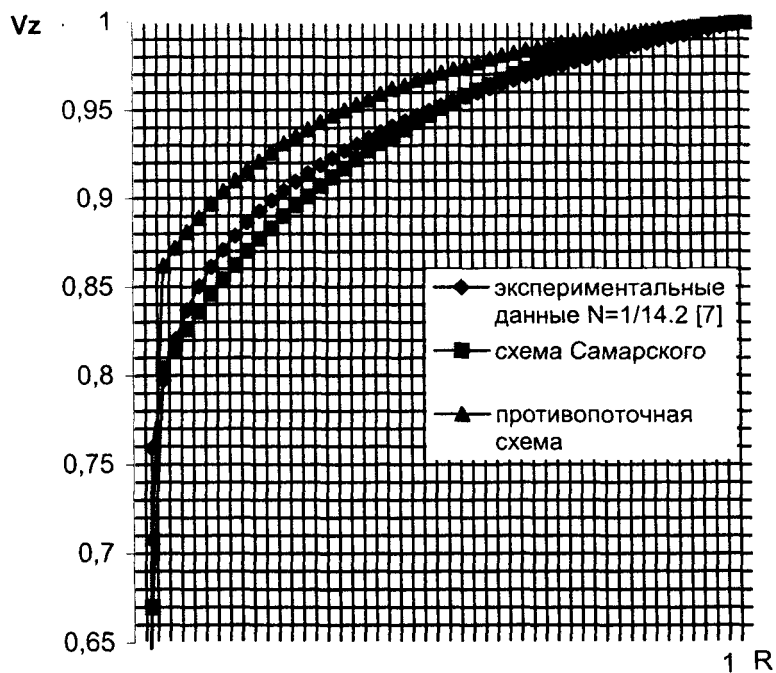


Рис. 1.5. Зависимость продольной компоненты скорости от радиуса в симметричной трубе переменного сечения в 1 сечении для противопоточной схемы и схемы Самарского при $Re=3,4 \cdot 10^6$.

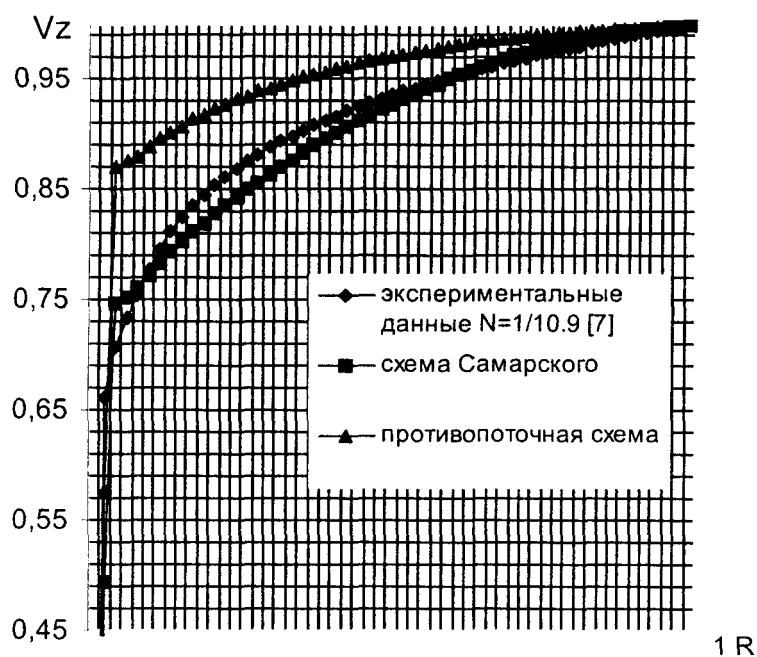


Рис. 1.6. Зависимость продольной компоненты скорости от радиуса в симметричной трубе переменного сечения в 3 сечении для противопоточной схемы и схемы Самарского при $Re=3,4 \cdot 10^6$

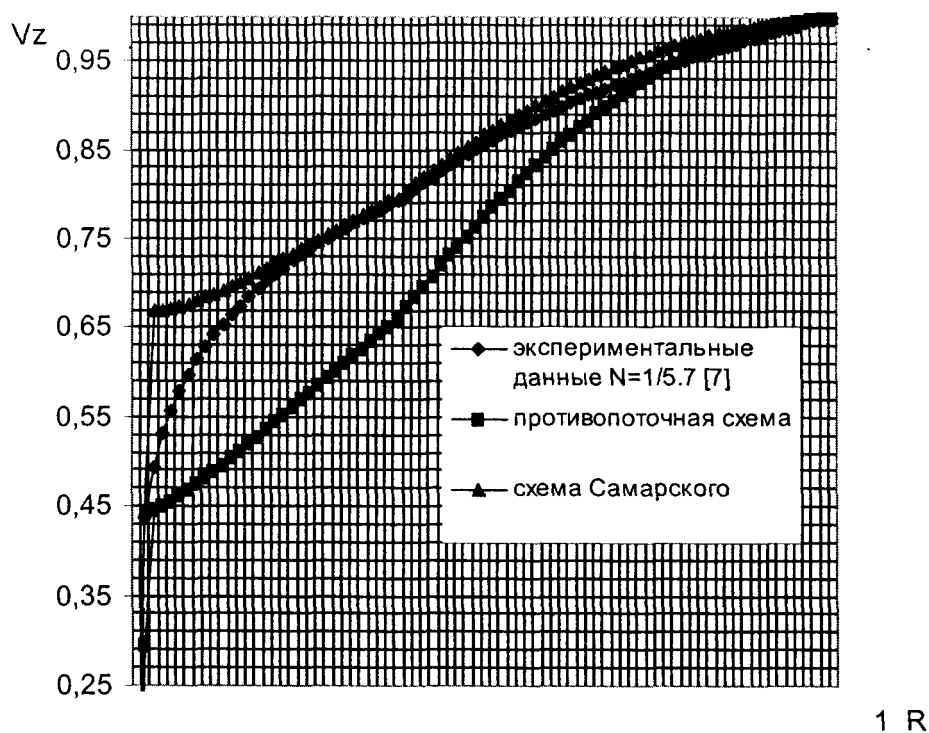


Рис. 1.7. Зависимость продольной компоненты скорости от радиуса в симметричной трубе переменного сечения в 5 сечении для противопоточной схемы и схемы Самарского при $Re=3,4 \cdot 10^6$

РЕЗЮМЕ

Був розглянутий вплив апроксимаційних схем першого і другого порядку точності на розрахунок поля швидкості при турбулентній течії у трубах в яких періодично змінюється поперечний переріз (ТПЗПП) при різних числах Re . Чисельне рішення рівнянь Нав'є-Стокса осереднених за Рейнольдсом і доповнених рівняннями модифікованої $k-\varepsilon$ моделі, яка урахує вплив кривини ліній струму, ґрунтується на повністю консервативній схемі кінцевих об'ємів.

