



АЛЕКСАНДР СЕРГЕЕВИЧ КОСМОДАМИАНСКИЙ
(К девяностолетию со дня рождения)

24 марта 2013 года исполнилось девяносто лет со дня рождения известного ученого-механика, академика НАН Украины, заслуженного деятеля науки Украины, лауреата премии им. А.Н. Динника, основателя и бессменного заведующего кафедрой теории упругости и вычислительной математики Донецкого национального университета (1965-2004г.г.).

А.С. Космодамианский родился 24 марта 1923 года в селе Ревны Брянской области. В 1941 году он поступил на первый курс механико-математического факультета Воронежского государственного университета. Однако учебу прервала война и он добровольцем ушел на фронт. Все годы Великой Отечественной войны был на передовой, его мужество и героизм были отмечены орденом Славы III степени, двумя медалями «За отвагу», многими другими боевыми наградами.

После войны, которая для А.С. Космодамианского завершилась со штурмом Кенигсберга, он продолжил учебу на механико-математическом факультете Саратовского университета (1945-1949). Окончил здесь же аспирантуру с защитой кандидатской диссертации (1952 г.) при кафедре теории упругости, возглавляемой известным ученым-механиком профессором С.Г. Лехницким. В последующие годы Александр Сергеевич вел научную и преподавательскую работу в Ростовском (1952-1953) и Саратовском (1954-1965) университетах. Совместная работа и дружба связывали его со многими видными учеными современности – будущими академиками И.И. Воровичем, Н.Н. Моисеевым и Г.Н. Савиным, профессорами С.Г. Лехницким, В.К. Прокоповым, Л.А. Толоконниковым, В.И. Юдовичем.

В 1963 г. А.С.Космодамианский защищает докторскую диссертацию и в 1965г. избирается членом-корреспондентом АН УССР, переезжает в г. Донецк, где в это время был создан Донецкий научный центр АН УССР и открыт новый классический университет. Здесь талант А.С. Космодамианского как ученого, педагога и организатора науки проявился особенно ярко. Под его руководством в Институте прикладной математики и механики НАН Украины был создан отдел математических проблем упругости и пластичности, а в Донецком государственном университете – кафедра теории упругости и вычислительной математики, которую он возглавлял сорок лет. Александр Сергеевич был первым проректором по научной работе Донецкого госуниверситета, руководил этим участком работы в течение одиннадцати лет и за это время молодой университет вошел в число ведущих вузов Украины по показателям научной работы.

Величайшей заслугой А.С. Космодамианского перед отечественной наукой явилось создание в Донецке известной во всем мире научной школы по разработке математических методов решения самого широкого круга задач механики деформируемого твердого тела для многосвязных тел и конструктивных элементов с усложненными физико-механическими свойствами, решения задач горной механики о напряженном состоянии многосвязных анизотропных сред. Исследования по этим направлениям осуществлялись в рамках многих десятков госбюджетных и хозяйственных научных тем, проектов по грантам

отечественных и зарубежных научных фондов. В полной мере проявился и талант А.С.Космодамианского как научного руководителя и наставника творческой молодежи. Им подготовлено 7 докторов и 54 кандидата наук. А.С. Космодамианским опубликовано свыше 400 научных статей, 16 научных монографий и учебных пособий по различным направлениям механики сплошных сред.

Результаты научных исследований А.С. Космодамианского получили самую высокую оценку в Украине и далеко за ее пределами. В 1983 году ему была присуждена Премия Украинской академии наук им. А.Н. Динника и присвоено почетное звание «Заслуженный деятель науки Украинской ССР», в 1990 году Александр Сергеевич был избран действительным членом – академиком Национальной академии наук Украины. В 1997 году он получил звание Соросовского профессора, а в 2001 году стал первым Заслуженным профессором Донецкого национального университета.

Александр Сергеевич являлся членом президиума Национального комитета Украины по теоретической и прикладной механике, ответственным редактором авторитетного научно-технического сборника «Теоретическая и прикладная механика», в 1988-2001 гг. переводившегося на английский язык и переиздававшегося в США в виде отдельных выпусков журналов «Journal of Soviet Mathematics», «Journal of Mathematical Sciences», членом редакционного совета Международного научного журнала «Прикладная механика», членом редколлегии других научных изданий.

Все годы жизни А.С. Космодамианского были пронизаны неизменной и беззаветной преданностью науке, творческим горением и высочайшей исследовательской активностью. Одной из основ научной школы Александр Сергеевич по праву считал созданный по его инициативе Объединенный научный семинар по математическим проблемам механики сплошных сред, который приобрел широчайшую известность и заслуженный авторитет. Традиции его регулярной работы, высокого уровня взыскательности и компетентности, доступности для молодых ученых поддерживались все годы деятельности Александра Сергеевича и, как и многие другие принципы служения науке, завещаны им своим ученикам и последователям.

Будучи выдающимся исследователем и глубоким аналитиком, Александр Сергеевич вместе с тем уделял огромное внимание вопросам преподавания математики и механики, был талантливым педагогом.

Жизненный путь академика НАН Украины А.С. Космодамианского является яркой страницей в истории отечественной науки, истории Донецкого национального университета и Донецкого научного центра НАН Украины. Направления в науке, открытые трудами А.С. Космодамианского, продолжают его ученики и последователи, которые хранят о нем светлую память.

УДК 539:519.517.3

**ОСОБЕННОСТИ ПОВЕДЕНИЯ ПОЛЯ ДЕФОРМАЦИИ ФРАКТАЛЬНЫХ
КВАЗИДВУМЕРНЫХ СТРУКТУР**

О.П. Абрамова, С.В. Абрамов

Для описания стохастических полей деформаций фрактальных квазидвумерных структур получены основные нелинейные уравнения, учитывающие взаимодействие узлов в плоскости основной прямоугольной дискретной решетки. Показана возможность возникновения и перестройки квазидвумерных структур типа фрактальных эллиптической и гиперболической дислокаций, фрактальной квантовой точки. Для исследования поведения стохастического поля деформации фрактальной квазидвумерной структуры в рамках статистического подхода вводятся усредненные функции. Анализ особенностей поведения усредненных функций позволяет определить критические значения управляющих параметров.

Ключевые слова: фрактальная квазидвумерная структура, стохастическое поле деформации, усредненные функции, численное моделирование, критические значения управляющих параметров.

Введение. Описание дефектов с фрактальной структурой (кластеры, дислокации и т.д.) в наноструктурных материалах [1 – 3], которые являются существенно нелинейными средами, требует разработки новых теоретических подходов. В монографии [2] выполнен анализ актуальной проблемы создания функциональных материалов для нанофотоники на основе наночастиц и наноструктур с функциями фотонных кристаллов. Рассмотрены особенности проявления размерных эффектов в этих наноматериалах, обсуждается перспектива их практического использования. В сборнике [3] приведены основные результаты теоретических и экспериментальных исследований строения и свойств различных наноразмерных систем, размерных эффектов и самоорганизации наноструктур. В работах [4 – 7] исследовалась фрактальная дислокация, которая возникает на дискретной прямоугольной решетке и является одним из неклассических структурных объектов в наноструктурном материале.

Целью данной работы является исследование особенностей поведения поля деформации фрактальных квазидвумерных структур в модельной наносистеме и определение критических значений управляющих параметров.

Основные нелинейные уравнения. В работах [4, 5] рассматривалась модельная наносистема: объемная дискретная решетка $N_1 \times N_2 \times N_3$, узлы которой задавались целыми числами n, m, j ($n = \overline{1, N_1}$; $m = \overline{1, N_2}$; $j = \overline{1, N_3}$). Безразмерное переменное смещение узла решетки u описывалось функцией

$$u = (1 - \alpha) \left(1 - 2 \operatorname{sn}^2(u - u_0, k) \right) / Q, \quad (1)$$

где

$$Q(n, m, j) = p_{01} - p_1 n - p_2 m - p_3 j. \quad (2)$$

При этом α – фрактальная размерность поля деформации u вдоль оси Oz ($\alpha \in [0, 1]$); u_0 – постоянное (критическое) смещение; k – модуль функции эллиптического синуса; управляющие параметры p_{01}, p_1, p_2, p_3 не зависели от индексов n, m, j .

В данной работе учтены зависимости параметров p_{01}, p_1, p_2, p_3 от индексов n, m, j . Это позволило при моделировании стохастических полей деформаций фрактальных квазидвумерных структур получить основные нелинейные уравнения, учитывающие взаимодействие узлов в плоскости основной прямоугольной дискретной решетки $N_1 \times N_2$ относительно безразмерных переменных смещений u со структурой аналогичной выражению (1), но с измененным значением функции Q

$$Q = p_0 - b_1 \left((n - n_0) / n_c \right)^2 - b_2 \left((m - m_0) / m_c \right)^2. \quad (3)$$

Теперь здесь управляющими являются параметры $p_0, n_0, n_c, m_0, m_c, b_1, b_2$. Варьируя указанными параметрами можно управлять как структурным состоянием самой фрактальной дислокации, так и типом дислокации, например, переходом из фрактальной эллиптической дислокации во фрактальную квантовую точку и далее во фрактальную гиперболическую дислокацию, соответственно. Управляющие параметры могут изменяться при переходе от одной узловой плоскости с индексом j к другой, что может быть связано не только с внешним управлением, но и с внутренним (процессом самоорганизации структур).

Для исследования поведения стохастического поля деформации фрактальной квазидвумерной структуры в рамках статистического подхода вводятся усредненные функции [5]. Необходимость усреднения связана с тем, что элементы матрицы смещений узлов решетки, в общем случае, являются случайными действительными функциями. Усреднение проводится только по узлам в плоскости основной прямоугольной дискретной решетки $N_1 \times N_2$. Для этого вводятся операторы полей смещений \hat{u} и плотности состояний $\hat{\rho}$. Этим операторам ставятся в соответствие матрицы с матричными элементами u_{nm} и $\rho_{mn} = 1/N_2 N_1$. Прямоугольные матрицы \hat{u} и $\hat{\rho}$ имеют размеры $N_1 \times N_2$ и $N_2 \times N_1$, соответственно. Для однородного распределения оператор $\hat{\rho}$ имеет вид

$$\hat{\rho} = \hat{\xi}_{N_2}^T \hat{\xi}_{N_1} / N_2 N_1, \quad (4)$$

где значок « T » означает операцию транспонирования; $\hat{\xi}_{N_1}$, $\hat{\xi}_{N_2}$ – вектор-строки с элементами равными единице. Усредненная функция M имеет вид [5]

$$M = Sp(\hat{\rho} \hat{u}) = M' + i M''; \quad M' = \text{Re} M; \quad M'' = \text{Im} M. \quad (5)$$

Здесь Sp – операция вычисления следа квадратной матрицы; Re , Im – выделение реальной и мнимой частей комплексной функции M ; i – мнимая единица. Усредненная функция M зависит от управляющих параметров $p_0(j)$, $b_1(j)$, $b_2(j)$.

В общем случае функция $M = M(j)$ является случайной функцией, поскольку усреднение по индексу j не проводится. Это означает, что существуют некоторые критические значения параметров $p_0(j)$, $b_1(j)$, $b_2(j)$, при переходе через которые поведение функции M может измениться со стохастического на регулярное. Поэтому возникает задача поиска критических значений этих управляющих параметров.

Оператору полей смещения \hat{u}^+ соответствует матрица, которая имеет матричные элементы u_{mn}^* . Значки «*», «+» означают операции комплексного, эрмитового сопряжения. Применив операцию эрмитового сопряжения к выражениям вида (5), находим

$$M^+ = M^*; \quad M^* = Sp(\hat{u}^+ \hat{\rho}^T) = M' - i M''. \quad (6)$$

На основе уравнений (5), (6) вводим усредненные функции G_0 , G_1 , G_2 в виде

$$G_0 = M \cdot M^*; \quad G_1 = Sp(\hat{\rho}^T \hat{\rho} \hat{u} \hat{u}^+); \quad G_2 = Sp(\hat{\rho} \hat{\rho}^T \hat{u}^+ \hat{u}). \quad (7)$$

Для описания отклонений вводим разностные функции

$$H_1 = G_1 - G_0; \quad H_2 = G_2 - G_0; \quad H_3 = G_1 - G_2. \quad (8)$$

Численное моделирование и обсуждение результатов. Решение нелинейного уравнения (1) со значением функции Q в виде (3) строится методом итераций при фиксированных значениях $\alpha = 0,5$; $k = 0,5$; $u_0 = 29,537$. Итерационная процедура по индексу m моделирует стохастический процесс на прямоугольной дискретной решетке с размерами $N_1 \times N_2 = 30 \times 40$. Управляющие параметры были следующими $n_0 = 14,3267$; $n_c = 9,4793$; $m_0 = 19,1471$; $m_c = 14,7295$. Для эллипса и мнимого эллипса $b_1 = b_2 = 1$, для гиперболы $b_1 = -1$, $b_2 = 1$ или $b_1 = 1$, $b_2 = -1$.

Управление перестройкой поля деформации фрактальных квазидвумерных структур осуществляется изменением параметра p_0 . В случае $p_0 > 0$ и $b_1 = b_2 = 1$ квазидвумерная структура является структурой типа фрактальной эллиптической дислокации (рис. 1, а, б), для которой расположение особых точек характерно как для реального эллипса.

При $p_0 < 0$ и $b_1 = b_2 = 1$ квазидвумерная структура является структурой типа фрактальной квантовой точки (fractal quantum dot), для которой расположение особых точек характерно как для мнимого эллипса (рис. 1, в, г). Как следует из рис. 1 поле деформации, локализовано в окрестности рассматриваемых особых точек и является стохастическим. Поле деформации вблизи центра фрактальной эллиптической дислокации является практически регулярным (рис. 1, б), а вблизи центра фрактальной квантовой точки – существенно хаотическим (рис. 1, г). Вариация управляющими параметрами n_0 , n_c , m_0 , m_c приводит к сжатию (растяжению) вдоль соответствующих осей эллиптической дислокации и смещению ее положения.

Уменьшение значения параметра p_0 приводит к стягиванию области фрактальной эллиптической дислокации (рис. 2, а, б, г, д) и появлению вблизи центра дислокации ярко выраженной стохастичности (рис. 2, г, д). При увеличении значения p_0 стохастичность поля деформации постепенно исчезает и при превышении некоторого критического значения $p_0 = p_{c1}$ становится регулярным (рис. 2, в, е).

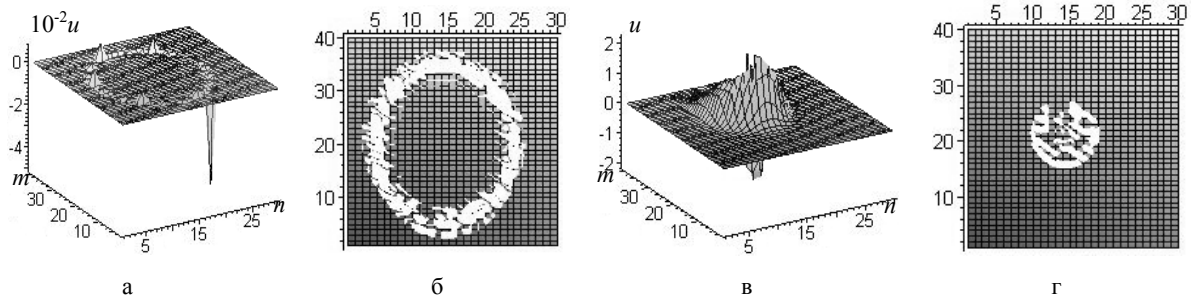


Рис. 1. Зависимости функций смещения u (а, в) и их сечений (б, г) при $u \in [-1, 1]$ (вид сверху) от решеточных индексов n и m : а, б) для фрактальной эллиптической дислокации при $p_0 = 1,0123$; в, г) для фрактальной квантовой точки при $p_0 = -0,2123$.

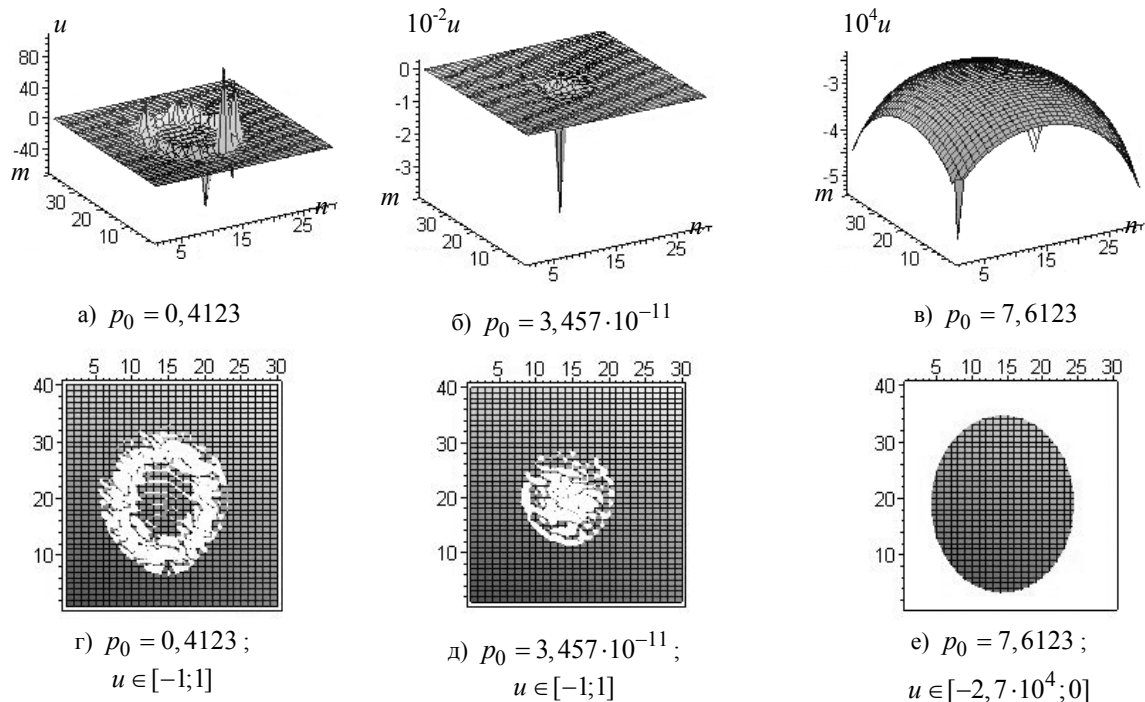


Рис. 2. Управление структурой поля деформации фрактальной эллиптической дислокации путем изменения параметра p_0 : зависимости функций смещения u (а, б, в) и их сечений (г, д, е) (вид сверху) от решеточных индексов n и m .

Уменьшение (по модулю) значения параметра p_0 приводит к сжатию области фрактальной квантовой точки (рис. 3, а, б, в, д), что сопровождается появлением пиков с увеличенными амплитудами. Наблюдается эффект изменения знака максимальной амплитуды пиков: положительный (рис. 3, а, в), отрицательный (рис. 3, б, д). Внутри области фрактальной квантовой точки наблюдается перестройка структуры стохастического поля деформации. При увеличении (по модулю) значения параметра p_0 стохастическое поведение поля деформации постепенно исчезает и далее при превышении некоторого критического значения $p_0 = p_{c2}$ становится регулярным (рис. 3, в, е).

В случае, когда управляющие параметры b_1, b_2 имеют разные знаки квазидвумерная структура является структурой типа фрактальной гиперболической дислокацией (рис. 4), для которой расположение особых точек характерно как для ветвей гиперболы. Смена знаков параметров b_1, b_2 приводит к переориентации поля деформации фрактальной гиперболической дислокации от состояния для одних ветвей гиперболы (рис. 4, а, б) к состоянию с другими ветвями гиперболы (рис. 4, в, г-е), что сопровождается изменением расположения особых точек. Ярко выраженное стохастическое поведение поля деформации наблюдается для области между ветвями гиперболических дислокаций (рис. 4, б, г). Анализ сечений выявляет наличие различных субструктур рис. 4, а, рис. 4, б, рис. 4, в, рис. 4, д, рис. 4, е.

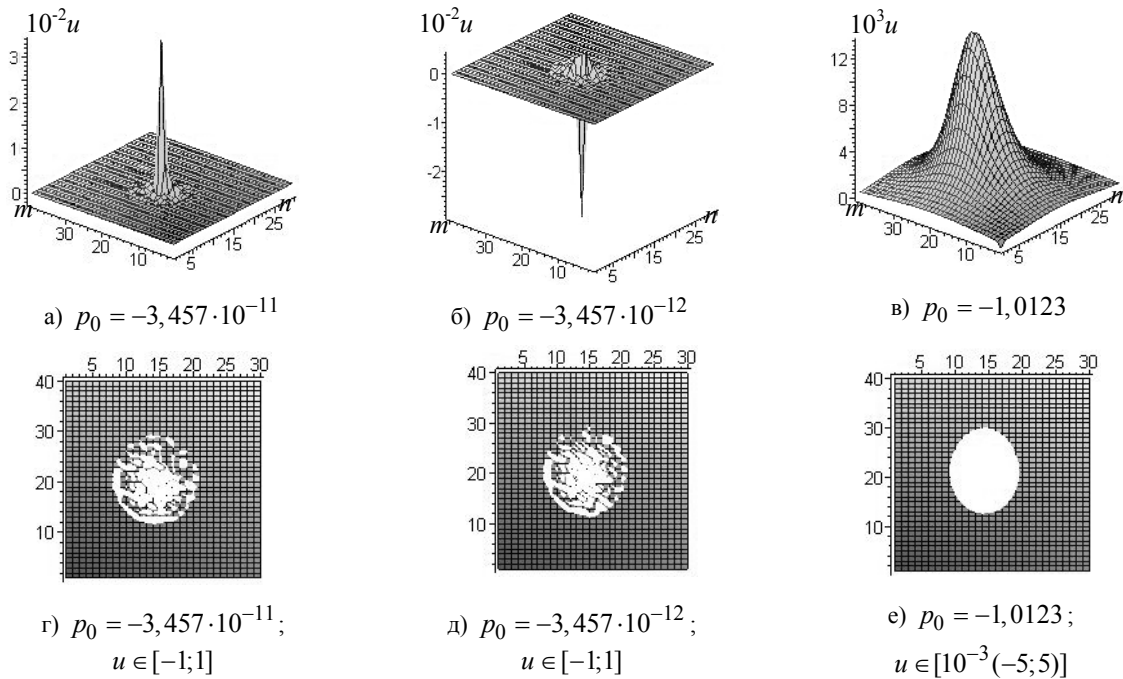


Рис. 3. Управление структурой поля деформации фрактальной квантовой точки путем изменения параметра p_0 : зависимости функций смещения u (а, б, в) и их сечений (г, д, е) (вид сверху) от решеточных индексов n и m .

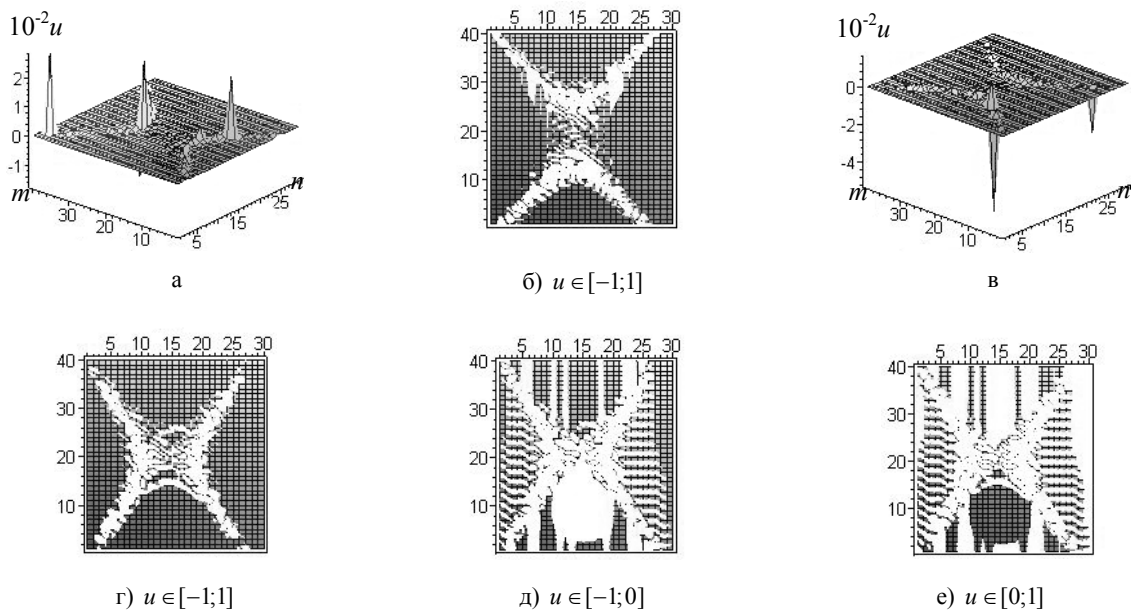


Рис. 4. Управление структурой и периориентацией поля деформации фрактальной гиперболической дислокации в состоянии с фиксированным параметром $p_0 = -0,2123$ путем изменения параметров b_1, b_2 . Зависимости функций смещения u : а) $b_1 = 1$; $b_2 = -1$; в) $b_1 = -1$; $b_2 = 1$ и их сечений б) $b_1 = 1$; $b_2 = -1$; г, д, е) $b_1 = -1$; $b_2 = 1$ (вид сверху) от решеточных индексов n и m .

При увеличении (по модулю) значения параметра p_0 стохастическое поведение поля деформации фрактальной гиперболической дислокации постепенно исчезает и далее при превышении некоторого критического значения $p_0 = p_{c3}$ становится регулярным (рис. 5, а, б). Уменьшение (по модулю) значения параметра p_0 приводит к существенному изменению стохастичности в области вблизи зоны дислокации и между ветвями гиперболы (рис. 5, в, г). При этом наблюдается ярко выраженная перестройка субструктур, что видно из сравнения сечений (рис. 4, д) и (рис. 5, в), (рис. 4, е) и (рис. 5, г).

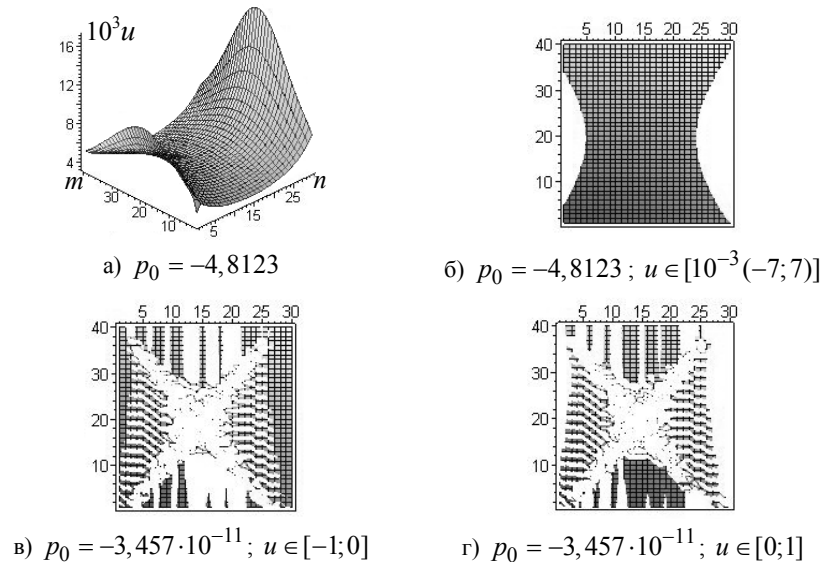


Рис. 5. Управление структурой поля деформации фрактальной гиперболической дислокации ($b_1 = -1, b_2 = 1$) путем изменения параметра p_0 : зависимости функций смещения u (а) и их сечений (б, в, г) (вид сверху) от решеточных индексов n и m .

Поведение усредненной функции M (которая является действительной случайной функцией) от параметра $p_0 > 0$ при $b_1 = b_2 = 1$ для фрактальной эллиптической дислокации показано на рис. 6. В интервале изменения $p_0 \in [0;5]$ наблюдается основной пик со значением $M_* = 51.583$ при $p_0 = p_* = 0.6$ (рис. 6, а) и стохастическое поведение с меньшими амплитудами (рис. 6, б). Наличие особенностей при $p_0 \in [4.5;4.8]$ позволяет определить критические значения параметра p_0 , при переходе через которые стохастическое поведение функции M изменяется на регулярное (рис. 6, в).

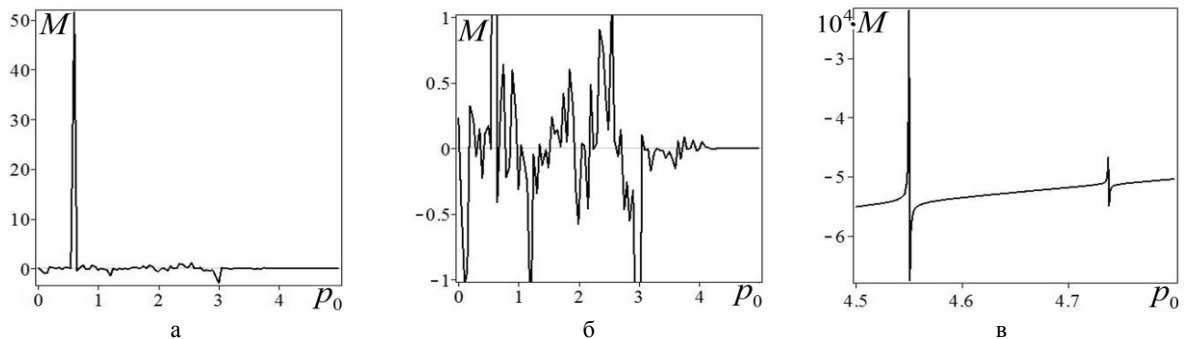


Рис. 6. Поведение функции M от параметра p_0 для фрактальной эллиптической дислокации ($b_1 = b_2 = 1$): а) общее поведение $p_0 \in [0;5]$; б) фрагмент $M \in [-1;1]$; в) $p_0 \in [4.5;4.8]$.

Наличие нескольких особенностей для p_0 (критических значений) имеет вид типа локальных резонансных дисперсий: первая особенность со значениями $M_{\max,1} = -2.1820 \cdot 10^{-4}$ при $p_{0,1} = 4.55025$, $M_{\min,2} = -6.7524 \cdot 10^{-4}$ при $p_{0,2} = 4.551$; вторая особенность со значениями $M_{\max,3} = -4.6829 \cdot 10^{-4}$ при $p_{0,3} = 4.73775$, $M_{\min,4} = -5.4901 \cdot 10^{-4}$ при $p_{0,4} = 4.7385$ (рис. 6, в). Эти особенности позволяют исследовать сам механизм указанного перехода, что связано с механизмом перестройки фрактальной квазидвумерной структуры типа эллиптической дислокации. При дальнейшем увеличении p_0 функция M становится регулярной и асимптотически приближается к нулю со стороны отрицательных значений.

Сравнительный анализ рис. 6 и рис. 2 показывает, что поведение усредненной функции M при изменении управляющего параметра p_0 (рис. 6) коррелирует с поведением поля деформации фрактальной квазидвумерной структуры типа эллиптической дислокации (рис. 2). На основе полученных данных можно выполнить оценку величины критической относительной деформации $\delta \varepsilon$ как отношение значения функции M в особых точках к значению функции M в основном пике

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_1 &= M_{\max,1} / M_* = -4.2301 \cdot 10^{-6}; & \delta\varepsilon_2 &= M_{\min,2} / M_* = -13.0903 \cdot 10^{-6}; \\ \delta\varepsilon_3 &= M_{\max,3} / M_* = -9.0784 \cdot 10^{-6}; & \delta\varepsilon_4 &= M_{\min,4} / M_* = -10.6432 \cdot 10^{-6}. \end{aligned} \quad (9)$$

Эффективные смещения $M_{\max,1}, M_{\min,2}, M_{\max,3}, M_{\min,4}$, которые описывают первую и вторую особенности типа локальных резонансных дисперсий имеют противоположный знак по отношению к эффективному смещению M_* в основном пике, поэтому величины относительных деформаций $\delta\varepsilon$ из (9) являются отрицательными. При этом, $|\delta\varepsilon_2| > |\delta\varepsilon_1|$ для первой особенности и $|\delta\varepsilon_4| > |\delta\varepsilon_3|$ для второй особенности. Эти результаты позволяют интерпретировать первую особенность типа резонансной дисперсии как структурную перестройку поля деформации из состояния с $M_{\max,1}$ в состояние с $M_{\min,2}$, а вторую особенность – как структурную перестройку поля деформации из состояния с $M_{\max,3}$ в состояние с $M_{\min,4}$.

При изменении знака управляющего параметра p_0 (рис. 1) фрактальная эллиптическая дислокация превращается в фрактальную квантовую точку (мнимый эллипс). Поведение усредненной функции M от параметра $p_0 < 0$ при $b_1 = b_2 = 1$ для фрактальной квантовой точки показано на рис. 7. В интервале изменения параметра $p_0 \in [-3.5; -0.35]$ наблюдается регулярное поведение функции M (рис. 7 а), которое для параметра $p_0 \in [-0.35; -0.23]$ (рис. 7, б), переходит в ярко выраженное стохастическое поведение. Наличие особенностей типа точек перегиба, локальных максимума и минимума при $p_0 \in [-0.33; -0.27]$ позволяет определить критические значения параметра p_0 , при переходе через которые регулярное поведение функции M изменяется на стохастическое (рис. 7, в).

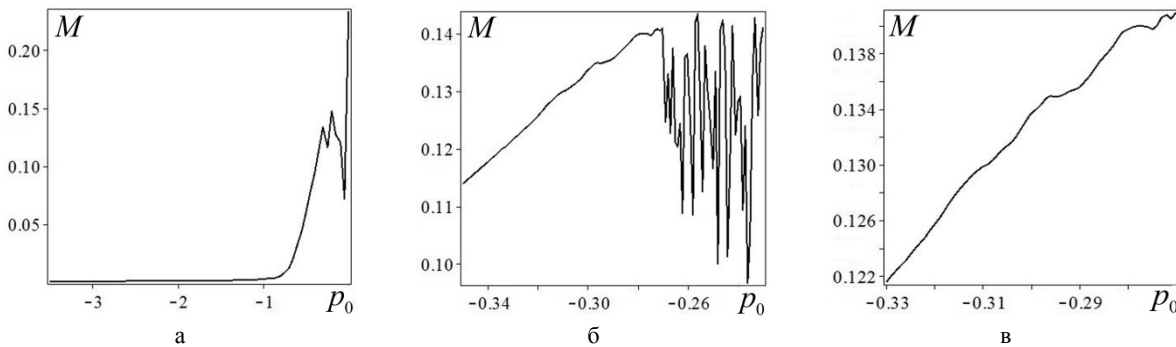


Рис. 7. Поведение функции M от параметра p_0 для фрактальной квантовой точки ($b_1 = b_2 = 1$):

а) общее поведение $p_0 \in [-3.5; 0]$; б) $p_0 \in [-0.35; -0.23]$; в) $p_0 \in [-0.33; -0.27]$.

Первая особенность типа локальной точки перегиба со значением $M_1 = 0.13031$ наблюдается при $p_{01} = -0.308$. Особенности типа локальных максимумов и минимумов наблюдаются: со значениями $M_{\max,2} = 0.13494$ при $p_{0,2} = -0.296$; $M_{\min,3} = 0.13487$ при $p_{0,3} = -0.295$; $M_{\max,4} = 0.14001$ при $p_{0,4} = -0.278$; $M_{\min,5} = 0.13973$ при $p_{0,5} = -0.275$. На основе полученных данных можно выполнить оценку величины критической относительной деформации $\delta\varepsilon$ как отношение значения функции M в особых точках для квантовой точки к значению функции $M = M_*$ в основном пике (рис. 6 а)

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_1 &= M_1 / M_* = 2.5262 \cdot 10^{-3}; & \delta\varepsilon_2 &= M_{\max,2} / M_* = 2.616 \cdot 10^{-3}; & \delta\varepsilon_3 &= M_{\min,3} / M_* = 2.6146 \cdot 10^{-3}; \\ \delta\varepsilon_4 &= M_{\max,4} / M_* = 2.7143 \cdot 10^{-3}; & \delta\varepsilon_5 &= M_{\min,5} / M_* = 2.7088 \cdot 10^{-3}. \end{aligned} \quad (10)$$

Эффективные смещения $M_1, M_{\max,2}, M_{\min,3}, M_{\max,4}, M_{\min,5}$, которые описывают особенности типа точек перегиба, локальных максимума и минимума для квантовой точки имеют тот же знак, что и эффективное смещение M_* , поэтому величины относительных деформаций $\delta\varepsilon$ из (10) являются положительными. При этом, $\delta\varepsilon_2 > \delta\varepsilon_3$ и $\delta\varepsilon_4 > \delta\varepsilon_5$. Эти результаты позволяют интерпретировать поведение поля деформации вблизи локальных точек как структурную перестройку из состояния с $M_{\max,2}$ в состояние с $M_{\min,3}$ и из состояния с $M_{\max,4}$ в состояние с $M_{\min,5}$.

Поведение функции M при изменении управляющего параметра p_0 (рис. 7) коррелирует с поведением поля деформации фрактальной квазидвумерной структуры типа фрактальной квантовой точки (многого эллипса) (рис. 3). Сравнительный анализ величин $\delta\varepsilon$ из (9), (10) показывает, что квазидвумерные фрактальные структуры типа фрактальной квантовой точки имеют большие величины (приблизительно в $10^2 \div 10^3$ раз) относительных деформаций по сравнению с квазидвумерными фрактальными структурами типа фрактальной эллиптической дислокации.

Поведение усредненной функции M от параметра p_0 при $b_1 = -1, b_2 = 1$ для фрактальной гиперболической дислокации (рис. 4, в, состояние I) показано на рис. 8. В интервале изменения $p_0 \in [-3.5; 0]$ (рис. 8, а) наблюдаются основной пик со значением $M_* = -21.216$ при $p_0 = p_* = -1.3$ и два дополнительных пика со значениями $M_{*1} = 4.627$ при $p_{*1} = -1.75$, $M_{*2} = 7.104$ при $p_{*2} = -0.45$, а также ярко выраженное стохастическое поведение с меньшими амплитудами (рис. 8, б). Особенности поведения усредненной функции M при $p_0 \in [-3.1; -3]$ имеют вид типа локальных точки перегиба, максимумов и минимумов (как и для квантовой точки из рис. 7, в). Это позволяет определить критические значения параметра p_0 , при переходе через которые регулярное поведение функции M изменяется на стохастическое (рис. 8, в). Особенности типа локальных максимумов и минимумов наблюдаются: со значениями $M_{\max,1} = 0.01993$ при $p_{0,1} = -3.05$; $M_{\min,2} = 0.01977$ при $p_{0,2} = -3.0425$; $M_{\max,3} = 0.02046$ при $p_{0,3} = -3.035$; $M_{\min,4} = 0.01992$ при $p_{0,4} = -3.0275$.

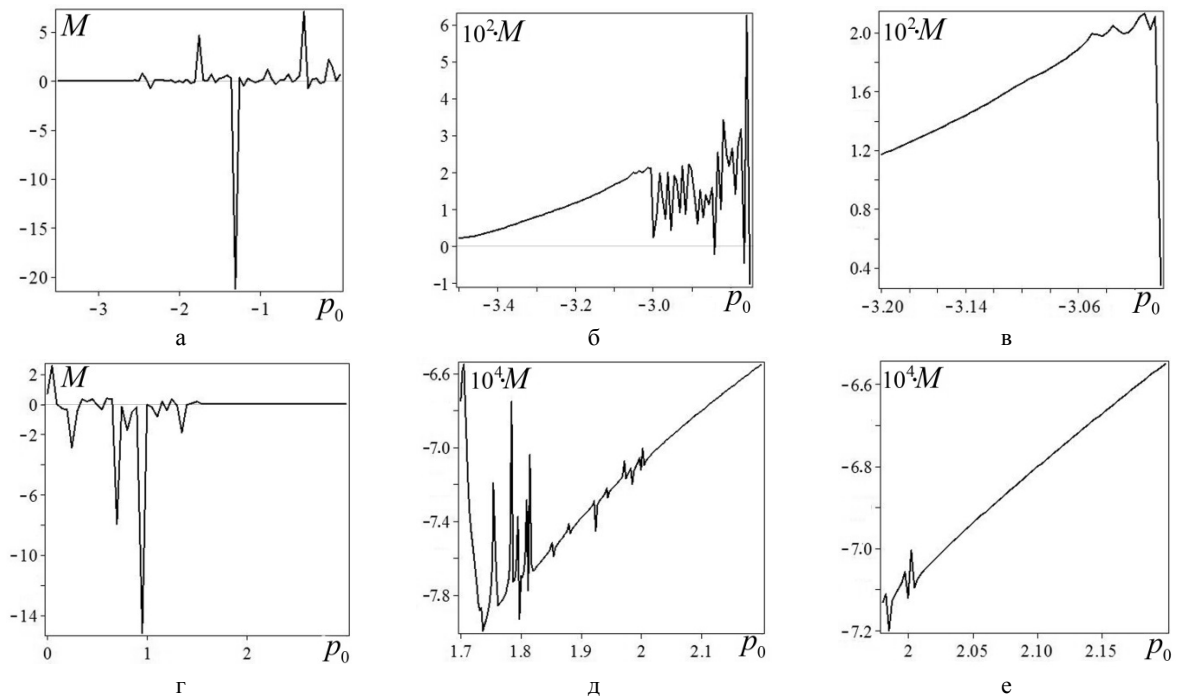


Рис. 8. Поведение функции M от параметра p_0 для фрактальной гиперболической дислокации ($b_1 = -1, b_2 = 1$): а) общее поведение $p_0 \in [-3.5; 0]$; б) $p_0 \in [-3.5; -2.75]$; в) $p_0 \in [-3.2; -3]$; г) общее поведение $p_0 \in [0; 3]$; д) $p_0 \in [1.7; 2.2]$; е) $p_0 \in [1.98; 2.2]$.

На основе полученных данных можно выполнить оценку величины критической относительной деформации $\delta\varepsilon$ как отношение значения функции M в особых точках для фрактальной гиперболической дислокации (состояние I) к значению функции $M = M_*$ в основном пике (рис. 8, а)

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_1 &= M_{\max,1} / M_* = -9.3939 \cdot 10^{-4}; & \delta\varepsilon_2 &= M_{\min,2} / M_* = -9.3184 \cdot 10^{-4}; \\ \delta\varepsilon_3 &= M_{\max,3} / M_* = -9.6437 \cdot 10^{-4}; & \delta\varepsilon_4 &= M_{\min,4} / M_* = -9.3891 \cdot 10^{-4}. \end{aligned} \quad (11)$$

Положительные эффективные смещения $M_{\max,1}, M_{\min,2}, M_{\max,3}, M_{\min,4}$, которые описывают особенности типа локальных максимума и минимума для фрактальной гиперболической дислокации имеют противоположный знак по сравнению со знаком эффективного смещения M_* , поэтому величины отно-

сительных деформаций $\delta\varepsilon$ из (11) являются отрицательными. При этом, $|\delta\varepsilon_1| > |\delta\varepsilon_2|$ для первой особенности и $|\delta\varepsilon_3| > |\delta\varepsilon_4|$ для второй особенности. Эти результаты позволяют интерпретировать поведение поля деформации вблизи локальных точек как структурную перестройку из состояния с $M_{\max,1}$ в состояние с $M_{\min,2}$ и из состояния с $M_{\max,3}$ в состояние с $M_{\min,4}$. При $p_0 < -3.1$ функция M становится регулярной и асимптотически приближается к нулю со стороны положительных значений.

При изменении знака управляющего параметра p_0 с отрицательного на положительный при одних и тех же значениях параметров $b_1 = -1, b_2 = 1$ происходит изменение ориентации ветвей фрактальной гиперболической дислокации из состояния I (рис. 4, в) в состояние II (рис. 4, а). В интервале изменения $p_0 \in [0; 3]$ (рис. 8, з) наблюдаются основной пик со значением $M_* = -15.177$ при $p_0 = p_* = 0.95$ и несколько дополнительных пиков с меньшими амплитудами, а также ярко выраженное стохастическое поведение (рис. 8, д). Особенности поведения усредненной функции M при $p_0 \in [1.98; 2.2]$ имеют вид типа резонансной дисперсии на фоне ступеньки (рис. 8, е). Это позволяет определить критические значения параметра p_0 , при переходе через которые стохастическое поведение функции M изменяется на регулярное (рис. 8, е). Для первой особенности наблюдаются значения $M_{\max,1} = -7.0567 \cdot 10^{-4}$ при $p_{0,1} = 1.9975$, $M_{\min,2} = -7.1215 \cdot 10^{-4}$ при $p_{0,2} = 2$; для второй особенности – $M_{\max,3} = -7.005 \cdot 10^{-4}$ при $p_{0,3} = 2.0025$, $M_{\min,4} = -7.0956 \cdot 10^{-4}$ при $p_{0,4} = 2.005$.

На основе полученных данных можно выполнить оценку величины критической относительной деформации $\delta\varepsilon$ как отношение значения функции M в особых точках (рис. 8, е) для фрактальной гиперболической дислокации (состояние II) к значению функции $M = M_*$ в основном пике (рис. 8, з)

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_1 &= M_{\max,1} / M_* = 4.6496 \cdot 10^{-5}; & \delta\varepsilon_2 &= M_{\min,2} / M_* = 4.6923 \cdot 10^{-5}; \\ \delta\varepsilon_3 &= M_{\max,3} / M_* = 4.6155 \cdot 10^{-5}; & \delta\varepsilon_4 &= M_{\min,4} / M_* = 4.6752 \cdot 10^{-5}. \end{aligned} \quad (12)$$

Отрицательные эффективные смещения $M_{\max,1}, M_{\min,2}, M_{\max,3}, M_{\min,4}$, которые описывают особенности типа резонансной дисперсии на фоне ступеньки для фрактальной гиперболической дислокации имеют тот же знак, что и эффективное смещение M_* , поэтому величины относительных деформаций $\delta\varepsilon$ из (12) являются положительными. При этом, $\delta\varepsilon_2 > \delta\varepsilon_1$ и $\delta\varepsilon_4 > \delta\varepsilon_3$. Эти результаты позволяют интерпретировать поведение поля деформации вблизи локальных точек как структурную перестройку из состояния с $M_{\max,1}$ в состояние с $M_{\min,2}$ и из состояния с $M_{\max,3}$ в состояние с $M_{\min,4}$. При $p_0 > 2.05$ функция M становится регулярной и асимптотически приближается к нулю со стороны отрицательных значений.

Отметим, что для квазидвумерных структур типа фрактальных гиперболических дислокаций характерно наличие субструктур между ветвями гипербол (рис. 4, 5) и дополнительных пиков на зависимостях усредненной функции M (рис. 8, а, з). Возможно, между указанными зависимостями существуют корреляционные связи, что требует дополнительных исследований.

Вблизи различных структурных переходов для наноструктурных материалов характерно изменение межплоскостных расстояний, параметров решетки. Значения критических относительных деформаций (9) – (12) не противоречат этим экспериментально полученным изменениям межплоскостных расстояний, параметров решетки [1 – 3].

Выводы. В случае когда параметры b_1, b_2 имеют одинаковые знаки, возникают квазидвумерные структуры типа фрактальной эллиптической дислокации или фрактальной квантовой точки. Если параметры b_1, b_2 имеют разные знаки, то возникает квазидвумерная структура типа фрактальной гиперболической дислокации. При значении управляющего параметра p_0 выше критического внутри области, ограниченной эллиптической дислокацией, отклонения узлов решетки от положения равновесия становятся регулярными. При значении p_0 ниже критического появляется субструктура. При дальнейшем уменьшении p_0 возникает ярко выраженное стохастическое поведение поля деформации. Изменение знака p_0 приводит к переходу от эллиптической дислокации к фрактальной квантовой точке. Для области между ветвями гиперболической дислокации наблюдаются ярко выраженное стохастическое поведение поля деформации и субструктуры.

Поведение усредненных функций при изменении управляющих параметров коррелирует с поведением поля деформации фрактальных квазидвумерных структур. Анализ особенностей поведения усредненных функций позволяет определить критические значения управляющих параметров и критические значения относительных деформаций. Особенности поведения усредненных функций связаны с механизмами перестройки фрактальных квазидвумерных структур.

РЕЗЮМЕ

Для опису стохастичних полів деформацій фрактальних квазидвумерних структур отримані основні нелінійні рівняння, що враховують взаємодію вузлів в площині основний прямокутної дискретної решітки. Показана можливість виникнення і перебудови квазидвумерних структур типу фрактальних еліптичної і гіперболічної дислокацій, фрактальної квантової точки. Для дослідження поведінки стохастичного поля деформації фрактальної квазидвумерної структури в рамках статистичного підходу вводяться усереднені функції. Аналіз особливостей поведінки усереднених функцій дозволяє визначити критичні значення керуючих параметрів.

Ключові слова: фрактальна квазидвумерная структура, стохастичне поле деформації, усереднені функції, чисельне моделювання, критичні значення керуючих параметрів.

SUMMARY

In order to describe the stochastic deformation fields of fractal quasi-two-dimensional structures, basic non-linear equations that take into account the interaction of knots in the plane of basic rectangular discrete lattice are obtained. The possibility of an appearance and alteration of quasi-two-dimensional structures of fractal elliptic and hyperbolic dislocation, and fractal quantum dot is shown. To investigate the behavior of the stochastic deformation field of fractal quasi-two-dimensional structure in terms of the statistical approach, averaged functions are introduced. The analysis of the behavior of the averaged functions allows to determine the critical values of the governing parameters.

Keywords: fractal quasi-two-dimensional structures, stochastic deformation field, averaged functions, numerical modeling, critical values of the governing parameters.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Шпак А.Н. Кластерные и наноструктурные материалы. Т. 1 / А.Н. Шпак, Ю.А. Куницкий, В.Л. Карбовский. – К.: Издательский дом «Академперіодика», 2001. – 588 с.
2. Материалы для нанофотоники: формирование и свойства наночастиц и наноструктур / А.Н. Грузинцев, Г.А. Емельченко, Ю.В. Ермолаева и др. – Харьков: «ИСМА», 2010. – 400 с.
3. Наноструктурные материалы – 2012: Россия – Украина – Беларусь: Тезисы докладов III Международной научной конференции (г. Санкт-Петербург, 19-22 ноября 2012 г.). – СПб.: ООО «Издательство ЛЕМА», 2012. – 536 с.
4. Абрамова О.П. Перестройка структуры стохастического поля деформации дислокации при изменении управляющих параметров / О.П. Абрамова, С.В. Абрамов // Металлофизика и новейшие технологии. – 2011. – Т. 33, № 4. – С. 519-524.
5. Абрамова О.П. Детерминированное и стохастическое управления перестройкой структуры фрактальной дислокации / О.П. Абрамова, С.В. Абрамов // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2011. – № 2. – С. 30-35.
6. Абрамов В.С. Поведение поля деформации фрактальной дислокации при наличии бифуркаций / В.С. Абрамов // Вісн. Донецьк. нац. ун-ту. Сер. А: Природничі науки. – 2011. – № 2. – С. 23-29.
7. Абрамов В.С. Особенности статистических свойств поля деформации фрактальной дислокации / В.С. Абрамов // Вісник Донецьк. нац. університету. Сер. А. – 2012. – № 1. – С. 105-113.

Поступила в редакцию 18.02.2013 г.

ОДНОРОДНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О РАВНОВЕСИИ И КОЛЕБАНИЯХ ИЗОТРОПНЫХ СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ ПЛАСТИН

Е.В. Алтухов

Рассмотрены трехмерные задачи о равновесии и установившихся колебаниях трехслойной изотропной пластины. На границе раздела неоднородных слоев выполняются условия идеального или скользящего контакта. На плоских гранях пластины рассмотрено десять видов граничных однородных условий. Вихревое и потенциальное решения сорока краевых задач описываются спектральными задачами для дифференциальных операторов с переменными коэффициентами.

Ключевые слова: изотропная трехслойная пластина, равновесие и установившиеся колебания, однородные решения, спектральные задачи.

Введение. Актуальность теории функционально-градиентных материалов, современное состояние и история исследований в данной области отражены в обзорных статьях [1 – 9], монографиях [10 – 28] и других современных публикациях. Следует отметить, что значительное количество результатов получено на основе прикладных и уточненных теорий. В частности, для оценки погрешности приближенных теорий необходимо разрабатывать точные аналитические методы решения задач в трехмерной постановке. Одним из эффективных методов приведения трехмерных задач теории упругости к двумерным для неоднородных по толщине пластин является метод однородных решений [3, 21, 29 – 41], который был предложен А.И.Лурье [42]. Применение однородных решений в задачах равновесия и установившихся колебаний трехслойных плит симметричного строения с однородными слоями отражено в работах [29 – 41].

Данная работа посвящена построению однородных решений краевых задач об упругом равновесии и колебаниях трехслойных пластин с неоднородными слоями и продолжает цикл работ [29 – 41].

Постановка и решение задач. Рассматривается равновесие и гармонические колебания пластины, составленной из трех изотропных слоев толщиной h_m ($m = 1, 2, 3$ – номер слоя). Упругие характеристики материалов слоев $\lambda_m(x_3)$, $\mu_m(x_3)$ и плотности $\rho_m(x_3)$ – кусочно-непрерывные функции.

Уравнения колебания пластины в рамках трехмерной теории упругости имеют вид

$$\begin{aligned} \partial_j \sigma_{ij(m)} + \rho_m \omega^2 u_{i(m)} &= 0 \quad (m = 1, 2, 3), \\ \sigma_{ij(m)} &= \lambda_m \delta_{ij} \partial_i u_{i(m)} + \mu_m (\partial_j u_{i(m)} + \partial_i u_{j(m)}). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\partial_i = \partial / \partial x_i$ ($i = \overline{1, 3}$), $D^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2$; $u_{i(m)}$, $\sigma_{ij(m)}$ – амплитуды смещений и напряжений слоев ($m = 1, 2, 3$); ω – круговая частота гармонических колебаний, δ_{ij} – символ Кронекера. Если положить $\omega = 0$, то системы уравнений (1) описывают упругое равновесие пластины. В этом случае амплитудные смещения и напряжения являются фактическими характеристиками напряженного состояния.

Предполагается, что на плоских гранях пластины ($x_3 = h_1 + h_2 = h_{12}$, $x_3 = -h_2 - h_3 = -h_{23}$) задан один из следующих десяти типов граничных условий

$$\sigma_{i3(1)}(x_1, x_2, h_{12}) = 0, \quad \sigma_{i3(3)}(x_1, x_2, -h_{23}) = 0; \quad (2)$$

$$u_{i(1)}(x_1, x_2, h_{12}) = 0, \quad u_{i(3)}(x_1, x_2, -h_{23}) = 0; \quad (3)$$

$$u_{3(1)}(x_1, x_2, h_{12}) = 0, \quad \sigma_{j3(1)}(x_1, x_2, h_{12}) = 0, \quad u_{3(3)}(x_1, x_2, -h_{23}) = 0, \quad \sigma_{j3(3)}(x_1, x_2, -h_{23}) = 0; \quad (4)$$

$$\sigma_{33(1)}(x_1, x_2, h_{12}) = 0, \quad u_{j(1)}(x_1, x_2, h_{12}) = 0, \quad \sigma_{33(3)}(x_1, x_2, -h_{23}) = 0, \quad u_{j(3)}(x_1, x_2, -h_{23}) = 0; \quad (5)$$

$$\sigma_{i3(1)}(x_1, x_2, h_{12}) = 0, \quad u_{i(3)}(x_1, x_2, -h_{23}) = 0; \quad (6)$$

$$\sigma_{i3(1)}(x_1, x_2, h_{12}) = 0, \quad u_{3(3)}(x_1, x_2, -h_{23}) = 0, \quad \sigma_{j3(3)}(x_1, x_2, -h_{23}) = 0; \quad (7)$$

$$\sigma_{i3(1)}(x_1, x_2, h_{12}) = 0, \quad \sigma_{33(3)}(x_1, x_2, -h_{23}) = 0, \quad u_{j(3)}(x_1, x_2, -h_{23}) = 0; \quad (8)$$

$$u_{3(1)}(x_1, x_2, h_{12}) = 0, \quad \sigma_{j3(1)}(x_1, x_2, h_{12}) = 0, \quad u_{i(3)}(x_1, x_2, -h_{23}) = 0; \quad (9)$$

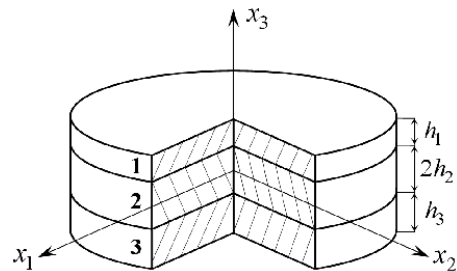


Рис. 1

$$\sigma_{33(1)}(x_1, x_2, h_{12}) = 0, \quad u_{j(1)}(x_1, x_2, h_{12}) = 0, \quad u_{i(3)}(x_1, x_2, -h_{23}) = 0; \quad (10)$$

$$\sigma_{33(1)}(x_1, x_2, h_{12}) = 0, \quad u_{j(1)}(x_1, x_2, h_{12}) = 0, \quad u_{3(3)}(x_1, x_2, -h_{23}) = 0, \quad \sigma_{j3(3)}(x_1, x_2, -h_{23}) = 0. \quad (11)$$

Имеет место одно из следующих четырех условий сопряжения слоев

$$\begin{aligned} u_{i(1)}(x_1, x_2, h_2) &= u_{i(2)}(x_1, x_2, h_2), \quad \sigma_{i3(1)}(x_1, x_2, h_2) = \sigma_{i3(2)}(x_1, x_2, h_2), \\ u_{i(2)}(x_1, x_2, -h_2) &= u_{i(3)}(x_1, x_2, -h_2), \quad \sigma_{i3(2)}(x_1, x_2, -h_2) = \sigma_{i3(3)}(x_1, x_2, -h_2); \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} u_{3(1)}(x_1, x_2, h_2) &= u_{3(2)}(x_1, x_2, h_2), \quad \sigma_{33(1)}(x_1, x_2, h_2) = \sigma_{33(2)}(x_1, x_2, h_2), \\ \sigma_{13(1)}(x_1, x_2, h_2) &= \sigma_{23(1)}(x_1, x_2, h_2) = 0, \quad \sigma_{13(2)}(x_1, x_2, h_2) = \sigma_{23(2)}(x_1, x_2, h_2) = 0, \\ u_{3(2)}(x_1, x_2, -h_2) &= u_{3(3)}(x_1, x_2, -h_2), \quad \sigma_{33(2)}(x_1, x_2, -h_2) = \sigma_{33(3)}(x_1, x_2, -h_2), \\ \sigma_{13(2)}(x_1, x_2, -h_2) &= \sigma_{23(2)}(x_1, x_2, -h_2) = 0, \quad \sigma_{13(3)}(x_1, x_2, -h_2) = \sigma_{23(3)}(x_1, x_2, -h_2) = 0; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} u_{i(1)}(x_1, x_2, h_2) &= u_{i(2)}(x_1, x_2, h_2), \quad \sigma_{i3(1)}(x_1, x_2, h_2) = \sigma_{i3(2)}(x_1, x_2, h_2), \\ u_{3(2)}(x_1, x_2, -h_2) &= u_{3(3)}(x_1, x_2, -h_2), \quad \sigma_{33(2)}(x_1, x_2, -h_2) = \sigma_{33(3)}(x_1, x_2, -h_2), \\ \sigma_{13(2)}(x_1, x_2, -h_2) &= \sigma_{23(2)}(x_1, x_2, -h_2) = 0, \quad \sigma_{13(3)}(x_1, x_2, -h_2) = \sigma_{23(3)}(x_1, x_2, -h_2) = 0; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} u_{3(1)}(x_1, x_2, h_2) &= u_{3(2)}(x_1, x_2, h_2), \quad \sigma_{33(1)}(x_1, x_2, h_2) = \sigma_{33(2)}(x_1, x_2, h_2), \\ \sigma_{13(1)}(x_1, x_2, h_2) &= \sigma_{23(1)}(x_1, x_2, h_2) = 0, \quad \sigma_{13(2)}(x_1, x_2, h_2) = \sigma_{23(2)}(x_1, x_2, h_2) = 0, \\ u_{i(2)}(x_1, x_2, -h_2) &= u_{i(3)}(x_1, x_2, -h_2), \quad \sigma_{i3(2)}(x_1, x_2, -h_2) = \sigma_{i3(3)}(x_1, x_2, -h_2). \end{aligned} \quad (15)$$

Элементарные решения уравнений (1), удовлетворяющие одному из краевых условий на торцах пластины (2) – (11) и одному из условий контакта слоев (12) – (15), по-прежнему будем называть однородными. При получении однородных решений поставленных задач воспользуемся полуобратным методом И.И. Воровича [43, 44]. Вектор амплитудных перемещений $\mathbf{u}_m(x_1, x_2, x_3)$ представим суммой вихревого и потенциального решений

$$\mathbf{u}_m = \begin{pmatrix} u_{1(m)} \\ u_{2(m)} \\ u_{3(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_m(x_3) \partial_2 B(x_1, x_2) \\ -p_m(x_3) \partial_1 B(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_m(x_3) \partial_1 C(x_1, x_2) \\ n_m(x_3) \partial_2 C(x_1, x_2) \\ q_m(x_3) C(x_1, x_2) \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Функции $B(x_1, x_2)$, $C(x_1, x_2)$ удовлетворяют уравнениям

$$D^2 B = \delta^2 B, \quad D^2 C = \gamma^2 C, \quad (17)$$

в которых δ , γ – постоянные разделения переменных.

После подстановки выражений (16) в системы уравнений (1) при учете (17) приходим к следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно функций $p_m(x_3)$

$$(\mu_m p_m')' + (\mu_m \delta^2 + \rho_m \omega^2) p_m = 0 \quad (18)$$

и функций $n_m(x_3)$, $q_m(x_3)$

$$\begin{aligned} (\mu_m n_m')' + (\rho_m \omega^2 + \gamma^2 (\lambda_m + 2\mu_m)) n_m + (\mu_m q_m)' + \lambda_m q_m' &= 0, \\ ((\lambda_m + 2\mu_m) q_m')' + (\rho_m \omega^2 + \gamma^2 \mu_m) q_m + \gamma^2 (\mu_m n_m' + (\lambda_m n_m)') &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Если $\omega = 0$, тогда системы уравнений (18), (19) совместно с граничными условиями (2) – (15) описывают краевые эффекты в задачах упругого равновесия поперечно-неоднородных изотропных пластин.

С целью получения граничных условий для функций p_m подставим выражения (16) в граничные условия (2) – (11) и (12) – (15). Из условий (2) – (11) следует

$$p_1'(h_{12}) = 0, \quad p_2'(-h_{23}) = 0; \quad (20)$$

$$p_1(h_{12}) = 0, \quad p_2(-h_{23}) = 0; \quad (21)$$

$$p_1'(h_{12})=0, \quad p_2(-h_{23})=0; \quad (22)$$

$$p_1(h_{12})=0, \quad p_2(-h_{23})=0; \quad (23)$$

$$p_1'(h_{12})=0, \quad p_2(-h_{23})=0; \quad (24)$$

$$p_1'(h_{12})=0, \quad p_2'(-h_{23})=0; \quad (25)$$

$$p_1'(h_{12})=0, \quad p_2(-h_{23})=0; \quad (26)$$

$$p_1'(h_{12})=0, \quad p_2(-h_{23})=0; \quad (27)$$

$$p_1(h_{12})=0, \quad p_2(-h_{23})=0; \quad (28)$$

$$p_1(h_{12})=0, \quad p_2'(-h_{23})=0. \quad (29)$$

Граничные условия (12) – (15) эквивалентны следующим

$$p_1(h_2) = p_2(h_2), \quad \mu_1(h_2)p_1'(h_2) = \mu_2(h_2)p_2'(h_2), \\ p_2(-h_2) = p_3(-h_2), \quad \mu_2(-h_2)p_2'(-h_2) = \mu_3(-h_2)p_3'(-h_2); \quad (30)$$

$$p_1'(h_2) = 0, \quad p_2'(h_2) = 0, \quad p_2'(-h_2) = 0, \quad p_3'(-h_2) = 0. \quad (31)$$

$$p_1(h_2) = p_2(h_2), \quad \mu_1(h_2)p_1'(h_2) = \mu_2(h_2)p_2'(h_2), \quad p_2'(-h_2) = 0, \quad p_3'(-h_2) = 0; \quad (32)$$

$$p_1'(h_2) = 0, \quad p_2'(h_2) = 0, \quad p_2(-h_2) = p_3(-h_2), \quad \mu_2(-h_2)p_2'(-h_2) = \mu_3(-h_2)p_3'(-h_2); \quad (33)$$

Аналогично получаются краевые условия для функций $n_m(x_3)$, $q_m(x_3)$. Граничные условия на плоских гранях (2) – (11) будут удовлетворены, если:

$$N_1(h_{12}) = 0, \quad M_1(h_{12}) = 0, \quad N_2(-h_{23}) = 0, \quad M_2(-h_{23}) = 0, \quad (34)$$

$$n_1(h_{12}) = 0, \quad q_1(h_{12}) = 0, \quad n_2(-h_{23}) = 0, \quad q_2(-h_{23}) = 0, \quad (35)$$

$$q_1(h_{12}) = 0, \quad M_1(h_{12}) = 0, \quad q_2(-h_{23}) = 0, \quad M_2(-h_{23}) = 0, \quad (36)$$

$$N_1(h_{12}) = 0, \quad n_1(h_{12}) = 0, \quad N_2(-h_{23}) = 0, \quad n_2(-h_{23}) = 0, \quad (37)$$

$$N_1(h_{12}) = 0, \quad M_1(h_{12}) = 0, \quad n_2(-h_{23}) = 0, \quad q_2(-h_{23}) = 0, \quad (38)$$

$$N_1(h_{12}) = 0, \quad M_1(h_{12}) = 0, \quad q_2(-h_{23}) = 0, \quad M_2(-h_{23}) = 0, \quad (39)$$

$$N_1(h_{12}) = 0, \quad M_1(h_{12}) = 0, \quad N_2(-h_{23}) = 0, \quad n_2(-h_{23}) = 0, \quad (40)$$

$$q_1(h_{12}) = 0, \quad M_1(h_{12}) = 0, \quad n_2(-h_{23}) = 0, \quad q_2(-h_{23}) = 0, \quad (41)$$

$$N_1(h_{12}) = 0, \quad n_1(h_{12}) = 0, \quad n_2(-h_{23}) = 0, \quad q_2(-h_{23}) = 0, \quad (42)$$

$$N_1(h_{12}) = 0, \quad n_1(h_{12}) = 0, \quad q_2(-h_{23}) = 0, \quad M_2(-h_{23}) = 0. \quad (43)$$

Здесь

$$M_m(x_3) = \mu_m(n_m' + q_m), \quad N_m(x_3) = (\lambda_m + 2\mu_m)q_m' + \gamma^2\lambda_m n_m.$$

Из условий контакта слоев (12) – (15) имеем

$$n_1(h_2) = n_2(h_2), \quad q_1(h_2) = q_2(h_2), \quad M_1(h_2) = M_2(h_2), \quad N_1(h_2) = N_2(h_2), \\ n_2(-h_2) = n_3(-h_2), \quad q_2(-h_2) = q_3(-h_2), \quad M_2(-h_2) = M_3(-h_2), \quad N_2(-h_2) = N_3(-h_2); \quad (44)$$

$$q_1(h_2) = q_2(h_2), \quad N_1(h_2) = N_2(h_2), \quad M_1(h_2) = 0, \quad M_2(h_2) = 0, \\ q_1(-h_2) = q_3(-h_2), \quad N_2(-h_2) = N_3(-h_2), \quad M_2(-h_2) = 0, \quad M_3(-h_2) = 0; \quad (45)$$

$$n_1(h_2) = n_2(h_2), \quad q_1(h_2) = q_2(h_2), \quad M_1(h_2) = M_2(h_2), \quad N_1(h_2) = N_2(h_2), \\ q_1(-h_2) = q_3(-h_2), \quad N_2(-h_2) = N_3(-h_2), \quad M_2(-h_2) = 0, \quad M_3(-h_2) = 0; \quad (46)$$

$$q_1(h_2) = q_2(h_2), \quad N_1(h_2) = N_2(h_2), \quad M_1(h_2) = 0, \quad M_2(h_2) = 0, \\ n_2(-h_2) = n_3(-h_2), \quad q_2(-h_2) = q_3(-h_2), \quad M_2(-h_2) = M_3(-h_2), \quad N_2(-h_2) = N_3(-h_2). \quad (47)$$

В результате вихревое и потенциальное решения описаны в терминах спектральных задач (18), (20) – (33) и (19), (34) – (46). В общем случае изменения упругих параметров для решения спектральных задач можно использовать численные методы. Это позволит приближенно найти собственные функции

$p_m(x_3)$, $n_m(x_3)$, $q_m(x_3)$ и значения δ , γ . Важным является выяснение частных случаев изменения упругих параметров, когда можно в явном аналитическом виде найти собственные функции $p_m(x_3)$, $n_m(x_3)$, $q_m(x_3)$. Представляет интерес, например, случай однородных слоев. Исследования общих свойств собственных функций и значений спектральных задач, полноты однородных решений могут быть выполнены на основании результатов работы [21].

Таким образом, решения вида (16), соответствующие счетным множествам собственных значений $\{\delta_k\}$ вихревого и $\{\gamma_p\}$ потенциального состояний образуют систему однородных решений. Полученные решения, точно удовлетворяющие уравнениям движениям и равновесия пластины, граничным условиям на плоских гранях и на границе контакта слоев, можно использовать для удовлетворения краевым условиям на боковой поверхности. Следует иметь в виду, что в случае $\omega = 0$ и некоторых граничных условий на плоских гранях, например, (2) собственным значениям $\delta = 0$ и $\gamma = 0$ соответствуют бигармоническое решение.

Задачей дальнейших исследований является изучение свойств полученных однородных решений и характеристик волнового процесса на основе анализа дисперсионных уравнений, разработка методики применения элементарных решений к изучению напряженного состояния неоднородных по толщине пластин, оценка погрешности прикладных теорий.

РЕЗЮМЕ

Розглянуті тривимірні задачі про рівновагу та усталені коливання тришарової ізотропної пластини. На межі поділу неоднорідних шарів виконуються умови ідеального або ковзного контакту. На плоских гранях пластини розглянуто десять видів граничних однорідних умов. Вихрові та потенційні розв'язки сорока крайових задач описуються спектральними задачами для диференціальних операторів із змінними коефіцієнтами.

Ключові слова: ізотропна тришарова пластинка, рівновага та усталені коливання, однорідні розв'язки, спектральні задачі.

SUMMARY

Three-dimensional problems about equilibrium and steady-state vibrations of a three-layer isotropic plate are considered. Conditions of ideal or sliding contacts are fulfilled on the interface of nonhomogeneous layers. On planar faces of the plate the ten types of boundary homogeneous conditions are considered. Vortex and potential solutions of forty boundary-value problems are described by spectral problems for differential operators with variable factors.

Keywords: three-layer isotropic plate, equilibrium and steady-state vibrations, homogeneous solutions, spectral problems.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Birman V. Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures / V. Birman, L. W. Byrd // Applied machines reviews. – 2007. – Vol. 60, No 5. – P. 195-216.
2. Guz' A. N. Dynamics of laminated and fibrous composites / A. N. Guz', N. A. Shul'ga // Applied machines reviews. – 1992. – Vol. 45, No 2. – P. 35-60.
3. Kosmodamianskii A. S. Accumulation of Internal Energy in Multiply Connected Bodies / A. S. Kosmodamianskii // International applied mechanics. – 2002. – Vol. 38, No 4. – P. 399-422.
4. Leissa A. W. A review of laminated composite plate buckling / A. W. Leissa // Applied machines reviews. – 1987. – Vol. 40, No 5. – P. 575-591.
5. Piskunov V. G. An Iterative Analytical Theory in the Mechanics of Layered Composite Systems / V. G. Piskunov // Mechanics of Composite Materials. – 2003. – Vol. 39, No 1. – P. 1-16.
6. Piskunov V. G. Evolution of the Theory of Laminated Plates and Shells / V. G. Piskunov, A. O. Rasskazov // International Applied Mechanics. – 2002. – Vol. 38, No 2. – P. 135-166.
7. Reddy J. N. Theories and computational models for composite laminates / J. N. Reddy // Applied mechanics reviews. – 1994. – Vol. 47, No 6. – P. 147-169.
8. Shul'ga N. A. Propagation of elastic waves in periodically inhomogeneous media / N. A. Shul'ga // International applied mechanics. – 2003. – Vol. 39, No 7. – P. 763-796.
9. Su Z. Guided Lamb waves for identification of damage in composite structures: A review / Z. Su, L. Ye, Y. Lu // Journal of Sound and Vibration. – 2006. – Vol. 295 – P. 753-780.
10. Бабешко В. А. Динамика неоднородных линейно-упругих сред / В. А. Бабешко, Е. В. Глушков, Ж. Ф. Зинченко. – М.: Наука, 1989. – 343 с.
11. Болотин В. В. Механика многослойных конструкций / В. В. Болотин, Ю. Н. Новичков. – М.: Машиностроение, 1980. – 376 с.
12. Бреховских Л. М. Акустика неоднородных сред / Л. М. Бреховских, О. А. Годин. – М.: Наука, 2009. – Т. 2: Звуковые поля в слоистых и трехмерно-неоднородных средах. – 428 с.
13. Гарынин Г. Л. Пространственные задачи изгиба и кручения слоистых конструкций. Метод асимптотического расщепления / Г. Л. Гарынин, Ю. В. Немировский. – Новосибирск: Наука, 2004. – 409 с.
14. Горшков А. Г. Стационарные задачи динамики многослойных конструкций / А. Г. Горшков, В. И. Пожуйев. – М.: Машиностроение, 1992. – 224 с.

15. Молотков Л. А. Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах / Л. А. Молотков. – Л.: Наука, 1984. – 201 с.
16. Никишин В. С. Пространственные задачи теории упругости для многослойных сред / В. С. Никишин, Г. С. Шапиро. – М.: ВЦ АН СССР, 1970. – 260 с.
17. Олейник О. А. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред / О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, А. С. Шамаев. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 311 с.
18. Петрашень Г. И. Волны в слоисто-однородных изотропных упругих средах. Метод контурных интегралов в нестационарных задачах динамики / Г. И. Петрашень, Л. А. Молотков, П. В. Крауклис. – Л.: Наука, 1982. – 289 с.
19. Плевако В. П. Общие решения в задачах теории упругости неоднородных сред / В. П. Плевако. – Харьков: Основа, 1997. – 159 с.
20. Сеймов В. М. Колебания и волны в слоистых средах / В. М. Сеймов, А. Н. Трофимчук, О. А. Савицкий. – К.: Наук. думка, 1990. – 224 с.
21. Устинов Ю. А. Математическая теория поперечно-неоднородных плит / Ю. А. Устинов. – Ростов н/Д.: ООО ЦВВР, 2006. – 257 с.
22. Шевляков Ю. А. Матричные алгоритмы в теории упругости неоднородных сред / Ю. А. Шевляков. – К.: Вища школа, 1977. – 215 с.
23. Шульга Н. А. Основы механики слоистых сред периодической структуры / Н. А. Шульга. – К.: Наук. думка, 1981. – 200 с.
24. Datta S. K. Elastic waves in composite media and structures: with applications to ultrasonic nondestructive evaluation / S. K. Datta, A. H. Shah. – Boca Raton: CRC Press, 2009. – 318 p.
25. FGM: Design, processing and applications / Y. Miyamoto, W. A. Kaysser, B. H. Rabin et al. – Dordrecht: Kluwer Academic, 1999. – 434 p.
26. Graff K. F. Wave motion in elastic solids / K. F. Graff. – New York: Dover, 1991. – 692 p.
27. Reddy J. N. Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis / J. N. Reddy. – Boca Raton: CRC Press, 2004. – 831 p.
28. Suresh S. Fundamentals of FGM / S. Suresh, A. Mortensen. – London: Maney, 1998. – 338 p.
29. Алтухов Е. В. Деформация трехслойных пластин в случае смешанных граничных условий на торцах / Е. В. Алтухов, М. В. Фоменко // Теоретическая и прикладная механика. – 2011. – № 2 (48). – С. 29-39.
30. Алтухов Е. В. Изгибные колебания упругих трехслойных пластин симметричного строения со свободными плоскими гранями / Е. В. Алтухов, М. В. Фоменко // Вісн. Донецьк. нац. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2009. – № 1. – С. 117-124.
31. Алтухов Е. В. Колебания трехслойных пластин в случае граничных условий плоского торца и проскальзывания слоев / Е. В. Алтухов, М. В. Фоменко // Вісн. Донецьк. нац. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2011. – № 2. – С. 36-41.
32. Алтухов Е. В. Колебания трехслойных пластин при проскальзывании слоев и с покрытыми диафрагмой торцами / Е. В. Алтухов, М. В. Фоменко // Тр. Ин-та прикладной математики и механики НАН Украины. – 2011. – Т. 23. – С. 5-14.
33. Алтухов Е. В. Колебания трехслойных пластин с жесткой заделкой торцов и при проскальзывании слоев / Е. В. Алтухов, М. В. Фоменко // Теоретическая и прикладная механика. – 2011. – № 3 (49). – С. 38-50.
34. Алтухов Е. В. Распространение волн в трехслойных пластинах со свободными от напряжений плоскими гранями / Е. В. Алтухов, М. В. Фоменко // Теоретическая и прикладная механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 146-153.
35. Алтухов Е. В. Упругие колебания трехслойных пластин симметричного строения / Е. В. Алтухов, М. В. Фоменко // Тр. Ин-та прикладной математики и механики НАН Украины. – 2009. – Т. 18. – С. 3-10.
36. Алтухов Е. В. Упругое равновесие трехслойной пластины с неидеальным контактом слоев / Е. В. Алтухов, М. В. Фоменко // Вісн. Донецьк. нац. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2010. – № 1. – С. 17-22.
37. Алтухов Е. В. Упругое равновесие трехслойной пластины с покрытыми диафрагмой плоскими гранями / Е. В. Алтухов, М. В. Фоменко // Вісн. Донецьк. нац. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2011. – № 1. – С. 19-26.
38. Фоменко М. В. Кососимметричные колебания трехслойных пластин при отсутствии напряжений на торцах и проскальзывании слоев / М. В. Фоменко // Тр. Ин-та прикладной математики и механики НАН Украины. – 2010. – Т. 20. – С. 188-195.
39. Шевченко В. П. Упругие колебания трехслойных пластин в случае плоского торца / В. П. Шевченко, Е. В. Алтухов, М. В. Фоменко // Доповіді НАН України. – 2011. – № 9. – С. 70-77.
40. Шевченко В. П. Деформация трехслойных пластин со скользящей заделкой торцов и несовершенным контактом слоев / В. П. Шевченко, Е. В. Алтухов, М. В. Фоменко // Доповіді НАН України. – 2012. – № 8. – С. 61-66.
41. Altukhov E. V. Symmetric elastic vibrations of three-layer plates in the absence of stresses on their end faces and layer slip / E. V. Altukhov, M. V. Fomenko // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – Vol. 185, No 6. – P. 837-851.
42. Лурье А. И. К теории толстых плит / А. И. Лурье // Прикладная математика и механика. – 1942. – Т. 6, вып. 2-3. – С. 151-168.
43. Аксентян О. К. Напряженное состояние плиты малой толщины / О. К. Аксентян, И. И. Ворович // Прикладная математика и механика. – 1963. – Т. 27, вып. 6. – С. 1057-1074.
44. Ворович И. И. Напряженное состояние толстой плиты / И. И. Ворович, О. С. Малкина // Прикл. математика и механика. – 1967. – Т. 31, № 2. – С. 230-241.