SUMMARY

Testing influence schemes of approximation of the first and second volume of speed with turbulent current in pipes of a variable cut (PVC) averaged on the Re . The numerical method of solution of the Navier-Stokes equations averaged on the Reynolds and supplemented by the equations of modified $k-\varepsilon$ model considered influence of curvature of current lines is based on the completely conservative scheme of final volumes.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Воропаев Г.А., Птуха Ю.А. Моделирование турбулентных сложных течений. – К.: Наукова думка, 1991. – 166 с.
2. Белов И.А., Булеев Н.И. и др. Введение в аэрогидродинамику контейнерного трубопроводного транспорта / Под ред. Гиневского А.С. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 232 с.
3. Лапин Ю.А., Стрелец М.Х. Внутренние течения газовых смесей.
4. Белов И.А., Кудрявцев Н.А. Теплопередача и сопротивление пакетов труб. – Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отделение, 1987. – 223 с.
5. Численные методы исследования течений вязкой жидкости: Пер. с англ. / А.Д.Госмен, В.М.Пан, А.К.Ранчел и др. – М.: Мир, 1972. – 324 с.
6. Безуглый В.Ю., Беляев Н.М. Численные методы теории конвективного теплообмена. – К. – Д.: Вища школа, 1984. – 377 с.
7. Hsu T.S., Kennedy J.F. Turbulent flow in wavy pipes // J Fluid Mech. – 1971. – 47, pt 3. – P. 247-280.

Надійшла до редакції 26.04.2006 р.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ ЭРЛИФТА

А.П.Кононенко,

Донецкий национальный технический университет

Введение. Энергетическая эффективность гидравлических машин и аппаратов является одним из определяющих параметров в приоритете их использования в гидравлических системах. Достаточно важной, в связи с этим, является достоверность в оценке КПД, так как даже незначительная количественная неточность в его вычислении может привести к ошибкам в выборе типа гидравлического оборудования, назначении эксплуатационных режимов и существенным энергетическим потерям. Особенно важен вопрос корректности оценки энергетической эффективности низкокочномичных машин и аппаратов, к которым относится и эрлифт.

В связи с этим актуален вопрос теоретического уточнения и экспериментальной проверки адекватности аналитических методов расчета энергетического коэффициента полезного действия эрлифтов общепромышленного назначения.

КПД эрлифта вычисляют [1,2] как отношение полезно расходуемой мощности к затраченной мощности

$$\eta_{\varepsilon} = \left[\rho \cdot g \cdot Q_{\varepsilon} \cdot \left(H + \frac{w_{\text{вых}}'^2}{2g} \right) \right] / \left[Q_{\text{в}} \cdot p_0 \cdot \ln \frac{p_0 + p_{\text{см}}}{p_0} \right], \quad (1)$$

или пренебрегая, в подавляющем большинстве случаев, величиной скоростного напора потока лифтируемой жидкости на выходе из подъемной трубы $w_{\text{вых}}'^2/2g$ и принимая избыточное давление в смесителе $p_{\text{см}}$ равным гидростатическому давлению $p_{\text{нс}}$ геометрического погружения смесителя $p_{\text{см}} = p_{\text{нс}} = \rho gh$, получают

$$\eta_{\varepsilon h} = H / \left[q \cdot \frac{p_0}{\rho \cdot g} \cdot \ln \left(1 + \frac{\rho \cdot g \cdot h}{p_0} \right) \right], \quad (2)$$

где Q_{ε} – подача эрлифта; $Q_{\text{в}}$ – расход воздуха при нормальных условиях; $q = Q_{\text{в}}/Q_{\varepsilon}$ – удельный расход воздуха; $w_{\text{вых}}'$ – скорость лифтируемой жидкости на выходе из подъемной трубы; H – высота подъема эрлифта; h – геометрическое погружение смесителя; p_0 – атмосферное давление; ρ – плотность лифтируемой жидкости; g – ускорение свободного падения.

Аналогичный подход к определению энергетической эффективности эрлифтов применяли в своих работах многие известные ученые, в т.ч. Крылов А.П., Козлов Б.К., Багдасаров В.Г. и др.

Известно предложение оценивать эффективность лифта объемным КПД, представляющим собой отношение действительной подачи Q_{ε} к теоретической подаче $Q_{\text{т}}$ идеального лифта, под которым понимают подъемник, лишенный гидравлических потерь и потерь относительного движения фаз [3]. Однако, по физической сути, выражение для КПД лифта, приведенное в [3], аналогично выражениям (1) и (2).

Мощностной метод при оценке эффективности работы газовых подъемников используется также при газлифтной добыче нефти [4,5], в том числе периодическими газлифтами [6,7].

Известны рекомендации значений энергетически оптимальных относительных погружений смесителя $\alpha = h/(H + h)$ для длинных [1] эрлифтов $\alpha_{\text{опт}} \approx 0,50$ [8], для коротких эрлифтов $\alpha_{\text{опт}} = 0,656$ [9] и для глубоководных эрлифтов $\alpha_{\text{д опт}} = 0,60 \div 0,75$ [10] ($\alpha_{\text{д опт}}$ – относительное динамическое погружение).

Неадекватность выражений (1) и (2) при построении зависимостей $\eta = f(Q_{\varepsilon}, h)$ для эрлифтов, включающих в свою конструкцию подающие трубы, заключается в принимаемом постоянстве давления в смесителе $p_{\text{см}} = \rho gh = \text{const}$ для рассматриваемой расходной характеристики $Q_{\varepsilon} = f(Q_{\text{в}}, h)$ при $h = \text{const}$. В действительности из-за гидравлических потерь в подающей трубе давление в смесителе по «длине» характеристики эрлифта (в диапазоне изменения расходов воздуха от барботажного $Q_{\text{вб}}$ до максимально реализуемого) не является величиной постоянной $p_{\text{см}} \neq \rho gh$. В связи с этим возникает также вопрос правомерности определения энергетически оптимального режима эрлифта по точке соприкосновения касательной, проведенной из начала координат, с расходной характеристикой эрлифта [1,2] (т.е. как режима с минимальным удельным расходом воздуха).

Вопросы изменения давления в смесителе эрлифта при $h = \text{const}$ рассматривались в работах [10-12], однако влияние такого изменения на КПД подъемника в пределах расходной характеристики

$Q_3 = f(Q_6)$ не изучалось.

Выражение для определения рабочего давления в смесителе с учетом гидравлических потерь в подающей трубе и плотности транспортируемой гидросмеси в [13] получено исходя из рассмотрения подающей трубы как длинного трубопровода с пренебрежением местными сопротивлениями, что правомерно для глубоководных эрлифтов с длинами подающих труб до нескольких километров [10, 14, 15].