Поступила в редакцию 21.01.2013 г.

УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНЫ С НАПОЛНИТЕЛЕМ НА ГРАНИЦЕ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ И УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Н.Н. Антоненко, И.Г. Величко

Запорожский национальный технический университет, г. Запорожье

В рамках линейной теории упругости найдено решение задачи о трещине нормального отрыва с наполнителем на границе упругой полосы и упругой полуплоскости. Для решения задачи использовано интегральное преобразование Фурье. Задача сведена к системе интегро-дифференциальных уравнений. Исследовано влияние упругих характеристик полосы и наполнителя на распределение напряжений на берегах трещины.

Ключевые слова: межфазная трещина, наполнитель, метод интегральных преобразований Фурье, интегро-дифференциальное уравнение.

Введение. Исследование трещин на границе раздела двух материалов заложено в работе [1]. Выделяют бесконтактную и контактную модели межфазных трещин. В рамках бесконтактной модели возле вершин трещины возникает осциллирующая особенность и наблюдается взаимное проникновение материалов, что физически нереально. В рамках контактной модели, предложенной в [2], возле вершин трещины вводятся зоны контакта берегов. Широкая библиография посвященная исследованию межфазных трещин приведена в справочниках [3, 4]. Среди работ, выполненных в рамках контактной модели трещины, отметим статьи [5 – 8].

В работах [9 – 12] исследовались трещины на границе раздела полосы и полуплоскости, предполагалось, что берега трещины находятся под действием нормальных внутренних напряжений. В статье [13] рассмотрена задача о трещине на границе упругой полосы и упругой полуплоскости со свободными от нагрузок берегами.

Во всех вышеуказанных работах рассматривались трещины без наполнителя. При эксплуатации конструкций слоистой структуры, в местах спайки или склеивания их элементов могут возникать трещины, заполненные упругим клейким веществом, которые можно моделировать упругими включениями.

В работе [14] предложена модель трещины с наполнителем. Реакция материала наполнителя определяется при помощи модели винклеровского основания: на берегах трещины скачки вертикальных (горизонтальных) перемещений пропорциональны нормальным (касательным) напряжениям. В дальнейшем автор монографии [14] трещины такого типа называет упругими включениями. Рассматриваются полубесконечные включения постоянной толщины, включения в форме клина и параболы. Аналогичные задачи для упругих включений конечных размеров в неограниченных упругопластических телах рассматривались в статьях [15, 16].

В работах [14 – 16] включения содержатся в однородных телах, поэтому представляет интерес найти решение задачи о трещине с наполнителем, в рамках указанной модели, для случая, когда трещина находится на границе упругой полосы и упругой полуплоскости с разными модулями упругости.

Постановка задачи. Рассмотрим упругую полосу, толщины h , сцепленную с упругой полуплоскостью за исключением отрезка длиной $2a$, которым будем моделировать трещину. К верхней границе полосы приложена нормальная сосредоточенная нагрузка величины Q .

В полосе и полуплоскости вводим локальные прямоугольные системы координат так, как указано на рис. 1. Величины, относящиеся к полосе имеют индекс 1, а к полуплоскости – 2. Если это не приводит к неоднозначности, то индексы будем опускать. Материалы полосы и полуплоскости невесомые однородные и изотропные. Полоса и полуплоскость характеризуются модулями сдвига μ_i и коэффициентами Пуассона ν_i ($i = 1, 2$).

В рамках модели трещины с наполнителем будем предполагать, что скачки вертикальных (горизонтальных) перемещений на берегах трещины пропорциональны нормальным (касательным) напряжениям на ее берегах.

Условия на верхней границе полосы:

$$\sigma_{z1}(x, 0) = Q\delta(x), \quad \tau_{xz1}(x, 0) = 0, \quad (1)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

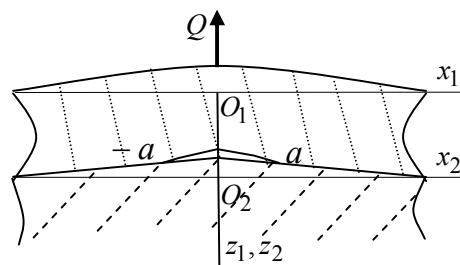


Рис. 1

Условия на нижней границе полосы:

$$\begin{aligned} \sigma_{z2}(x,0) = \sigma_{z1}(x,h), \quad \tau_{xz2}(x,0) = \tau_{xz1}(x,h), \quad |x| > a, \\ u_2(x,0) - u_1(x,h) = \begin{cases} B(x), & |x| \leq a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases} \quad w_2(x,0) - w_1(x,h) = \begin{cases} A(x), & |x| \leq a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

В работе [13] показано, что для трещины на границе упругой полосы и упругой полуплоскости, берега которой свободны от нагрузок, функции $A(x)$ и $B(x)$ имеют корневые особенности вблизи вершин трещины, поэтому будем считать, что $A(x) = \sqrt{a^2 - x^2} f(x)$, $B(x) = \sqrt{a^2 - x^2} g(x)$, $f(x) \in C^2_{[-a,a]}$, $g(x) \in C^2_{[-a,a]}$, $f(\pm a) \neq 0$, $g(\pm a) \neq 0$.

В рамках модели трещины с наполнителем:

$$\sigma_{z1}(x,h) = cf(x), \quad |x| \leq a, \quad (3)$$

$$\tau_{xz1}(x,h) = cg(x), \quad |x| \leq a, \quad (4)$$

где c – интегрированный коэффициент, который характеризует наполнитель ($[c] = \text{Па}$). В качестве коэффициента пропорциональности между скачками перемещений и напряжениями в соответствующих точках трещины выступает функция $c^{-1} \sqrt{a^2 - x^2}$.

Метод решения. Решение задачи ищем при помощи интегрального преобразования Фурье:

$$\bar{s}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{i\xi x} dx, \quad s(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{s}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi. \quad (5)$$

Для нахождения трансформант напряжений и перемещений в полосе и полуплоскости, которые нам понадобятся для построения интегрального уравнения задачи, применяем прямое преобразование Фурье к уравнениям Ламе и закону Гука

$$\omega \frac{\partial \theta}{\partial x} + (1 - \omega) \Delta u = 0, \quad \omega \frac{\partial \theta}{\partial z} + (1 - \omega) \Delta w = 0,$$

$$\sigma_x = (\lambda + 2\mu) \varepsilon_x + \lambda \varepsilon_z, \quad \tau_{xz} = \mu \gamma_{xz}, \quad \sigma_z = (\lambda + 2\mu) \varepsilon_z + \lambda \varepsilon_x,$$

где

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \omega = \frac{1}{2(1-\nu)},$$

λ , μ – коэффициенты Ламе.

Полученные выражения для трансформант напряжений и перемещений представим в виде линейных комбинаций вспомогательных функций $\alpha(\xi)$, $\beta(\xi)$, $\gamma(\xi)$, $\eta(\xi)$ связанных с трансформантами напряжений и перемещений в точках верхней границы полосы (полуплоскости) $\alpha = \bar{\sigma}_z(\xi, 0)$, $\beta = \mu p \bar{w}(\xi, 0)$, $\gamma = -i\xi \bar{u}(\xi, 0)$, $\eta = -i\xi p^{-1} \bar{\tau}_{xz}(\xi, 0)$ [17]:

$$\begin{aligned} p \bar{w}(\xi, z) = \frac{1}{2\mu} [((2 - \omega) \text{sh } pz - \omega p z \text{ ch } pz) \alpha + 2(-\omega p z \text{ sh } pz + \text{ch } pz) \beta + \\ + 2((1 - \omega) \text{sh } pz - \omega p z \text{ ch } pz) \gamma - \omega p z \text{ sh } pz \eta], \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} -i \xi \bar{u}(\xi, z) = \frac{1}{2\mu} [\omega p z \text{ sh } pz \alpha + 2((1 - \omega) \text{sh } pz + p z \omega \text{ ch } pz) \beta + \\ + 2(\omega p z \text{ sh } pz + \text{ch } pz) \gamma + ((2 - \omega) \text{sh } pz + \omega p z \text{ ch } pz) \eta], \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} -\frac{i \xi}{p} \bar{\tau}_{xz}(\xi, z) = -(1 - \omega) \text{sh } pz + \omega p z \text{ ch } pz \alpha + 2\omega p z \text{ sh } pz \beta + \\ + 2\omega (\text{sh } pz + p z \text{ ch } pz) \gamma + (\text{ch } pz + \omega p z \text{ sh } pz) \eta, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_z(\xi, z) = (\text{ch } pz - \omega p z \text{ sh } pz) \alpha + 2\omega (\text{sh } pz - p z \text{ ch } pz) \beta - \\ - 2\omega p z \text{ sh } pz \gamma - ((1 - \omega) \text{sh } pz + \omega p z \text{ ch } pz) \eta. \end{aligned} \quad (9)$$

Применяем к граничным условиям (1) и (2) прямое преобразование Фурье. С учетом соотношений (6) – (9) при $z = h$, получаем систему линейных алгебраических уравнений, из которой определяем функ-

ции $\beta(\xi)$ и $\gamma(\xi)$. Подставляем найденные $\beta(\xi)$ и $\gamma(\xi)$ в соотношения (8) и (9) при $z = h$, получаем выражения для трансформант нормальных и касательных напряжений в точках нижней границы полосы:

$$\bar{\sigma}_{z1}(\xi, h) = i\xi M_1(p)N(\xi) + pM_2(p)M(\xi) + QM_3(p), \quad (10)$$

$$\bar{\tau}_{xz1}(\xi, h) = i \operatorname{sgn}(\xi) [i\xi M_4(p)N(\xi) + pM_1(p)M(\xi) + QM_5(p)], \quad (11)$$

где $M(\xi) = \int_{-a}^a A(t)e^{i\xi t} dt$, $N(\xi) = \int_{-a}^a B(t)e^{i\xi t} dt$, $p = |\xi|$. Функции $M_i(p)$ ($i = \overline{1,5}$) – ограниченные дифференцируемые функции, которые обладают такими свойствами:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} M_1(p) = \frac{2\Delta\omega_1 a_1}{k_1}, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} M_2(p) = \frac{2\Delta\omega_1 b_1}{k_1},$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} M_4(p) = -\frac{2\Delta\omega_1 b_1}{k_1}, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} M_3(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} M_5(p) = 0,$$

где

$$a_1 = -\mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2 + \mu_1\omega_1\omega_2 - \mu_2\omega_1\omega_2, \quad b_1 = \mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2,$$

$$k_1 = \omega_1(2\Delta\omega_2 + 2\Delta\omega_1 + \Delta^2\omega_1\omega_2 + 2\Delta^2\omega_1 - 2\omega_2 - 2\Delta\omega_1\omega_2 - 4\Delta),$$

$$\Delta = \mu_1/\mu_2, \quad \omega_i = 0,5/(1 - \nu_i) \quad (i = \overline{1,2}).$$

Применяем к соотношениям (10) и (11) обратное преобразование Фурье и, учитывая условия на нижней границе полосы (3), (4), получаем систему интегральных уравнений относительно неизвестных функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$\pi c f(x) = - \int_{-a}^a B(t)K_1(t-x)dt + \int_{-a}^a A(t)K_2(t-x)dt + QF_1(x),$$

$$\pi c g(x) = - \int_{-a}^a B(t)K_3(t-x)dt + \int_{-a}^a A(t)K_1(t-x)dt + QF_2(x), \quad (12)$$

где

$$K_1(y) = \int_0^\infty p M_1(p) \sin(py) dp, \quad K_2(y) = \int_0^\infty p M_2(p) \cos(py) dp, \quad K_3(y) = \int_0^\infty p M_4(p) \cos(py) dp,$$

$$F_1(x) = \int_0^\infty M_3(p) \cos(px) dp, \quad F_2(x) = \int_0^\infty M_5(p) \sin(px) dp$$

Интегрируем по частям первые два слагаемых каждого из уравнений системы (12). С учетом того, что $A(\pm a) = B(\pm a) = 0$, система (12) принимает вид:

$$\pi c f(x) = - \int_{-a}^a B'(t)R_1(t-x)dt - \int_{-a}^a A'(t)R_2(t-x)dt + QF_1(x),$$

$$\pi c g(x) = \int_{-a}^a B'(t)R_3(t-x)dt + \int_{-a}^a A'(t)R_1(t-x)dt + QF_2(x), \quad (13)$$

где

$$R_1(y) = \int_0^\infty M_1(p) \cos(py) dp, \quad R_2(y) = \int_0^\infty M_2(p) \sin(py) dp, \quad R_3(y) = \int_0^\infty M_4(p) \sin(py) dp.$$

После выделения в ядрах уравнений системы (13) сингулярных и регулярных частей система (13) принимает вид:

$$\pi c f(x) = - \int_{-a}^a B'(t)L_1(t-x)dt - \int_{-a}^a A'(t)L_2(t-x)dt - q_1\pi B'(x) - q_2 \int_{-a}^a \frac{A'(t)}{t-x} dt + QF_1(x),$$

$$\pi c g(x) = \int_{-a}^a B'(t)L_3(t-x)dt + \int_{-a}^a A'(t)L_1(t-x)dt + q_1\pi A'(x) - q_2 \int_{-a}^a \frac{B'(t)}{t-x} dt + QF_2(x), \quad (14)$$

где

$$q_1 = \frac{2\Delta\omega_1 a_1}{k_1}, \quad q_2 = \frac{2\Delta\omega_1 b_1}{k_1} \quad L_1(y) = \int_0^\infty [M_1(p) - q_1] \cos(py) dp,$$

$$L_2(y) = \int_0^\infty [M_2(p) - q_2] \sin(py) dp, \quad L_3(y) = \int_0^\infty [M_4(p) + q_2] \sin(py) dp.$$

При построении системы (14) были использованы значения интегралов (в смысле теории обобщенных функций) [13]:

$$\int_0^\infty \sin pt \, dp = \frac{1}{t}, \quad \int_0^\infty \cos pt \, dp = \pi\delta(t).$$

При $c = 0$ система (14) совпадает с полученной в [13]. Таким образом, рассмотренную в статье задачу можно считать обобщением задачи, решенной в [13].

Результаты численных исследований. Численные результаты получены методом механических квадратур. Для расчетов введены безразмерные величины $\tilde{h} = h/a$, $\tilde{x} = x/a$, $\tilde{\mu}_i = \mu_i a/Q$ ($i = 1, 2$), $\tilde{c} = ca/Q$, $\tilde{\sigma}_{z1} = \sigma_{z1} a/Q$, $\tilde{A} = A/a$, $\tilde{B} = B/a$. Численные эксперименты проводились при $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$.

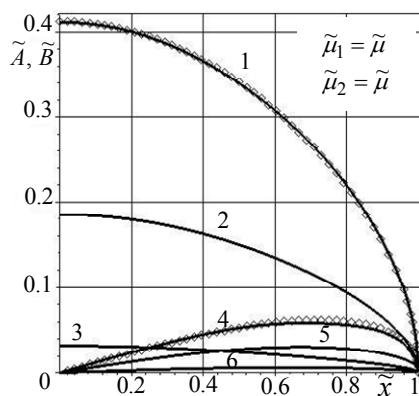


Рис. 2

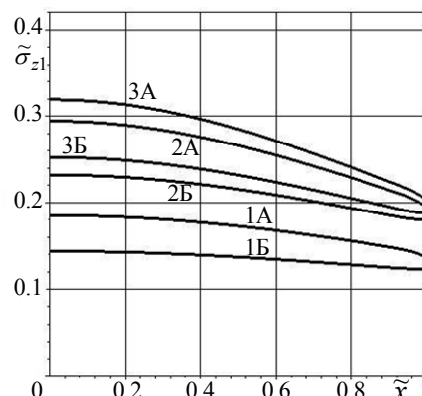


Рис. 3

На рис. 2 пунктирной линией изображены скачки компонент вектора перемещений для задачи о трещине, берега которой свободны от нагрузок, полученные в работе [13]. На этом рисунке кривые 1, 2, 3 – графики скачков вертикальных перемещений \tilde{A} при $\tilde{c} = 0$ (трещина, берега которой свободны от нагрузок), $\tilde{c} = 5$, $\tilde{c} = 10$ соответственно, а кривые 4, 5, 6 – графики скачков горизонтальных перемещений \tilde{B} при тех же значениях коэффициентов \tilde{c} соответственно. Из анализа результатов приведенных на рис. 2 видно, что результаты данной статьи практически совпадают с приведенными в [13]; увеличение коэффициента \tilde{c} приводит к уменьшению скачков горизонтальных и вертикальных перемещений.

На рис. 3 цифры 1, 2 и 3 указывают на кривые, которые характеризуют распределения нормальных напряжений на берегах трещины при $\tilde{c} = 1$, $\tilde{c} = 5$, $\tilde{c} = 10$, а буквы при них – на величины модулей сдвига при которых проводились численные расчеты: А – $\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}$, $\tilde{\mu}_2 = 2\tilde{\mu}$, Б – $\tilde{\mu}_1 = 2\tilde{\mu}$, $\tilde{\mu}_2 = \tilde{\mu}$. Если в рассматриваемой задаче материалы полосы и полуплоскости отличаются модулями сдвига, то напряжения в точках верхнего берега трещины будут меньше в случае, когда полоса является более жесткой, чем полуплоскость. Этот вывод подтверждается данными приведенными на рис. 3, поскольку все графики с буквой Б лежат ниже соответствующих графиков с буквой А. Увеличение коэффициента, который характеризует наполнитель, при фиксированных упругих характеристиках материалов полосы и полуплоскости, приводит к увеличению нормальных напряжений в точках верхнего берега трещины.

Выводы. Получено решение задачи о трещине нормального отрыва с наполнителем на границе упругой полосы и упругой полуплоскости. Построена система сингулярных интегро-дифференциальных уравнений задачи относительно функций связанных со скачками перемещений берегов трещины. Приведены результаты численных экспериментов, которые иллюстрируют влияние модуля сдвига полосы и наполнителя на величины скачков перемещений берегов трещины и распределение нормальных напряжений на ее берегах. Описаны механические эффекты.

РЕЗЮМЕ

В рамках лінійної теорії пружності знайдено розв'язок задачі про тріщину нормального відриву з наповнювачем на межі пружної смуги та пружної півплощини. Для розв'язання задачі використано інтегральне перетворення Фур'є. Задача зведена до системи інтегро-диференціальних рівнянь. Досліджено вплив пружних характеристик смуги та наповнювача на розподіл напружень на берегах тріщини.

Ключові слова: міжфазна тріщина, наповнювач, метод інтегральних перетворень Фур'є, інтегро-диференціальне рівняння.

SUMMARY

The problem of the interface crack with filler between the elastic strip and the elastic semi-plane has been solved in the linear theory of elasticity. The method of Fourier integral transformation has been used. The problem has been reduced to a system of the integro-differential equations. The influences of the elastic characteristics of the strip on the distribution of the stress on the edges of the crack have been researched.

Keywords: interface crack, filler, method of Fourier integral transformation, integro-differential equation.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ

1. Williams M. L. The stresses around a fault or crack in dissimilar media / M. L. Williams // Bulletin of the Seismological Society of America. – 1959. – Vol. 49. – № 2. – P. 199–204.
2. Comninou M. The interface crack / M. Comninou // Journal of Applied Mechanics. – 1977. – Vol. 44, № 4. – P. 631–636.
3. Механика разрушения и прочность материалов : спр. пособ. : в 4 т. / [под ред. В. В. Панасюка]. – К. : Наукова думка, 1988 – Т. 2 : Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – 619 с.
4. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: в 2 т. / под. ред. Ю. Мураками. – М. : Мир, 1990. – Т. 1. – 453 с.
5. Aravas N. An elastoplastic analysis of the interface crack with contact zone / N. Aravas, S. M. Sharma // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1991. – Vol. 39. – P. 311–344.
6. Herrmann K. P. On interface crack models with contact zones situated in an anisotropic biomaterial / K. P. Herrmann, V. V. Loboda // Archive of Applied Mechanics. – 1999. – Vol. 69. – P. 317–335.
7. Kharun I. V. A set of interface crack with contact zones in combined tension-shear field / I. V. Kharun, V. V. Loboda // Acta Mechanica. – 2003. – Vol. 166. – P. 43–56.
8. Лобода В. В. Чисельно-аналітичний аналіз міжфазної тріщини з зоною контакту / В. В. Лобода, О. І. Волошко // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка. – 2008. – Вип. 12, т. 2. – С. 50–58.
9. Erdogan F. Layered composites with an interface flaw / F. Erdogan, G. Gurta // International Journal of Solids and Structures. – 1971. – Vol. 7, No 8. – P. 1089–1107.
10. Gecit M. R. Fracture of a surface layer bonded to a half space / M. R. Gecit // International Journal of Engineering Science. – 1979. – Vol. 17, No 3. – P. 287–295.
11. Lu Ming-Che Stress intensity factors in two bonded elastic layers containing cracks perpendicular to and on the interface. I. Analysis / Lu Ming-Che, F. Erdogan // Engineering Fracture Mechanics. – 1983. – Vol. 18, No 3. – P. 491–506.
12. Lu Ming-Che, Erdogan F. Stress intensity factors in two bonded elastic layers containing cracks perpendicular to and on the interface. II. Solution and results / Lu Ming-Che, F. Erdogan // Engineering Fracture Mechanics. – 1983. – Vol. 18, No 3. – P. 507–528.
13. Александров В. М. К задаче о трещине на границе раздела упругой полосы и полуплоскости / В. М. Александров, Д. А. Пожарский // Механика твердого тела. – 2001. – № 1. – С. 86–93.
14. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов. – М. : Наука, 1974. – 640 с.
15. Силованюк В. П. Деформація та руйнування матеріалів біля включень під статичним навантаженням / В. В. Силованюк, Р. Я. Юхим // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – № 6. – С. 31–35.
16. Юхим Р. Міцність пружно-пластичних тіл із періодичними системами паралельних та колінеарних включень / Р. Юхим, П. Горбач // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2010. – Т. 15, № 2. – С. 67–72.
17. Ткаченко І. Г. Двовірна мішана задача термопружності для багатошарової основи / І. Г. Ткаченко // Прикл. пробл. мех. і мат. – 2005. – Вип. 3. – С. 70–78.

Поступила в редакцію 22.12.2012 г.

УДК 531.36

АНАЛИЗ АВТОКОЛЕБАНИЙ КОЛЕСНОГО МОДУЛЯ В КРУГОВОМ РЕЖИМЕ ДВИЖЕНИЯ

Н.А. Вельмагина

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, г. Донецк

Проведен качественный анализ числа движения модели колесной сцепки и определены условия возникновения автоколебаний. Взаимодействие колеса с опорной поверхностью в боковом направлении описывается нелинейной гипотезой увода. Результаты аналитического исследования подтверждаются серией фазовых портретов, полученных численным интегрированием.

Ключевые слова: автоколебания, устойчивость, колесный модуль.

Введение. Явление шимми – это интенсивные самовозбуждающиеся колебания катящихся колес. Они проявляются в виде крутильных движений колес в горизонтальной плоскости (их вращения), которые сопровождаются другими движениями из продольной вертикальной плоскости [1]. Анализ условий возникновения автоколебаний был предметом исследования многих авторов как представителей теоретического направления [2 – 4], так и инженеров-исследователей авиационного и автомобильного транспорта [5, 6]. Последние публикации [7, 8] инициированы разработкой более точных моделей взаимодействия упругого колеса с опорной поверхностью.

Колесная сцепка (рис. 1 – общий вид колесной сцепки) может быть прототипом как управляемого колесного модуля, так и самоориентируемых колесных опор различных транспортных средств.

Анализ стационарных круговых состояний ведомого звена в нелинейной постановке. Пусть точка O (рис. 2) движется по окружности радиуса r с постоянной угловой скоростью. Обозначим расстояние до мгновенного центра M вращения той точки F продольной оси B_1O ведомого звена, скорость которой направлена вдоль оси величиной $x = v \cos \psi \Omega^{-1}$. Стационарный режим системы определяется уравнением, определяющим условие равновесия относительно точки сцепки (равенство нулю момента внешних сил относительно точки O)

$$v d_1 m \cos \psi \Omega = l Y(\delta), \tag{1}$$

где

$$\delta = \arctg \frac{v \sin \psi + l \Omega}{v \cos \psi}.$$

Тогда особые точки системы (стационарные состояния ведомого звена) удовлетворяют соотношению

$$M_1(x) = m d_1 \Omega^2 x = l Y(\delta(x)) = M_2(x). \tag{2}$$

При различных положениях точки B_1 на окружности радиуса l геометрическое место точек F есть окружность диаметра $r = OM$, проходящая через точки O и M (так как $OF \perp MF$). Установим, при каких значениях параметров v и Ω уравнение (2) имеет решения, сколько их и какие они (устойчивые или неустойчивые).

Рассмотрим случай $r > l$. Обозначим $R = \sqrt{r^2 - l^2}$. Если точка B_1 принадлежит дугам D_1D_2 , D_2D_3 , D_3D_4 , D_4D_1 окружности радиуса $l = OB_1$ (см. рис. 2), то для соответствующих значений угла увода $\delta(x)$ имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta &= \frac{l - \sqrt{r^2 - x^2}}{x} < 0, & \operatorname{tg} \delta &= \frac{l - \sqrt{r^2 - x^2}}{x} > 0, \\ \operatorname{tg} \delta &= \frac{l + \sqrt{r^2 - x^2}}{x} > 0, & \operatorname{tg} \delta &= \frac{l + \sqrt{r^2 - x^2}}{x} < 0. \end{aligned}$$

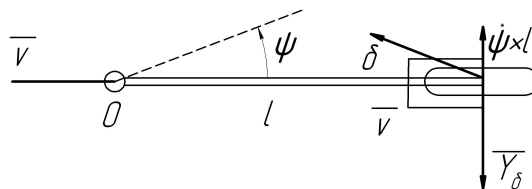


Рис. 1

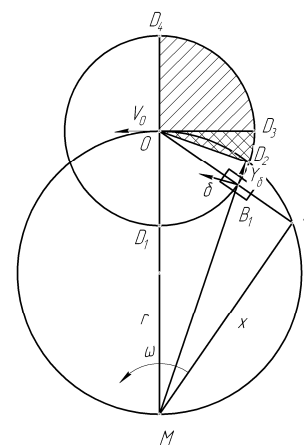


Рис. 2

Особые точки могут быть лишь в областях I–II. При обходе против часовой стрелки величина x увеличивается в области I от значения $\sqrt{\Gamma^2 - l^2}$ до максимального значения r , в области II – уменьшается от r до 0. При таком же обходе областей I–II угол δ увеличивается от 0 до $\pi/2$.

Стационарные состояния колесной сцепки соответствуют точкам пересечения кривых $M_1 = M_1(x)$ и $M_2 = M_2(x)$. Число этих состояний в двух первых областях определяется расположением кривой $M_2 = M_2(x)$ относительно ломаной $M_1 = M_1(x)$ (рис. 3). На этом рисунке показаны возможные случаи поведения особых точек при изменении угловой скорости Ω . При малых значениях есть лишь одна особая точка A_1 в области I (ломаная 1).

С увеличением Ω при некотором значении $\Omega = \Omega_0$ на границе областей I–II возникает кратная особая точка (ломаная 2), которая при $\Omega > \Omega_0$ распадается на две особые точки S (в области I) и A_2 (в области II) – ломаная 3. При дальнейшем увеличении Ω точки A_1

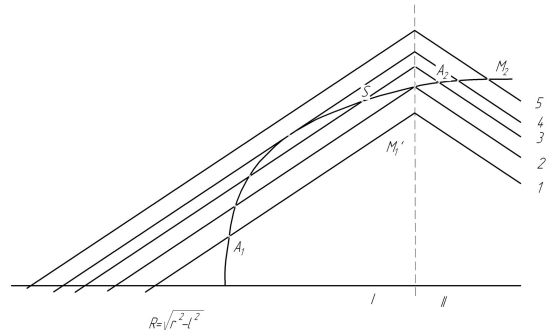


Рис. 3

и S движутся на встречу, сливаясь при $\Omega = \Omega_1$ (ломаная 4). При $\Omega > \Omega_1$ в области I особых точек нет, есть лишь в области II (ломаная 5). Таким образом, имеются бифуркации рождения стационарных состояний (на границе областей I–II) и их слияния (в области I).

Условия устойчивости и анализ автоколебаний, рассматриваемой системы, в прямолинейном движении были рассмотрены в работе [9]. Уравнения колебаний системы относительно кругового стационарного режима имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma \dot{\delta} + v \delta - v \psi - l(\dot{\psi} + \Omega) &= 0, \\ F_{zz} \ddot{\psi} + c \psi + k \dot{\psi} + lY(\delta) - l m v \Omega &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь будем предполагать, что углы складывания достаточно малы, при этом тригонометрические функции рассмотрены приближенно: $\sin \psi \approx \psi$, $\cos \psi \approx 1$. Первое уравнение системы (3) отвечает соотношению, принятому в теории неустановившегося увода, здесь δ – угол увода колеса; v – скорость движения точки сцепки O; σ – параметр релаксации, Ω – угловая скорость радиус-вектора MO (см. рис. 2). Во втором уравнении системы (3) момент силы увода относительно точки сцепки будет рассмотрен приближенно (с точностью до кубического приближения), конструктивные параметры системы: момент инерции F_{zz} относительно точки сцепки; параметры c , k определяют жесткость и демпфирование при колебаниях колесной сцепки.

Результаты анализа условий устойчивости по линейному приближению. Для построения областей устойчивости в плоскости различных пар параметров системы воспользуемся критерием Рауса-Гурвица. Уравнения в вариациях и соответствующее ему характеристическое уравнение были получены в окрестности невозмущенного кругового режима движения $\delta = \delta_0$, $\psi = \psi_0$.

В данном случае необходимое условие устойчивости невозмущенного движения, положительность всех коэффициентов характеристического уравнения, может быть нарушено.

Так как первый определитель $\Delta_1 > 0$, а $\Delta_3 = \Delta_2 A_3$, анализ флаттерной неустойчивости сводится к проверке знака Δ_2 и A_3 . Численным методом, с использованием пакета Maple, найдем границы в плоскости параметров (l, v) , где нарушаются необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости (рис. 4).

Область I соответствует области устойчивости (автоколебания отсутствуют). В области II, III наличие пары комплексно-сопряженных собственных значений с положительной действительной частью предопределяет развитие флаттерной (колебательной) неустойчивости. В области IV имеется хотя бы одно положительное собственное значение, предопределяющее дивергентный характер неустойчивости.

Положение и размеры области неустойчивости могут существенно изменяться в зависимости от конкретных чис-

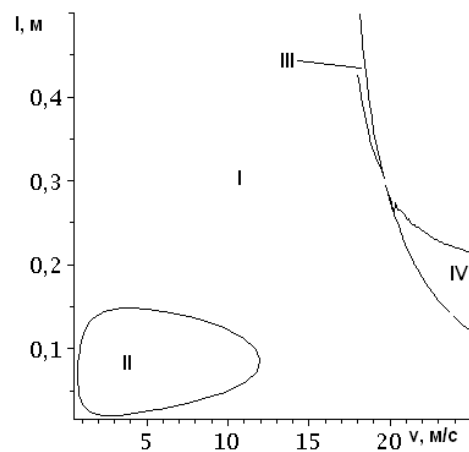


Рис. 4

ленных значений, как других конструктивных параметров, так и группы эксплуатационных параметров (последние, например вертикальная нагрузка, могут иметь широкий диапазон возможных значений), что осложняет выбор рациональных значений конструктивных параметров, обеспечивающих устойчивость невозмущенного движения во всех возможных условиях эксплуатации. Характер (опасный–безопасный) границы области устойчивости в смысле Н.Н. Баутина [10], определяемый первым ляпуновским коэффициентом, носит локальный характер. Ниже приведен подход, позволяющий оценить амплитуду автоколебаний в области колебательной неустойчивости II [11].

Анализ автоколебаний и оценка амплитуд автоколебаний. Предполагается, что периодическое решение системы (3) в моменты наибольшего отклонения от положения равновесия и в моменты, когда отклонения равны нулю, изменяется по гармоническому закону, имея некоторое запаздывание по фазе

$$\delta = \delta_0 + a \sin \omega t; \quad \psi = \psi_0 + p_0 \sin(\omega t + \phi),$$

здесь a – амплитуда, ϕ – запаздывание фазы, δ_0, ψ_0 – значения фазовых переменных, соответствующих круговому стационарному режиму (найжены на основе уравнений линейного приближения)

$$\delta_0 = \frac{\Omega l (m v^2 + c)}{v (l C_1 + c)}, \quad \psi_0 = -\frac{\Omega l (m v^2 - l C_1)}{v (l C_1 + c)}.$$

В характерные моменты времени фазовые переменные и их производные принимают значения

$$\omega t = \pi/2: \quad \delta = \delta_0 + a; \quad \dot{\delta} = 0; \quad \ddot{\delta} = -a \omega^2;$$

$$\psi = \psi_0 + p_0 \cos \alpha; \quad \dot{\psi} = -p_0 \omega \sin \alpha; \quad \ddot{\psi} = -p_0 \omega^2 \cos \alpha;$$

$$\omega t = 0: \quad \delta = \delta_0; \quad \dot{\delta} = a \omega; \quad \ddot{\delta} = 0;$$

$$\psi = \psi_0 + p_0 \sin \alpha; \quad \dot{\psi} = p_0 \omega \cos \alpha; \quad \ddot{\psi} = -p_0 \omega^2 \sin \alpha.$$

В этом случае параметры автоколебаний ($a; p_0; \omega; \phi$) определяются из системы конечных уравнений

$$\begin{cases} \sigma a \omega + V \delta_0 - V(\psi_0 + p_0 \sin(\phi)) - l(p_0 \cos(\phi) \omega + \Omega) = 0; \\ V(\delta_0 + a) - V(\psi_0 + p_0 \cos(\phi)) + l(p_0 \omega \sin(\phi) + \Omega) = 0; \\ -F p_0 \sin(\phi) \omega^2 + c(\psi_0 + p_0 \sin(\phi)) + k p_0 \cos(\phi) \omega - l Y(0) - l m v \Omega = 0; \\ -F p_0 \omega^2 \cos(\phi) + c(\psi_0 + p_0 \cos(\phi)) - k p_0 \sin(\phi) \omega - l Y(a) - l m v \Omega = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Исключим неизвестный p_0, ϕ из первых двух уравнений системы (4). Из оставшихся двух уравнений системы (4) составляется результат (исключается неизвестная ω), определяющий неявную зависимость амплитуды автоколебаний от параметра скорости движения v .

Амплитудная кривая была получена для случая, когда сила увода аппроксимируется линейным и кубическим членами разложения в ряд Тейлора. На рис. 5 представлен график зависимости амплитуды угла увода от величины продольной скорости (получен для следующего набора численных значений параметров: $C_1 = 8$; $\sigma = 0,18$ м; $l = 0,05$ м; $F = 1,8$ кгм²; $N = 490$ Н; $k = 2,254$ Нмс; $c = 392$ Нм; $t = 50$ кг; $r = 40$ м; $\Omega = v/\tau$ с⁻¹).

Численно полученная амплитудная кривая имеет незначительные отклонение от границ интервала неустойчивости (теоретически границы интервала неустойчивости $v = 0,78$ м/с, $v = 11,9$ м/с должны совпадать с «началом» и «концом» амплитудной кривой), это несоответствие может быть связано с погрешностью определения стационарного кругового режима (был получен для линеаризованной системы).

Проверка результатов приближенного анализа автоколебаний на основе численного интегрирования. Для исходных нелинейных уравнений численным методом построим фазовые траектории, определяющие характер поведения системы при характерных численных значениях конструктивных параметров. Рис. 6 иллюстрирует случай дивергентной неустойчивости, полученный при $l = 0,18$ м, $v = 25$ м/с.

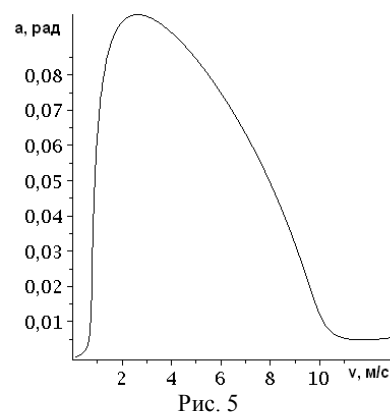


Рис. 5

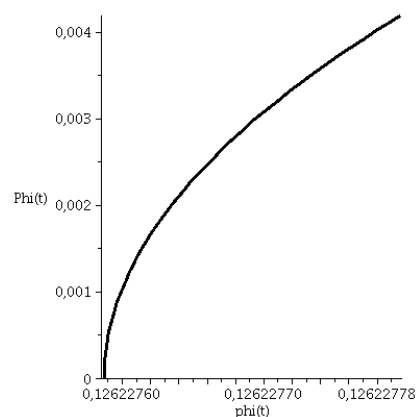


Рис. 6

Случай флаттерной неустойчивости при $l = 0,05$ м, $v = 6$ м/с представлен на рис. 7. Фазовые траектории, полученные численным интегрированием по переменной ψ , наматываются на устойчивый предельный цикл с внутренней и внешней сторон (рис. 7, а, б). Рис. 7, в иллюстрирует развитие колебаний по переменной δ .

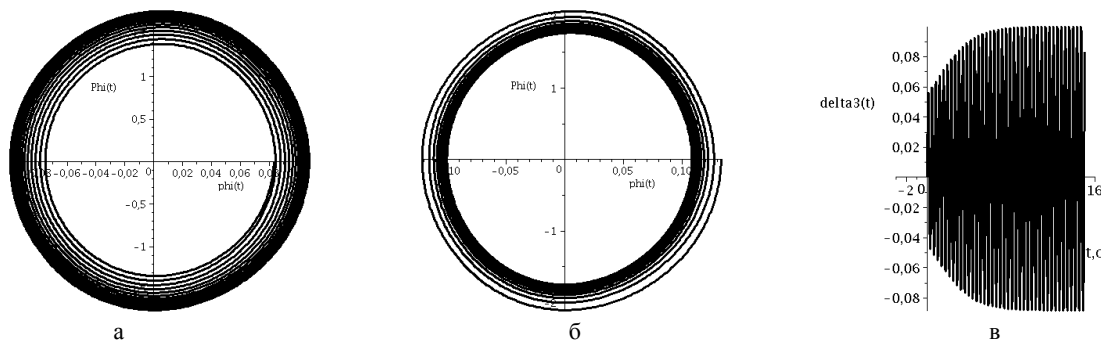


Рис. 7

Выводы. Предлагаемый подход дает возможность провести анализ автоколебаний нелинейной модели колесной сцепки, моделирующей опорные стойки колесных транспортных систем, в окрестности кругового движения; определить условия опасной–безопасной потери устойчивости; число стационарных состояний; оценить амплитуды автоколебаний (величины амплитуды автоколебаний, полученные на основе предлагаемого метода, незначительно отличаются от результатов численного интегрирования).