Таким образом, существующие методики оценки энергетической эффективности лифтов правомерно основываются на мощностном подходе, однако применительно к общепромышленным эрлифтам требует уточнения вопрос количественной значимости изменения КПД воздушного подъемника по «длине» характеристики $Q_3 = f(Q_6)$ при $h = const$ с учетом уменьшения давления в смесителе из-за гидравлических потерь в подающей трубе.

Целью данной работы является построение аналитических зависимостей и экспериментальное подтверждение количественной значимости их применения для расчета КПД общепромышленных эрлифтов, содержащих подающие трубы.

Изложение материала и результаты. В большинстве случаев геометрические характеристики подающих труб общепромышленных эрлифтов находятся в пределах $l/d = 3 \div 15$ [1,2] (d – диаметр подающей трубы, l – длина подающей трубы), что позволяет рассматривать их либо как насадки, либо как короткие трубы (цилиндрические патрубки).

Исходя из этого, потери напора в подающей трубе можно определять:

– рассматривая подающую трубу как насадок [при $(3 \div 4)d \leq (l = l_n) \leq (6 \div 7)d$, l_n – длина насадка] [16]

$$\Delta h_{n.m} = \frac{8 \cdot Q_3^2}{\mu_{n.m}^2 \cdot g \cdot \pi^2 \cdot d^4}, \quad (3)$$

где $\mu_{n.m}$ – коэффициент расхода подающей трубы;

– рассматривая подающую трубу как короткую трубу – патрубок (при $l > l_n$) [17]

$$\Delta h_{n.m} = A \cdot Q_3^2, \quad (4)$$

где A – сопротивление подающей трубы, учитывающее гидравлические потери по длине и на местных сопротивлениях (вход и выход из трубы).

Уточнение количественных значений коэффициента расхода $\mu_{n.m}$ и проверка соответствия опытных значений сопротивления подающих труб A расчетным [17] выполнено с использованием экспериментальных данных, приведенных в настоящей статье, в [10] и данных автора для эрлифтов с диаметрами подъемных труб $D = 150$ и 353 мм, для которых известны давления в смесителях, диаметры и длины подающих труб. В соответствии с количественным анализом экспериментальных данных при длинах подающих труб $(3 \div 4)d \leq (l = l_n) \leq (6 \div 7)d$ потери $\Delta h_{n.m}$ правомерно определять по выражению (3) при значении $\mu_{n.m} = 0,74 \div 0,78$, что приблизительно соответствует среднему значению коэффициентов расхода насадков Вентури ($\mu_n = 0,82$) и Борда ($\mu_n = 0,71$) [16]. Меньшие значения из диапазона $\mu_{n.m} = 0,74 \div 0,78$ следует принимать при больших значениях l/d из диапазона $(3 \div 4)d \leq (l = l_n) \leq (6 \div 7)d$, а большие – соответственно при меньших отношениях l/d .

При длинах подающих труб, превышающих длины насадков $l > l_n$, потери в подающей трубе целесообразно вычислять по выражению (4). Несоответствие значений сопротивлений A , вычисленных по известной методике [17] и рассчитанных по экспериментальным данным не превышает 20%, что следует признать удовлетворительным в рассматриваемых условиях, т.к. зачастую длина подающей трубы меньше длины начального участка $l < l_{нач}$ с неравномерным движением жидкости [16].

С учетом гидравлических потерь в подающей трубе значения КПД эрлифта по «длине» характеристики следует вычислять по выражению

$$\eta_{эр}(Q_6) = \frac{H}{q(Q_6) \cdot \frac{P_0}{\rho \cdot g} \cdot \ln \left\{ 1 + \frac{\rho \cdot g \cdot [h - \Delta h_{n.m}(Q_6)]}{P_0} \right\}}. \quad (5)$$

Для экспериментального подтверждения количественной значимости величины изменения КПД воздушного подъемника по «длине» характеристики $Q_3 = f(Q_6)$ при $h = const$ с учетом изменения давления в смесителе из-за гидравлических потерь в подающей трубе исследования были проведены на натурной промышленной эрлифтной установке системы гидрозолашлакоудаления (ГЗУ) энергоблока №8 мощностью 500 МВт Экибастузской ГРЭС-1 (рис. 1). Эксперименты проведены на эрлифте 8Б с эквивалентным диаметром подъемной трубы $D_3 = 0,624$ м (рис. 2). Полученные экспериментальные данные представляют существенный интерес и при рассмотрении других вопросов лифтирования жидкости сжа-

тым воздухом, так как не известны результаты испытаний эрлифтов аналогичного класса с диаметрами подъемных труб $D > 250$ мм.

Сжатый воздух при экспериментальных исследованиях подавался по блочной схеме воздухопобуждения от центробежного нагнетателя 360-22-1 (номинальное развиваемое давление – 0,235 МПа, производительность – 310 м³/мин, мощность – 700 кВт), входящего в состав энергоблока №8 ЭГРЭС-1.

Испытания эрлифта проведены на технической воде, отбор которой производился от напорного трубопровода насосов Д2000-34, подающих воду к гравийным фильтрам скрубберов. Притоки золошлаковой гидросмеси от котла №8 удалялись во время испытаний эрлифтом 8А, запитанным по коллекторной схеме воздухопобуждения от нагнетателей блоков 5, 6, и 7.

Расход сжатого воздуха на эрлифт 8Б измерялся при помощи стандартной диафрагмы I (рис. 1) с модулем $m = 0,6076$. Давление и температура сжатого воздуха перед диафрагмой I измерялись соответственно манометром 1 ($p = 0 \div 1,6$ кг/см²) и термометром 4 ($t = 0 \div 150$ °С), перепад давлений на диафрагме I – дифференциальными манометрами с водяным 2 ($\Delta p_{max} = 2000$ мм. вод. ст.) и ртутным 3 ($\Delta p_{max} = 700$ мм. рт. ст.) заполнениями, подключенными параллельно. Регулирование расхода воздуха производилось задвижкой 31, установленной на левом воздухопроводе эрлифта. Защита нагнетателя от помпажных режимов обеспечивалась сбросом части сжатого воздуха в атмосферу через сбросной трубопровод с клапаном К1.

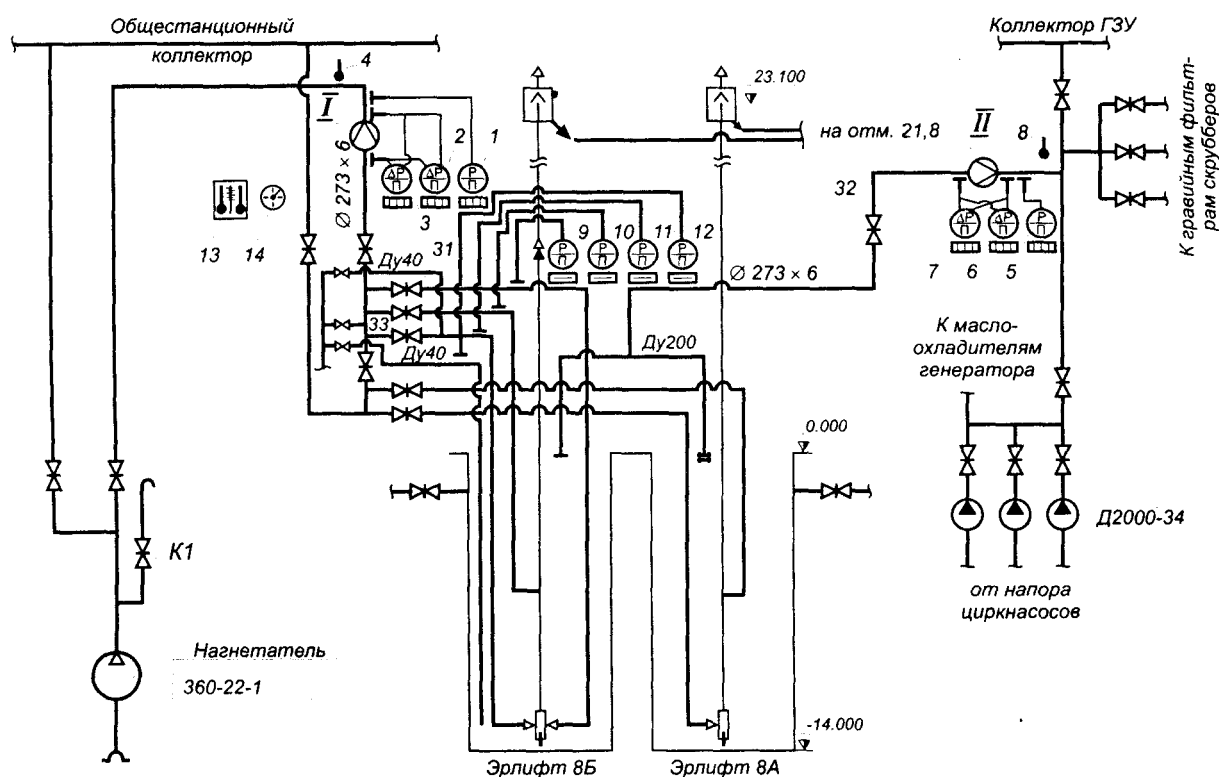


Рис. 1. Схема промышленной эрлифтной установки системы гидрозолошлакоудаления энергоблока 500 МВт Экибастузской ГРЭС-1

Для измерения расхода технической воды использована стандартная диафрагма II с модулем $m = 0,6078$. Давление и температура технической воды перед диафрагмой II измерялись соответственно манометром 5 ($p = 0 \div 4,0$ кг/см²) и термометром 8 ($t = 0 \div 50$ °С), перепад давлений на диафрагме II – дифференциальными манометрами с ртутным заполнением 6 ($\Delta p_{max} = 700$ мм. рт. ст.) и заполнением четыреххлористым углеродом CCl_4 7 ($\Delta p_{max} = 700$ мм. ст. хл.), также подключенными параллельно. Параллельное подключение дифманометров 2 и 3 к диафрагме I и 6 и 7 – к диафрагме II позволяло расширить диапазон измерений и повысить их точность. Регулирование расхода воды на эрлифт производилось задвижкой 32.

Геометрическое погружение смесителя определялось по давлению в трубопроводе Ду 40, нижний торец которой установлен на уровне оси ввода воздухопровода в смеситель, после продувки его сжатым воздухом.

Давление воздуха на входе в смеситель определялось по давлению в правом воздухопроводе эрлифта, отключенном задвижкой 33 от нагнетателя. Данный воздухопровод перед замерами продувался сжатым воздухом через трубопровод Ду 40.

При проведенні експериментальних досліджень контролювались давления:

- в воздухопроводе на уровне входа в зумпф – манометром 9 ($p = 0 \div 1,0; 0 \div 1,6 \text{ кг/см}^2$);
- в пусковом смесителе – манометром 10 ($p = 0 \div 1,0 \text{ кг/см}^2$);
- в смесителе – манометром 11 ($p = 0 \div 1,0; 0 \div 1,6 \text{ кг/см}^2$);
- гидростатическое давление геометрического погружения смесителя – манометром 12 ($p = 0 \div 1,6 \text{ кг/см}^2$).

Влажность и температура атмосферного воздуха измерялись психрометром 13, давление атмосферного воздуха – барометром 14.

При монтаже диафрагм и установке контрольно-измерительных приборов были выполнены известные требования и рекомендации по применявшимся методам измерения [18]. Погрешности измерений расходов сжатого воздуха и технической воды не превышали 3%.

Последовательность проведения испытаний следующая. Задвижкой 32 задавался определенный расход технической воды. Задвижкой 31 подбирался такой расход сжатого воздуха на эрлифт, при котором уровень воды в зумпфе h (геометрическое погружение смесителя) соответствовал требуемому. После проверки устойчивости режима работы эрлифта (в течение 5-10 мин) записывались показания контрольно-измерительных приборов. Для каждой характеристики были получены 11-20 экспериментальных точек при минимум 5 замерах контролируемых параметров на одном их уровне с целью получения относительной погрешности результатов до 5-10% при доверительной вероятности $0,90 \div 0,95$ [19].

Характеристики эрлифта получены при значениях геометрического погружения смесителя $h = 3,72; 4,68; 5,66; 6,64; 7,61; 8,59; 9,58 \text{ м}$, что соответствует относительным погружениям $\alpha = 0,103; 0,129; 0,156; 0,183; 0,210; 0,237; 0,264$.

Экспериментальные данные обработаны методом наименьших квадратов (рис. 3, 4), полученные уравнения регрессии описывают экспериментальные точки со среднеквадратической погрешностью, не превышающей 2%. В качестве примера на характеристиках, полученных при геометрическом погружении смесителя $h = 9,58 \text{ м}$ ($\alpha = 0,264$) (рис. 3, кривые 7) обозначены оптимальный режим эрлифта (как точка соприкосновения касательной и расходной характеристики) с параметрами $Q_{в \text{ опт}} = 220,5 \text{ м}^3/\text{мин}$, $Q_{с \text{ опт}} = 702,7 \text{ м}^3/\text{ч}$, $p_{см \text{ опт}} = 0,828 \text{ кг/см}^2$ и достигнутый в условиях эксперимента режим максимальной подачи с параметрами $Q_{в \text{ макс}} = 309,1 \text{ м}^3/\text{мин}$, $Q_{с \text{ макс}} = 896,0 \text{ м}^3/\text{ч}$, $p_{см \text{ макс}} = 0,757 \text{ кг/см}^2$.