РЕЗЮМЕ

Проведено якісний аналіз кількості руху моделі колісного модуля і визначені умови виникнення автоколивань. Взаємодія колеса з опорною поверхнею в бічному напрямі описується нелінійної гіпотезою відведення. Результати аналітичного дослідження підтверджуються серією фазових портретів, отриманих шляхом чисельного інтегрування.

Ключові слова: автоколивання, стійкість, колісний модуль.

SUMMARY

The qualitative analysis of number of movement of model of a wheel hitch is carried out and conditions of emergence of self-oscillations are defined. Wheel interaction with a seating in the lateral direction is described by a nonlinear hypothesis of withdrawal. Results of analytical probe prove to be true a series of the phase portraits received by numerical integration.

Keywords: self-oscillations, stability, wheeled module.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гончаренко В.И. Каноническое описание системы управления в задаче о шимми колес шасси самолета / В.И. Гончаренко // Прикл. механика. – 2011. – Т. 47, № 2. – С. 129-142.
2. Келдыш М.В. Шимми переднего колеса трехколесного шасси. Избранные труды. Механика / М.В. Келдыш. – М.: Наука, 1985. – С. 491-530.
3. Неймарк Ю.И. Динамика неавтономных систем / Ю.И. Неймарк, Н.А. Фуфаев. – М.: Наука, 1967. – 520 с.
4. Плахтиенко Н.П. Поперечные упруго-фрикционные вибрации движущегося по взлетно-посадочной полосе самолета / Н.П. Плахтиенко, Б.М. Шифрин // Прикл. механика. – 2001. – Т. 37, № 5. – С. 136-143.
5. Besselink J.M.. Shimmy of aircraft main landing gears / J.M. Besselink // PhD thesis, Delft University of Technology. – 2000. – 201 p.
6. Mi-Seon Yi. Non-linear shimmy analysis of a nose landing gear with friction / Yi. Mi-Seon, Bae. Jae-Sung, Hwang. Jae-Hyuk // Journal of the Korean society for aeronautical & space sciences. – 2011. – Vol. 39, № 7. – P. 605-611.
7. Журавлев В.Ф. О механизме явления шимми / В.Ф. Журавлев, Д.М. Климов // Докл. АН РФ. – 2009. – Т. 428, № 6. – С. 761-764.
8. Журавлев В.Ф. Теория явления шимми / В.Ф. Журавлев, Д.М. Климов // Изв. РАН. МТТ. – 2010. – № 3. – С. 22-29.
9. Вельмагина Н.А. Анализ автоколебаний колесного модуля в прямолинейном режиме движения / Н.А. Вельмагина, В.Г. Вербицкий // Механика твердого тела. – 2011. – № 41. – С. 100-108.
10. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости / Н.Н. Баутин. – М.: Наука, 1984. – 176 с.
11. Вербицкий В.Г. Приближенный анализ автоколебательной системы / В.Г. Вербицкий, М.Я. Садков // Доповіді НАН України. – 2001. – № 10. – С. 48-52.

Поступила в редакцию 23.11.2012 г.

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ И ПОВЕРХНОСТНЫМИ ТРЕЩИНАМИ РАЗНОЙ ДЛИНЫ

Е.Н. Довбня, Н.А. Крупко

Рассмотрена задача взаимовлияния эллиптического отверстия и поверхностных трещин разной длины. Решение получено с помощью интегрального преобразования Фурье, теории обобщенных функций, метода граничных интегральных уравнений, модели линейных пружин, метода механических квадратур. Приводятся результаты значений нормированных коэффициентов интенсивности напряжений, нормированной касательной деформации в зависимости от приближений дефектов друг к другу.

Ключевые слова: изотропная пластина, эллиптическое отверстие, поверхностная трещина, касательная деформация, метод граничных интегральных уравнений.

Введение. Современный высоко урбанизированный мир невозможно представить без высотных сооружений различных форм, конфигураций. При возведении таких конструкций, важную роль играет безопасность сооружений. Конструкции могут включать в себя множество включений, отверстий. Также со временем при эксплуатации зданий могут появляться трещины. Эти дефекты являются концентраторами напряжений, вблизи которых начинается разрушение. Исследование напряженно-деформированного состояния тел с дефектами такого рода является важной проблемой, как с теоретической, так и с практической точки зрения.

Существенный вклад в развитие теории тонких пластин внесли А.С. Космодамианский [1], Г.Н. Савин [2], Т. Nishioka [3]. Еще в 1898 году Г. Кирш изучил концентрацию напряжений в изотропной пластине с круговым отверстием при растяжении [4]. Используя метод Колосова-Мухелишвили в работе [5] было найдено аналитическое решение для цилиндрической оболочки с эллиптическим дефектом. Ряд работ [3, 6 – 8] посвящены задачам вмешательства трещин в отверстия, т. е. когда границы дефектов соприкасаются. В трудах [9 – 12] было получено решение задач с произвольно ориентированными трещинами, разрезами, эллиптическими отверстиями и криволинейными жесткими включениями. Методом комплексных потенциалов было проведено исследование для изотропной пластины со сквозными трещинами, отверстиями и включениями [13]. Работа [10] основана на методе граничных интегральных уравнений, поставленная задача была сведена к системе сингулярных интегральных уравнений.

Целью работы является разработка методики расчетной оценки напряженно-деформированного состояния изотропных пластин с эллиптическим отверстием и поверхностными трещинами, используя метод граничных интегральных уравнений.

Постановка задачи. Рассматривается тонкая упругая изотропная пластина постоянной толщины h . Выберем систему ортогональных координат x, y с осями вдоль направлений упругой и геометрической симметрии пластины, а ось z направим по нормали к ней. Пластина ослаблена двумя поверхностными трещинами разной длины $2l_2, 2l_3$, ориентированными вдоль осей, и эллиптическим отверстием, расположенным в центре конструкции (рис. 1). Пластина находится под действием симметричной внешней нагрузки – равномерное растяжение вдоль оси x .

Будем считать, что расстояние между центрами трещин равно $2d$. Поверхностные трещины имеют полуэллиптическую форму. Глубина трещины задается формулой $L(x) = l_0 \sqrt{1 - (x/l)^2}$ (l_0 – наибольшая глубина трещины).

Контур отверстия задан следующим образом:

$$L_1 : x = \alpha_1(\tau) = a \cos(\tau), y = \beta_1(\tau) = b \sin(\tau), \tau \in (0, 2\pi],$$

где a, b – полуоси эллипса.

Контуры трещин на поверхности пластины имеют вид

$$L_2 : x = \alpha_2(t) = d + l_2 t, y = \beta_2(t) = 0; \quad L_3 : x = \alpha_3(t) = -d - l_3 t, y = \beta_3(t) = 0.$$

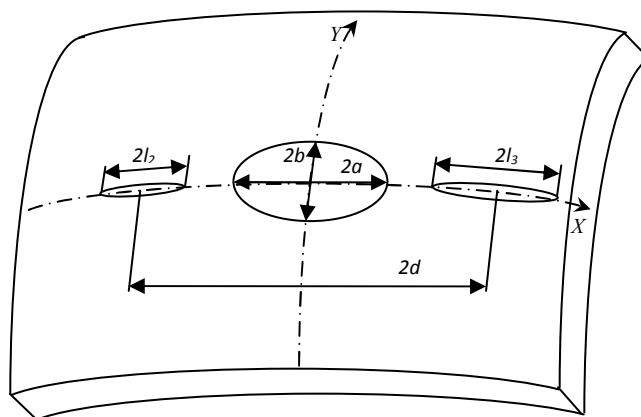


Рис. 1. Конструкция с дефектами

Построение системы сингулярных интегральных уравнений. На контуре эллиптического отверстия вместо усилий задаются компоненты главного вектора \vec{P} , действующего вдоль части контура L_1 [11]. Система граничных интегральных уравнений для задачи в случае сквозных трещин имеет вид

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^2 K_{ij} (\alpha_1(\tau) - \alpha_1(\theta), \beta_1(\tau) - \beta_1(\theta)) \psi_j d\theta + \\ & + \sum_{j=3-l_{j-1}}^4 \int_{l_{j-1}}^{l_j} K_{ij} (\alpha_1(\tau) - \alpha_{j-1}(s), \beta_1(\tau) - \beta_{j-1}(s)) \psi_j ds = F_i(\tau), \quad i = \overline{1,2} \\ & \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^2 (K_{ij} (\alpha_{i-1}(t) - \alpha_1(\theta), \alpha_{i-1}(t) - \beta_1(\theta)) \psi_j) d\theta + \\ & + \sum_{j=3-l_{j-1}}^4 \int_{l_{j-1}}^{l_j} K_{ij} (\alpha_2(t) - \alpha_{j-1}(s), \beta_2(t) - \beta_{j-1}(s)) \psi_j ds = \pi (F_i(t) - F_i^*(t)), \quad i = 3 \\ & \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^2 (K_{ij} (\alpha_{i-1}(t) - \alpha_1(\theta), \alpha_{i-1}(t) - \beta_1(\theta)) \psi_j) d\theta + \\ & + \sum_{j=3-l_{j-1}}^4 \int_{l_{j-1}}^{l_j} K_{ij} (\alpha_3(t) - \alpha_{j-1}(s), \beta_3(t) - \beta_{j-1}(s)) \psi_j ds = \pi (F_i(t) - F_i^*(t)), \quad i = 4 \end{aligned} \right. \quad (1)$$

Ядра системы имеют особенность типа Коши, методика их вычисления аналогична приведенной в работе [14]. Правые части системы $F_1(\tau)$, $F_2(\tau)$ это компоненты главного вектора \vec{P}

$$F_1(\tau) = P'_x = ba^{-1} \cos \tau, \quad F_2(\tau) = P'_y = \sin \tau. \quad (2)$$

В нашем случае трещины – несквозные (поверхностные), поэтому в системе (1) вид ядер усложнится (появятся дополнительные слагаемые) и добавятся еще два уравнения с учетом line-spring model [15]

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{j=5-l_{j-1}}^6 \int_{l_{j-1}}^{l_j} K_{ij} (\alpha_2(t) - \alpha_{j-3}(s), \beta_2(t) - \beta_{j-3}(s)) \psi_j ds = \pi (F_i(t) - F_i^*(t)), \quad i = 5 \\ & \sum_{j=5-l_{j-1}}^6 \int_{l_{j-1}}^{l_j} K_{ij} (\alpha_3(t) - \alpha_{j-3}(s), \beta_3(t) - \beta_{j-3}(s)) \psi_j ds = \pi (F_i(t) - F_i^*(t)), \quad i = 6 \end{aligned} \right.$$

На контурах трещин – $F_i^*(t) = T_2^*$; $i = \overline{3,4}$; $F_i^*(t) = 0$; $i = \overline{5,6}$. Граничные условия приобретают вид (3), где $T(t)$, $M(t)$ направлены на смыкание трещин.

$$F_i(t) = -T(t); i = \overline{3,4}; \quad F_i(t) = -M(t); i = \overline{5,6}. \quad (3)$$

С учетом Line-Spring Model введенные обозначения в (3) примут вид

$$\begin{pmatrix} T \\ 6M/h \end{pmatrix} = \frac{2}{(1-\nu^2)} \frac{l_{i-1}}{h} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \int_{-1}^s \psi_{i+1} ds, \quad b_2 = \sqrt{\frac{1+\nu}{3(1-\nu)}} \int_{-1}^s \psi_{i+2} ds, \quad (4)$$

где $i = \overline{3,4}$; матрица a_{ij} , $i, j = \overline{1,2}$ описывается в [15].

В системе для поставленной задачи ядра K_{ij} , $i, j = \overline{3,6}$ заполняются с учетом (4).

Длина дуги эллиптического отверстия находится по формуле [16]

$$dS = \sqrt{(\alpha'_1(\theta))^2 + (\beta'_1(\theta))^2} d\theta = \Delta d\theta, \quad \Delta = \sqrt{(a \sin \theta)^2 + (b \cos \theta)^2} \quad (5)$$

Направляющие косинусы имеют следующий вид

$$n_1 = \beta'_1(\theta) = b\Delta^{-1} \cos \theta; \quad n_2 = -\alpha'_1(\theta) = a\Delta^{-1} \sin \theta. \quad (6)$$

С учетом (5), (6) получим окончательный вид следующих выражений

$$n_1 dS = b \cos \theta d\theta; \quad n_2 dS = a \sin \theta d\theta.$$

Разобьем интеграл, который характеризует отверстие, на два интеграла со следующими пределами интегрирования: $[0, \pi]$, $[\pi, 2\pi]$, с целью использования симметрии. В интеграле

$\int_{\pi}^{2\pi} \sum_{j=1}^2 K_{ij}(\alpha_1(\tau) - \alpha_1(\theta), \beta_1(\tau) - \beta_1(\theta)) \psi_j dS$ путем соответствующей замены перейдем к новому

интегралу $-\int_0^{\pi} \sum_{j=1}^2 K_{ij}(\alpha_1(\tau) + \alpha_1(\theta), \beta_1(\tau) + \beta_1(\theta)) \psi_j dS$. В итоге запишем полученное уравнение, характеризующее отверстие

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^2 K_{ij}(\alpha_1(\tau) - \alpha_1(\theta), \beta_1(\tau) - \beta_1(\theta)) \psi_j d\theta = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \sum_{j=1}^2 K_{ij}(\alpha_1(\tau) - \alpha_1(\theta), \beta_1(\tau) - \beta_1(\theta)) \psi_j dS - \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \sum_{j=1}^2 K_{ij}(\alpha_1(\tau) + \alpha_1(\theta), \beta_1(\tau) + \beta_1(\theta)) \psi_j dS. \quad (7)$$

Покажем вывод ядра $K_{11}(x, y)$ для первого и второго интеграла в формуле (7). В общем виде $K_{11}(x, y)$ принимает вид

$$K_{11}(x, y) dS = n_1 R^{-1} \sin \phi (1 + 2 \cos^2 \phi) - n_2 R^{-1} \cos 2\phi \cos \phi,$$

где $R = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\cos \phi = x/R$; $\sin \phi = y/R$; $\cos 2\phi = (x^2 - y^2)/R^2$.

Тогда имеем

$$K_{11}(x, y) dS = (y(3x^2 + y^2)R^{-4}n_1(\theta) - x(x^2 - y^2)R^{-4}n_2(\theta)) d\theta.$$

Подставляя значения x , y в данное выражение и, проделав ряд математических упрощений, получаем следующий вид ядра

$$K_{11}(x, y) dS = b^2 ((f_1 - f_2)f_3^{-2} - (f_4 - f_5)f_6^{-2})/a d\theta,$$

где

$$f_1 = \cos \theta (\sin \theta - \sin \tau) [3 \cos^2 \theta - 6 \cos \theta \cos \tau + 3 \cos^2 \tau + c^2 \sin^2 \theta - 2c^2 \sin \theta \sin \tau + c^2 \sin^2 \tau];$$

$$f_2 = \sin \theta (\cos \theta - \cos \tau) [c^2 \cos^2 \theta - 2c^2 \cos \theta \cos \tau + c^2 \cos^2 \tau - \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \sin \tau - \sin^2 \tau];$$

$$f_3 = \cos^2 \theta - 2 \cos \theta \cos \tau + \cos^2 \tau + c^2 \sin^2 \theta - 2c^2 \sin \theta \sin \tau + c^2 \sin^2 \tau;$$

$$f_4 = \cos \theta (\sin \theta + \sin \tau) [3 \cos^2 \theta + 6 \cos \theta \cos \tau + 3 \cos^2 \tau + c^2 \sin^2 \theta + 2c^2 \sin \theta \sin \tau + c^2 \sin^2 \tau];$$

$$f_5 = \sin \theta (\cos \theta + \cos \tau) [c^2 \cos^2 \theta + 2c^2 \cos \theta \cos \tau + c^2 \cos^2 \tau - \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \sin \tau - \sin^2 \tau];$$

$$f_6 = \cos^2 \theta + 2 \cos \theta \cos \tau + \cos^2 \tau + c^2 \sin^2 \theta + 2c^2 \sin \theta \sin \tau + c^2 \sin^2 \tau, \quad c = b/a$$

Неизвестные функции системы имеют вид:

$$\psi_1 = Eha \frac{d[u]_{L_1}}{d\theta}; \quad \psi_2 = Eha \frac{d[v]_{L_1}}{d\theta}; \quad \psi_3 = \frac{Ehl_2}{4} \frac{d[v]_{L_2}}{ds}; \quad \psi_4 = \frac{Ehl_3}{4} \frac{d[v]_{L_3}}{ds};$$

$$\psi_5 = \frac{Ehl_2}{4} \frac{\sqrt{3}(1-\nu)(3+\nu)}{\sqrt{1+\nu}} \left(\frac{h}{6} \frac{d[\theta_2]_{L_2}}{ds} \right); \quad \psi_6 = \frac{Ehl_3}{4} \frac{\sqrt{3}(1-\nu)(3+\nu)}{\sqrt{1+\nu}} \left(\frac{h}{6} \frac{d[\theta_2]_{L_3}}{ds} \right).$$

С помощью метода механических квадратур получаем систему $6n$ линейных алгебраических уравнений для нахождения неизвестных величин.

Результаты численного исследования. Результаты исследования, полученные для двух коллинеарных сквозных трещин, хорошо согласуются с работой [13]. При $d=1.25$ значения нормированных коэффициентов интенсивности напряжения на внешнем конце трещины $c_I=1,079$ и внутреннем $-d_I=1,223$. В работе [13] методом комплексных потенциалов были найдены следующие значения $c_I=1,081$, $d_I=1,229$. Также было проведено сравнение в случае, когда контуры отверстия и сквозной трещины соприкасаются. В работе [13] нормированный коэффициент интенсивности напряжения для внешнего конца трещины равен 1.458, а в проведенном исследовании он принимает значение -1.436 .

На рис. 2 приводяться значення нормованих коефіцієнтів інтенсивності напруження в центральній точці поверхньої тріщини в залежності від розстання між дефектами. Контур L_2 в 2 рази більше контура L_3 , $a/b = a/l_3 = 1$, $a/l_2 = 1/2$. Крива 1 відповідає контуру L_2 , крива 2 – L_3 .

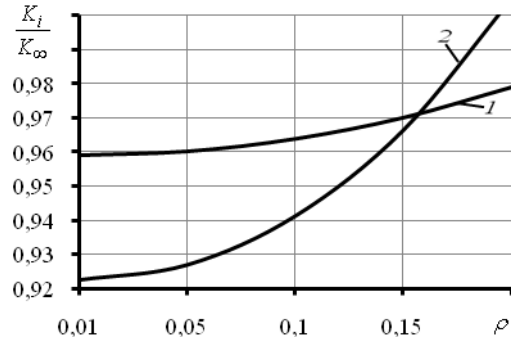


Рис. 2. Значення K_i/K_∞ від ρ

Ізвестно, що найбільші напруження на контурі любого еліптичного отворіття при одноосном растяжении вдоль оси Oy возникают при $\theta = \pm\pi$. Касательная деформация в этой точке будет иметь следующий вид $\varepsilon_\tau = p(1 + 2a/b)$, где p – равномерно растягивающая нагрузка. Наименьшие напряжения на контуре любого эллиптического отворіття в этом случае возникают при $\theta = \pm\pi/2$, тогда $\varepsilon_\tau = -p$ [2]. Если $a/b = 2/3$, то в точке $\theta = \pi/2$, $\varepsilon_\tau = 2.333p$, а в точке $\theta = \pi/2$, $\varepsilon_\tau = -p$ (рис. 3).

Расчеты были проведены для тріщин одинаковой длины – $2l$, $\nu = 0.3$. На рис. 3 $a/b = 2/3$, $l/a = 1/2$, $l/b = 1/3$, $l/h = 1$. Кривые 1–4 соответствуют значениям глубин поверхностных тріщин, которые соответственно равны 0,1; 0,3; 0,5; 0,7. При расположении дефектов далеко друг от друга, нор-

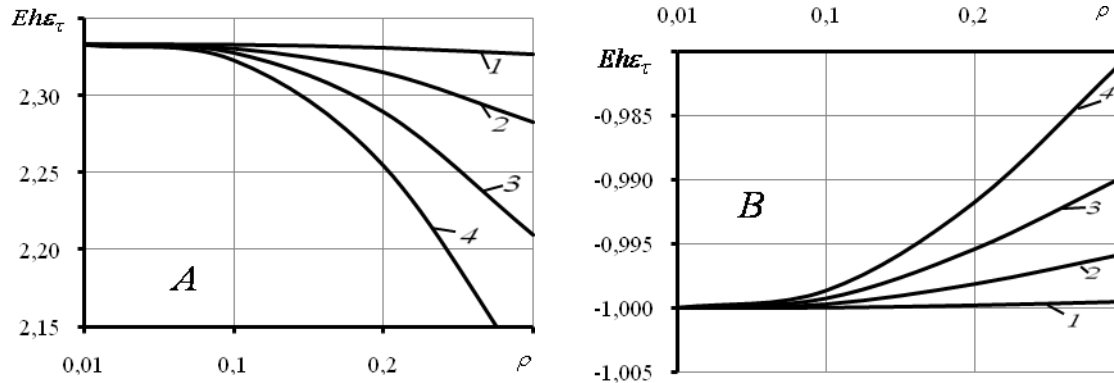


Рис. 3. Нормированная касательная деформация в критических точках, $A - \theta = \pi$; $B - \theta = \pi/2$

мированная касательная деформация принимает известные значения. Чем ближе дефекты друг к другу, тем выше значения $Eh\varepsilon_\tau$ в точке $\theta = \pi/2$, и тем меньше значения нормированной касательной деформации в точке $\theta = \pi$. Различные комбинации отношения полуосей эллипса представлены на рис. 4 для $\theta = \pi$, где кривые 1-3 соответствуют значениям глубин поверхностных тріщин, равных 0,1; 0,5; 0,9.

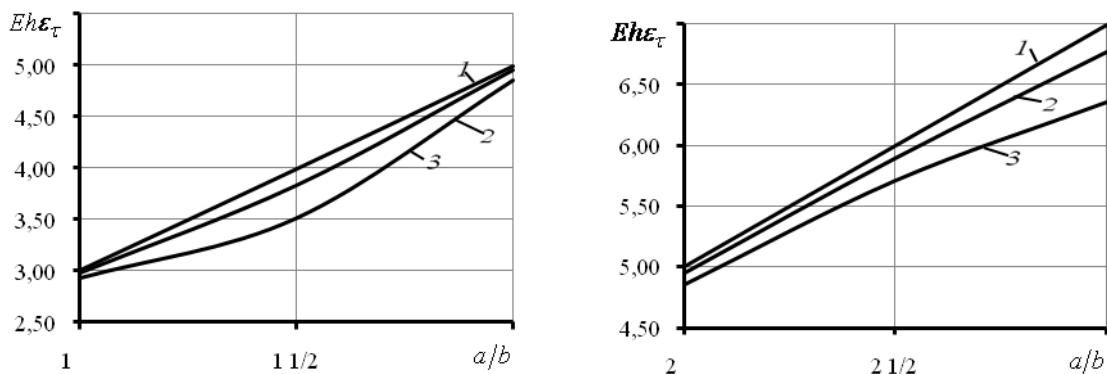


Рис. 4. Нормированная касательная деформация, $\rho = 0.2$

Выводы. Была разработана методика расчетной оценки напряженно-деформированного состояния изотропных пластин с эллиптическим отворітием и поверхностными тріщинами. Уменьшение расстояния между дефектами оказывает существенное влияние на характеристику напряженно-деформированного состояния пластины. Результаты значительно изменяются при увеличении глубины

поверхностных трещин. При уменьшении расстояния между трещинами и отверстием, значения нормированных коэффициентов интенсивности напряжения и нормированной касательной деформации в точке $\theta = \pi/2$ возрастают, а значение нормированной касательной деформации в точке $\theta = \pi$ убывает. $Eh\varepsilon_T$ также увеличивается при возрастании значений большой полуоси эллипса.

РЕЗЮМЕ

Розглянуто задачу взаємовпливу еліптичного отвору і поверхневих тріщин різної довжини. Розв'язок отримано за допомогою інтегрального перетворення Фур'є, теорії узагальнених функцій, методу граничних інтегральних рівнянь, моделі лінійних пружин, методу механічних квадратур. Наводяться результати значень нормованих коефіцієнтів інтенсивності напружень, нормованої дотичної деформації в залежності від наближень дефектів один до одного.

Ключові слова: ізотропна пластина, еліптичний отвір, поверхнева тріщина, дотична деформація, метод граничних інтегральних рівнянь.

SUMMARY

The problem of mutual influence of elliptical hole and surface crack of different lengths was considered. Solution was obtained by using the integral Fourier transform, generalized functions theory, the method of boundary integral equations, line-spring model, the method of mechanical quadratures. The results of the values of the normalized stress intensity factor, normalized tangent deformation based on approximations of defects to each other are given.

Keywords: isotropic plate, elliptical hole, surface cracks, tangent deformation, the method of boundary integral equations.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Космодамианский А. С. Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами / А. С. Космодамианский. – К.: Вища шк., 1975. – 227 с.
2. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий / Г. Н. Савин. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с.
3. Evaluation of Interference between Surface Crack and Hole Using VNA Solution-Finite Element Alternating Method / T. Nishioka, Y. Hirooka, Y. Won et al. // Journal of Interactive Media in Education. – 2009. – Vol. 44, No 5. – P. 142-147.
4. Kirsch G. Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre / G. Kirsch // Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure. – 1898. – 42. – S. 797-807.
5. Остсемин А. А. Математическая модель напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки с осевым трехмерным дефектом / А. А. Остсемин, П. Б. Уткин // Вестник ЮУрГУ: Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2008. – № 27 (127). – С. 71-77.
6. Xiangqiao Y. Fatigue growth modeling of cracks emanating from a circular hole in infinite plate / Y. Xiangqiao, L. Baoliang // Meccanica. – 2012. – Vol. 47, Iss. 1. – P. 221-233.
7. Yan X. Analysis for a crack emanating from a corner of a square hole in an infinite plate using the hybrid displacement discontinuity method / X. Yan // Applied Mathematical Modeling. – 2004. – Vol. 28(9). – P. 835-847
8. Guo J.H. Exact solutions for anti-plane problem of two asymmetrical edge cracks emanating from an elliptical hole in a piezoelectric material / J.H. Guo, Z.X. Lu // International Journal of Solids and Structures. – 2009. – Vol. 46. – P. 3799-3809.
9. Tsukrov I. Anisotropic material with arbitrarily oriented cracks and elliptical holes: effective elastic moduli // I. Tsukrov, M. Kachanov // International Journal of Fracture. – 1998. – Vol. 92. – P. L9-L14.
10. Зорин С. А. Предельное равновесие анизотропной пластины с эллиптическим отверстием, криволинейными жесткими включениями и трещинами / С. А. Зорин, В. Н. Максименко // Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 2012. – Вып. 127. – С. 55-57.
11. Довбня Е. Н. Исследование напряженно-деформированного состояния ортотропной оболочки с эллиптическим отверстием / Е. Н. Довбня // Теоретическая и прикладная механика. – 2001. – Вып. 32. – С. 140-144.
12. Довбня Е. Н. К исследованию концентрации напряжений в окрестности эллиптического разреза в ортотропной пластине / Е. Н. Довбня, Д. В. Пасечник // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2001. – № 1. – С. 27-33.
13. Калоеров С. А. Об общих представлениях комплексных потенциалов для изотропных пластинок с отверстиями, трещинами и включениями / С. А. Калоеров, С. В. Вакуленко // Теоретическая и прикладная механика. – 2001. – Вып. 32. – С. 79-93.
14. Хижняк В. К. Смешанные задачи теории пластин и оболочек / В. К. Хижняк, В. П. Шевченко. – Донецк: ДонГУ, 1979. – 179 с.
15. Joseph P. F. Surface crack problems in plates / P.F. Joseph, F. Erdogan // International Journal of Fracture Mechanics. – 1989. – Vol. 41. – P. 105-131.
16. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1973. – 831 с.

Поступила в редакцию 04.04.2013 г.

УДК 531.38

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ДОКШЕВИЧА В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДИНАМИКИ ГИРОСТАТА

А.В. Зыза, Д.Н. Ткаченко

В работе исследуются условия существования полиномиального решения Докшевича дифференциальных уравнений задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона. Показано обобщение решения Докшевича в рассматриваемой задаче. Построенное новое частное решение зависит от шести независимых параметров и выражается через эллиптические функции времени.

Ключевые слова: полиномиальное решение Докшевича, первые интегралы, эффект Барнетта-Лондона, эллиптические функции времени, гиростат.

Введение. Теоретическая механика в отличие от прикладной механики, которая создает методы расчетов движущихся конструкций, разрабатывает методы математического моделирования качественного поведения объектов современной техники. Для того, чтобы созданная модель – система дифференциальных уравнений была доступна к анализу с помощью современных методов, в процессе постановки задачи принимают различные идеализации. Таким образом, в теоретической механике были сформулированы классические задачи, их обобщения и определены научные направления исследования в этих областях. Одним из таких направлений является направление, в котором изучается задача о движении твердого тела с одной неподвижной точкой под действием силы тяжести [1] и ее различные обобщения [2]. Особый интерес представляет задача о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона [2 – 5].

Так как, гиромангнитные явления играют важную роль в исследовании приборов, работающих в электромагнитных полях, то при математическом моделировании движения гиростата в магнитном поле следует учитывать магнитный момент, возникающий в результате эффекта Барнетта-Лондона [6]. С математической точки зрения уравнения движения в этой задаче принципиально отличаются от уравнений класса Кирхгофа, так как, они не допускают в общем случае интеграла энергии [2]. Поэтому для интегрирования этих уравнений недостаточно положить дополнительный первый интеграл [1]. В связи с этим проводится исследования по построению частных решений различных классов, в частности, полиномиальных [7 – 10].

В данной статье изучают условия существования полиномиального решения Докшевича [11] в задаче о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона.

Постановка задачи. Рассмотрим движение гиростата с неподвижной точкой в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона, суть которого состоит в следующем. Если нейтральный ферромагнетик (первоначально немагнитный) поместить в магнитное поле и придать ему вращение, то в силу эффекта Барнетта он становится намагниченным вдоль оси вращения. Подобное явление имеет место и при вращении сверхпроводящего твердого тела (эффект Лондона) [6]. Согласно гипотезе Вейсса, ввиду доменной структуры ферромагнетика, спонтанная намагниченность в различных участках тела направлена по-разному и в отсутствие внешнего магнитного поля ферромагнетик не намагнитен. Однако, при внесении его даже в слабое магнитное поле магнитные силы стремятся повернуть вектор намагниченности в направлении магнитного поля. Взаимодействие вызванной вращением ферромагнетика (сверхпроводника) намагниченности с внешним магнитным полем приводит к прецессии вектора кинетического момента твердого тела вокруг вектора поля [5].

Следуя работам [2 – 5], запишем в векторном виде уравнения движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона

$$A\dot{\omega} = (A\omega + \lambda) \times \omega + B\omega \times \nu + \nu \times (C\nu - s), \quad \dot{\nu} = \nu \times \omega. \quad (1)$$

Первые интегралы уравнений (1) имеют вид

$$\nu \cdot \nu = 1, \quad (A\omega + \lambda) \cdot \nu = k_0. \quad (2)$$

В уравнениях (1), (2) обозначено: A – тензор инерции гиростата в неподвижной точке; ω – угловая скорость гиростата; ν – единичный вектор, характеризующий направление магнитного поля; λ – гиростатический момент; s – вектор, коллинеарный вектору обобщенного центра масс; B и C – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; k_0 – постоянная интеграла площадей; точка над переменными означает относительную производную.

Изменение полной энергии гиростата происходит по закону

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} (A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) - (s \cdot \mathbf{v}) + \frac{1}{2} (C\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \right) = (B\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (3)$$

поэтому уравнения (1) не имеют интеграла энергии.

Поскольку для уравнений (1) в общем случае допустимы только два первых интеграла (2), то для этих дифференциальных уравнений неприменима теория последнего множителя Якоби [1]. Если же для динамического уравнения из (1) имеет место равенство $B = \alpha_0 \cdot E$ (E – единичная матрица, α_0 – некоторый параметр), то из соотношения (3) вытекает интеграл энергии для уравнений (1). Тогда уравнения (1) будут относиться к уравнениям Кирхгофа-Пуассона и описывать задачу о движении гири в поле потенциальных и гироскопических сил [2].

Запишем уравнения (1) и первые интегралы (2) в скалярном виде полагая $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, 0)$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, 0)$, $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$, $B = \text{diag}(B_1, B_2, B_3)$, $C = \text{diag}(C_1, C_2, C_3)$:

$$\begin{aligned} A_1 \dot{p} &= (A_2 - A_3)qr + B_2qv_3 - B_3rv_2 + \lambda_2r + s_2v_3 + (C_3 - C_2)v_2v_3, \\ A_2 \dot{q} &= (A_3 - A_1)pr + B_3rv_1 - B_1pv_3 - \lambda_1r - s_1v_3 + (C_1 - C_3)v_1v_3, \\ A_3 \dot{r} &= (A_1 - A_2)pq + B_1pv_2 - B_2qv_1 + \lambda_1q - \lambda_2p + s_1v_2 - s_2v_1 + (C_2 - C_1)v_1v_2; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\dot{v}_1 = rv_2 - qv_3, \quad \dot{v}_2 = pv_3 - rv_1, \quad \dot{v}_3 = qv_1 - pv_2; \quad (5)$$

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1, \quad (A_1p + \lambda_1)v_1 + (A_2q + \lambda_2)v_2 + A_3rv_3 = k_0. \quad (6)$$

Поставим задачу об исследовании условий существования у уравнений (4), (5) решений следующего вида

$$\begin{aligned} q = Q(p) &= \sum_{k=0}^n b_k p^k, \quad r^2 = R(p) = \sum_{i=0}^m c_i p^i, \quad v_1 = \varphi(p) = \sum_{j=0}^l a_j p^j, \\ v_2 = \psi(p) &= \sum_{i=0}^{n_1} g_i p^i, \quad v_3 = r\varphi(p), \quad \varphi(p) = \sum_{j=0}^{m_1} f_j p^j, \end{aligned} \quad (7)$$

где n, m, l, n_1, m_1 – натуральные числа или нули; b_k, c_i, a_j, g_i, f_j – неизвестные постоянные, подлежащие определению.

Подставим выражения (7) в уравнения (4), (5) и геометрический интеграл из (6)

$$\dot{p} = \left(\varphi'(p)^{-1} (\psi(p) - Q(p)\varphi(p)) \sqrt{R(p)} \right); \quad (8)$$

$$\psi'(p)(\psi(p) - Q(p)\varphi(p)) = \varphi'(p)(p\varphi(p) - \varphi(p)),$$

$$\left(R(p)\varphi^2(p) \right)' (p\varphi(p) - \varphi(p)) = 2\psi'(p)\varphi(p)(Q(p)\varphi(p) - p\psi(p)); \quad (9)$$

$$\begin{aligned} A_1(p\varphi(p) - \varphi(p)) &= \psi'(p) \left[Q(p)((A_2 - A_3) + B_2\varphi(p)) + \right. \\ &\quad \left. + \psi(p)((C_3 - C_2)\varphi(p) - B_3) + s_2\varphi(p) + \lambda_2 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 Q'(p)(p\varphi(p) - \varphi(p)) &= \psi'(p) \left[(C_1 - C_3)\varphi(p)\varphi(p) + B_3\varphi(p) - \right. \\ &\quad \left. - B_1p\varphi(p) - s_1\varphi(p) + (A_3 - A_1)p - \lambda_1 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_3 R'(p)(p\varphi(p) - \varphi(p)) &= 2\psi'(p) \left[(C_2 - C_1)\varphi(p)\psi(p) + B_1\psi(p)p + \right. \\ &\quad \left. + ((A_1 - A_2)p - B_2\varphi(p) + \lambda_1)Q(p) - \lambda_2p + s_1\psi(p) - s_2\varphi(p) \right]; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\varphi^2(p) - 1 + \psi^2(p) + \varphi^2(p)R(p) = 0. \quad (11)$$

Здесь штрихом обозначена производная по вспомогательной переменной p . Уравнение (8) устанавливает зависимость p от времени t .

Новое частное решение. Рассмотрим случай когда полиномы из (7) имеют вид

$$\begin{aligned} Q(p) &= b_2 p^2 + b_1 p + b_0, \quad R(p) = c_4 p^4 + c_3 p^3 + c_2 p^2 + c_1 p + c_0, \\ \varphi(p) &= a_2 p^2 + a_1 p + a_0, \quad \psi(p) = g_3 p^3 + g_2 p^2 + g_1 p + g_0, \quad \varphi(p) = f_1 p + f_0. \end{aligned} \quad (12)$$

Указанным классом (7), (12) описывается полиномиальное решение Докшевича задачи о движении тяжелого гиростата [11].

Подставим полиномы из (12) в уравнения (9) – (11) и потребуем выполнение полученных соотношений при всех p . После преобразований получим систему условий на параметры задачи и решения

$$\begin{aligned}
 C_1 = C_2 = C_3, \quad B_3 = B_2, \quad A_3 = A_2, \quad \mu = (B_2(b_0 f_0 - g_0) + s_2 f_0 + \lambda_2) A_1^{-1}, \\
 g_3 - b_2 f_1 = 0, \quad g_2 - (b_2 f_0 + b_1 f_1) = 0, \quad g_1 - b_1 f_0 - b_0 f_1 - 2a_2 \mu = 0, \\
 B_2(b_0 f_1 + b_1 f_0 - g_1) + s_2 f_1 = 0, \quad f_1 - a_2 - 3g_3 \mu = 0, \quad f_0 - a_1 - 2g_2 \mu = 0, \\
 g_1 \mu + a_0 = 0, \quad g_0 - b_0 f_0 - a_1 \mu = 0, \quad 3c_4 f_1 \mu - b_2 a_2 + g_3 = 0, \\
 (5c_3 f_1 + 4c_4 f_0) \mu - 2(b_2 a_1 + b_1 a_2 - g_2) = 0, \quad (2c_0 f_1 + c_1 f_0) \mu - 2b_0 a_0 = 0, \\
 (4c_2 f_1 + 3c_3 f_0) \mu - 2(b_2 a_0 + b_1 a_1 + b_0 a_2 - g_1) = 0, \quad B_2 a_2 - B_1 f_1 = 0, \\
 (3c_1 f_1 + 2c_2 f_0) \mu - 2(b_1 a_0 + b_0 a_1 - g_0) = 0, \quad A_2 b_1 \mu - B_2 a_0 + s_1 f_0 + \lambda_1 = 0, \\
 2A_2 b_2 \mu - B_2 a_1 + B_1 f_0 + s_1 f_1 + A_1 - A_2 = 0, \\
 2A_2 c_4 \mu - (B_1 g_2 - B_2(b_2 a_1 + b_1 a_2) + (A_1 - A_2)b_2 + s_1 g_3) = 0, \\
 3A_2 c_3 \mu - 2(B_1 g_1 - B_2(b_2 a_0 + b_1 a_1 + b_0 a_2) + (A_1 - A_2)b_1 + \lambda_1 b_2 + s_1 g_2 - s_2 a_2) = 0, \\
 A_2 c_2 \mu - B_1 g_0 + B_2(b_1 a_0 + b_0 a_1) + (A_2 - A_1)b_0 - \lambda_1 b_1 + \lambda_2 - s_1 g_1 + s_2 a_1 = 0, \\
 A_2 c_1 \mu - 2(\lambda_1 b_0 + s_1 g_0 - s_2 a_0 - B_2 b_0 a_0) = 0, \quad a_0^2 - 1 + g_0^2 + c_0 f_0^2 = 0. \tag{13}
 \end{aligned}$$

Система алгебраических уравнений (13) разрешена относительно ненулевых параметров задачи и решения $A_1, A_2, B_1, B_2, s_2, f_0$. При этом имеем

$$\begin{aligned}
 C_1 = C_2 = C_3, \quad A_3 = A_2, \quad B_3 = B_2, \quad k = B_1/B_2, \\
 b_2 = \frac{2k(1-k)B_2}{3s_2}, \quad b_1 = \frac{\xi}{3(1-k)f_1 s_2}, \quad b_0 = -\frac{3((k-1)f_1 s_2)^2 + \alpha - \beta + \delta}{3(k-1)^2 B_2 f_1^2 s_2}, \\
 f_1 = \frac{(3A_1 - (2k+1)A_2) \left[3k(k-1)B_2 f_0 + (k+2)(2k+1)A_1 - k(k+2)^2 A_2 \right]}{3(1-k)\sqrt{\eta}}, \\
 a_2 = k \cdot f_1, \quad a_1 = \frac{(2k+1)A_1 - k(k+2)A_2 + 2k(k-1)B_2 f_0}{(k-1)B_2}, \quad a_0 = \frac{\alpha - \beta + \gamma}{6k(k-1)^2 B_2^2 f_1}, \tag{14} \\
 g_3 = \frac{2k(1-k)B_2 f_1}{3s_2}, \quad g_2 = \frac{k((2k+1)A_1 - k(k+2)A_2 + (k-1)(2k-1)B_2 f_0)}{(1-k)s_2}, \\
 g_1 = \frac{-\alpha + \beta - \gamma}{3(k-1)^2 B_2 f_1 s_2}, \quad g_0 = -\frac{3(k-1)(k(k+2)A_2 - (2k+1)A_1)(f_1 s_2)^2 + 2k(\alpha - \beta + \delta)B_2 f_0}{6k(k-1)^2 B_2^2 f_1^2 s_2}, \\
 c_4 = -\left(\frac{2k(k-1)B_2}{3s_2} \right)^2, \quad c_3 = -\frac{4k\xi B_2}{9f_1 s_2^2}, \quad c_1 = \frac{2(2kB_2 a_0 b_0 - c_0 f_1 \cdot s_2)}{f_0 s_2}, \\
 c_2 = -\frac{k}{(3(k-1)f_1 s_2)^2} \left[3k(k-1) \left\{ 3(k-1)(f_1 s_2)^2 + ((k-1)(8k^2 - 4k - 1)B_2 f_0 + \right. \right. \\
 \left. \left. + 6(4k^2 + 2k - 3)A_1 - 2(6k^3 + 13k^2 - 8k - 2)A_2) B_2 f_0 \right\} + 3(2k+1)(10k^2 + 7k - 8)A_1^2 + \right. \\
 \left. + (k+2) \left[k(k+2)(17k^2 - 4k - 4)A_2 - 2(32k^3 + 15k^2 - 18k - 2)A_1 \right] A_2 \right]; \\
 c_0 = \frac{k(1-k)B_2 f_0^2 + (k(k+2)A_2 - (2k+1)A_1)f_0 - 3f_1^2 b_0 (B_2 b_0 + s_2)}{3B_2 f_1^2},
 \end{aligned}$$

$$s_1 = \frac{3(k+2)A_1 - (k^2 + 7k + 1)A_2 + 3k(k-1)B_2f_0}{3(k-1)f_1}, \quad \lambda_2 = \frac{(3A_1 - (k+2)A_2)s_2}{2(k-1)B_2},$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{6k(k-1)^2 B_2 f_1} \left[3(k+2)(2k+1)A_1^2 - k(k+2)(k^2 - 8k - 2)A_2^2 - \right. \\ \left. - (k^3 + 27k^2 + 24k + 2)A_1A_2 + 3k(k-1)((2k+1)A_1 - 3kA_2)B_2f_0 \right].$$

Здесь

$$\alpha = (k+2)(2k+1)(3A_1^2 + k(k+2)A_2^2), \quad \beta = (7k(k^2 + 3) + 2(12k^2 + 1))A_1A_2,$$

$$\gamma = 3k(k-1)(2k(k-1)B_2f_0 + (4k+5)A_1 - (2k^2 + 6k + 1)A_2)B_2f_0,$$

$$\delta = k(k-1)((k-1)(2k+1)B_2f_0 + 3(2(k+2)A_1 - (k^2 + 4k + 1)A_2))B_2f_0,$$

$$\xi = k(3(2k+1)A_1 - 3k(k+2)A_2 + (k-1)(4k-1)B_2f_0),$$

$$\eta = (2k(k-1)B_2^2)^2 - (k(k+2)A_2 - (2k+1)A_1)^2 s_2^2.$$

Решение (7), (12) при условиях (14) будет действительным, если

$$\eta > 0, \quad c_0 > 0. \tag{15}$$

Зависимость p от времени устанавливаем из (8)

$$\dot{p} = \mu \sqrt{c_4 p^4 + c_3 p^3 + c_2 p^2 + c_1 p + c_0}. \tag{16}$$

Рассмотрим численный пример решения (7), (12), (14)-(16), уравнений (8)-(10). Пусть

$$C_1 = C_2 = C_3, \quad A_1 = 7A_2/15, \quad A_3 = A_2 = a, \quad B_1 = B_2/3, \quad B_3 = B_2 = b, \tag{17}$$

$$s_2 = s, \quad f_0 = -\frac{18a}{25b} \quad (a > 0, b \neq 0, s \neq 0).$$

Тогда при помощи (14) – (16) решение уравнений (4), (5) примет вид

$$q = \frac{4b}{27s} p^2 - \frac{5b^2}{27as} p - \frac{s}{b},$$

$$r^2 = R(p) = \frac{1}{9} \left(-\frac{16b^2}{81s^2} p^4 + \frac{40b^3}{81as^2} p^3 - \frac{81a^2s^2 + 25b^4}{81(as)^2} p^2 - 10\frac{b}{a} p + \frac{50b^2}{3a^2} \right),$$

$$v_1 = -\frac{1}{5} \left(\frac{6a^2}{25b^2} p^2 + \frac{12a}{5b} p + 1 \right); \quad v_2 = -\frac{2}{5s} \left(\frac{4a^2}{75b} p^3 + \frac{a}{5} p^2 - \frac{b}{3} p \right),$$

$$v_3 = -\frac{18a}{25b} \left(\frac{a}{5b} p + 1 \right) \sqrt{R(p)}, \quad s = \left(\frac{85b^2}{81a}, s, 0 \right), \quad \lambda = \left(\frac{5b}{6}, \frac{7as}{10b}, 0 \right); \tag{18}$$

$$\dot{p} = 3s \sqrt{R(p)} / (2b). \tag{19}$$

Решение дифференциального уравнения (19) дает зависимость вспомогательной переменной от времени: $p = p(t)$. Это позволяет получить зависимость от времени всех переменных решения (17), (18) рассматриваемой задачи.

Выводы. Таким образом, в статье построено одно новое частное решение дифференциальных уравнений задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона, которое является обобщением полиномиального решения Докшевича [11] и выражается через эллиптические функции времени. Найденное полиномиальное решение также можно получить из уравнений, указанных в [12], и оно не имеет аналога в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил [13].

РЕЗЮМЕ

У роботі досліджуються умови існування поліноміального розв'язку Докшевича диференціальних рівнянь руху гіростата у магнітному полі з врахуванням ефекту Барнетта-Лондона. Показано узагальнення розв'язку Докше-

вича в цій задачі. Побудовано новий частинний розв'язок, який залежить від шести незалежних параметрів і виражається через еліптичні функції часу.

Ключові слова: поліноміальний розв'язок Докшевича, перші інтеграли, ефект Барнетта-Лондона, еліптичні функції часу, гіростат.

SUMMARY

In the paper the conditions of existence of Dokshevich polynomial solutions to the differential equations of the task about the gurostat movement in the magnetic field with the allowance for the Barnett-London effect are studied. The generalization of Dokshevich solution in the task analyzed is shown. The new specific solution depends on six independent parameters and is expressed through elliptic functions of time.

Keywords: Dakshtvich polynomial solution, first integrals, the Bernett-London effect, Elliptic functions of time, gurotat.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Харламов П.В. Лекции по динамике твердого тела / П.В.Харламов. – Новосибирск: Изд-во Новосибир. ун-та, 1965. – 221 с.
2. Горр Г.В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку / Г.В.Горр, А.В.Мазнев. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.
3. Самсонов В.А. О вращении твердого тела в магнитном поле / В.А.Самсонов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1984. – № 4. – С. 32-34.
4. Козлов В.В. К задаче о вращении твердого тела в магнитном поле // В.В.Козлов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1985. – № 6. – С. 28-33.
5. Урман Ю.Н. Динамические эффекты, обусловленные вращательным движением сверхпроводника в магнитном подвесе / Ю.Н.Урман // Докл. АН СССР. – 1984. – Т. 276, № 6. – С. 1402-1404.
6. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела / Ч.Киттель. – М.: Физматгиз, 1963. – 696 с.
7. Зыза А.В. О полиномиальных решениях уравнений движения гиростата в магнитном поле / А.В. Зыза // Механика твердого тела. – 2003. – Вып. 33. – С. 61-70.
8. Зыза А.В. Один случай полиномиальных решений дифференциальных уравнений движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Баврнетта-Лондона / А.В. Зыза, К.С. Бородкина // Вісник Донецьк. нац. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2012. – № 1. – С. 64-67.
9. Зыза А.В. Об одном классе полиномиальных решений движения тела в магнитном поле / А.В.Зыза // Вісник Донецьк. нац. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2010. – № 2. – С. 19-23.
10. Зыза А.В. Об одном случае интегрируемости уравнений движения твердого тела в магнитном поле / А.В. Зыза, Т.В. Хомяк // Вісник Донецьк. нац. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2012. – № 2. – С. 31-35.
11. Докшевич А.И. Новое частное решение уравнений движения гиростата, имеющего неподвижную точку / А.И. Докшевич // Механика твердого тела. – 1970. – Вып. 2. – С.12-15.
12. Горр Г.В. О редукции дифференциальных уравнений в двух задачах динамики твердого тела / Г.В. Горр, А.В. Зыза // Тр. Ин-та прикладной математики и механики НАНУ. – 2009. – Т. 18. – С. 29-36.
13. Зыза А.В. Об одном классе полиномиальных решений уравнений Кирхгофа / А.В. Зыза // Вісник Донецьк. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2006. – Вип. 1. – С. 40-46.

Поступила в редакцию 05.01.2013 г.

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ ПЬЕЗОПЛАСТИНКИ С ПОДКРЕПЛЕННЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ

С.А. Калоеров, А.А. Самодуров

С использованием комплексных потенциалов получены точное решение задачи электромагнитоупругости для пластинки с эллиптическим отверстием, подкрепленным тонким жестким кольцом, и приближенное решение для пластинки с рядом таких отверстий. Во втором случае обобщенным методом наименьших квадратов задача приведена к системе линейных алгебраических уравнений, псевдорешение которой находится с применением сингулярного разложения. Проведены численные исследования распределения напряжений. Выявлены закономерности влияния геометрических характеристик рассматриваемых сред, а также подкрепления на значения напряжений при различных внешних воздействиях.

Ключевые слова: электромагнитоупругость, пьезоматериалы, обобщенный метод наименьших квадратов, многосвязная пластинка

В связи с широким использованием в современной технике пьезоматериалов возникла необходимость проведения широких исследований напряженно-деформированного состояния элементов конструкций из этих материалов под действием различных внешних механических и электромагнитных воздействий. Но к настоящему времени такие исследования проведены лишь для сплошных пластинок и пластинок с отверстиями [1, 2]. Более общие же случаи, когда имеются неоднородности типа включений, до сих пор не изучены. Решение таких задач из-за связанности полей наталкиваются на определенные трудности.

В данной статье рассмотрен очередной шаг к решению таких задач – решена промежуточная задача, когда отверстия в пластинке подкреплены тонкими абсолютно жесткими кольцами (покрытиями). Задача решена с использованием комплексных потенциалов электромагнитоупругости.

1. Основные соотношения для комплексных потенциалов. Рассмотрим отнесенную к прямоугольной декартовой системе координат пьезопластинку, занимающую конечную многосвязную область S , ограниченную внешним контуром L_0 и контурами отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$). Если контур L_0 полностью уходит в бесконечность, будем иметь бесконечную многосвязную пластинку. В последнем случае будем считать, что на бесконечности заданы напряжения и угол жесткого поворота $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty, \omega_3^\infty$, а так же напряженности электрического и магнитного полей $E_x^\infty, E_y^\infty, H_x^\infty, H_y^\infty$. Вместо $E_x^\infty, E_y^\infty, H_x^\infty, H_y^\infty$ могут задаваться индукции $D_x^\infty, D_y^\infty, B_x^\infty, B_y^\infty$.

Определение электромагнитоупругого состояния (ЭМУС) рассматриваемой пластинки сводится к нахождению комплексных потенциалов электромагнитоупругости $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) [1, 2] из соответствующих граничных условий. После нахождения этих функций основные характеристики ЭМУС (напряжения, перемещения, потенциалы, индукции, напряженности электромагнитного поля) в пластинке вычисляются по формулам

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{6k}) \Phi'_k(z_k); \tag{1.1}$$

$$(u, v, \varphi, \psi) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (p_k, q_k, r_k^0, h_k^0) \Phi_k(z_k) + (-\omega_3 y + u_0, \omega_3 x + v_0, \varphi_0, \psi_0); \tag{1.2}$$

$$(D_x, D_y, E_x, E_y) = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{7k}, \lambda_{8k}, r_k^0, \mu_k r_k^0) \Phi'_k(z_k); \tag{1.3}$$

$$(B_x, B_y, H_x, H_y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{9k}, \lambda_{10k}, h_k^0, \mu_k h_k^0) \Phi'_k(z_k). \tag{1.4}$$

Здесь

$$z_k = x + \mu_k y; \tag{1.5}$$

μ_k ($k = \overline{1, 4}$) – корни характеристического уравнения [2]

$$\begin{vmatrix} l_{4a}(\mu) & l_{3b}(\mu) & l_{3d}(\mu) \\ l_{3b}(\mu) & l_{2c}(\mu) & l_{2e}(\mu) \\ l_{3d}(\mu) & l_{2e}(\mu) & l_{2f}(\mu) \end{vmatrix} = 0; \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} l_{4a}(\mu) &= s_{11}^{DB} \mu^4 - 2s_{16}^{DB} \mu^3 + (2s_{12}^{DB} + s_{66}^{DB}) \mu^2 - 2s_{26}^{DB} \mu + s_{22}^{DB}, \\ l_{3b}(\mu) &= g_{11}^{\sigma,D} \mu^3 - (g_{21}^{\sigma,D} + g_{16}^{\sigma,D}) \mu^2 + (g_{12}^{\sigma,D} + g_{26}^{\sigma,D}) \mu - g_{22}^{\sigma,D}, \\ l_{3d}(\mu) &= p_{11}^{\sigma,B} \mu^3 - (p_{21}^{\sigma,B} + p_{16}^{\sigma,B}) \mu^2 + (p_{12}^{\sigma,B} + p_{26}^{\sigma,B}) \mu - p_{22}^{\sigma,B}, \\ l_{2c}(\mu) &= -\beta_{11}^{\sigma} \mu^2 + 2\beta_{12}^{\sigma} \mu - \beta_{22}^{\sigma}, \quad l_{2e}(\mu) = -v_{11}^{\sigma} \mu^2 + 2v_{12}^{\sigma} \mu - v_{22}^{\sigma}, \\ l_{2f}(\mu) &= -\chi_{11}^{\sigma} \mu^2 + 2\chi_{12}^{\sigma} \mu - \chi_{22}^{\sigma}; \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$v_k = \frac{l_{3d}(\mu_k)l_{2e}(\mu_k) - l_{3b}(\mu_k)l_{2f}(\mu_k)}{l_{2c}(\mu_k)l_{2f}(\mu_k) - l_{2e}^2(\mu_k)}, \quad \rho_k = \frac{l_{3b}(\mu_k)l_{2e}(\mu_k) - l_{2c}(\mu_k)l_{3d}(\mu_k)}{l_{2c}(\mu_k)l_{2f}(\mu_k) - l_{2e}^2(\mu_k)}; \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{1k} &= \mu_k^2, \quad \lambda_{2k} = 1, \quad \lambda_{6k} = -\mu_k, \quad \lambda_{7k} = v_k \mu_k, \quad \lambda_{8k} = -v_k, \quad \lambda_{9k} = \rho_k \mu_k, \quad \lambda_{10k} = -\rho_k; \\ p_k &= s_{11}^{DB} \mu_k^2 - s_{16}^{DB} \mu_k + s_{12}^{DB} + (g_{11}^{\sigma,D} \mu_k - g_{21}^{\sigma,D}) v_k + (p_{11}^{\sigma,B} \mu_k - p_{21}^{\sigma,B}) \rho_k, \\ q_k &= s_{12}^{DB} \mu_k - s_{26}^{DB} + \frac{s_{22}^{DB}}{\mu_k} + \left(g_{12}^{\sigma,D} - \frac{g_{22}^{\sigma,D}}{\mu_k} \right) v_k + \left(p_{12}^{\sigma,B} - \frac{p_{22}^{\sigma,B}}{\mu_k} \right) \rho_k, \\ r_k^0 &= g_{11}^{\sigma,D} \mu_k^2 - g_{16}^{\sigma,D} \mu_k + g_{12}^{\sigma,D} - (\beta_{11}^{\sigma} \mu_k - \beta_{12}^{\sigma}) v_k - (v_{11}^{\sigma} \mu_k - v_{12}^{\sigma}) \rho_k, \\ h_k^0 &= p_{11}^{\sigma,B} \mu_k^2 - p_{16}^{\sigma,B} \mu_k + p_{12}^{\sigma,B} - (\chi_{11}^{\sigma} \mu_k - \chi_{12}^{\sigma}) v_k - (\chi_{11}^{\sigma} \mu_k - \chi_{12}^{\sigma}) \rho_k. \end{aligned} \quad (1.9)$$

$-\omega_3 y + u_0$, $\omega_3 x + v_0$ – жесткие перемещения пластинки как целой, ω_3 – угол поворота пластинки в плоскости Oxy против часовой стрелки, причем $\omega_3 = (\partial v / \partial x - \partial u / \partial y) / 2$, u_0 , v_0 – компоненты поступательного перемещения, φ_0 , ψ_0 – нулевой уровень потенциалов электрического и магнитного полей; s_{ij}^{DB} – коэффициенты деформации материала; $g_{ki}^{\sigma,D}$ и $p_{ki}^{\sigma,B}$ – электрические и магнитные пьезомодули; β_{kl}^{σ} , χ_{kl}^{σ} , v_{kl}^{σ} – коэффициенты диэлектрической, магнитной, электромагнитной восприимчивостей.

Комплексные потенциалы $\Phi_k(z_k)$ при задании на контуре внешних усилий X_n , Y_n должны удовлетворять механическим граничным условиям [2]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, \lambda_{8k}, \lambda_{10k}) \Phi_k(z_k) = \mp \int_0^s (X_n, Y_n, D_n, B_n) ds + (c_1, c_2, c_3, c_4) \quad (1.10)$$

в случае задания на контуре индукций D_n , B_n электромагнитного поля или

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, r_k^0, h_k^0) \Phi_k(z_k) = \left(\mp \int_0^s (X_n, Y_n) ds, \varphi^*, \psi^* \right) + (c_1, c_2, \varphi_0, \psi_0) \quad (1.11)$$

в случае задания потенциалов φ^* , ψ^* . Если на контуре заданы перемещения, то имеют место условия

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (p_k, q_k, \lambda_{8k}, \lambda_{10k}) \Phi_k(t_k) = \left(u_* + \omega_3 y, v_* - \omega_3 x, \mp \int_0^s (D_n, B_n) ds \right) - (u_0, v_0, c_3, c_4) \quad (1.12)$$

при задании на контурах индукций или

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (p_k, q_k, r_k^0, h_k^0) \Phi_k(t_k) = (u_* + \omega_3 y - u_0, v_* - \omega_3 x - v_0, \varphi^* - \varphi_0, \psi^* - \psi_0) \quad (1.13)$$

при задании на контурах электромагнитных потенциалов. В выражениях (1.10) – (1.13) верхние знаки относятся к внешнему контуру области S , нижние – к контурам отверстий.

В общем случае при отсутствии сосредоточенных воздействий функции $\Phi_k(z_k)$ имеют вид [2]

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^L A_{kl} \ln(z_k - z_{kl}) + \Phi_{k0}(z_k), \quad (1.14)$$

где Γ_k – постоянные, равные нулю в случае конечной области и вычисляемые из систем [1, 2]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{6k}, \lambda_{7k}, \lambda_{8k}, \lambda_{9k}, \lambda_{10k}, q_k - \mu_k p_k) \Gamma_k = (\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty, D_x^\infty, D_y^\infty, B_x^\infty, B_y^\infty, 2\omega_3^\infty) \quad (1.15)$$

(в случае бесконечной области при задании на бесконечности компонент векторов индукции поля) или

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{6k}, -r_k^0, -\mu_k r_k^0, -h_k^0, -\mu_k h_k^0, q_k - \mu_k p_k) \Gamma_k = (\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty, E_x^\infty, E_y^\infty, H_x^\infty, H_y^\infty, 2\omega_3^\infty), \quad (1.16)$$

(если на бесконечности заданы компоненты векторов напряженности поля); A_{kl} ($k=1, 4$) – постоянные, вычисляемые из системы [2]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, \lambda_{8k}, \lambda_{10k}, p_k, q_k, r_k^0, h_k^0) i A_{kl} = \left(\frac{X_l}{2\pi}, \frac{Y_l}{2\pi}, \frac{Q_{yl}}{2\pi}, \frac{Q_{il}}{2\pi}, 0, 0, 0, 0 \right); \quad (1.17)$$

X_l, Y_l – компоненты главного вектора внешних усилий, приложенных к контуру L_l , Q_{yl} и Q_{il} – суммарные потоки электрического и магнитного зарядов через контур L_l ; $\Phi_{k0}(z_k)$ – функции, голоморфные в многосвязных областях S_k , получаемых из области S аффинными преобразованиями (1.5).

2. Решение задачи для пластинки с эллиптическим отверстием, подкрепленным жестким покрытием. Рассмотрим бесконечную пьезопластинку с эллиптическим отверстием (рис. 1), контур которого подкреплен тонким абсолютно жестким покрытием, на котором потоки электрической и магнитной индукций равны нулю.

На бесконечности пластинка находится под действием усилий $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{yz}^\infty$, однородного электромагнитного поля, характеризуемого напряженностями $E_x^\infty, E_y^\infty, H_x^\infty, H_y^\infty$, угол поворота $\omega_3^\infty = 0$. Обозначим контур эллипса и его полуоси через L_1, a_1, b_1 .

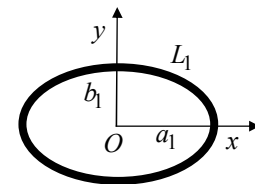


Рис. 1

В рассматриваемом случае комплексные потенциалы (1.14) имеют вид

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \Phi_{k1}(z_k). \quad (2.1)$$

Здесь Γ_k – постоянные, определяемые из системы (1.16); $\Phi_{k0}(z_k)$ – функции, голоморфные вне эллиптических контуров L_{k1} , соответствующих контуру L_1 при аффинных преобразованиях (1.5). Для построения общего вида последних функций используем конформные отображения.

Функции

$$z_k = R_k \left(\zeta_k + \frac{m_k}{\zeta_k} \right), \quad (2.2)$$

в которых [3]

$$R_k = \frac{a_1 - i\mu_k b_1}{2}, \quad m_k = \frac{a_1 + i\mu_k b_1}{a_1 - i\mu_k b_1}, \quad (2.3)$$

a_1, b_1 – полуоси эллипса, отображают конформно внешности единичных кругов $|\zeta_k| \geq 1$ на внешности

эллипсов L_{k1} . Тогда $\Phi_{k0}(z_k)$, голоморфные вне L_{k1} , как сложные функции от ζ_k , будут голоморфными вне единичных кругов $|\zeta_k| \geq 1$, включая бесконечно удаленные точки, и их можно представить рядами Лорана по отрицательным степеням ζ_k . Тогда для функций (2.1) будем иметь:

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{kn}}{\zeta_k^n}. \quad (2.4)$$

Подставив функции (2.4) в граничные условия (1.12) и применив метод рядов, получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 \left[(p_k, q_k, \lambda_{8k}, \lambda_{10k}) a_{k1} + (\bar{p}_k, \bar{q}_k, \bar{\lambda}_{8k}, \bar{\lambda}_{10k}) \bar{a}_{k1} \right] = \\ = - \sum_{k=1}^4 \left[(p_k, q_k, \lambda_{8k}, \lambda_{10k}) \Gamma_k R_k m_k + (\bar{p}_k, \bar{q}_k, \bar{\lambda}_{8k}, \bar{\lambda}_{10k}) \bar{\Gamma}_k \bar{R}_k \bar{m}_k \right], \\ a_{kn} = 0, \quad n \geq 2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Окончательно комплексные потенциалы будут такими:

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \frac{a_{k1}}{\zeta_k}, \quad (k = \overline{1, 4}), \quad (2.6)$$

где a_{k1} – постоянные, определяемые из решения системы (2.5). Зная функции (2.6), можно вычислять основные характеристики электромагнитоупругого состояния.

Были проведены численные исследования распределения в пластинке напряжений, электрических и магнитных индукций и напряженностей. Пластинка считалась изготовленной из материалов 1) композит на основе $BaTiO_3 - CoFe_2O_4$ (материал M1) [4]; 2) композит, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные, которого соответствуют кадмию селенида $CdSe$, а пьезомагнитные и магнитные – $BaTiO_3$ (M2) [5]; 3) композит, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные, которого соответствуют $PZT - 4$, а пьезомагнитные и магнитные – $CoFe_2O_4$ (M3) [5]. Физико-механические постоянные этих материалов даны в [2]. Ниже описаны некоторые из полученных результатов.

На рис. 2 для пластинки из различных материалов с круговым отверстием, подкрепленным жестким покрытием при растяжении на бесконечности усилиями $\sigma_y^\infty = p$ изображены графики (сплошные

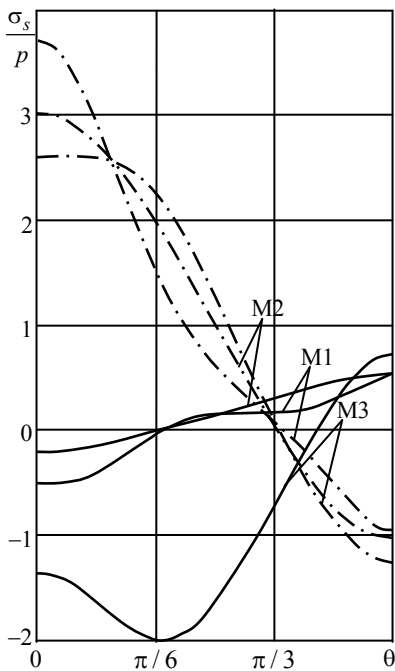


Рис. 2

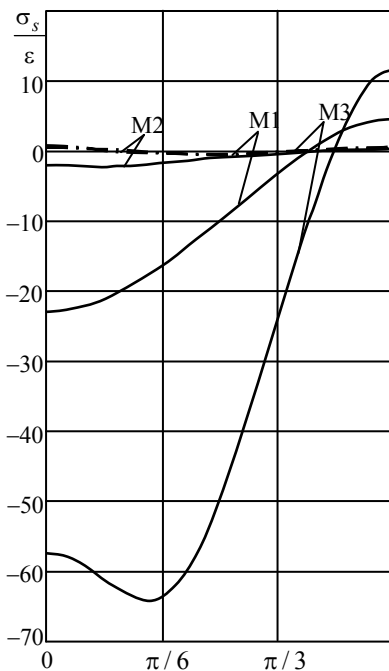


Рис. 3

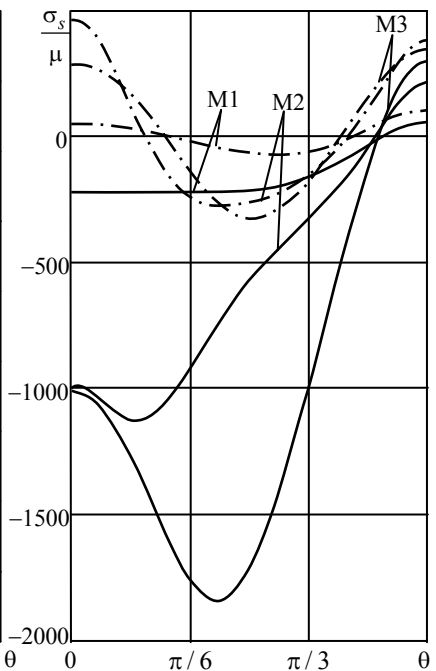


Рис. 4

линии) распределения нормальных напряжений σ_s вблизи контура на площадках, перпендикулярных к контуру. Значения напряжений приведены с точностью до p как множителя. Здесь же штрихпунктирными линиями изображены графики тех же напряжений для случая неподкрепленного отверстия [2]. На рис. 3 (с точностью до множителя ε) и рис. 4 (с точностью до множителя μ) изображены графики распределения тех же напряжений σ_s при действии на бесконечности напряженностей $E_y^\infty = \varepsilon$ и $H_y^\infty = \mu$ соответственно. Из рис. 2–4 видно, что подкрепление отверстия жестким покрытием значительно уменьшает концентрацию напряжений около отверстия при действии механических сил (растяжении $\sigma_y^\infty = p$) и увеличивает ее при электромагнитных воздействиях ($H_y^\infty = \mu$ или $E_y^\infty = \varepsilon$).

Численные исследования были проведены и для пластинки с эллиптическим тонким жестким покрытием. При этом, если отношение полуосей эллипса $b/a < 10^{-3}$, то эллипс может рассматриваться прямолинейной трещиной, берега которой подкреплены жестким покрытием, и вычисляться КИНИН [6]. Для этого случая в табл. 1 приведены значения КИНИН для трещины с жестким покрытием берегов и свободным от подкрепления. Видно, что подкрепление приводит к тем же закономерностям, что для кругового отверстия.

Таблица 1

Внешнее воздействие	Контур	Материал	КИНИН				
			k_I^\pm	$k_D^\pm \cdot 10^{-3}$	$k_E^\pm \cdot 10^{-3}$	k_B^\pm	$k_H^\pm \cdot 10^{-3}$
$\sigma_y^\infty = p$	Жестко подкреп.	M1	-0,025	0,085	10,20	0,001	0,014
		M2	-0,208	0,008	81,90	0,005	0,438
		M3	-0,618	0,291	35,33	0,005	0,407
	Не подкреплен	M1	1,000	0,000	-6,36	0,000	-0,018
		M2	1,000	0,000	-32,21	0,000	-0,509
		M3	1,000	0,000	-9,13	0,000	-0,384
$E_y^\infty = \varepsilon$	Жестко подкреп.	M1	-102,477	11,355	1019,74	84,144	1001,408
		M2	-583,117	0,907	39543,97	17,391	1211,495
		M3	-835,368	60,094	18242,78	14,529	1209,933
	Не подкреплен	M1	0,000	7,295	997,28	0,011	0,032
		M2	0,000	0,094	986,19	0,001	0,057
		M3	0,000	11,306	1000,90	0,060	-0,009
$H_y^\infty = \mu$	Жестко подкреп.	M1	-7,502	7,295	1074,65	0,011	0,103
		M2	-1,082	0,094	1073,38	0,001	0,392
		M3	-22,416	11,306	1489,53	0,060	5,633
	Не подкреплен	M1	0,000	11,355	-539,12	84,144	1000,625
		M2	0,000	0,907	-16437,76	17,391	1067,444
		M3	0,000	60,094	-3992,86	14,529	1041,677

3. Решение задачи для пластинки с конечным числом эллиптических отверстий. Пусть теперь бесконечная пластинка ослаблена эллиптическими отверстиями с контурами L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) с полуосями a_l , b_l и центрами в точках (x_{0l}, y_{0l}) . Контур L_l подкреплены тонкими абсолютно жесткими покрытиями. На бесконечности заданы $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{yz}^\infty, E_x^\infty, E_y^\infty, H_x^\infty, H_y^\infty, \omega_3^\infty = 0$.

В этом случае комплексные потенциалы (1.14) и их производные будут такими:

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + A_k(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \phi_{kln}(z_k); \tag{3.1}$$

$$\Phi'_k(z_k) = \Gamma_k + A'_k(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \phi'_{kln}(z_k), \tag{3.2}$$

где

$$A_k(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} A_{kl} \ln \zeta_k, \quad A'_k(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \frac{A_{kl}}{\zeta_{kl}}; \tag{3.3}$$

$$\varphi_{kln}(z_k) = \zeta_{kl}^{-n}, \quad \varphi'_{kln}(z_k) = -\frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1} R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}); \quad (3.4)$$

ζ_{kl} – переменные, определяемые из конформных отображений [3]

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right) \quad (3.5)$$

внешности единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{kl} , соответствующих контурам L_l при аффинных преобразованиях (1.5);

$$z_{kl} = x_{0l} + \mu_k y_{0l},$$

$$R_{kl} = \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2},$$

$$m_{kl} = \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}}; \quad (3.6)$$

φ_l – угол между направлениями оси Ox и полуоси a_l эллипса L_l , отсчитываемый от Ox против часовой стрелки; θ – параметр параметрического задания эллипса, изменяющийся от 0 до 2π . Постоянные a_{kln} , входящие в функции (3.1), будем определять из граничных условий (1.12), которые в дифференциальной форме имеют вид

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (p_k, q_k, \lambda_{8k}, \lambda_{10k}) \delta_k \Phi'_k(t_k) = \left(\omega_3 \frac{dy}{ds}, -\omega_3 \frac{dx}{ds}, D_n, B_n \right), \quad (3.7)$$

где $\delta_k = dz_k/ds$. Выберем на контурах отверстий систему точек $M_{lm}(x_{lm}, y_{lm})$ ($m = \overline{1, M_l}$), в которых удовлетворим граничным условиям (3.7). Подставив функции (3.2) в равенства (3.7) в точках $M_{lm}(x_{lm}, y_{lm})$, получим

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} [(p_k, q_k, \lambda_{8k}, \lambda_{10k}) \delta_k \varphi'_{kln}(t_{klm}) a_{kln}] =$$

$$= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 [(p_k, q_k, \lambda_{8k}, \lambda_{10k}) \delta_k \Gamma_k] - \left(\omega_3 \frac{dy}{ds}, -\omega_3 \frac{dx}{ds}, D_n, B_n \right). \quad (3.8)$$

Если в рядах (3.2) оставлять по N членов, то комплексные потенциалы будут содержать $4N\mathcal{L}$ комплексных постоянных a_{kln} ($k = \overline{1, 4}$, $l = \overline{1, \mathcal{L}}$, $n = \overline{1, N}$), а система (3.8) для их определения состоит

из $4M$, где $M = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} M_l$, линейных алгебраических уравнений. Псевдорешение этой системы будем находить с применением сингулярного разложения [7, 8]. После нахождения псевдорешения системы (3.8) постоянные a_{kln} , а следовательно и функции (3.1), станут известными и можно вычислять основные характеристики ЭМУС.

Численные исследования были проведены для пластинки с двумя одинаковыми круговыми отверстиями радиуса a (рис. 5), на которых потоки электрической и магнитной индукции равны нулю. В табл. 2 для различных внешних воздействий и при различных отношениях c/a , где c – расстояние между контурами отверстий, приведены значения напряжений σ_s в точке A перемычки на контуре левого отверстия. Видно, что при сближении отверстий друг с другом значения напряжения σ_s значительно увеличиваются. Как и в случае пластики с одним отверстием подкрепление контуров отверстий жестким покрытием значительно уменьшает концентрацию напряжений около отверстий при действии механических сил (растяжении $\sigma_y^\infty = p$) и увеличивает ее при электромагнитных воздействиях

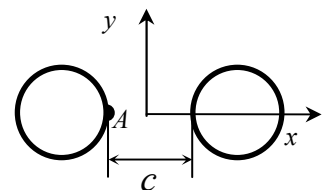


Рис. 5

Таблица 2

Воздей- ствие	Контур	Мате- риал	c/a					
			∞	10	2	1	0,5	0,1
$\sigma_y^\infty = p$	С покрытием	M1	-0,205	-0,212	-0,296	-0,412	-0,586	-1,203
		M2	-0,497	-0,507	-0,607	-0,712	-0,863	-1,567
		M3	-1,363	-1,394	-1,784	-2,259	-2,892	-5,347
	Свободный	M1	3,019	3,020	3,032	3,288	4,065	8,710
		M2	3,701	3,701	3,484	3,786	4,570	9,566
		M3	2,598	2,598	2,550	2,788	3,563	7,820
$E_y^\infty = \varepsilon$	С покрытием	M1	-22,940	-23,179	-26,386	-31,271	-39,842	-79,856
		M2	-1,857	-1,872	-2,045	-2,280	-2,699	-5,164
		M3	-57,407	-58,272	-69,466	-84,310	-106,677	-201,828
	Свободный	M1	0,569	0,569	0,685	0,737	0,735	1,339
		M2	0,852	0,852	0,930	0,996	1,051	1,545
		M3	-1,710	-1,710	-3,323	-3,572	-3,607	-6,334
$H_y^\infty = \mu$	С покрытием	M1	-216,099	-220,064	-269,034	-327,968	-413,631	-758,417
		M2	-986,842	-997,639	-1117,530	-1263,310	-1504,850	-2826,180
		M3	-1006,650	-1025,330	-1255,300	-1515,600	-1841,080	-3286,600
	Свободный	M1	58,474	58,474	82,108	87,226	85,053	165,604
		M2	470,160	470,160	576,719	612,363	633,279	998,698
		M3	291,230	291,230	380,279	405,789	399,684	775,065

($H_y^\infty = \mu$ или $E_y^\infty = \varepsilon$). При $c/a > 10$ влиянием одного отверстия на напряженное состояние около другого не значительно.

РЕЗЮМЕ

З використанням комплексних потенціалів отриманні точний розв'язок задачі електромагнітопружності для пластинки з еліптичним отвором, який підкріплено тонким жорстким кільцем, та наближений розв'язок задачі для пластинки з рядом таких отворів. У другому випадку узагальненим методом найменших квадратів задача зведена до системи лінійних алгебраїчних рівнянь, псевдорозв'язок якої шукається з використанням сингулярного розкладання. Проведені чисельні дослідження розподілу напружень. Виявлено закономірності впливу геометричних характеристик розглянутих середовищ, а також підкріплення на значення напружень при різних зовнішніх впливах.

Ключові слова: електромагнітопружність, п'єзоматеріали, узагальнений метод найменших квадратів, багато-зв'язна пластинка

SUMMARY

Exact solution of problem of electromagnetoelasticity for a plate with an elliptic hole, reinforced by a thin rigid ring, and an approximate solution for a plate with several such holes were obtained by using complex potentials. In the second case, using the generalized least-squares method, problem is reduced to a system of linear algebraic equations, which pseudosolution is finding by using singular value decomposition. The numerical studies of stress distribution were conducted. The regularities of the influence of geometric characteristics of given mediums and reinforcements on stress values under different external influences were detected.