КПД эрлифтов вычислены соответственно по выражениям (2) – $\eta_{zh} = f(Q_v)$ (рис. 4, верхний график) и (5) – $\eta_{ep} = f(Q_v)$ (рис. 4, нижний график). Для характеристики при геометрическом погружении смесителя $h = 9,58 \text{ м}$ ($\alpha = 0,264$) и расходах

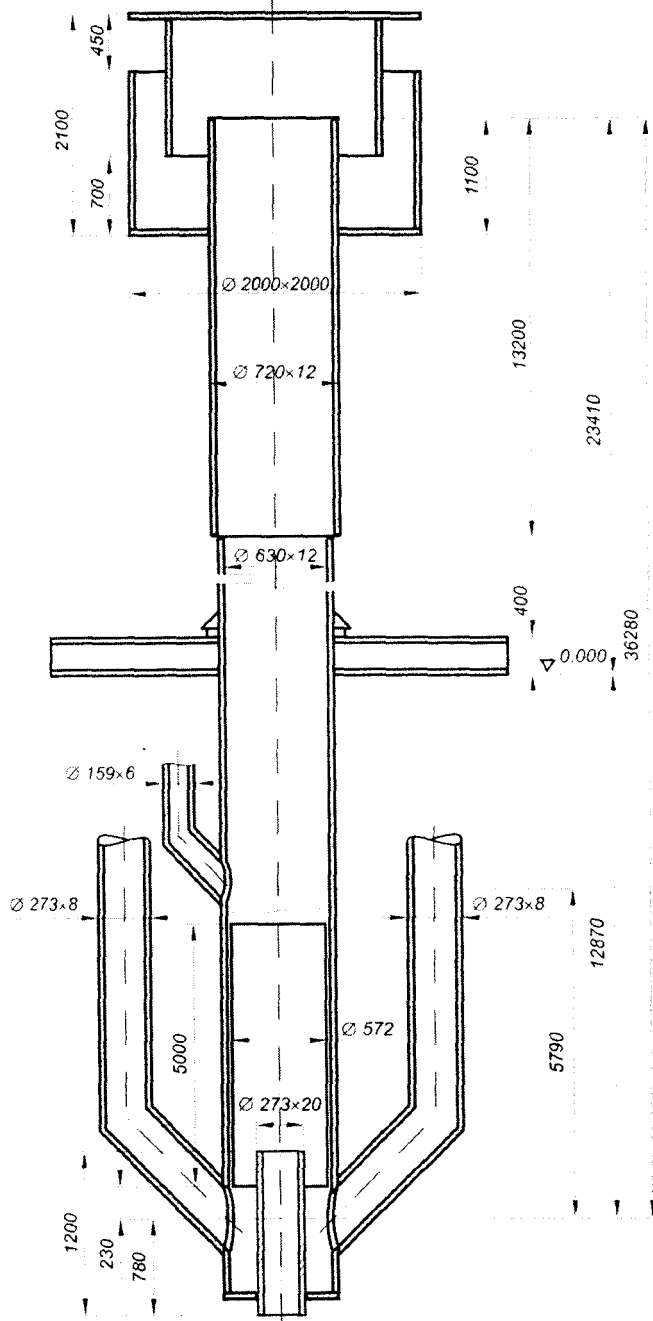


Рис. 2. Эрлифт 8Б системы гидрозолошлакоудаления энергоблока 500 МВт Экибастузской ГРЭС-1

воздуха $Q_0 > 100 \text{ м}^3/\text{мин}$ видно (рис. 4, кривые 7а и 7б), что $\eta_{\text{эр}} > \eta_{\text{эл}}$. Количественные значения параметров, характеризующие эти режимы работы эрлифта, приведены в таблице 1.

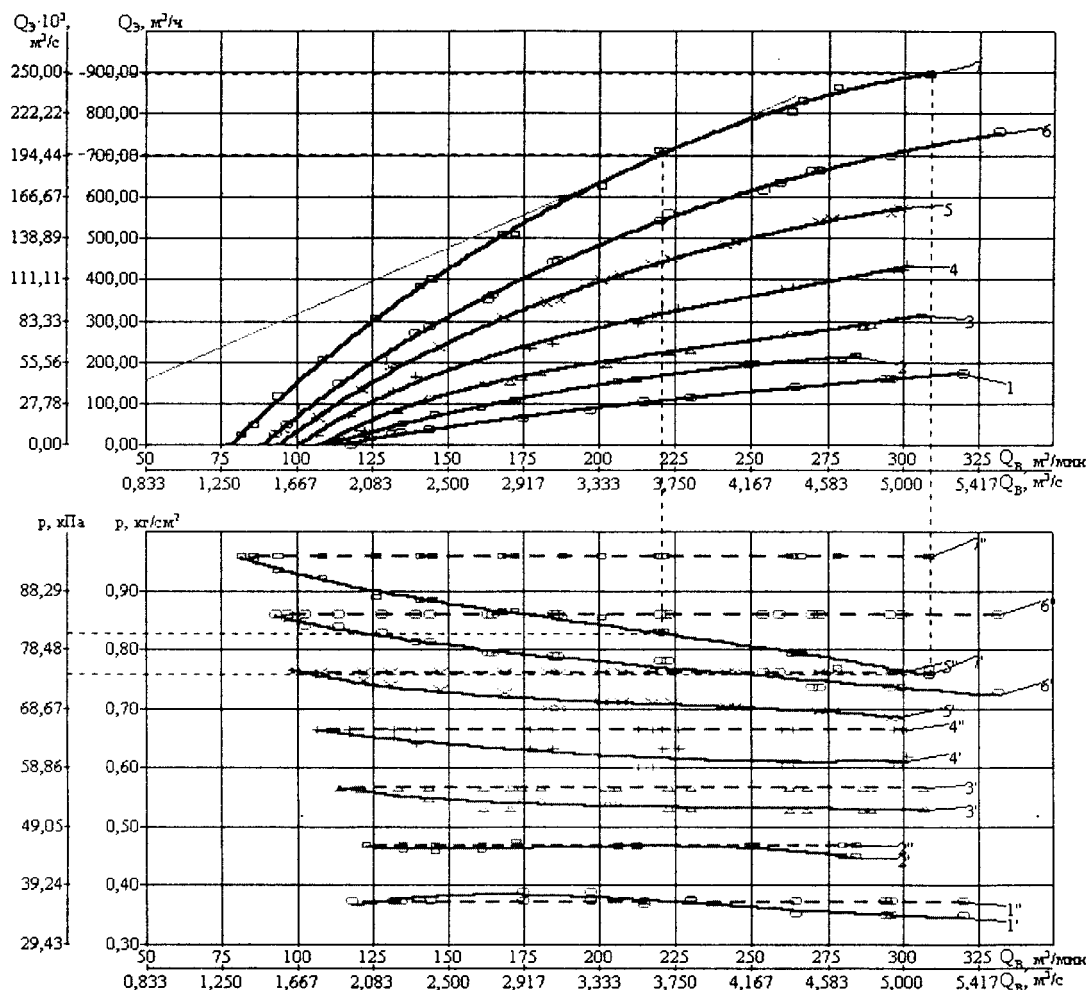


Рис. 3. Характеристики эрлифта $D_0 = 624 \text{ мм}$, $d = 233 \text{ мм}$, $H+h = 36,28 \text{ м}$: 1 – $h = 3,72 \text{ м}$, 2 – $h = 4,68 \text{ м}$, 3 – $h = 5,66 \text{ м}$, 4 – $h = 6,64 \text{ м}$, 5 – $h = 7,61 \text{ м}$, 6 – $h = 8,59 \text{ м}$, 7 – $h = 9,58 \text{ м}$
[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 – $Q_3 = f(Q_0)$; 1', 2', 3', 4', 5', 6', 7' – $p_{\text{см}} = f(Q_0)$; 1'', 2'', 3'', 4'', 5'', 6'', 7'' – $p_{\text{нс}} = f(Q_0)$]