Keywords: electromagnetoelasticity, piezomaterials, generalized least square method, multiply plate

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Калоеров С.А. Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных сред / С.А. Калоеров, А.И. Баева, О.И. Бороненко. – Донецк: Юго-Восток, 2007. – 270 с.
2. Калоеров С.А. Двумерные задачи электромагнитоупругости для многосвязных тел / С.А. Калоеров, А.В. Петренко. – Донецк: Юго-Восток, 2011. – 232 с.
3. Калоеров С.А. Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела / С.А. Калоеров, Е.С. Горянская // Концентрация напряжений.– К.: А.С.К., 1998. – С. 10–26. (Механика композитивов: В 12 т., Т. 7).
4. Tian W.-Y. Multiple crack interaction problem in magneto-electroelastic solids / W.-Y. Tian, U. Gabbert // Europ. J. Mech. Part A. – 2004. – Vol. 23. – P. 599-614.
5. Hrennikoff A. Solution of problems of elasticity by the framework method / A. Hrennikoff // J. Appl. Mech. – 1941. – Vol. 8. – P. A169-A175.
6. Калоеров С.А. Определение коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности для многосвязных электроупругих сред / С.А. Калоеров // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 6. – С. 56-62.
7. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
8. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.

Поступила в редакцию 04.04.2013 г.

УДК 539.374

ИЗОТРОПНАЯ ПЛОСКОСТЬ С ДВУМЯ КРУГОВЫМИ ВЫРЕЗАМИ В СЛУЧАЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

Н.И. Кодак, В.Н. Ложкин

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, г. Донецк

Методом последовательных конформных отображений изучено упругопластическое равновесие неограниченной изотропной плоскости с двумя одинаковыми круговыми вырезами в случае экспоненциальной пластичности. Плоскость сжимается равномерными усилиями вдоль и поперек линии центров вырезов. Контуры вырезов свободны от внешних воздействий. На неизвестной границе раздела упругой и пластических областей напряжения являются непрерывными.

Определены условия, при которых имеет место начальный пластический охват контуров вырезов и при которых возможно наибольшее сближение пластических областей.

Ключевые слова: неограниченная изотропная плоскость, круговой вырез, экспоненциальная пластичность, упругопластическое равновесие, начальный пластический охват, упругая и пластическая области, неизвестная граница раздела, конформное отображение.

Введение. Упругопластическое равновесие изотропной среды с круговыми вырезами для плоской деформации или обобщенного плоского состояния при различных условиях пластичности можно описать с помощью аналитических функций. Две из них характеризуют напряженное состояние упругой части среды, остальные конформно отображают внешности единичных окружностей на внешности неупругих областей, охватывающих контуры вырезов и несприкасающихся друг с другом. Напряженные состояния неупругих областей не зависят от внешнего нагружения среды. Последнее определяет только внешние границы этих областей [1].

Анализ исследований, в которых коэффициенты разложений аналитических функций определялись методом малого параметра из условий непрерывности упругих и пластических напряжений на неизвестных границах их раздела, сделан в монографии [2].

В настоящей работе методом последовательных конформных отображений [3] изучено возникновение и развитие неупругих областей в изотропной плоскости с двумя одинаковыми круговыми вырезами от начального неупругого охвата их контуров в случае экспоненциальной пластичности [2]. В качестве исходного приближения берется конформное отображение, построенное методом малого параметра для идеальной пластичности [1]. Из условий непрерывности упругих и пластических напряжений на подлежащей определению границе их раздела методом коллокации находятся коэффициенты разложения аналитических функций, характеризующих напряженное состояние упругой части плоскости. Затем этим же методом уточняются коэффициенты отображения для построения следующего приближения решения задачи.

Постановка задачи. Рассмотрим неограниченную изотропную плоскость с двумя одинаковыми круговыми вырезами радиуса R . Вырезы расположены на оси ox_1 на расстоянии lR от центра координат ox_1x_2 . Плоскость сжимается усилиями q_1 вдоль оси ox_1 и q_2 – вдоль оси ox_2 .

Контуры вырезов свободны от внешних воздействий. Расстояние между центрами вырезов и интенсивность усилий q_1 и q_2 таковы, что в плоскости возле вырезов возникают пластические области. Они полностью охватывают контуры вырезов, не соприкасаются и их внешние границы находятся на расстоянии $hR > 0$ друг от друга по оси ox_1 (рис. 1).

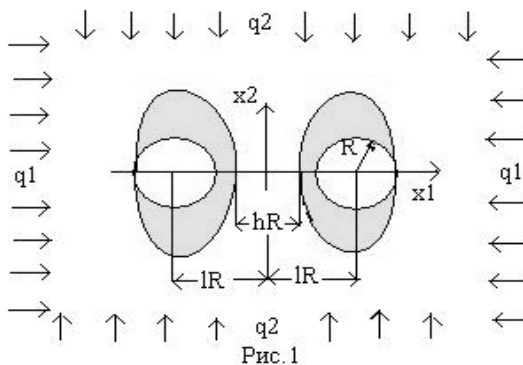


Рис. 1

Геометрическая и силовая симметрия равновесия плоскости позволяет исследовать возникновение и развитие пластической области около одного - правого выреза

Введем безразмерные координаты

$$z = \xi_1 + i\xi_2 = R^{-1}(x_1 + ix_2), \quad z - l = r \exp(i\theta). \quad (1)$$

Напряжения в правой пластической области удовлетворяют уравнениям равновесия, соотношениям экспоненциальной пластичности и условиям на контуре выреза [2]

$$\begin{aligned} r\partial\sigma_r^p/\partial r + \sigma_r^p - \sigma_\theta^p + \partial\tau_{r\theta}^p/\partial\theta &= 0, \quad r\partial\tau_{r\theta}^p/\partial r + 2\tau_{r\theta}^p + \partial\sigma_\theta^p/\partial\theta = 0; \\ (\sigma_r^p - \sigma_\theta^p)^2 + (2\tau_{r\theta}^p)^2 &= 4k^2 \left\{ 1 - \exp[-k^{-1}\sigma_0 + (2k)^{-1}(\sigma_r^p + \sigma_\theta^p)] \right\}^2; \\ \sigma_r^p + \sigma_\theta^p < 2\sigma_0; \quad |z-l|=r=1: \sigma_r^p &= \tau_{r\theta}^p = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь k и σ_0 – постоянные, имеющие размерность напряжений.

Напряжения в упругой части плоскости удовлетворяют уравнениям равновесия, соотношению совместности и условиям внешнего нагружения [4]

$$\begin{aligned} \partial\sigma_{11}^e/\partial\xi_1 + \partial\tau_{12}^e/\partial\xi_2 &= 0, \quad \partial\tau_{12}^e/\partial\xi_1 + \partial\sigma_{12}^e/\partial\xi_2 = 0; \\ (\partial^2/\partial\xi_1^2 + \partial^2/\partial\xi_2^2)(\sigma_{11}^e + \sigma_{22}^e) &= 0; \quad |z| \rightarrow \infty: \sigma_{11}^e = -q_1, \quad \sigma_{22}^e = -q_2, \quad \tau_{12}^e = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

На границе раздела упругой и пластической областей напряжения являются непрерывными.

Аналитическое решение задачи. Решение задачи (2) имеет вид [2]

$$\sigma_r^p = -k[2\ln r - \gamma(1-r^{-2})], \quad \sigma_\theta^p = -k[2(1+\ln r) - \gamma(1+r^{-2})], \quad \tau_{r\theta}^p = 0. \quad (4)$$

Здесь $\gamma(\delta_0)$ удовлетворяет уравнению

$$1 - \gamma(\delta_0) + \ln \gamma(\delta_0) + \delta_0 = 0, \quad \delta_0 = k^{-1}\sigma_0, \quad 0 \leq \delta_0 < \infty. \quad (5)$$

Из него следует, что $\gamma(0) = 1$, $\gamma(\infty) = 0$. Согласно равенств (4), значение $\gamma = 0$ соответствует случаю идеальной пластичности [2].

Напряженное состояние упругой части плоскости описывается функциями $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, являющимися решением задачи (3). С учетом геометрической и силовой симметрии задачи их можно представить так [1]

$$\begin{aligned} \Phi(z), \Psi(z) &= -\alpha/2, \beta + \sum_{n=1} (a_n, b_n)\psi_n(z), \\ \psi_n(z) &= \zeta^{-(n+1)}(z-l) + (-1)^{n+1}\zeta_1^{-(n+1)}(z+l), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\alpha = (2k)^{-1}(q_1 + q_2), \quad \beta = (2k)^{-1}(q_1 - q_2). \quad (7)$$

Значения $\zeta(z-l)$ и $\zeta_1(z+l)$ находятся из равенств

$$\begin{aligned} z-l &= r_0\omega(\zeta), \quad \omega(\zeta) = \sum_{n=1} c_{n+2}\zeta^{-n}, \quad c_1 = 1; \quad \zeta = \rho \exp(i\phi); \\ z+l &= r_0\omega_1(\zeta_1), \quad \omega_1(\zeta_1) = -\omega(-\zeta_1) = \sum_{n=1} (-1)^{n+1}c_{n+2}\zeta_1^{-n}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь функции ω и ω_1 конформно отображают внешности единичных окружностей $|\zeta|=1$ и $|\zeta_1|=1$ соответственно на внешности правой и левой пластических областей.

Для упругих напряжений справедливы равенства [1]

$$\sigma_{22}^e - \sigma_{11}^e + 2i\tau_{12}^e = 2k[(\bar{z}-z)\Phi'_z(z) + \Psi(z)], \quad \sigma_{11}^e + \sigma_{22}^e = 2k[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}]. \quad (9)$$

В окрестности правой пластической области функции (6) принимают вид

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta), \Psi(\zeta) &= -\alpha/2, \beta + \sum_{n=1} (a_n, b_n)\psi_n(\zeta), \\ \psi_n(\zeta) &= \zeta^{-(n+1)} + (-1)^{n+1}\zeta_1^{-(n+1)}(\zeta), \end{aligned} \quad (10)$$

где значения $\zeta_1(\zeta)$ находятся из равенства

$$\zeta_1(\zeta) = 2l/r_0 + \zeta + \sum_{n=0} c_{n+2}[\zeta^{-n} + (-1)^n\zeta_1^{-n}(\zeta)]. \quad (11)$$

Соотношения (9) переписутся так

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^e - i\tau_{\rho\phi}^e &= k[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} - \Omega_1(\zeta, \bar{\zeta})\Phi'_\zeta(\zeta) - \Omega_2(\zeta, \bar{\zeta})\Psi(\zeta)] \\ \sigma_\rho^e + \sigma_\phi^e &= 2k[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}], \end{aligned} \quad (12)$$

Напряжения (4) на внешней границе правой пластической области $z-l = r_0\omega(\sigma)$ принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^p - i\tau_{\rho\phi}^p &= -k\{1 + 2\ln r_0 + \ln |\omega(\sigma)|^2 - \gamma - [1 - \gamma r_0^{-2} |\omega(\sigma)|^{-2}] \Omega_3(\sigma, \bar{\sigma})\}, \\ \sigma_{\rho}^p + \sigma_{\theta}^p &= -2k[1 + 2\ln r_0 + \ln |\omega(\sigma)|^2 - \gamma]. \end{aligned} \quad (13)$$

В равенствах (12), (13) введены обозначения

$$\begin{aligned} \Omega_1(\zeta, \bar{\zeta}) &= \zeta[\overline{\omega(\zeta) - \omega(\zeta)}] / \bar{\zeta} \overline{\omega'(\zeta)}, \quad \Omega_2(\zeta, \bar{\zeta}) = \zeta \omega'(\zeta) / \bar{\zeta} \overline{\omega'(\zeta)}, \\ \Omega_3(\zeta, \bar{\zeta}) &= \zeta \omega'(\zeta) \overline{\omega(\zeta)} / \bar{\zeta} \overline{\omega'(\zeta)} \overline{\omega(\zeta)}, \quad \sigma = \exp(i\phi). \end{aligned} \quad (14)$$

Коэффициенты r_0, c_n, a_n, b_n разложений (8), (10) находятся из условий непрерывности упругих (12) и пластических (13) напряжений

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma) + \overline{\Phi(\sigma)} - \Omega_1(\sigma, \bar{\sigma}) \Phi'_{\zeta}(\sigma) - \Omega_2(\sigma, \bar{\sigma}) \Psi(\sigma) &= \\ = -1 - 2\ln r_0 - \ln |\omega(\sigma)|^2 + \gamma + [1 - \gamma r_0^{-2} |\omega(\sigma)|^{-2}] \Omega_3(\sigma, \bar{\sigma}), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\Phi(\Omega) + \overline{\Phi(\sigma)} = -1 - 2\ln r_0 - \ln |\omega(\sigma)|^2 + \gamma. \quad (16)$$

Численное решение задачи. Решение рассматриваемой задачи строится методом последовательных конформных отображений [3]. Для фиксированного расстояния l и фиксированного значения параметра β в качестве исходного берется отображение, построенное методом малого параметра для идеальной пластичности [1], уточняется значение параметра α_n , при котором возможен начальный пластический охват контура правого выреза, когда внешняя граница неупругой области касается этого контура (рис. 1).

Строится упругое решение для полученного отображения. Из условия (15) методом коллокации находятся коэффициенты a_n и b_n разложений (10). Для этого его распишем так

$$\begin{aligned} \sum_{n=1} a_n [2 \operatorname{Re} \psi_n(\sigma) - \operatorname{Re} \Omega_1(\sigma, \bar{\sigma}) \operatorname{Re} \psi'_n(\sigma) + \operatorname{Im} \Omega_1(\sigma, \bar{\sigma}) \operatorname{Im} \psi'_n(\sigma)] - \\ - \sum_{n=1} b_n [\operatorname{Re} \Omega_2(\sigma, \bar{\sigma}) \operatorname{Re} \psi_n(\sigma) - \operatorname{Im} \Omega_2(\sigma, \bar{\sigma}) \operatorname{Im} \psi_n(\sigma)] = \\ = \alpha + \beta \operatorname{Re} \Omega_3(\sigma, \bar{\sigma}) - 1 - 2\ln r_0 - \ln |\omega(\sigma)|^2 + \gamma + [1 - \gamma r_0^{-2} |\omega(\sigma)|^{-2}] \operatorname{Re} \Omega_3(\sigma, \bar{\sigma}), \\ \sum_{n=1} a_n [\operatorname{Im} \Omega_1(\sigma, \bar{\sigma}) \operatorname{Re} \psi'_n(\sigma) + \operatorname{Re} \Omega_1(\sigma, \bar{\sigma}) \operatorname{Im} \psi'_n(\sigma)] + \\ + \sum_{n=1} b_n [\operatorname{Im} \Omega_2(\sigma, \bar{\sigma}) \operatorname{Re} \psi_n(\sigma) + \operatorname{Re} \Omega_2(\sigma, \bar{\sigma}) \operatorname{Im} \psi_n(\sigma)] = \\ = -\beta \operatorname{Im} \Omega_2(\sigma, \bar{\sigma}) - [1 - \gamma r_0^{-2} |\omega(\sigma)|^{-2}] \operatorname{Im} \Omega_3(\sigma, \bar{\sigma}). \end{aligned} \quad (17)$$

Первое отображение (8) представим в виде

$$r_0 \omega(\zeta) = \omega_0(\zeta) + \omega_h(\zeta), \quad \omega_0(\zeta) = \sum_{n=-1} t_{n+2} \zeta^{-n}, \quad t_n = r_0 c_n, \quad \omega_h(\zeta) = \sum_{n=-1} h_{n+2} \zeta^{-n}. \quad (18)$$

Тогда условие (16) переписывается так [3]

$$\begin{aligned} 2 \sum_{n=-1} h_{n+2} [\operatorname{Re} \omega_0(\sigma) \cos n\phi + \operatorname{Im} \omega_0(\sigma) \sin n\phi] = \\ = \mu^{-1} |\omega_0(\sigma)|^2 [\alpha - 1 + \gamma - 2 \sum_{n=1} a_n \operatorname{Re} \psi_n(\sigma) - \ln |\omega_0(\sigma)|^2]. \end{aligned} \quad (19)$$

Из него методом коллокации найдем постоянные h_n . Новые коэффициенты r_0 и c_0 определяются равенствами

$$r_0 = t_1 + h_1, \quad c_n = (t_1 + h_1)^{-1} (t_n + h_n). \quad (20)$$

Точки коллокации ($0 \leq \varphi \leq \pi$) необходимо выбирать на контуре $z = l = r_0 \omega(\sigma)$ несимметрично относительно прямой $\xi_1 = l$. Значения $\zeta_1(\zeta)$ вычисляются из уравнения (11) методом Вегстейна. Сходимость приближений обеспечивается выбором произвольной постоянной μ , входящей в условие (19).

Построение приближений заканчивается при совпадении двух последних внешних границ правой пластической области с приемлемой точностью. Затем параметр α увеличивается на заданную величину, вычисляется коэффициент r_0 по формулам

$$r_0 = r_p \exp(-\beta \delta^2), \quad r_p = \exp(\alpha / 2 - 1 / 2 + \gamma / 2), \quad \delta = \gamma_p / 2l - \beta (r_p / 2l)^3, \quad (21)$$

постоянные c_n сохраняются от предыдущего шага. Определяющим критерием решения рассматриваемой задачи является точность выполнения условия непрерывности напряжений (12), (13) на границе их раздела

$$z - l = r_0 \omega(\sigma): \sigma_\rho^e = \sigma_\rho^p, \quad \sigma_\phi^e = \sigma_\phi^p, \quad \tau_{\rho\phi}^e = \tau_{\rho\phi}^p. \quad (22)$$

С увеличением параметра α при фиксированном значении β последующая пластическая область полностью охватывает предыдущую.

Результаты численных исследований сведены в таблице. В ней для указанных значений параметров $l, \beta, \gamma^{(m)} = m/10, m = 0,10$ приведены значения параметра $\alpha_n^{(m)}$, при котором происходит начальный пластический охват контуров вырезов, и значения параметра $\alpha_k^{(m)}$, до которого предложенный метод позволил довести вычисления.

Таблица

l	1,75			2,0			3,0			4,0			
β	$\gamma^{(m)}$	$\alpha_n^{(m)}$	$\alpha_k^{(m)}$	β	$\gamma^{(m)}$	$\alpha_n^{(m)}$	$\alpha_k^{(m)}$	β	$\gamma^{(m)}$	$\alpha_n^{(m)}$	$\alpha_k^{(m)}$	$\alpha_n^{(m)}$	$\alpha_k^{(m)}$
-0,05	0,0	1,29	1,351	-0,15	0,0	1,46	1,509	-0,35	0,0	1,93	2,106	1,89	2,682
	0,1	1,18	1,271		0,1	1,36	1,424		0,1	1,79	2,012	1,79	2,596
	0,2	1,06	1,191		0,2	1,24	1,338		0,2	1,72	1,919	1,69	2,489
	0,3	0,94	1,110		0,3	1,12	1,253		0,3	1,63	1,825	1,59	2,393
	0,4	0,82	1,030		0,4	1,01	1,168		0,4	1,53	1,731	1,49	2,296
	0,5	0,70	0,951		0,5	0,89	1,083		0,5	1,41	1,637	1,39	2,200
	0,6	0,58	0,871		0,6	0,79	0,998		0,6	1,30	1,544	1,29	2,103
	0,7	0,46	0,791		0,7	0,68	0,913		0,7	1,17	1,450	1,19	2,007
	0,8	0,34	0,712		0,8	0,56	0,829		0,8	1,06	1,356	1,09	1,910
	0,9	0,22	0,633		0,9	0,45	0,744		0,9	0,96	1,263	0,99	1,814
1,0	0,08	0,554	1,0	0,34	0,659	1,0	0,87	1,169	0,89	1,717			
0,30	0,0	1,54	1,755	0,35	0,0	1,72	2,079	0,35	0,0	1,75	2,892	1,80	3,468
	0,1	1,45	1,673		0,1	1,62	1,996		0,1	1,65	2,799	1,68	3,372
	0,2	1,33	1,594		0,2	1,52	1,912		0,2	1,55	2,707	1,60	3,276
	0,3	1,26	1,516		0,3	1,42	1,829		0,3	1,46	2,614	1,52	3,180
	0,4	1,18	1,437		0,4	1,34	1,745		0,4	1,36	2,521	1,43	3,085
	0,5	1,09	1,359		0,5	1,24	1,662		0,5	1,27	2,429	1,33	2,989
	0,6	0,99	1,281		0,6	1,14	1,579		0,6	1,17	2,336	1,22	2,893
	0,7	0,90	1,204		0,7	1,04	1,495		0,7	1,07	2,244	1,11	2,797
	0,8	0,82	1,126		0,8	0,92	1,413		0,8	0,99	2,151	1,00	2,701
	0,9	0,71	1,049		0,9	0,86	1,334		0,9	0,91	2,058	0,90	2,605
1,0	0,62	0,971	1,0	0,78	1,248	1,0	0,83	1,966	0,80	2,509			

Согласно обозначений (5), (7) внешние усилия q_1, q_2 и постоянная σ_0 выражаются соответственно через параметры α, β, γ так

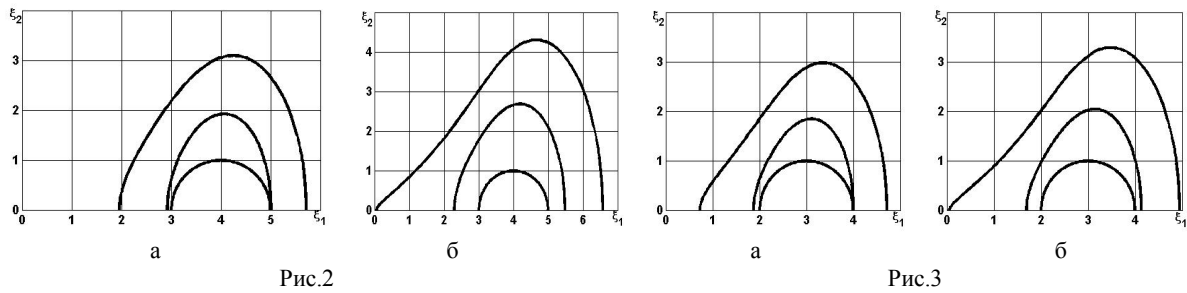
$$q_1 = k(\alpha + \beta), \quad q_2 = k(\alpha - \beta); \quad \sigma_0 = k(\gamma - 1 - \ln \gamma), \quad \gamma \neq 0. \quad (23)$$

Для параметра β взяты предельные значения, для которых была решена аналогичная задача в случае идеальной пластичности [3]. Точность удовлетворения условий непрерывности напряжений (22) удалось довести до 10^{-4} , а внешние границы пластических областей удалось сблизить до расстояния, меньшего одной десятой радиуса вырезов: $h < 0.1$ (рис. 1)

Анализ численных результатов. При значениях $l = 4$ и $l = 3$, $\beta = -0.35$, когда преобладает сжатие плоскости поперек линии центров вырезов, $\alpha = \alpha_n^{(0)}, \alpha_n^{(10)}$, когда имеет место начальный пластический охват контуров вырезов, $\alpha = \alpha_k^{(0)}, \alpha_k^{(10)}$, когда неупругие области максимально сближены,

внешние границы пластических областей практически не отличаются. В этих случаях учет параметра γ приводит только к возникновению неупругих напряжений в плоскости при меньшей интенсивности ее сжатия.

На рис. 2 в безразмерных координатах $o\xi_1\xi_2$ изображены внешние границы правых пластических областей при одинаковом внешнем сжатии плоскости для таких значений параметров l, α, β, γ :

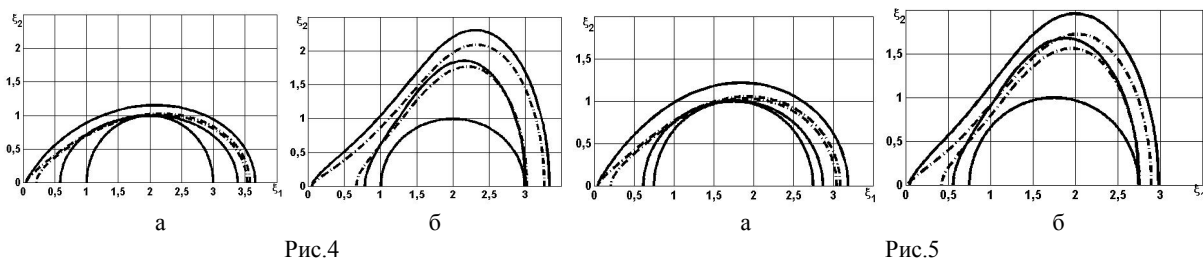


$l = 4, \alpha = \alpha_n^{(0)}, \beta = 0.35, \gamma = 0$ – нижняя кривая, соответствующая начальному неупругому охвату контура выреза в случае идеальной пластичности, и $\gamma = 1$ – верхняя кривая (рис. 2, а);

$l = 4, \alpha = \alpha_k^{(0)}, \beta = 0.35, \gamma = 0$ – нижняя кривая и $\gamma = 1$ – верхняя кривая, соответствующая наибольшей вычисленной неупругой области в случае экспоненциальной пластичности (рис. 2, б).

Аналогичные границы изображены на рис. 3 для значения параметра $l = 3$.

Графики внешних границ пластических областей, определенных для других значений параметра $\gamma (0 < \gamma < 1)$, будут располагаться между кривыми, изображенными на рис. 2, 3.



На рис. 4 приведены внешние границы начального пластического охвата правого контура выреза и наибольших определенных пластических областей:

$l = 2, \alpha = \alpha_n^{(0)}$ и $\alpha = \alpha_k^{(0)}, \gamma = 0, \beta = -0.15$ (рис. 4, а) и $\beta = 0.35$ (рис. 4, б) – пунктирные линии, соответствующие идеальной пластичности;

$l = 2, \alpha = \alpha_n^{(10)}$ и $\alpha = \alpha_k^{(10)}, \gamma = 1, \beta = -0.15$ (рис. 4, а) и $\beta = 0.35$ (рис. 4, б) – сплошные линии, соответствующие экспоненциальной пластичности.

Такие же границы изображены на рис. 5 для значений параметров $l = 1.75, \beta = -0.05$ (рис. 5, а) и $\beta = 0.30$ (рис. 5, б).

Для значений параметров $l = 2, \beta = -0.15$ (рис. 4, а) и $l = 1.75, \beta = -0.05$ (рис. 5, а) границы неупругого начального охвата контура правого выреза и внешние границы предельных неупругих областей (пунктирные линии) в случае идеальной пластичности практически совпадают.

С учетом экспоненциальной пластичности (сплошные линии на этих же рисунках) появляется возможность расширить диапазон значений параметра β , при которых рассматриваемая задача имеет решение.

Выводы. Проанализировав данные, приведенные в таблице, можно утверждать, что в случае экспоненциальной пластичности метод последовательных конформных отображений совместно с методом коллокации позволил изучить упругопластическое равновесие неограниченной изотропной плоскости с двумя одинаковыми круговыми вырезами для расстояний между их контурами от полутора радиуса и сблизить внешние границы охватывающих эти контуры пластических областей до расстояний, меньших одной десятой радиуса выреза.

Для параметров, при которых была решена аналогичная задача в случае идеальной пластичности, точность удовлетворения условий непрерывности упругих и пластических напряжений доведена до 10^{-4} . Внешние границы пластических областей сблизены до расстояния, меньшего одной десятой радиуса вырезов.

Следует отметить, что влияние экспоненциальной пластичности проявляется при небольших расстояниях между контурами вырезов. В этом случае ее учет позволяет расширить диапазон параметров сжатия плоскости, при которых поставленная задача имеет решение.

РЕЗЮМЕ

Методом послідовних конформних відображень вивчено пружнопластичну рівновагу необмеженої ізотропної площини з двома однаковими круговими вирізами у випадку експоненціальної пластичності. Площина стискається рівномірними зусиллями вздовж і впоперек лінії центрів вирізів. Контури вирізів вільні від зовнішніх впливів. На невідомій границі розділу пружної і пластичних областей напруження є неперервними.

Знайдено зусилля, при яких має місце початкове пластичне охоплення контурів вирізів та при яких можливо найбільше зближення непружних областей.

Ключові слова: необмежена ізотропна площина, круговий виріз, експоненціальна пластичність, пружнопластична рівновага, початкове непружне охоплення, пружна і пластична області, невідома границя розділу, конформне відображення.

SUMMARY

By method of successive conformal mappings elastoplastic equilibrium of an infinite isotropic plane with two the same circular cut outs in the case of an exponential plasticity is studied. The plane by a uniform load along and across the line of centers of the cut outs is compressed. Theirs contours from external force are free. Stress on an unknown border of separating of the elastic and plastic domains are continuous.

Efforts, at which the initial plastic enclusion of contours of the cut outs take plane and at which the maximum convergence of plastic domains is possible, are determined.

Key words: infinite isotropic plane, circular cut out, exponential plasticity, elastoplastic equilibrium, initial plastic enclusion, elastic and plastic domains, unknown border of separating, conformal mapping, collocation.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Космодамианский А.С. Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами / А.С.Космодамианский. – Киев: Вища школа, 1975. – 227с.
2. Аннин Б.Д. Упругопластическая задача / Б.Д.Аннин, Г.П.Черепанов. – Новосибирск : Наука, 1983. – 238с
3. Кодак Н.И. Упругопластическое состояние изотропной плоскости с двумя круговыми вырезами при двустороннем сжатии / Н.И.Кодак, В.Н.Ложкин // Вісник Донецького нац. ун-ту. Сер. А. – 2012. – № 1. – С. 73-78.
4. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий / Г.Н.Савин. – Киев: Наукова думка, 1968. – 878с.

Поступила в редакцію 02.01.2013 з.

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ МНОГОСЛОЙНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ПОМОЩИ МНОГОМОДОВОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Л.В. Курпа, Н.А. Будников

Національний технічний університет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков

В работе предложен метод дискретизации по времени системы уравнений движения многослойных пологих оболочек при их геометрически нелинейном деформировании. Основными этапами разработанного подхода является решение последовательности линейных задач: задачи о собственных колебаниях пологой оболочки и последовательности линейных задач, моделируемых неоднородными уравнениями теории упругости, правая часть которых нелинейно зависит от найденных собственных функций. Применение теории R-функций позволяет использовать данный подход для сложной границы области и различных видов граничных условий. Теоретически метод изложен для многомодовой аппроксимации, а практическая его реализация представлена при использовании одной, двух и трех мод.

Ключевые слова: нелинейные колебания, многослойные пологие оболочки, теория R-функций, многомодовая аппроксимация.

Введение. Многослойные пологие оболочки (цилиндрические, сферические панели) широко используются во многих современных конструкциях, как составляющие конструктивные элементы. Под действием динамических нагрузок в них могут возникнуть колебания с амплитудами соизмеримыми с толщиной оболочек, что приводит к возникновению нелинейных эффектов, учет которых неизбежно усложняет математические модели.

Достаточно полный обзор существующих работ по данной тематике за последние годы выполнен, например, в статьях [1–4]. Как следует из анализа последних публикаций, к числу основных проблем, возникающих при решении задач о вынужденных нелинейных колебаниях композитных пологих оболочек, можно отнести следующие: разработка метода дискретизации исходной нелинейной системы движения относительно времени для оболочек со сложной формой плана и различными видами граничных условий; многомодовая аппроксимация неизвестных функций; исследование и решение результирующей нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В работах [5, 6] для многослойных пластин был предложен новый подход для решения первых двух указанных проблем. В настоящей работе выполнено дальнейшее его развитие для многослойных пологих оболочек, толщина которых позволяет использовать классическую теорию оболочек, базирующуюся на гипотезах Кирхгоффа-Лява.

Постановка задачи. Рассмотрим тонкую многослойную пологую оболочку, составленную из n слоев постоянной толщины, расположенных симметрично относительно срединной поверхности оболочки. Предполагается, что проскальзывание между слоями отсутствует. В силу пологости оболочки можно предположить, что криволинейные координаты могут быть заменены декартовыми, а коэффициенты Ламе равными: $A = B = 1$ [7]. Для постановки задачи воспользуемся классической геометрически нелинейной теорией [8], основывающейся на гипотезах Кирхгоффа-Лява. Система уравнений движения в рамках выбранной теории имеет вид:

$$\begin{cases} \partial_x N_{11} + \partial_y N_{12} = m_1 \partial_{tt} u, \\ \partial_x N_{12} + \partial_y N_{22} = m_1 \partial_{tt} v, \\ \partial_{xx} M_{11} + \partial_{yy} M_{22} + 2\partial_{xy} M_{12} + N_{11} \partial_{xx} w + N_{22} \partial_{yy} w + 2N_{12} \partial_{xy} w - \\ - k_1 N_{11} - k_2 N_{22} = F(t) + m_1 \partial_{tt} w. \end{cases} \quad (1)$$

Запишем систему (1) в операторной форме:

$$\begin{cases} L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w = -N_1(w) + m_1 \partial_{tt} u, \\ L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w = -N_2(w) + m_1 \partial_{tt} v, \\ L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w = -N_3(u, v, w) + F(t) + m_1 \partial_{tt} w. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь u , v и w – компоненты вектора перемещений $\{U\}$ в направлениях осей Ox , Oy и Oz соответственно. Величина m_1 , линейные дифференциальные операторы L_{ij} , $i, j = \overline{1,3}$, и нелинейные дифференциальные операторы N_i , $i = \overline{1,3}$ определяются так же, как и в работах [9,11]. Функция $F(t)$ представляет собой поперечную нагрузку, в настоящей работе она принята в виде:

$$F(t) = P_0 \cos \Omega t. \quad (3)$$

Система (1) дополняется соответствующими граничными и начальными условиями.

Компоненты N_{ij} и M_{ij} , ($i, j = 1, 2$) вектора усилий $\{N\}$ и моментов $\{M\}$ для оболочек симметричного строения в матричной форме могут быть записаны как:

$$\{N\} = \{N_{11}; N_{22}; N_{12}\}^T = [C] \cdot \{\varepsilon\}, \quad (4)$$

$$\{M\} = \{M_{11}; M_{22}; M_{12}\}^T = [D] \cdot \{\chi\}. \quad (5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} &= \{\varepsilon_{11}; \varepsilon_{22}; \varepsilon_{12}\}^T, \quad \{\chi\} = \{\chi_{11}; \chi_{22}; \chi_{12}\}^T, \\ \varepsilon_{11} &= \partial_x u + k_1 w + (\partial_x w)^2 / 2, \quad \varepsilon_{22} = \partial_y v + k_2 w + (\partial_y w)^2 / 2, \quad \varepsilon_{12} = \partial_y u + \partial_x v + \partial_x w \cdot \partial_y w, \\ \chi_{11} &= -\partial_{xx} w, \quad \chi_{22} = -\partial_{yy} w, \quad \chi_{12} = -2\partial_{xy} w, \end{aligned} \quad (6)$$

k_1 и k_2 – кривизны оболочки.

Матрицы жесткости $[C]$ и $[D]$ имеют вид:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}.$$

Приведенные жесткостные характеристики C_{ij} и D_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$) определяются так же, как в работах [8, 11, 12].

Метод решения задачи. Первый этап предлагаемого алгоритма предусматривает решение линейной задачи о свободных колебаниях многослойной полой оболочки. Решение этой задачи достаточно подробно изложено в монографии [10]. Заметим только, что для ее решения используется вариационно-структурный метод, базирующийся на совместном применении теории R-функций и вариационных методов, в частности метода Ритца. Структуры решения, с помощью которых строятся системы координатных функций, представлены в работах [10–12]. Для конкретности рассмотрим граничные условия, соответствующие жесткой заделке или неподвижному шарниру.

Жесткая заделка:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \partial_n w = 0, \quad (7)$$

Неподвижный шарнир:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad M_n = 0. \quad (8)$$

Изгибающий момент M_n в (8) определяется как:

$$M_n = M_{11}l^2 + M_{22}m^2 + 2M_{12}lm, \quad (9)$$

где $l = \cos \alpha$, $m = \cos \beta$ – направляющие косинусы вектора внешней нормали к границе области.

В результате решения линейной задачи определим собственные функции $u_i^{(c)}(x, y)$, $v_i^{(c)}(x, y)$ и $w_i^{(c)}(x, y)$, которые будем нормировать как:

$$w_i^{(c)}(x, y) / \max w_i^{(c)}(x, y), \quad u_i^{(c)}(x, y) / \max u_i^{(c)}(x, y), \quad v_i^{(c)}(x, y) / \max v_i^{(c)}(x, y).$$

Остановимся на решении нелинейной задачи. С этой целью рассмотрим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} L_{11}u_{ij} + L_{12}v_{ij} = -Nl_1^{(2)}(w_i^{(c)}, w_j^{(c)}), \\ L_{12}u_{ij} + L_{22}v_{ij} = -Nl_2^{(2)}(w_i^{(c)}, w_j^{(c)}), \end{cases} \quad (10)$$

где $i, j = \overline{1, n}$ (n – количество собственных функций), операторы $Nl_1^{(2)}$ и $Nl_2^{(2)}$ определяются формулами

$$\begin{aligned} Nl_1^{(2)}(w_i^{(c)}, w_j^{(c)}) &= \partial_x w_i^{(c)} \left(C_{11} \partial_{xx} w_j^{(c)} + 2C_{16} \partial_{xy} w_j^{(c)} + C_{66} \partial_{yy} w_j^{(c)} \right) + \\ &+ \partial_y w_i^{(c)} \left(C_{16} \partial_{xx} w_j^{(c)} + (C_{12} + C_{66}) \partial_{xy} w_j^{(c)} + C_{26} \partial_{yy} w_j^{(c)} \right), \\ Nl_2^{(2)}(w_i^{(c)}, w_j^{(c)}) &= \partial_x w_i^{(c)} \left(C_{16} \partial_{xx} w_j^{(c)} + (C_{12} + C_{66}) \partial_{xy} w_j^{(c)} + C_{26} \partial_{yy} w_j^{(c)} \right) + \\ &+ \partial_y w_i^{(c)} \left(C_{66} \partial_{xx} w_j^{(c)} + 2C_{26} \partial_{xy} w_j^{(c)} + C_{22} \partial_{yy} w_j^{(c)} \right). \end{aligned}$$

Система (10) доповнюється відповідними граничними умовами. В разі представлених вище граничних умов (7), (8) вони будуть мати вигляд:

$$u_{ij}(x, y) = 0, \quad v_{ij}(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega. \quad (11)$$

Послідовальність задач (10) – (11) будемо розв'язувати варіаційно-структурним методом. Легко показати, що варіаційна формулювання цих задач зводиться до знаходження мінімуму функціонала наступного виду:

$$I(u_{ij}, v_{ij}) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[N_x^{(L)} \varepsilon_x^{(L)} + N_y^{(L)} \varepsilon_y^{(L)} + N_{xy}^{(L)} \varepsilon_{xy}^{(L)} - 2 \left(N_1^{(2)}(w_i^{(c)}, w_j^{(c)}) u_{ij} + N_2^{(2)}(w_i^{(c)}, w_j^{(c)}) v_{ij} \right) \right] d\Omega. \quad (12)$$

Здесь

$$\{N^{(L)}\} = \{N_{11}^{(L)}; N_{22}^{(L)}; N_{12}^{(L)}\}^T = [C] \{\varepsilon^{(L)}\}, \quad \varepsilon_{11}^{(L)} = \partial_x u_{ij}, \quad \varepsilon_{22}^{(L)} = \partial_y v_{ij}, \quad \varepsilon_{12}^{(L)} = \partial_y u_{ij} + \partial_x v_{ij}.$$

Послідовальності координатних функцій для мінімізації функціонала (12) отримавши, використовували наступні структурні формули:

$$u_{ij} = \omega \Psi_1, \quad v_{ij} = \omega \Psi_2,$$

де Ψ_1, Ψ_2 – неопределенні компоненти, які розкладаються в ряди по деяким повним системам функцій [13], а коефіцієнти цього розкладу знаходяться з умови мінімуму функціонала (12).

Для розв'язання нелінійної задачі невідомі функції u, v, w представимо в вигляді:

$$\begin{cases} u(x, y, t) = \sum_{i=1}^n y_i(t) \cdot u_i^{(c)}(x, y) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n y_i(t) \cdot y_j(t) \cdot u_{ij}(x, y), \\ v(x, y, t) = \sum_{i=1}^n y_i(t) \cdot v_i^{(c)}(x, y) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n y_i(t) \cdot y_j(t) \cdot v_{ij}(x, y), \\ w(x, y, t) = \sum_{i=1}^n y_i(t) \cdot w_i^{(c)}(x, y), \end{cases} \quad (13)$$

де власні функції $u_i^{(c)}(x, y)$, $v_i^{(c)}(x, y)$ і $w_i^{(c)}(x, y)$ і функції $u_{ij}(x, y)$ і $v_{ij}(x, y)$ вже визначені раніше.

Можно показати, що якщо проігнорувати сили інерції в перших двох рівняннях системи (1), то при такому виборі функцій u, v, w ці рівняння задовольняються тотожно. Тоді, підставивши (13) в третє рівняння системи і застосувавши процедуру Бубнова-Галеркіна до цього рівняння, отримавши наступну систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$y_r''(t) + \omega_{Lr}^2 y_r(t) + \sum_{i,j=1}^n \beta_{ij}^{(r)} y_i(t) y_j(t) + \sum_{i,j,k=1}^n \gamma_{ijk}^{(r)} y_i(t) y_j(t) y_k(t) = \tilde{F}_r(t). \quad (14)$$

Здесь $r = \overline{1, n}$, а коефіцієнти системи (14) визначаються нижче представленими формулами:

$$\beta_{ij}^{(r)} = \frac{-1}{m_1 \|w_r^{(c)}\|^2} \iint_{\Omega} \left[N_{11}^{(L)}(u_i^{(c)}, v_i^{(c)}, w_i^{(c)}) \partial_{xx} w_j^{(c)} + N_{22}^{(L)}(u_i^{(c)}, v_i^{(c)}, w_i^{(c)}) \partial_{yy} w_j^{(c)} + 2N_{12}^{(L)}(u_i^{(c)}, v_i^{(c)}, w_i^{(c)}) \partial_{xy} w_j^{(c)} - k_1 N_{11}^{(N)} - k_2 N_{22}^{(N)} \right] w_r^{(c)} d\Omega, \quad (15)$$

$$\gamma_{ijk}^{(r)} = -\frac{1}{m_1 \|w_r^{(c)}\|^2} \iint_{\Omega} \left[N_{11}^{(Np)}(u_{ij}, v_{ij}, w_i^{(c)}, w_j^{(c)}) \partial_{xx} w_k^{(c)} + N_{22}^{(Np)}(u_{ij}, v_{ij}, w_i^{(c)}, w_j^{(c)}) \partial_{yy} w_k^{(c)} + 2N_{12}^{(Np)}(u_{ij}, v_{ij}, w_i^{(c)}, w_j^{(c)}) \partial_{xy} w_k^{(c)} \right] w_r^{(c)} d\Omega, \quad (16)$$

$$\tilde{F}_r(t) = P_r \cos \Omega t, \quad P_r = \frac{P_0}{m_1 \|w_r^{(c)}\|^2} \iint_{\Omega} w_r^{(c)} d\Omega.$$

Выражения для $N_{11}^{(L)}, N_{22}^{(L)}, N_{12}^{(L)}, N_{11}^{(Np)}, N_{22}^{(Np)}, N_{12}^{(Np)}$ в формулах (15–16) определяются как:

$$\begin{aligned} \left\{ N^{(L)} \left(u_i^{(c)}, v_i^{(c)}, w_i^{(c)} \right) \right\} &= [C] \left\{ \varepsilon^{(L)} \left(u_i^{(c)}, v_i^{(c)}, w_i^{(c)} \right) \right\}, \\ \left\{ N^{(Np)} \left(u_{ij}, v_{ij}, w_i^{(c)} w_j^{(c)} \right) \right\} &= [C] \left\{ \varepsilon^{(Np)} \left(u_{ij}, v_{ij}, w_i^{(c)} w_j^{(c)} \right) \right\}, \\ \left\{ \varepsilon^{(L)} \left(u_i^{(c)}, v_i^{(c)}, w_i^{(c)} \right) \right\} &= \left\{ \partial_x u_i^{(c)} + k_1 w_i^{(c)}; \partial_y v_i^{(c)} + k_2 w_i^{(c)}; \left(\partial_y u_i^{(c)} + \partial_x v_i^{(c)} \right) \right\}^T, \\ \left\{ \varepsilon^{(Np)} \left(u_{ij}, v_{ij}, w_i^{(c)} w_j^{(c)} \right) \right\} &= \left\{ \partial_x u_{ij} + \frac{1}{2} \partial_x w_i^{(c)} \partial_x w_j^{(c)}; \partial_y v_{ij} + \frac{1}{2} \partial_y w_i^{(c)} \partial_y w_j^{(c)}; \right. \\ &\quad \left. \partial_y u_{ij} + \partial_x v_{ij} + \partial_x w_i^{(c)} \partial_y w_j^{(c)} \right\}^T. \end{aligned}$$

Полученная система уравнений (14) может быть исследована с помощью методов Рунге-Кутты, гармонического баланса, метода многих масштабов и др. В данной работе был использован метод Рунге-Кутта 7-8 порядка.

Численные результаты. Исследуем свободные колебания трехслойной (90°/0°/90°) цилиндрической жестко заземленной оболочки, представленной на рис. 1. Ранее в работе [15] была решена задача о свободных геометрически нелинейных колебаниях этой же оболочки для изотропного случая при использовании одномодовой аппроксимации. При этом было выполнено сравнение полученных результатов с экспериментальными расчетами. В настоящей работе исследуется динамическое поведение трехслойной цилиндрической оболочки с такой же формой плана, состоящей из ортотропных слоев. При этом изотропные оболочки мы получаем как частный случай. Тем самым осуществляется проверка разработанного программного обеспечения и анализируется достоверность предложенного подхода.

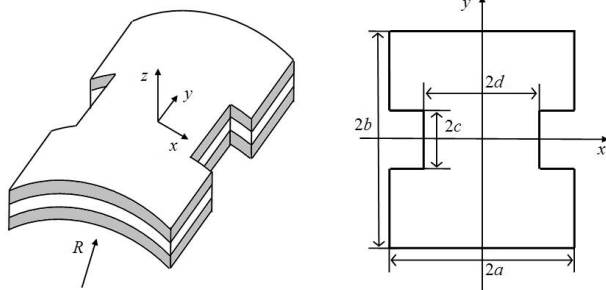


Рис. 1. Геометрическая форма и план оболочки

Геометрические параметры оболочки приняты следующими [15]:

$$2a = 0.132 \text{ м}, \quad 2b = 0.199 \text{ м}, \quad 2c = 0.041 \text{ м}, \quad 2d = 0.092 \text{ м}, \quad h = 0.00028 \text{ м}, \quad R = 2 \text{ м}.$$

Механические характеристики материалов:

для изотропной оболочки – $E_1 = E_2 = 195 \text{ ГПа}$, $G_{12} = 75 \text{ ГПа}$, $\nu_{12} = 0.3$, $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$ [15],

для трехслойной оболочки – $E_1 = 3E_2$, $E_2 = 195 \text{ ГПа}$, $G_{12} = 75 \text{ ГПа}$, $\nu_{12} = 0.3$, $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$.

Уравнение границы области представим в виде:

$$\omega(x, y) = (f_1 \wedge_0 f_2) \wedge_0 (f_3 \vee_0 f_4),$$

где

$$\begin{aligned} f_1 &= \left\{ \sigma_1 = \frac{1}{2a} (a^2 - x^2) \geq 0 \right\}, \quad f_2 = \left\{ \sigma_2 = \frac{1}{2b} (b^2 - y^2) \geq 0 \right\}, \\ f_3 &= \left\{ \sigma_4 = \frac{1}{2c} (y^2 - c^2) \geq 0 \right\}, \quad f_4 = \left\{ \sigma_5 = \frac{1}{2d} (d^2 - x^2) \geq 0 \right\}, \end{aligned}$$

\wedge_0 и \vee_0 – символы, определяющие R-конъюнкцию и R-дизъюнкцию [13] соответственно.

Структуры решения для линейной задачи о собственных колебаниях оболочки были выбраны в виде

$$w = \omega^2(x, y) \Phi_1(x, y), \quad u = \overline{\omega} \Phi_2(x, y), \quad v = \omega(x, y) \Phi_3(x, y).$$

Неопределенные компоненты $\Phi_i(x, y)$, $i = \overline{1,3}$ будем аппроксимировать степенными полиномами, учитывая симметрию задачи (симметрию области, граничных условий и расположение волокон в слоях). Общее количество координатных функций при решении линейной задачи было выбрано равным 78, что соответствует 14-ой степени степенных полиномов, выбранных для аппроксимации неопределенной компоненты Φ_1 и 11-ой степени для компонент Φ_2 и Φ_3 .

Как показывает расчет, наименьшая собственная частота соответствует первой форме колебаний оболочки, поэтому при построении скелетных кривых ограничимся модами $w_{1,1}^{(c)}$, $w_{1,3}^{(c)}$, $w_{3,1}^{(c)}$.

На рис. 2 представленны формы колебаний рассматриваемых оболочек, а в табл. 1 приведены значения собственных частот для изотропных и трехслойных оболочек. При этом для изотропных оболочек выполнено сравнение с результатами эксперимента [15].

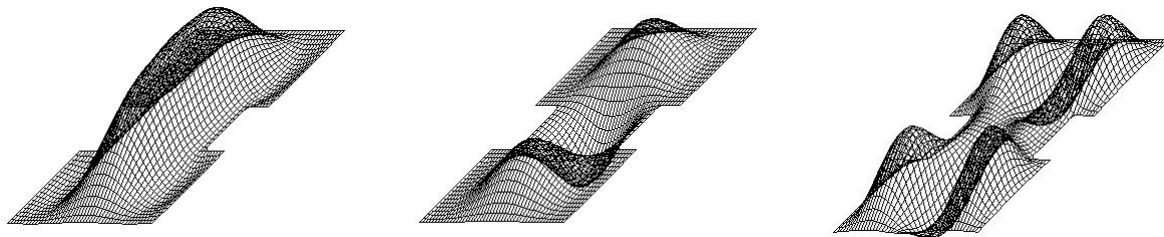


Рис. 2. Формы колебаний оболочек

В табл. 1 приведены значения собственных частот для изотропных и трехслойных оболочек.

Таблица 1

Линейные частоты	Линейные частоты		
	Изотропная оболочка	Трехслойная оболочка	
	Эксперимент [15]	RFM	RFM
$\Omega_{(1,1)}$, Гц	368.64	368.65	440.34
$\Omega_{(1,3)}$, Гц	453.44	452.78	590.16
$\Omega_{(3,1)}$, Гц	627.84	627.15	710.79

На рис. 3 представлено сравнение зависимостей прогиба w в центре оболочки от времени при различных начальных условиях. Как видно из рисунка, если начальное отклонение превышает толщину оболочки, то колебания существенно отличаются от гармонических.

На рис. 4 представлены полученные амплитудно-частотные характеристики рассматриваемых оболочек при одно-, двух- и трехмодовой аппроксимации неизвестных функций по времени. В результате проведенных исследований было установлено, что для амплитуд, превышающих толщину оболочки необходимо использовать не менее трех мод.

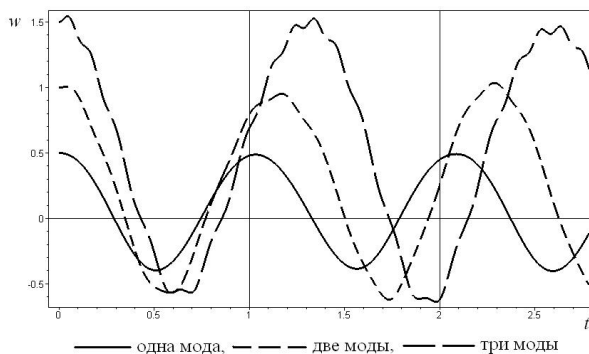


Рис. 3. Зависимость прогиба от времени при одно-, двух- и трехмодовой аппроксимации

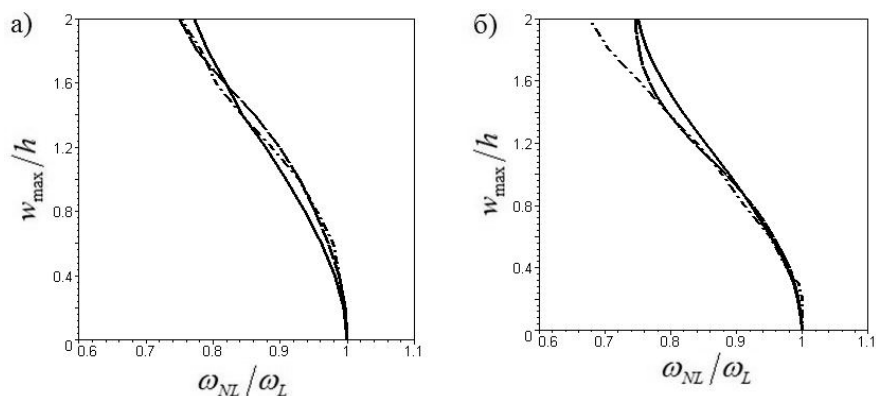


Рис. 4. Амплитудно-частотные зависимости: а) для изотропной оболочки, б) для трехслойной оболочки.

Выводы. Предложенный в работе численно-аналитический метод исследования нелинейных колебаний многослойных пологих оболочек позволяет учитывать сложную форму плана оболочек и различные

виды граничных условий. Согласно разработанному подходу может быть использована многомодовая аппроксимация неизвестных функций по времени, а также приближения высоких порядков по координатным функциям. Решение задачи существенно усложняется от числа мод, выбранных для аппроксимации искомого решения. Разработанный метод проиллюстрирован на примере жестко защемленной трехслойной оболочки сложной геометрии при использовании трех мод. Из проведенных исследований следует, что для амплитуд колебаний, больших толщины оболочки необходимо брать не менее трех мод.

РЕЗЮМЕ

У роботі запропоновано метод дискретизації за часом системи рівнянь руху багатошарових пологих оболонок при їх геометрично нелінійному деформуванні. Основними етапами розробленого підходу є розв'язання послідовності лінійних задач: задачі про власні коливання пологої оболонки і послідовності лінійних задач, модельованих неоднорідними рівняннями теорії пружності, права частина яких нелінійно залежить від знайдених власних функцій. Застосування теорії R-функцій дозволяє використовувати даний підхід для складної границі області та різних видів граничних умов. Теоретично метод викладений для багатомодової апроксимації, а практична його реалізація представлена при використанні однієї, двох і трьох мод.

Ключові слова: нелінійні коливання, багатошарові пологі оболонки, теорія R-функцій, багатомодова апроксимація.

SUMMARY

A method of discretization in time for the system of motion equations of laminated shallow shells with geometrically nonlinear deformation is proposed. The main steps of the developed approach are reduced to solving a sequence of linear problems: the problem of the natural vibrations of a shallow shell, and a sequence of linear problems, which are simulated by nonhomogeneous equations of the elasticity theory. Right hand sides of the last equations nonlinearly depend on the found eigenfunctions. Application of the R-functions theory allows to use this approach to the complex shape of the shells and different types of boundary conditions. Theoretically the method is presented for multimodal approximation and its practical implementation is presented for one two and three modes.

Key words: nonlinear vibrations, laminated shallow shells, R-functions theory, multimodal approximation

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Abe A. Nonlinear dynamic behaviors of clamped laminated shallow shells with one-to-one internal resonance / A. Abe, Y. Kobayashi, G. Yamada // Journal of Sound and Vibration. – 2007. – Vol. 304. – P. 957-968.
2. Amabili M. Nonlinear vibrations and stability of shells and plates / M. Amabili. – Cambridge: Cambridge University Press, 2008. – 374 p.
3. Zhang Y.X. Recent developments in finite element analysis for laminated composite plates / Y.X. Zhang, C.H. Yang // Composite Structures. – 2009. – Vol. 88. – P. 147-157.
4. Sharma A.K. Review on Stress and Vibration Analysis of Composite Plates / A.K. Sharma, N.D. Mittal // Journal of applied sciences. – 2010. – Vol. 10 (23). – P. 3156-3166.
5. Курпа Л.В. Дослідження нелінійних вимушених коливань багатошарових пластин складної форми / Л.В. Курпа, М.А. Будніков // Вісник НТУ «ХПІ». – 2011. – Вып. 13. – С. 124–133.
6. Курпа Л.В. Исследование вынужденных нелинейных колебаний многослойных жестко защемленных пластин со сложной формой плана / Л.В. Курпа, Н.А. Будников // Теоретическая и прикладная механика. – 2012. – № 4 (50). – С. 70-77.
7. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций / Я.М. Григоренко, Е.И. Беспалова, А.Б. Китайгородский, А.И. Шинкарь. – Киев: Наук. думка, 1986. – 172 с.
8. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек / С.А. Амбарцумян – М.: Наука, 1974. – 446 с.
9. Курпа Л.В. Исследование вынужденных геометрически нелинейных колебаний многослойных пологих оболочек несимметричной структуры / Л.В. Курпа, Н.А. Будников // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – Дніпропетровськ: Ліра, 2012. – Вип. 20. – С. 208-216.
10. Курпа Л.В. Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пластин и пологих оболочек / Л.В. Курпа – Харків: НТУ "ХПІ", 2009. – 408 с.
11. Курпа Л.В. Структуры решений задач о колебаниях пологих многослойных оболочек симметричного строения / Л.В. Курпа, Г.Н. Тимченко, Н.А. Будников // Вісник Донецького національного університету. Сер. А: Природничі науки, 2012. – № 2. – С. 51-58.
12. Курпа Л.В. К вопросу о построении системы базисных функций для решения задач о геометрически нелинейных колебаниях многослойных пологих оболочек / Л.В. Курпа, Г.Н. Тимченко, Н.А. Будников // Динамические системы. – 2013. – Т. 2 (30), № 3-4. – С. 273-284.
13. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В.Л. Рвачев – К.: Наукова думка, 1982. – 552 с.
14. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек / А.С. Вольмир – М.: Наука, 1972. – 432 с.
15. Kurpa L. Nonlinear vibrations of shallow shells with complex boundary. R-functions method and experiments / L. Kurpa, G. Pilgun, M. Amabili // Journal of Sound and Vibration. – 2007. – Vol. 306, Iss. 3-5. – P. 580-600.

Поступила в редакцию 09.04.2013 г.

УДК 539.3

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ИЗГИБА ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ПЛИТ
В УТОЧНЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ**

Р.Н. Нескородев

В работе построено решение задачи изгиба трансверсально-изотропных плит в уточненной постановке, которая имеет систему дифференциальных уравнений шестого порядка. Полученное общее решение позволяет удовлетворить граничным условиям с произвольно заданными внешними усилиями по толщине плиты. В качестве примера рассмотрен изгиб бесконечной плиты с эллиптической полостью.

Ключевые слова: изгиб, плита, уточненная теория, напряжение, поперечные усилия, эллиптическая полость.

Введение. В обсуждениях концепций теории изгиба тонких плит признана несостоятельность преобразования крутящего момента к обобщенной перерезывающей силе. Результаты и библиография этого обсуждения даны в работе [1]. В работе [2] также установлено, что это преобразование не является универсальным и его математическая и физическая обусловленность зависит от закрепления и нагружения пластины. Из этого следует, что классическая теория Кирхгофа не может быть принята в качестве модели описания поведения тонких плит при их изгибе. В работе [1] предлагается считать более точной теорию, приводящую к системе дифференциальных уравнений шестого порядка.

В настоящей работе, на основе предположений, сделанных в работе [1], приводится методика, которая позволяет существенно расширить круг решаемых задач. Получена система дифференциальных уравнений теории изгиба трансропных плит, позволяющая ставить граничные задачи с произвольным заданием внешних усилий по толщине плиты. Строится решение бигармонического и метагармонического уравнений уточненной теории изгиба трансропных плит. Решение выражено через произвольные функции обобщенных комплексных переменных [3, 4]. Это позволяет проводить численные исследования для изотропных и анизотропных тел по одним и тем же алгоритмам. Точное решение метагармонического уравнения представляется через модифицированные функции Бесселя и является не всегда пригодным для исследования краевых задач с границами, отличными от круговых. Предложен способ приближенного решения уравнения Гельмгольца для тонких плит, пригодный для исследования плит ослабленных отверстиями произвольной формы. Приведены численные исследования для бесконечной плиты, ослабленной круговой или эллиптической полостью.

Основные соотношения уточненной теории изгиба трансверсально-изотропных плит. Рассмотрим трансропную плиту, имеющую толщину $2h$ и отнесенную к декартовой системе координат $Oxyz$. Оси Ox и Oy расположены в срединной плоскости плиты, а ось Oz – нормальна к этой плоскости. Приведем представления для перемещений, напряжений, а также систему дифференциальных уравнений теории изгиба плит, построенную по предложенному в работе [1] предположению. Представление для перемещений выбираются в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= p_1(z) [\partial_1 \phi(x, y) + \partial_2 \psi(x, y)], & u_2 &= p_1(z) [\partial_2 \phi(x, y) - \partial_1 \psi(x, y)], \\ u_3 &= w_0(x, y) + p_2(z) w(x, y), & p_2 &= \int p_1 dz. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь введены: нечетная по переменной z функция $p_1(z)$, характеризующая распределение усилий по толщине плиты; операторы $\partial_1 = \partial/\partial x$, $\partial_2 = \partial/\partial y$, $\partial_3 = \partial/\partial z$; подлежащие определению функции $\phi(x, y)$, $\psi(x, y)$, $w_0(x, y)$, $w(x, y)$.

Выражения для напряжений найдем из уравнений закона Гука. С учетом (1) получим

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= p_1 s_1, & \sigma_2 &= p_1 s_2, & \sigma_3 &= p_1 s_3, & \sigma_6 &= p_1 s_6, \\ \sigma_4 &= A_{44} [\partial_2 w_0 + p_2 \partial_2 w + p_0 (\partial_2 \phi - \partial_1 \psi)], & \sigma_5 &= A_{55} [\partial_1 w_0 + p_2 \partial_1 w + p_0 (\partial_1 \phi + \partial_2 \psi)], \end{aligned} \quad (2)$$

где принято

$$\begin{aligned} s_i &= (A_{i1} \partial_1^2 + A_{i2} \partial_2^2) \phi + (A_{i1} - A_{i2}) \partial_1 \partial_2 \psi + A_{i3} w \quad (i = \overline{1, 3}), \\ s_6 &= A_{66} [2 \partial_1 \partial_2 \phi + (\partial_2^2 - \partial_1^2) \psi], & p_0(z) &= \partial_3 p_1, & A_{ij} &- \text{модули упругости}, \end{aligned} \quad (3)$$

а также используются обозначения $[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6]$ для $[\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}]$.

Напряжения σ_3 , σ_4 и σ_5 можно также найти, удовлетворяя уравнениям равновесия

$$\sigma_3 = [p_3(z) - p_2(h)z] S_3, \quad \sigma_4 = [p_2(h) - p_2(z)] S_4, \quad \sigma_5 = [p_2(h) - p_2(z)] S_5. \quad (4)$$

Здесь введены обозначения

$$p_3(z) = \int p_2(z) dz, \quad S_3 = \partial_1 S_5 + \partial_2 S_4, \quad S_4 = \partial_1 s_6 + \partial_2 s_2, \quad S_5 = \partial_1 s_1 + \partial_2 s_6. \quad (5)$$

Отметим, что представления для напряжений σ_4 и σ_5 в (4) удовлетворяют однородным граничным условиям на плоских гранях плиты: $\sigma_4 = \sigma_5 = 0$ когда $z = \pm h$. Однако, эти представления противоречат соотношениям (2). Корректный результат можно получить для поперечных усилий.

Для построения системы дифференциальных уравнений, описывающих изгиб плит, полагаем:

- 1) поперечное нормальное напряжение σ_3 , как и в теории Кирхгофа, равно нулю;
- 2) поперечные усилия, полученные интегрированием соотношений (2) и (4), равны [1].

С помощью этих предположений получим следующие уравнения

$$\Delta \Delta \phi = 0, \quad (6)$$

$$\Delta \psi - k^2 \psi = 0, \quad (7)$$

$$w_0 = -k_0 \phi + \alpha_1 \Delta \phi, \quad w = -\alpha_{13} \Delta \phi, \quad (8)$$

где принято

$$\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad k^2 = k_0 / (k_2 \alpha_{65}), \quad \alpha_{65} = A_{66} / A_{55}, \quad \alpha_{13} = A_{13} / A_{33}, \quad \alpha_1 = k_2 B_{11} / A_{55} + k_1 \alpha_{13},$$

$$k_0 = I_0 / (2h), \quad k_1 = I_2 / (2h), \quad k_2 = p_2(h) - k_1, \quad I_0 = \int_{-h}^h p_0 dz, \quad I_2 = \int_{-h}^h p_2 dz.$$

Представления (3) и (5) через функции ϕ и ψ принимают вид

$$s_i = (B_{i1} \partial_1^2 + B_{i2} \partial_2^2) \phi + (B_{i1} - B_{i2}) \partial_1 \partial_2 \psi, \quad s_6 = A_{66} \left[2 \partial_1 \partial_2 \phi + (\partial_2^2 - \partial_1^2) \psi \right],$$

$$S_4 = B_{11} \Delta \partial_2 \phi - A_{66} \Delta \partial_1 \psi, \quad S_5 = B_{11} \Delta \partial_1 \phi + A_{66} \Delta \partial_2 \psi, \quad B_{ik} = A_{ik} - A_{i3} A_{3k} / A_{33}. \quad (9)$$

Получены дифференциальные уравнения изгиба трансверсально-изотропных плит (6) и (7), а также соотношения (8) для вычисления функций w_0 и w . Уравнения в совокупности имеют шестой порядок, что позволяет удовлетворить всем граничным условиям на боковой поверхности плиты.

Решение бигармонического уравнения. Для получения решения дифференциального уравнения (6) воспользуемся функциями обобщенных комплексных переменных. Введем в операторы $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2$ дополнительные слагаемые так, чтобы они приняли вид

$$\Delta_1 = (1 + \varepsilon)^2 \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad \Delta_2 = (1 - \varepsilon)^2 \partial_1^2 + \partial_2^2,$$

где ε – малый параметр [4]. Тогда бигармонический оператор $\Delta \Delta$ превращается в обобщенный бигармонический $\Delta_1 \Delta_2$. Корни характеристического уравнения теперь не являются кратными и имеют вид $\mu_1 = (1 + \varepsilon)i$, $\mu_2 = (1 - \varepsilon)i$, $\bar{\mu}_1 = -(1 + \varepsilon)i$, $\bar{\mu}_2 = -(1 - \varepsilon)i$. Общее действительное решение уравнения (6) через произвольные функции обобщенных комплексных переменных можно представить так [3]

$$\phi = 2 \operatorname{Re} [\phi_1(z_1) + \phi_2(z_2)], \quad z_j = x + \mu_j y.$$

Функции $\phi_j(z_j)$ определены в областях S_j , которые получаются из области S , занимаемой срединной плоскостью плиты, аффинными преобразованиями $x_j = x$, $y_j = (1 \pm \varepsilon)y$.

Решение уравнения Гельмгольца методом разделения переменных. Рассмотрим способ решения уравнения (7) для усложненного оператора $\Delta = \beta^2 \partial_1^2 + \partial_2^2$, где β – вещественное число. Введем обобщенную комплексную переменную $z_3 = x + \mu_3 y$ и сопряженную ей величину $\bar{z}_3 = x + \bar{\mu}_3 y$. Это позволяет уравнение (7) привести к виду

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z_3 \partial \bar{z}_3} - q^2 \right] \psi(z_3, \bar{z}_3) = 0, \quad q^2 = \frac{k^2}{4\beta^2}. \quad (10)$$

Функцию $\psi(z_3, \bar{z}_3)$ представим в виде произведения функций различных аргументов

$$\psi = \tau(t) \eta(s), \quad t = 2qr, \quad r = \sqrt{z_3 \bar{z}_3}, \quad s = \sqrt{z_3 / \bar{z}_3}. \quad (11)$$

Подставим представление (11) в уравнение (10). Разделяя функции, получим обыкновенные дифференциальные уравнения для определения функций $\tau(t)$ и $\eta(s)$. Общее решение уравнения (7) пред-

ставляется в виде суперпозиции решений полученных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\psi(x, y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} (E_n v_n + F_n w_n), \quad v_n = I_n(t) s^n, \quad w_n = K_n(t) s^n. \quad (12)$$

где $I_n(t)$, $K_n(t)$ – модифицированные функции Бесселя; E_n и F_n – произвольные постоянные.

При рассмотрении задач для неограниченных областей в представлении (12) следует выбирать убывающие на бесконечности функции w_n . Для конечных областей используются функции v_n .

Компоненты перемещений и напряжений, зависящие от функции $\psi(x, y)$, имеют вид

$$\begin{aligned} u_{1\psi} = \partial_2 \psi &= 2 \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} (E_n v_{2n} + F_n w_{2n}), \quad u_{2\psi} = -\partial_1 \psi = -2 \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} (E_n v_{1n} + F_n w_{1n}), \quad u_{3\psi} = 0, \\ S_{5\psi} &= A_{66} k^2 \partial_2 \psi = A_{66} k^2 u_{1\psi}, \quad S_{4\psi} = -A_{66} k^2 \partial_1 \psi = A_{66} k^2 u_{2\psi}, \\ s_{i\psi} &= (B_{i1} - B_{i2}) \partial_1 \partial_2 \psi = (B_{i1} - B_{i2}) 2 \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} (E_n v_{12n} + F_n w_{12n}) \quad (i = \overline{1, 3}), \\ s_{6\psi} &= A_{66} (\partial_2^2 - \partial_1^2) \psi = A_{66} 2 \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} [E_n (v_{22n} - v_{11n}) + F_n (w_{22n} - w_{11n})]. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} w_{1n} = \partial_1 w_n, \quad w_{2n} = \partial_2 w_n, \quad w_{11n} = \partial_1^2 w_n, \quad w_{22n} = \partial_2^2 w_n, \quad w_{12n} = \partial_1 \partial_2 w_n, \\ v_{1n} = \partial_1 v_n, \quad v_{2n} = \partial_2 v_n, \quad v_{11n} = \partial_1^2 v_n, \quad v_{22n} = \partial_2^2 v_n, \quad v_{12n} = \partial_1 \partial_2 v_n. \end{aligned}$$

Производные от функций $v_n = I_n(t) s^n$ и $w_n = K_n(t) s^n$ находятся путем использования соотношений, связывающих функции Бесселя с различными индексами [5].

Точное решение (12) уравнения (7) представляется через модифицированные функции Бесселя и может быть использовано при исследовании краевых задач для областей с границами, близкими к круговым, когда толщина плиты произвольна. Однако, это решение не всегда пригодно для исследования краевых задач с границами, отличными от круговых. Возникает необходимость построения решения, подходящего для произвольных контуров. Ниже предлагается способ приближенного решения уравнения (7) для тонких плит, пригодный для исследования плит, ослабленных контурами произвольной формы.

Уравнение границы области. Предлагаемый ниже способ решения уравнения Гельмгольца опирается на использование уравнения границы области, в которой определяется это решение. Способы построения таких уравнений для практически произвольных контуров, с помощью методов алгебры логики и аппарата R-функций, разработаны в работах В. Л. Рвачева и его учеников [6].

Пусть Ω – некоторая область, граница $\partial\Omega$ которой описывается уравнением $\omega(x, y) = 0$. При этом для функции ω на границе могут быть обеспечены дополнительные свойства

$$\partial\omega / \partial n = \omega_1^2 + \omega_2^2 = 1, \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (14)$$

где $\omega_1 = \partial_1 \omega$, $\omega_2 = \partial_2 \omega$, n – нормаль к $\partial\Omega$.

При выполнении условий (14) уравнение $\omega = 0$ называют нормализованным до первого порядка на $\partial\Omega$. В угловых точках чертежа условие (14) нарушается.

Пусть функция w_1 удовлетворяет условиям

$$w_1 = 0 \quad \text{на } \partial\Omega; \quad w_1 > 0 \quad \text{внутри } \Omega; \quad \partial w_1 / \partial n > 0 \quad \text{на } \partial\Omega.$$

Нормализованное уравнение до первого порядка можно представить в виде [6]

$$\omega = w_1 / \sqrt{w_1^2 + f}, \quad f = (\partial_1 w_1)^2 + (\partial_2 w_1)^2.$$

Именно такая функция будет использована при построении приближенного решения уравнения Гельмгольца в окрестности граничной линии.

Решение уравнения Гельмгольца с малым параметром при старшей производной. Уравнение (7) запишем в виде

$$\lambda^2 \Delta \psi - \psi = 0. \quad (15)$$

Для функции $p_1(z) = z^{2m-1}$ (m – любое натуральное число), введенной в представлениях (1), величина $\lambda^2 = 1/k^2 = h^2 \alpha_{65} / (2m+1)$ принимается в качестве малого параметра. Это возможно, когда

толщина плиты h является малой величиной.

Метод решения уравнения (15) основан на использовании уравнения границы области и пограничного слоя. Погранслоем – это малый интервал в окрестности границы области, в котором функция ψ сильно изменяется. При значениях параметра $\lambda^2 \rightarrow 0$, решение предельного уравнения (15) – $\psi = 0$, близко к точному решению всюду, за исключением малого интервала возле граничной линии $\omega = 0$, где точное решение изменяется так, чтобы удовлетворить краевому условию на границе области. Этот малый интервал, в котором функция ψ очень быстро изменяется, в механике называется пограничным слоем или областью краевого эффекта. Для нахождения решения, пригодного в погранслое, предлагается использование асимптотических методов. Асимптотические разложения позволяют не только получить первое приближение, но и построить, в случае необходимости, высшие. Представим функцию $\psi(x, y)$ в виде произведения

$$\psi = r(x, y) \Psi(x, y). \tag{16}$$

Функции r и Ψ определим в виде разложений в области краевого эффекта

$$r = \exp(\alpha\omega + \alpha_2 \omega^2/2 + \alpha_3 \omega^3/6 + \dots), \quad \Psi = \Psi_0 + \Psi_1 \omega + \Psi_2 \omega^2/2 + \Psi_3 \omega^3/6 + \dots$$

Здесь α – постоянная величина, $\alpha_2, \dots, \Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \dots$ – функции переменных (x, y) .

Уравнение (15) с учетом представлений (16) принимает вид

$$\lambda^2 \Delta \psi - \psi = \lambda^2 [\Delta r \Psi + 2(\partial_1 r \partial_1 \Psi + \partial_2 r \partial_2 \Psi) + r \Delta \Psi] - r \Psi = 0. \tag{17}$$

На граничном контуре $\partial\Omega$ с учетом соотношений $\omega = 0, \omega_1^2 + \omega_2^2 = 1$, находим

$$\begin{aligned} \Delta r &= r(\alpha^2 + \alpha \Delta \omega + \alpha_2), \quad 2[\partial_1 r \partial_1 \Psi + \partial_2 r \partial_2 \Psi] = 2r\alpha[\omega_1 \partial_1 \Psi_0 + \omega_2 \partial_2 \Psi_0 + \Psi_1], \\ \Delta \Psi &= \Delta(\Psi_0 + \omega \Psi_1 + \omega^2/2 \Psi_2) = \Delta \Psi_0 + \Delta \omega \Psi_1 + 2[\omega_1 \partial_1 \Psi_1 + \omega_2 \partial_2 \Psi_1] + \Psi_2. \end{aligned} \tag{18}$$

Из уравнения (17) с учетом (18) имеем

$$\Delta \Psi_0 = 0; \quad \alpha = -1/\lambda, \quad \alpha_2 = -\alpha \Delta \omega. \tag{19}$$

$$\Psi_1 = -(\omega_1 \partial_1 \Psi_0 + \omega_2 \partial_2 \Psi_0), \quad \Psi_2 = -\Delta \omega \Psi_1 - 2[\omega_1 \partial_1 \Psi_1 + \omega_2 \partial_2 \Psi_1]. \tag{20}$$

Решение уравнения (19) и частные значения функций (20) выражается через произвольную функцию обобщенной комплексной переменной $z_3 = x + \mu_3 y$ в форме

$$\Psi_0 = 2 \operatorname{Re} \Phi(z_3), \quad \Psi_1 = 2 \operatorname{Re} p_{11} \Phi'(z_3), \quad \Psi_2 = 2 \operatorname{Re} [p_{21} \Phi'(z_3) + p_{22} \Phi''(z_3)],$$

где принято

$$\begin{aligned} \Phi' &= d\Phi/dz_3, \quad \Phi'' = d\Phi'/dz_3, \quad p_{11} = -(\omega_1 + \mu_3 \omega_2), \quad p_{22} = 2p_{11}^2, \\ p_{21} &= 3\omega_1 \partial_1^2 \omega + 2\omega_2 \partial_1 \partial_2 \omega + \omega_1 \partial_2^2 \omega + \mu_3 (3\omega_2 \partial_2^2 \omega + 2\omega_1 \partial_1 \partial_2 \omega + \omega_2 \partial_1^2 \omega). \end{aligned}$$

При таких выражениях функций Ψ_0, Ψ_1, Ψ_2 уравнение (15) в первом приближении удовлетворяется тождественно. В представления для компонент перемещений и напряжений, зависящих от функции $\psi(x, y)$, входят производные от этой функции. В первом приближении, соотношения (1) и (9) через комплексную функцию и ее производные будут такими

$$\begin{aligned} u_{1\psi} &= \partial_2 \psi = 2 \operatorname{Re}(p_{13} \Phi + p_{14} \Phi'), \quad u_{2\psi} = -\partial_1 \psi = -2 \operatorname{Re}(p_{23} \Phi + p_{24} \Phi'), \quad u_{3\psi} = 0, \\ S_{5\psi} &= A_{66} k^2 \partial_2 \psi = A_{66} k^2 u_{1\psi}, \quad S_{4\psi} = -A_{66} k^2 \partial_1 \psi = A_{66} k^2 u_{2\psi}, \\ s_{i\psi} &= C_i \partial_1 \partial_2 \psi = 2 \operatorname{Re} [r_{i3} \Phi + r_{i4} \Phi' + r_{i5} \Phi''], \\ s_{6\psi} &= A_{66} (\partial_2^2 - \partial_1^2) \psi = 2 \operatorname{Re} [r_{63} \Phi + r_{64} \Phi' + r_{65} \Phi'']. \end{aligned} \tag{21}$$

Здесь принято

$$\begin{aligned} p_{13} &= r\alpha\omega_2, \quad p_{14} = r(\mu_3 + p_{11}\omega_2), \quad p_{23} = r\alpha\omega_1, \quad p_{24} = r(1 + p_{11}\omega_1), \\ r_{i3} &= C_i r [\alpha^2 \omega_1 \omega_2 + \alpha(\partial_1 \partial_2 \omega - \omega_1 \omega_2 \Delta \omega)], \\ r_{i4} &= C_i r [\alpha(\omega_1 \mu_3 + \omega_2 + 2\omega_1 \omega_2 p_{11}) + \partial_1 \partial_2 \omega p_{11} + \omega_1 \partial_2 p_{11} + \omega_2 \partial_1 p_{11} + \omega_1 \omega_2 p_{21}], \\ r_{i5} &= C_i r [\mu_3 + \omega_1 p_{11} \mu + \omega_2 p_{11} + \omega_1 \omega_2 p_{22}], \quad r_{63} = A_{66} r [\alpha^2 v + \alpha(\partial_2^2 \omega - \partial_1^2 \omega - \Delta \omega v)], \end{aligned}$$

$$r_{64} = A_{66}r \left[2\alpha(\omega_2 \mu_3 - \omega_1 + \nu p_{11}) + (\partial_2^2 \omega - \partial_1^2 \omega) p_{11} + 2(\omega_2 \partial_2 p_{11} - \omega_1 \partial_1 p_{11}) + \nu p_{21} \right],$$

$$r_{65} = A_{66}r \left[\mu_3^2 - 1 + 2(\omega_2 \mu_3 - \omega_1) p_{11} + \nu p_{22} \right], \quad \nu = \omega_2^2 - \omega_1^2, \quad C_i = B_{i1} - B_{i2}. \quad (22)$$

Приведем представление для перемещений (1) и напряжений (2), (4) через найденные функции комплексных переменных:

$$u_1 = 2 \operatorname{Re} \left(p_{11} \phi_1' + p_{12} \phi_2' + u_{1\psi} \right) p_1(z), \quad u_2 = 2 \operatorname{Re} \left(p_{21} \phi_1' + p_{22} \phi_2' + u_{2\psi} \right) p_1(z),$$

$$u_3 = 2 \operatorname{Re} \left[p_{31} \phi_1 + p_{32} \phi_2 + (p_{33} \phi_1'' + p_{34} \phi_2'') \right];$$

$$S_5 = 2 \operatorname{Re} \left(r_{51} \phi_1''' + r_{52} \phi_2''' + S_{5\psi} \right), \quad S_4 = 2 \operatorname{Re} \left(r_{41} \phi_1''' + r_{42} \phi_2''' + S_{4\psi} \right),$$

$$s_i = 2 \operatorname{Re} \left(r_{i1} \phi_1'' + r_{i2} \phi_2'' + s_{i\psi} \right) \quad (i=1,2,3), \quad s_6 = 2 \operatorname{Re} \left(r_{61} \phi_1'' + r_{62} \phi_2'' + s_{6\psi} \right). \quad (23)$$

В соотношениях (22) и (23) приняты следующие обозначения

$$p_{1j} = 1, \quad p_{2j} = \mu_j, \quad p_{3j} = -k_0, \quad p_{3,j+2} = [\alpha_1 - \alpha_{13} p_2(z)] (1 + \mu_j^2) \quad (j=1,2),$$

$$r_{5j} = B_{11} (1 + \mu_j^2), \quad r_{4j} = r_{5j} \mu_j, \quad r_{ij} = B_{i1} + B_{i2} \mu_j^2 \quad (i=\overline{1,3}), \quad r_{6j} = 2A_{66} \mu_j, \quad (j=1,2).$$

Компоненты перемещений и напряжений $u_{i\psi}$, $S_{5\psi}$, $S_{4\psi}$, $s_{i\psi}$, входящие в соотношения (22) и (23) следует брать в форме (13) или (21) в зависимости от формы контура и толщины плиты.