Представляет интерес сравнительный график расходных характеристик эрлифта с постоянным геометрическим погружением смесителя $h = 7,61 \text{ м} = \text{const}$ (рис. 5, кривая 1) и с постоянным давлением в смесителе $p_{\text{см}} = 0,761 \text{ кг/см}^2 = \text{const}$ (рис. 5, кривая 2). Кривая 1 построена по экспериментальным точкам, а кривая 2 – по точкам, полученным из семейства экспериментальных расходных характеристик в диапазоне геометрических погружений $h = 3,72 \div 9,58 \text{ м}$ (рис. 3) при значении давления в смесителе $p_{\text{см}} = 0,761 \text{ кг/см}^2$. Как видно из сравниваемых характеристик (рис. 5), при практически равноценных подачах при расходах воздуха $Q_0 < 200 \text{ м}^3/\text{мин}$, подача эрлифта с постоянным геометрическим погружением $h = 7,61 \text{ м} = \text{const}$ существенно меньше подачи эрлифта с постоянным давлением в смесителе $p_{\text{см}} = 0,761 \text{ кг/см}^2 = \text{const}$ в диапазоне расходов воздуха $Q_0 > 200 \text{ м}^3/\text{мин}$.

При испытаниях была достигнута подача эрлифта, близкая к $Q_0 \approx 900 \text{ м}^3/\text{ч}$ при расходе воздуха около $Q_0 \approx 310 \text{ м}^3/\text{мин}$ и геометрическом погружении смесителя $h = 9,58 \text{ м}$. Необходимо отметить, что данная подача не является предельной для испытываемого эрлифта 8Б с эквивалентным диаметром подъемной трубы $D_0 = 0,624 \text{ м}$. Безаварийный режим работы установки (при котором не затопляются каналы гидрозолошлакоудаления) обеспечивается до величины геометрического погружения смесителя $h = 11 \text{ м}$ (отметка входа канала ГЗУ в зумпф эрлифта составляет $-2,0 \text{ м}$). Характеристики эрлифта при данных погружениях не были определены из-за ограничений по расходу технической воды и в связи с организационными сложностями в проведении таких опытов (опасность в «потоплении» эрлифта 8А, откачивавшего золошлаковые притоки).

Ориентировочно можно предположить, что при геометрическом погружении смесителя $h = 11 \text{ м}$ и

расходе воздуха $Q_a \approx 300 \text{ м}^3/\text{мин}$ эрлифт с эквивалентным диаметром подъемной трубы $D_s = 0,624 \text{ м}$ обеспечит подачу до величины $Q_s \approx 1100 \text{ м}^3/\text{ч}$.

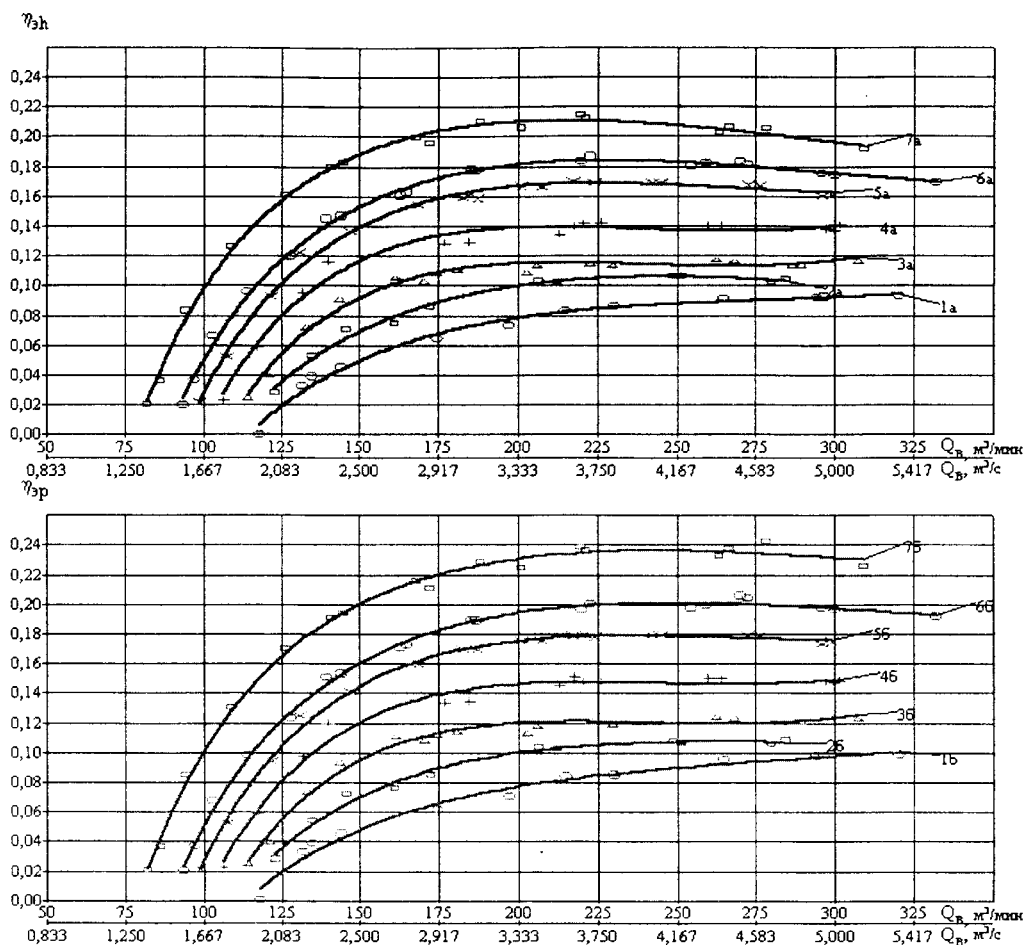


Рис. 4. Характеристики КПД эрлифта $D_s = 624 \text{ мм}$, $d = 233 \text{ мм}$, $H+h = 36,28 \text{ м}$: 1 – $h = 3,72 \text{ м}$, 2 – $h = 4,68 \text{ м}$, 3 – $h = 5,66 \text{ м}$, 4 – $h = 6,64 \text{ м}$, 5 – $h = 7,61 \text{ м}$, 6 – $h = 8,59 \text{ м}$, 7 – $h = 9,58 \text{ м}$

При работе эрлифта 8Б на реальных притоках золошлаковой гидросмеси энергоблока 500 МВт расход воздуха составил $Q_a = 210 \div 215 \text{ м}^3/\text{мин}$ при гидростатическом давлении геометрического погружения смесителя $p_{nc} = 0,85 \div 0,86 \text{ кг/см}^2$ и давлении сжатого воздуха на входе в смеситель $p_{cm} = 0,76 \text{ кг/см}^2$. Согласно полученных экспериментальных характеристик (рис. 3) подача эрлифта в данном случае составляла $Q_s = 520 \div 550 \text{ м}^3/\text{ч}$.

Традиционно определяемый энергетически оптимальный режим работы эрлифта (как точка соприкосновения касательной, проведенной из начала координат, с расходной характеристикой эрлифта), назван в этой работе h -режимом, а режим максимального КПД, вычисленного по выражению (5) с использованием действительного давления в смесителе $p_{cm}(Q_a)$ – p -режимом.

Значения КПД в энергетически оптимальных соответственно h -режиме $\eta_{эп}$ и p -режиме $\eta_{эр}$ вычислены для испытанного эрлифта с подъемной трубой эквивалентным диаметром $D_s = 0,624 \text{ м}$ и длиной $H+h = 36,28 \text{ м}$, и для эрлифтов с подъемными трубами диаметрами $D = 80, 150$ и 250 мм и длинами $H+h = 12,4 \div 63,7 \text{ м}$ согласно экспериментальных данных [10, 20, 21]. Обработка первичных экспериментальных данных, приведенных в [10, 20, 21], выполнена по методике, изложенной выше.

Результаты расчетов показывают (таблица 1), что для анализируемых эрлифтов отношения КПД, вычисленные соответственно с использованием действительного давления в смесителе (p -режим) и давления, полагаемого равным гидростатическому давлению геометрического погружения смесителя (h -режим), составляют величины $\eta_{эр}/\eta_{эп} = 1,07 \div 1,50$. Это доказывает количественную значимость предлагаемого метода оценки энергетической эффективности как глубоководных, так и общепромышленных эрлифтов, содержащих подающие трубы.

При этом в пределах расходной характеристики $Q_s = f(Q_v)$ при постоянном геометрическом погружении смесителя $h = \text{const}$ энергетически оптимальным следует считать режим работы эрлифта с максимальным КПД $\eta_{\text{эр}}$ (p -режим), вычисленным по выражению (5).

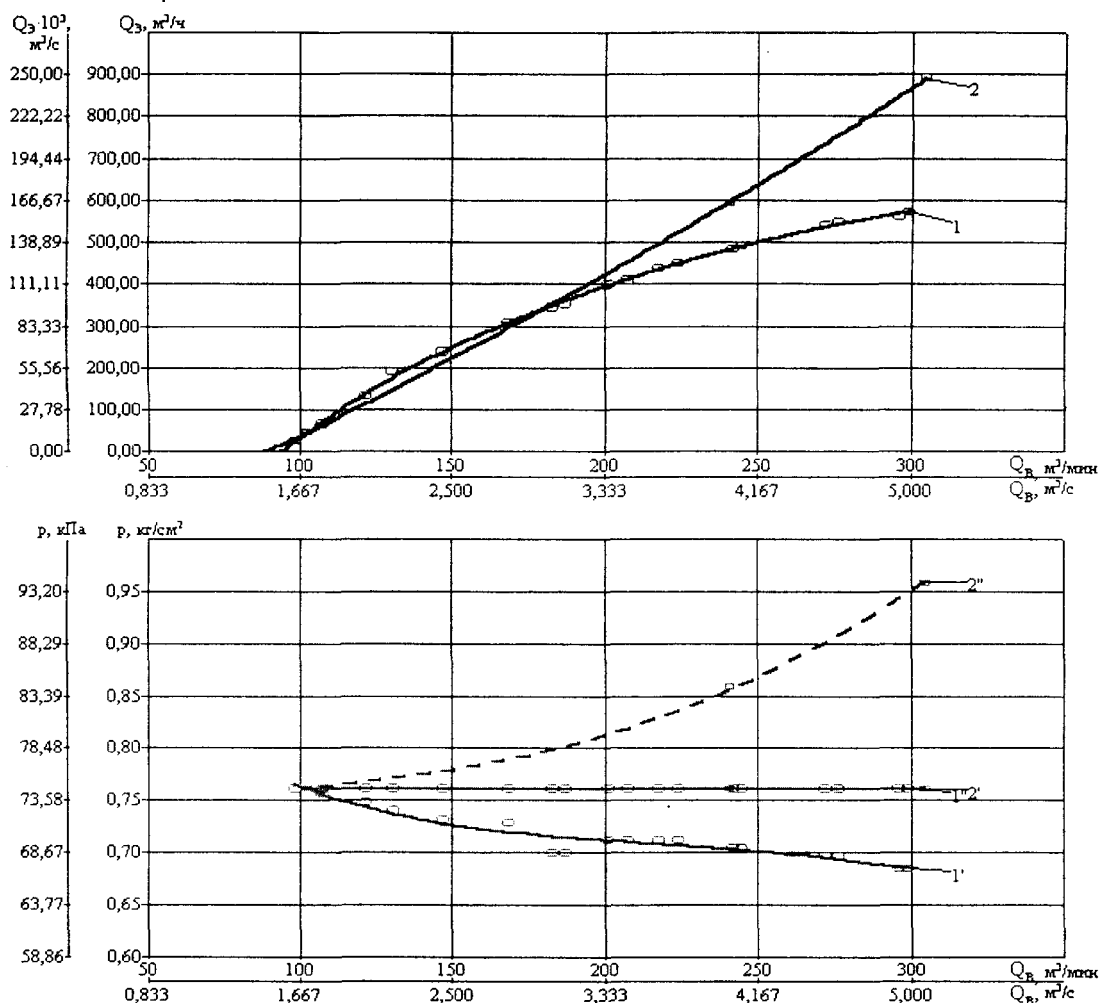


Рис. 5. Характеристики эрлифтов $D_s = 624$ мм, $d = 233$ мм, $H+h = 36,28$ м: 1 – $h = 7,61$ м, 2 – $p_{\text{см}} = 0,761$ кг/см² [1, 2 – $Q_s = f(Q_v)$; 1', 2' – $p_{\text{см}} = f(Q_v)$; 1'', 2'' – $p_{\text{лс}} = f(Q_v)$]

Таблица 1. Сравнительный анализ КПД $\eta_{\text{эл}}$ и $\eta_{\text{эр}}$ опытных и промышленных эрлифтов

Наименование параметра	Значение параметра					
Диаметр подъемной трубы D , мм	624*	150	150	150	250	80
Длина подъемной трубы $H+h$, м	36,28	12,4	51,4	63,7	31,2	15,0
Диаметр подающей трубы d , мм	233	100	100	100	-	-
Длина подающей трубы l , м	1,2	30,0	21,0	21,0	-	-
Геометрическая глубина погружения смесителя h , м	9,58	9,92	47,0	59,3	5,97	6,5
Расход воздуха в оптимальном h -режиме $Q_{\text{в опт}}^{(h)}$, м³/мин	220,5	1,19	3,98	4,06	32,4	0,567
Давление в смесителе в оптимальном h -режиме $p_{\text{см опт}}^{(h)}$, кг/см²	0,828	0,712	3,73	4,75	0,550	0,555
Максимальный КПД в оптимальном h -режиме $\eta_{\text{эл}}$	0,211	0,193	0,119	0,115	0,217	0,242
Расход воздуха в оптимальном p -режиме $Q_{\text{в опт}}^{(p)}$, м³/мин	248,0	2,30	4,60	4,50	33,5	0,60
Давление в смесителе в оптимальном p -режиме $p_{\text{см опт}}^{(p)}$, кг/см²	0,808	0,448	3,46	4,52	0,549	0,552

Максимальный КПД в оптимальном p -режиме $\eta_{эр}$	0,237	0,290	0,135	0,129	0,232	0,275
Отношение КПД $\eta_{эр} / \eta_{эп}$	1,12	1,50	1,13	1,12	1,07	1,14
Источник экспериментальных данных	рис. 3, 4	[10]	[10]	[10]	[20]	[21]

* – эквивалентный диаметр подъемной трубы $D_э$.

Выводы. Значения КПД общепромышленных и глубоководных эрлифтов с подающими трубами необходимо определять с учетом действительного давления в смесителе, т.к. количественно они могут существенно (для рассмотренных конкретных опытных и промышленных установок – в 1,07÷1,5 раза) превышать значения КПД эрлифтов, вычисленных при условии равенства давления в смесителе гидростатическому давлению геометрического погружения смесителя. Во многих практических случаях этот фактор может стать решающим в энергетическом обосновании применяемого гидравлического оборудования для транспортирования жидкостей или гидросмесей, или при назначении энергетически оптимальных эксплуатационных режимов.

РЕЗЮМЕ

Запропонована аналітична залежність та виконано експериментальне підтвердження кількісної значності її використання для розрахунку ККД загальнопромислового ерліфта, що вміщує трубу подачі.

SUMMARY

The analytical dependence is proposed and the quantitative value of its application to calculate the efficiency of the air-lift containing the feeding tube is experimentally validated.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эрлифтные установки / Гейер В.Г., Козыряцкий Л.Н., Пашенко В.С., Антонов Я.К. – Донецк: ДПИ, 1982. – 64 с.
2. Папаяни Ф.А., Козыряцкий Л.Н., Пашенко В.С., Кононенко А.П. Энциклопедия эрлифтов. – М.: Информсвязиздат, 1995. – 592 с.
3. Алескеров А.С. К вопросу определения КПД лифта. Известия ВУЗов, Нефть и газ. №2. – 1973. – С. 41-44.
4. Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений / Муравьев И.М., Андриасов Р.С., Гиматулинов Ш.К. и др. – М.: Недра, 1970. – 448 с.
5. Теория и практика газлифта / Ю.В. Зайцев, Р.А. МаксUTOB, О.В. Чубанов и др. – М.: Недра, 1987. – 256 с.
6. Белов И.Г. Теория и практика периодического газлифта. – М.: Недра, 1975. – 142 с.
7. Рылов Б.М. Оценка энергетической эффективности периодического газлифта. Нефтяное хозяйство, №11. – 1982. – С.28-30.
8. Малыгин С.С., Усков Е.В. Эрлифты как средство шахтного водоотлива. Разработка месторождений полезных ископаемых. – Киев: Техника, 1972. – Вып. 29. – С.93-97.
9. Малыгин С.С., Малеев В.Б. Оптимальное относительное погружение эрлифтов. Труды Донецкого государственного технического университета. Выпуск 7, серия горно-электромеханическая. – Донецк: ДонГТУ, 1999. – С.166-168.
10. Адамов Б.И. Исследование и разработка глубоководных эрлифтных установок для подъема твердого материала. Дисс. ... канд. техн. наук, – Донецк: ДПИ, 1982. – 323 с.
11. Шевченко В.Ф. Исследование и разработка узла подвода пневматической энергии в эрлифте. Дисс. ... канд. техн. наук, Донецк: ДПИ, 1974. – 183 с.
12. Стегниенко А.П. Исследование и разработка методов управления режимами работы шахтных эрлифтов. Дисс. ... канд. техн. наук, Донецк: ДПИ, 1978. – 242 с.
13. Малеев В.Б., Малыгин С.С. Динамическое и геометрическое погружение эрлифтов для добычи полезных ископаемых. Труды Донецкого государственного технического университета. Выпуск 7, серия горно-электромеханическая. – Донецк: ДонГТУ, 1999. – С. 162-166.
14. Гейер В.Г., Костанда В.С., Сафронов Г.М. Экспериментальное исследование эрлифта с подающей трубой большой длины. В сб.: Реферативная информация о законченных научно-исследовательских работах в вузах УССР (угольная и горнорудная промышленность). – Вып. 10. – К.: Вища школа, 1976.
15. Логвинова Е.Н. Минимизация удельного расхода энергии на транспорт гидросмеси вертикальным морским эрлифтом. Труды Донецкого государственного технического университета. Выпуск 7, серия горно-электромеханическая. – Донецк: ДонГТУ, 1999. – С. 157-161.
16. Чугаев Р.Р. Гидравлика. – Л.: Энергоиздат. Ленингр. отделение, 1982. – 672 с.
17. Гейер В.Г., Дулин В.С., Заря А.Н. Гидравлика и гидропривод. – М.: Недра, 1991. – 331 с.
18. Правила измерения расхода газов и жидкостей стандартными сужающими устройствами. РД 50-213-80. – М.: Изд-во стандартов, 1982. – 320 с.
19. Теория инженерного эксперимента / Г.М. Тимошенко, П.Ф. Зима. – К.: УМК ВО, 1991. – 124 с.
20. Малыгин С.С. Применение эрлифтов для водоотлива шахт. Дисс. ... канд. техн. наук. – Донецк: ДПИ, 1966. – 264 с.
21. Стифеев Ф.Ф. Разработка эрлифтов для подъема пульпы повышенной плотности. Дисс. ... канд. техн. наук. – Донецк: ДПИ, 1985. – 262 с.

Надійшла до редакції 06.02.2006 р.