Граничные условия на боковой поверхности. Рассмотрим напряженно – деформированное состояние плиты, ослабленной криволинейной полостью. Боковая поверхность плиты представляет собой цилиндр с образующими, нормальными плоским граням. Граничные условия для криволинейного края с нормалью \vec{n} определяются способом нагружения поверхности. Пусть $P(x, y, z)$ – нормальная, а $T(x, y, z)$ и $N(x, y, z)$ – касательные составляющие внешних сил, приложенных к боковой поверхности полости. Если $P = T = N = 0$, то край считается свободным от усилий. На внешней боковой поверхности также могут быть заданы усилия интенсивности $\sigma_1^0 = zp$, $\sigma_2^0 = zq$ и $\sigma_6^0 = zt$. Полагаем, что внешний контур находится вдали от полости и их взаимным влиянием можно пренебречь. Тогда граничные условия на боковой поверхности полости примут вид

$$n_1 \sigma_1 + n_2 \sigma_6 = n_1 (P - zp) - n_2 (T + zt),$$

$$n_1 \sigma_6 + n_2 \sigma_2 = n_1 (T - zt) + n_2 (P - zq), \quad n_1 \sigma_5 + n_2 \sigma_4 = N. \quad (24)$$

Направляющие косинусы при параметрическом задании контура будут такими

$$n_1 = \cos(n, x) = dy / dn, \quad n_2 = \cos(n, y) = -dx / dn; \quad dn = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \quad (25)$$

Рассмотрим случай, когда внешние усилия представлены в форме

$$P = p_1(z) P_1(x, y), \quad T = p_1(z) T_1(x, y), \quad N = [p_2(h) - p_2(z)] N_1(x, y).$$

Тогда в соответствии с представлениями (2) и (4), условия (24) запишутся так

$$n_1 s_1 + n_2 s_6 = f_1, \quad n_1 s_6 + n_2 s_2 = f_2, \quad n_1 S_5 + n_2 S_4 = N_1, \quad (26)$$

где $f_1 = n_1(P_1 - p) - n_2(T_1 + t)$, $f_2 = n_1(T_1 - t) + n_2(P_1 - q)$.

Отметим, что при усилиях p , q и t функция $p_1(z) = z$.

При подстановке представлений (23) в условия (26) получим дифференциальную форму граничных условий для определения функций ϕ и ψ

$$2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 (n_1 r_{1j} + n_2 r_{6j}) \phi_j'' + A_{66} \left[2n_1 \partial_1 \partial_2 + n_2 (\partial_2^2 - \partial_1^2) \right] \psi = f_1,$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 (n_1 r_{6j} + n_2 r_{2j}) \phi_j'' - A_{66} \left[2n_2 \partial_1 \partial_2 - n_1 (\partial_2^2 - \partial_1^2) \right] \psi = f_2,$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 (n_1 r_{5j} + n_2 r_{4j}) \phi_j''' + A_{66} k^2 (n_1 \partial_2 - n_2 \partial_1) \psi = N_1. \quad (27)$$

Здесь $\phi_j'' = \partial^2 \phi_j / \partial z_j^2$, $\phi_j''' = \partial^3 \phi_j / \partial z_j^3$.

Интегрирование граничных условий (27), с учетом соотношений (25), дает

$$\begin{aligned}
 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 \frac{r_{1j}}{\mu_j} \varphi'_j + 2A_{66} \partial_1 \psi &= (tx - py) + \int_0^l (P_1 dy + T_1 dx + N_i dx) + c_3 x + c_1, \\
 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 r_{2j} \varphi'_j - 2A_{66} \partial_2 \psi &= (ty - qx) - \int_0^l (T_1 dy - P_1 dx + N_i dy) - c_3 y + c_2, \\
 2 \operatorname{Re} \left[\frac{r_{51}}{\mu_1} \varphi_1'' + \frac{r_{52}}{\mu_2} \varphi_2'' \right] + A_{66} k^2 \psi &= N_i + c_3, \quad N_i = \int_0^l N_1 dl.
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

Граничные условия (26) можно использовать в формах (27) или (28).

Эллиптический контур. Рассмотрим случай, когда деформация плиты осуществляется изгибающими усилиями $\sigma_1^0 = zp$, действующими на бесконечности. Плита ослаблена полостью в виде цилиндра эллиптического сечения с образующими, нормальными плоским граням. В сечении срединной плоскостью Oxy , имеем область S в виде плоскости с эллиптическим вырезом. Главные оси эллипса направлены по осям Ox и Oy . В этом случае уравнение эллиптического контура в параметрической форме можно записать так

$$x = a \cos(\theta) = a(\sigma + 1/\sigma)/2, \quad y = b \sin(\theta) = -bi(\sigma - 1/\sigma)/2.
 \tag{29}$$

Здесь $\sigma = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$, a и b – полуоси эллипса; θ – полярный угол.

Уравнение контура (29) позволяет записать функцию, конформно отображающую внешность единичного круга на внешность эллипса в области S_j

$$z_j = x + \mu_j y = R_j \zeta_j + m_j / \zeta_j, \quad \zeta_j = r_j \sigma, \quad (r_j \geq 1),$$

где $R_j = (a - i\mu_j b) / 2$, $m_j = (a + i\mu_j b) / 2$.

Функции $\phi'_j(z_j)$ ($j=1,2$), и $\Phi(z_3)$ будем искать в виде рядов

$$\phi'_j(z_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{nj} / \zeta_j^n, \quad \Phi(z_3) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n3} / \zeta_3^{n+1}.
 \tag{30}$$

Отметим, что на граничном контуре $r_j = 1$ и имеет место равенство $\zeta_j = \sigma$.

Для получения линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов функций (30) и (12) необходимо функции, входящие в условия (28), переразложить в ряды по степеням переменной σ . Подставляя эти переразложения в граничные условия (28) и выделяя выражения при одинаковых степенях переменной σ , получим систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов функций (30) и (12).

Численные исследования. При численном исследовании напряженно-деформированного состояния плиты с эллиптической полостью будем использовать безразмерные величины. Они получаются делением линейных величин: координат x , y , полуосей эллипса a и b , толщины плиты $2h$, перемещений u_α на характерный линейный параметр. В качестве такого параметра будем использовать величину $R = \max(a, b)$. Безразмерная координата z получается делением исходной координаты z на полутолщину плиты h . Тогда переменная z будет изменяться на отрезке $[-1, 1]$.

Напряжения

$$\begin{aligned}
 \sigma_n &= z(n_1^2 s_1 + 2n_1 n_2 s_6 + n_2^2 s_2), \quad \sigma_{n\theta} = z((s_2 - s_1)n_1 n_2 + s_6(n_1^2 - n_2^2)), \\
 \sigma_{nz} &= (h - z^2/h)(n_1 S_5 + n_2 S_4) / 2
 \end{aligned}$$

при цилиндрическом изгибе плиты вдоль оси Ox , как следует из условий (26), на граничном контуре равны нулю. Наибольший интерес представляют величины, определяющие концентрацию напряжений на контуре полости

$$\sigma_\theta = z S_\theta = z(n_2^2 s_1 - 2n_1 n_2 s_6 + n_1^2 s_2), \quad \sigma_{z\theta} = S_{z\theta}(p_2(h) - p_2(z)) = (-n_2 S_5 + n_1 S_4)(p_2(h) - p_2(z)).$$

Максимального значения величины σ_θ / p достигают на контуре при $z = 1$, $\theta = \pi/2$ и $\theta = 3\pi/2$, а минимального при $z = 1$, $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Величины $|\sigma_{z\theta} / p|$ для кругового контура максимального

значения достигают при $z=0$, $\theta = \pm\pi/4$ и $\theta = \pm 3\pi/4$. Для эллиптического контура этот максимум сдвигается в сторону вершины с большей кривизной.

Упругие постоянные материалов, для которых проводились исследования, даны в табл. 1 [7].

Таблица 1

Модули упругости материалов

Материал	A_{11} , ГПа	A_{12} , ГПа	A_{13} , ГПа	A_{33} , ГПа	A_{44} , ГПа
Изотропный	120	60	60	120	30
Ceramic PZT-4	139	78	74	115	25,6
InSe	73	27	30	36	12

В результате проведения численных исследований были установлены следующие закономерности:

1) использование функций Бесселя при интегрировании уравнения (7) имеет ограничение относительно полуосей эллипса. Для всех рассмотренных материалов и толщин предел этого соотношения приблизительно равен 2/3 (или 3/2);

2) использование методики интегрирования уравнения Гельмгольца с малым параметром при старшей производной в первом приближении позволяет определить отношение тонкая – толстая плита. Так, сравнение результатов, полученных по двум методикам, для круговой полости показывает, что тонкой можно считать плиту, у которой $h = 0,25$.

В качестве примера в табл. 2 приведены значения максимальных напряжений σ_{θ}^i/p и $\sigma_{z\theta}^i/p$, возникающих на контуре круговой полости, где $i=1$ соответствует решению уравнения (7) через функции Бесселя, а $i=2$ – методике интегрирования уравнения (7) с малым параметром при старшей производной.

Таблица 2

Значения максимальных напряжений на круговой полости для разных толщин и материалов

Материал	$h = 0.01$				$h = 0.25$				$h = 1$		$h = 10$	
	σ_{θ}^1	σ_{θ}^2	$\sigma_{z\theta}^1$	$\sigma_{z\theta}^2$	σ_{θ}^1	σ_{θ}^2	$\sigma_{z\theta}^1$	$\sigma_{z\theta}^2$	σ_{θ}^1	$\sigma_{z\theta}^1$	σ_{θ}^1	$\sigma_{z\theta}^1$
Изотропный	1,81	1,81	0,52	0,52	1,93	1,91	0,49	0,42	2,242	0,414	2,918	0,105
Ceramic PZT-4	1,81	1,81	0,48	0,47	1,94	1,92	0,45	0,37	2,271	0,371	2,928	0,089
InSe	1,69	1,69	0,41	0,41	1,86	1,81	0,39	0,29	2,244	0,319	2,936	0,072

На рис. 1 изображены эпюры распределения величин σ_{θ}/p на контуре эллиптического сечения с соотношением полуосей $a/b = 0,7$ для пластины, изготовленной из материала Ceramic PZT-4. На рис. 2 представлены графики распределения напряжений σ_{θ}/p и $\sigma_{z\theta}/p$ по толщине пластины. Сплошная линия соответствует толщине $h = 0,1$, штриховая – $h = 1$, а штрих-пунктирная – $h = 10$.

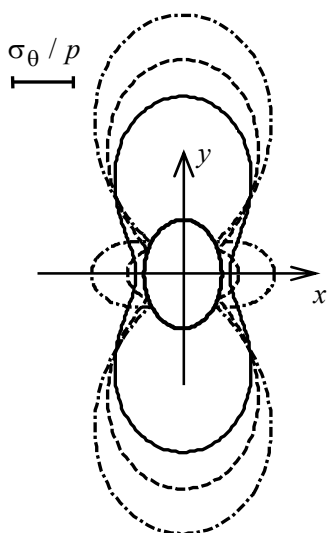


Рис. 1. Эпюры распределения напряжений

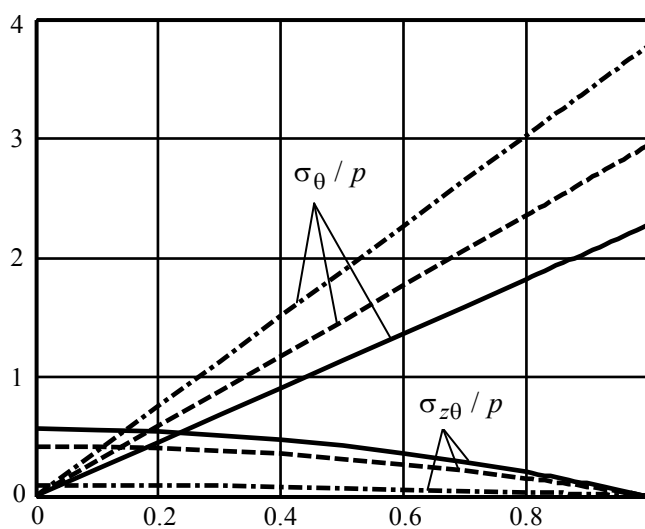


Рис. 2. Зависимости напряжений от толщины

Результаты, полученные для материала InSe хорошо согласуются с результатами, полученными по трехмерной теории [8].

В табл. 3 представленны результаты численных исследований для тонкой плиты ($h = 0,1$) с эллиптической полостью в зависимости от соотношения полуосей и материала. Верхняя строка в ячейке соответствует максимальному значению, а нижняя – минимальному.

Таблица 3

Значения напряжений для разных эллиптических полостей и материалов

$\frac{a}{b}$	Изотропный		Ceramic PZT-4		InSe	
	σ_{θ} / p	$\sigma_{z\theta} / p$	σ_{θ} / p	$\sigma_{z\theta} / p$	σ_{θ} / p	$\sigma_{z\theta} / p$
0,25	3,710	0,884	3,640	0,785	3,083	0,623
	0,148	-0,884	0,144	-0,785	0,246	-0,623
0,5	2,722	0,684	2,718	0,618	2,462	0,512
	0,150	-0,684	0,145	-0,618	0,248	-0,512
0,75	2,155	0,562	2,161	0,510	2,017	0,432
	0,149	-0,562	0,145	-0,510	0,248	-0,432
1	1,852	0,490	1,856	0,446	1,751	0,379
	0,148	-0,490	0,144	-0,446	0,249	-0,379
1,33	1,638	0,421	1,642	0,383	1,564	0,324
	0,133	-0,421	0,130	-0,383	0,237	-0,324
2	1,425	0,342	1,427	0,309	1,376	0,256
	0,139	-0,342	0,141	-0,309	0,269	-0,256
4	1,213	0,221	1,214	0,196	1,188	0,156
	0,323	-0,221	0,340	-0,196	0,479	-0,156

Как видно, наибольшие напряжения возникают в случае, когда эллипс вытянут вдоль оси, перпендикулярной направлению действия изгибающих усилий.

Выводы. В статье предложена методика получения решений бигармонического и метагармонического уравнений уточненной теории изгиба трансверсально-изотропных пластин, учитывающей деформации поперечного сдвига. Методика основана на использовании функций обобщенных комплексных переменных. Проведены численные исследования напряженного состояния бесконечной плиты с эллиптическим отверстием. Дан анализ полученных результатов.

РЕЗЮМЕ

В роботі побудовано розв'язок задачі згину трансверсально-ізоотропних плит в уточненій постановці, яка має систему диференціальних рівнянь шостого порядку. Отримане загальне рішення дозволяє задовольнити граничним умовам з довільно заданими зовнішніми зусиллями по товщині плити. Як приклад розглянуто згин нескінченної плити з еліптичною порожниною.

Ключові слова: згин, плита, уточнена теорія, напруження, поперечні зусилля, еліптична порожнина.

SUMMARY

In work the decision of a problem of bend transversely-isotropic plates in the improved theory which has system of the differential equations of the sixth order is constructed. The resulting general solution to satisfy the boundary conditions with arbitrary external forces on thickness of a plate. As an example the bend of an infinite plate with an elliptic hole is considered.

Keywords: bend, plate, improved theor, strain, lateral forces, elliptic hole.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Васильев В. В. Классическая теория пластин – история и современный анализ / В.В. Васильев // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 3. – С. 46-58.
2. Васильев В. В. О преобразованиях Кирхгофа и Томсона-Гэта в классической теории пластин / В. В. Васильев // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2012. – № 5. – С. 98-107.
3. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки / С. Г. Лехницкий. – М: Гостехиздат, 1957. – 463 с.
4. Космодамианский А. С. Связь уравнений плоской теории упругости для анизотропного и изотропного тел / А. С. Космодамианский, Н. М. Нескородев // Прикладная математика и механика. – 1998. – Т. 62, № 2. – С. 344-346.
5. Никифоров А. Ф. Специальные функции математической физики / А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров. – М.: Наука, 1978. – 320 с.
6. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В. Л. Рвачев. – Киев: Наук. думка. – 1982. – 552 с.
7. Ding H. Elasticity of transversely isotropic materials / H. Ding, W. Chen, L. Zhang. – Dordrecht: Springer, 2006. – 435 p.
8. Шалдырван В. А. К задаче цилиндрического изгиба трансверсально-изотропного слоя с полостью / В. А. Шалдырван, Г. В. Ержаков // Современные проблемы механики сплошной среды: Материалы XV Междунар. конф. (г. Ростов-на-Дону, 4-7 декабря 2011 г.). – Ростов-на-Дону, 2011. – С. 256-260.

Поступила в редакцию 11.03.2013 г.

АСИМПТОТИЧЕСКИ–ПРЕЦЕССИОННЫЕ ДВИЖЕНИЯ СФЕРИЧЕСКОГО ГИРОСТАТА
В СЛУЧАЕ ПРЕЦЕССИИ ОБЩЕГО ВИДА

Ю.Ю. Пиллани

Получены условия существования асимптотически-прецессионных движений сферического гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае, когда предельное движение описывается прецессией общего вида, указанной А. В. Мазневым.

Ключевые слова: гиростат, асимптотически-прецессионные движения, метод Ляпунова.

Введение. В статье [1] на основании первого метода Ляпунова [2] разработана методика изучения асимптотически-периодических движений гиростата, описываемых уравнениями Кирхгофа-Пуассона [3]. С помощью этой методики в статье [4] указан способ получения уравнений Хилла в задаче исследования асимптотически – прецессионных движений гиростата. Знаки характеристичных чисел решений уравнения Хилла полностью определяют достаточные условия существования асимптотических движений. К настоящему времени достаточно полно изучены: асимптотически-равномерные движения [5], которые можно отнести к особому классу асимптотически-прецессионных движений; асимптотически-прецессионные движения; асимптотически-прецессионные движения, предельными движениями которых служат либо регулярные прецессии [6], либо полурегулярные прецессии первого типа относительно вертикали [7, 8].

В статье [9] в задаче о редукции системы уравнений в вариациях для асимптотически-прецессионных движений получено более простое уравнение Хилла, чем в работе [4], так как способ его нахождения не связан с использованием сопряженной системы.

Данная статья посвящена исследованию условий существования асимптотически-прецессионных движений сферического гиростата в случае, когда в качестве предельного движения принята прецессия общего вида, указанная А.В. Мазневым [8].

Постановка задачи. Рассмотрим задачу о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, которая описывается уравнениями класса Кирхгофа [3, 8]. Пусть тензор инерции $A = \text{diag}(\mu, \mu, \mu)$, тогда [8]

$$\dot{\omega} = \mu^{-1} [\omega \times (Bv - \lambda) + v \times (Cv - s)], \quad \dot{v} = v \times \omega, \quad (1)$$

$\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости гиростата; $v = (v_1, v_2, v_3)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей; $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – гиростатический момент, характеризующий движение носимых тел; $s = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс гиростата; $B = (B_{ij})$ и $C = (C_{ij})$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над векторами ω и v обозначает относительную производную по времени. Уравнения (1) имеют первые интегралы

$$\mu\omega^2 + v \cdot (Cv - 2s) = 2E, \quad v \cdot v = 1, \quad 2\mu(\omega \cdot v) + 2\lambda \cdot v - (Bv \cdot v) = 2k, \quad (2)$$

здесь E и k – произвольные постоянные. Следуя [8] обозначим через a единичный вектор с началом в неподвижной точке. Пусть $\dot{a} = 0$, то есть вектор a не изменяется в гиростате. Движение гиростата называется прецессией относительно вертикали, если в течение времени постоянен угол между векторами a и v [8].

$$a \cdot v = a_0, \quad a_0 = \cos \theta_0, \quad \theta_0 = \angle(a, v). \quad (3)$$

При выполнении инвариантного соотношения из (3) вектор угловой скорости гиростата имеет вид

$$\omega = \dot{\varphi} a + \dot{\psi} v. \quad (4)$$

где φ, ψ – углы Эйлера. Направляя третью ось подвижной системы координат гиростата по вектору $a = (0, 0, 1)$, геометрическому интегралу из (2) удовлетворим соотношениями

$$v_1 = a'_0 \sin \varphi, \quad v_2 = a'_0 \cos \varphi, \quad v_3 = a_0, \quad (5)$$

$$\omega_1 = a'_0 \dot{\psi} \sin \varphi, \quad \omega_2 = a'_0 \dot{\psi} \cos \varphi, \quad \omega_3 = \dot{\varphi} + a_0 \dot{\psi}, \quad (6)$$

где $a'_0 = \sqrt{1 - a_0^2} = \sin \theta_0$. То есть достаточно рассмотреть динамическое уравнение из (1). Метод его исследования приведен в книге [8], где дан и обзор результатов, полученных в построении прецессионных движений.

Рассмотрим решение А.В. Мазнева [8, стр. 283], которое описывает прецессию общего вида. При-
чем для наглядности окончательных условий асимптотичности движения примем ряд дополнительных
ограничений на параметры задачи. То есть полагаем, что выполнены следующие условия

$$B_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad B_{11} = B_{22}, \quad C_{12} = 0, \quad C_{11} = C_{22},$$

$$s_1 = \frac{C_{13}}{3a_0}(3a_0^2 - a_0'^2), \quad s_2 = \frac{C_{23}}{3a_0}(3a_0^2 - a_0'^2), \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad (7)$$

$$k = 2a_0\lambda_3 - 1,5(a_0'^2 B_{11} + a_0^2 B_{33}),$$

$$2E = (a_0\mu)^{-1} \left\{ \mu s_3 (1 - 3a_0^2) + a_0 (2a_0^2 - 1) \mu C_{33} + 2a_0 a_0'^2 \mu C_{11} + \right.$$

$$\left. + (\lambda_3 - a_0 B_{33}) [a_0 \lambda_3 - (a_0'^2 B_{11} + a_0^2 B_{33})] \right\}.$$

Тогда решение [8] можно представить в виде

$$\dot{\psi} = \mu^{-1}(\varepsilon_0 - a_0 \mu \dot{\varphi}), \quad \varepsilon_0 = a_0(\lambda_3 - a_0 B_{33}) - a_0'^2 B_{11}, \quad (8)$$

$$\dot{\varphi}^2 = a_0^{-1} \mu^{-2} \left[(\kappa_0 - 2a_0' \mu (C_{23} \cos \varphi + C_{13} \sin \varphi)) / 3 \right], \quad (9)$$

$$\kappa_0 = \mu [s_3 + a_0(C_{11} - C_{33})] + a_0 \lambda_3^2 + \lambda_3 [B_{11}(2a_0^2 - 1) - 2a_0^2 B_{33}] +$$

$$+ a_0 [a_0^2 B_{33}^2 - (2a_0^2 - 1) B_{11} B_{33} - a_0 a_0'^2 B_{11}]. \quad (10)$$

Из соотношений (7) следует, что вектор λ и a коллинеарны и ортогональны круговым сечениям эллип-
соидов $B_{11}(x^2 + y^2) + B_{33}z^2 = const$, $C_{11}(x^2 + y^2) + C_{33}z^2 + 2(C_{13}x + C_{23}y)z = const$. Последние
два равенства системы (7) определяют значения постоянных первых интегралов (2) на решении (8) – (10).
Обозначим через $\omega^*(t)$, $\nu^*(t)$ – решение (5), (6) из (4), в котором зависимости $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ находятся
путем интегрирования уравнений из (8), (9).

Поставим задачу исследования движения сферического гиростата, которое при $t \rightarrow \infty$ стремится к
движению, описываемому функциями $\omega^*(t)$, $\nu^*(t)$. То есть, если ввести возмущения Ω и γ

$$\omega = \omega^*(t) + \Omega, \quad \nu = \nu^*(t) + \gamma, \quad (11)$$

то данная задача может быть сформулирована так: определить условия на параметры задачи (1) и пара-
метр a_0 , при выполнении которых $\Omega \rightarrow 0$, $\gamma \rightarrow 0$, когда $t \rightarrow \infty$.

Представление решения (8) – (10) посредством эллиптических функций. Запишем форму-
лу (9), введя новую переменную $\varphi_* = \varphi + \gamma_0$, где

$$\sin \gamma_0 = C_{23} / \sqrt{C_{13}^2 + C_{23}^2}, \quad \cos \gamma_0 = C_{13} / \sqrt{C_{13}^2 + C_{23}^2} \quad (12)$$

и параметра

$$\beta_1 = \frac{\kappa_0}{a_0 \mu^2}, \quad \beta_2 = -\frac{2a_0'}{3a_0 \mu} \sqrt{C_{13}^2 + C_{23}^2}. \quad (13)$$

Тогда

$$\dot{\varphi}_* = \sqrt{\beta_1 + \beta_2 \sin \varphi_*}. \quad (14)$$

Поскольку первый метод Ляпунова применим в случае, когда решение (5), (6) является периодическим
по времени, то в уравнении (14) параметры (13) должны удовлетворять условиям: $\beta_2 < 0$, $\beta_1 > -\beta_2$.
Эти неравенства в силу (10), (13) выполняются, параметр при $tg \theta_0 > 0$ и достаточно больших значениях
величин λ_3 (выражение для β_2 не зависит от λ_3). Обозначим

$$k_*^2 = -2\beta_2 / (\beta_1 - \beta_2). \quad (15)$$

На основании указанных выше предположений выражение (15) удовлетворяет неравенству $0 < k_*^2 < 1$.
Используя при интегрировании уравнения (14) метод теории эллиптических функций Якоби, получим

$$\varphi_* = 2am \sigma_0 t - 0,5\pi, \quad \sin \varphi_* = 2sn^2(\sigma_0 t, k_*) - 1, \quad (16)$$

$$\cos \varphi_* = 2sn(\sigma_0 t, k_*)cn(\sigma_0 t, k_*), \quad \dot{\varphi}_* = 2\sigma_0 dn(\sigma_0 t, k_*),$$

где $\sigma_0 = 0,5\sqrt{\beta_1 - \beta_2}$, k_* – модуль эллиптических функций Якоби, имеет значение из (15); $am\sigma_0 t$, $sn(\sigma_0 t, k_*)$, $cn(\sigma_0 t, k_*)$, $dn(\sigma_0 t, k_*)$ – эллиптические функции. Подставим $\dot{\varphi}$ из системы (16) в выражение для $\dot{\psi}$ из (8)

$$\dot{\psi} = (\varepsilon_0 - 2a_0\mu\sigma_0 dn(\sigma_0 t, k_*)) / \mu. \quad (17)$$

Таким образом решение (5), (6) приведено к периодическому решению

$$\begin{aligned} v_1 &= a'_0 \sin(\varphi_* - \gamma_0), \quad v_2 = a'_0 \cos(\varphi_* - \gamma_0), \quad v_3 = a_0, \\ \omega_1 &= a'_0 \dot{\psi} \sin(\varphi_* - \gamma_0), \quad \omega_2 = a'_0 \dot{\psi} \cos(\varphi_* - \gamma_0), \quad \omega_3 = \dot{\varphi} + a_0 \dot{\psi}, \end{aligned} \quad (18)$$

где параметр γ_0 выражается по формулам (12), функции $\varphi_*(t)$, $\dot{\varphi}_*(t)$, $\dot{\psi}(t)$ определяются соотношениями из (16), (17). Период решения (18) равен значению

$$T = \frac{2}{\mu_0} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi_*}{\sqrt{1 - k_*^2 \sin^2 \varphi_*}}. \quad (19)$$

Уравнения в вариациях. Подставим выражения (11) в уравнения (1)

$$\dot{\Omega} = \mu^{-1} \left[\tau_5 \times \Omega + \tau_4 \times \gamma + (\omega^* + \Omega) \times B\gamma + (v^* + \gamma) \times C\gamma \right], \quad (20)$$

$$\dot{\gamma} = (v^* + \gamma) \times \Omega - \omega^* \times \gamma.$$

Первый метод Ляпунова основан на уравнениях в вариациях, вытекающих из (20)

$$\mu^{-1} \left[\tau_5 \times \Omega + \tau_4 \times \gamma + \omega^* \times B\gamma + v^* \times C\gamma \right], \quad (21)$$

$$\dot{\gamma} = v^* \times \Omega - \omega^* \times \gamma.$$

Уравнения (21) допускают первые интегралы

$$\mu(\omega^* \cdot \Omega) - \tau_4 \cdot \gamma = c_1, \quad v^* \cdot \gamma = c_2, \quad (22)$$

$$\mu(v^* \cdot \Omega) + (\mu\omega^* + \tau_5) \cdot \gamma = c_3.$$

В уравнениях (20), (21) и интегралах (22) введены обозначения [8]

$$\tau_4 = s - Cv^*, \quad \tau_5 = \lambda - Bv^*. \quad (23)$$

Принятая в (23) нумерация связана с тем, что по методике [8] в дальнейшем будут использованы обозначения

$$\tau_1 = a - a_0 v^*, \quad \tau_2 = v^* - a_0 a, \quad \tau_3 = a \times v^*. \quad (24)$$

Для редукции системы (21) на основании интегралов (22) введены новые переменные [4]

$$\begin{aligned} u_1 &= \mu(\Omega \cdot a), \quad u_2 = \mu(\Omega \cdot v), \quad u_3 = \mu(\Omega \cdot \tau_3), \\ u_4 &= \gamma \cdot a, \quad u_5 = \gamma \cdot v, \quad u_6 = \gamma \cdot \tau_3. \end{aligned} \quad (25)$$

Если функции $u_i(t)$ будут найдены, то в силу (25) векторы Ω , γ определим по формулам

$$\Omega = \mu_0^{-1} (a'_0)^{-2} (u_1 \tau_1 + u_2 \tau_2 + u_3 \tau_3), \quad \gamma = (a'_0)^{-2} (u_4 \tau_1 + u_5 \tau_5 + u_6 \tau_3). \quad (26)$$

Запишем интегралы (22), принимая во внимание выражение $\omega^* = na + \dot{\psi}v^*$ и формулы (23) – (25)

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}u_1 + \dot{\psi}u_2 - a'_0{}^2 [\tau_4 \cdot (u_4 \tau_1 + u_5 \tau_2 + u_6 \tau_3)] &= c_1, \\ u_5 &= c_2, \quad b \cdot (u_4 \tau_1 + u_5 \tau_2 + u_6 \tau_3) = c_3, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$b = a'_0{}^{-2} [\mu(\dot{\varphi}a + \dot{\psi}v^*) + \tau_5].$$

Наряду с преобразованием (26), следуя [8], выполним второе преобразование. Введем вектор

$$x = q(t)u, \quad (28)$$

где $x = (x_1, \dots, x_6)^T$, $u = (u_1, \dots, u_6)^T$, а элементы матрицы $q(t)$ таковы

$$\begin{aligned} q_{11} &= 0, \quad q_{12} = 0, \quad q_{13} = 1, \quad q_{14} = 0, \quad q_{15} = 0, \quad q_{16} = 0, \\ q_{21} &= 0, \quad q_{22} = 0, \quad q_{23} = 0, \quad q_{24} = 1, \quad q_{25} = 0, \quad q_{26} = 0, \\ q_{31} &= 0, \quad q_{32} = 0, \quad q_{33} = 0, \quad q_{34} = 0, \quad q_{35} = 0, \quad q_{36} = 1, \\ q_{41} &= \dot{\varphi}, \quad q_{42} = \dot{\psi}, \quad q_{43} = 0, \quad q_{44} = -a'_0{}^{-2} (\tau_4 \cdot \tau_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{45} &= -a_0'^{-2}(\tau_4 \cdot \tau_2), \quad q_{46} = -a_0'^{-2}(\tau_4 \cdot \tau_3), \\ q_{51} &= 0, \quad q_{52} = 0, \quad q_{53} = 0, \quad q_{54} = 0, \quad q_{55} = 1, \quad q_{56} = 0, \\ q_{61} &= 0, \quad q_{62} = 1, \quad q_{63} = 0, \quad q_{64} = \mathbf{b} \cdot \tau_1, \quad q_{65} = \mathbf{b} \cdot \tau_2, \quad q_{66} = \mathbf{b} \cdot \tau_3. \end{aligned} \quad (29)$$

Очевидно, что в силу равенств (29) $(\mathbf{q}(t) = \dot{\varphi} = 2\sigma_0 dn(\sigma_0 t, k_*) \neq 0$. Поэтому существует обратное к (28) преобразование

$$\mathbf{u} = \mathbf{q}^{-1}(t)\mathbf{x}, \quad (30)$$

Которое вместе с (25) сохраняет характеристичные числа линейной системы (21). В статье [9] показано, что в результате применения к (21) преобразований (25), (28) и учета (27) система (21) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= h_{12}(t)x_2 + \mu\dot{\varphi}^{-1}(\dot{\varphi}\ddot{\psi} + \ddot{\varphi}\dot{\psi})x_3 + R_1(t), \quad \dot{x}_2 = \mu^{-1}x_1 - \dot{\psi}x_3 + R_2(t), \\ \dot{x}_3 &= h_{32}(t)x_2 + \ddot{\varphi}\dot{\varphi}^{-1}x_3 + R_3(t), \quad \dot{x}_4 = 0, \quad \dot{x}_5 = 0, \quad \dot{x}_6 = 0, \end{aligned} \quad (31)$$

где $R_i(t)$ ($i = \overline{1,3}$) – периодические функции (периода (19)). Выражения для $h_{12}(t)$, $h_{32}(t)$ выписаны в статье (9). Здесь отметим, что эти функции также периодические с тем же периодом T .

Согласно первому методу Ляпунова [2] для нахождения асимптотических решений систем (20) необходимо определить условия существования положительных характеристичных чисел линейной системы (21). В силу преобразований (25), (28), сохраняющих характеристичные числа системы (21), необходимо исследовать характеристичные числа системы (31). Положительные характеристичные числа системы (31) может иметь только однородная система из (31). В статье [9] с помощью подстановки

$$x_1 = \mu(\dot{x}_2 + \dot{\psi}x_3) \quad (32)$$

получено уравнение

$$\ddot{x}_2 + p(t)x_2 = 0, \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} p(t) &= \mu^{-1}a_0'^{-2} \left\{ a_0'^2 \mu(\dot{\psi}^2 - \dot{\varphi}^2 - a_0\dot{\varphi}\dot{\psi}) + \dot{\varphi} \left[(\tau_2 \cdot \mathbf{B}\tau_1) - 2a_0'^2(\mathbf{a} \cdot \tau_5) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \dot{\psi} \left[(\mathbf{B}\tau_1, \tau_1) + a_0'^2(\mathbf{v}, \tau_5) \right] - (\mathbf{C}\tau_1, \tau_1) - a_0'^2(\mathbf{v}, \tau_4) - \right. \\ &\quad \left. - \mu^{-1} \left[(\mathbf{v}, \tau_5)^2 + (\mathbf{a}, \tau_5)^2 - 2a_0(\mathbf{a}, \tau_5)(\mathbf{v}, \tau_5) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (34)$$

Распишем выражение (34) при условиях (7), (16) – (18)

$$p(t) = \mu^{-1} \left[2L_0\sigma_0 dn(\sigma_0 t, k_*) + 2\mu\sigma_0^2 (12a_0^2 - 1) dn^2(\sigma_0 t, k_*) + S_0 \right], \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned} L_0 &= -2\lambda_3(a_0^2 + 1) + a_0a_0'^2 B_{11} + a_0(3 + a_0^2)B_{33}, \\ S_0 &= \mu^{-1} \left\{ -(0,5 + 5a_0^2)a_0^{-1}s_3\mu + (0,5 - 6a_0^2)\mu(C_{11} - C_{33}) - (1,5 + 4a_0^2)\lambda_3^2 + \right. \\ &\quad \left. + 0,5a_0^{-1}\lambda_3 \left[(1 + 6a_0^2 - 14a_0^4)B_{11} + 2a_0^2(9a_0^2 + 2)B_{33} \right] + \right. \\ &\quad \left. + 0,5 \left[a_0'^2(10a_0^2 - 1)B_{11}^2 + 4a_0^2(9a_0^2 - 4)B_{11}B_{33} - a_0^2(10a_0^2 + 1)B_{33}^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (36)$$

В силу (35), (36) функция $p(t)$ являются многочленом второго порядка относительно периодической функции $dn(\sigma_0 t, k_*)$, которая принимает положительные значения в интервале $(\sqrt{1 - k_*^2}, 1)$. Потребуем, чтоб $p(t) < 0$ ($p(t) \neq 0$) для всех значений t . Выполнение этого условия можно добиться, потребовав $L_0 < 0, 12a_0^2 - 1 < 0, S_0 < 0$. Поскольку при интегрировании уравнения (14) полагалось, что $tg\theta_0 > 0$, то рассматривая неравенство $12a_0^2 - 1 \leq 0$, приходим к следующему ограничению на параметр θ_0 :

$$\arctg\sqrt{11} \leq \theta_0 < 0,5\pi. \quad (37)$$

Из выражения для L_0 из (36) вытекает, что неравенства $L_0 < 0$ можно добиться, полагая

$$\lambda_3 > 0,5a_0 \left[a_0'^2 B_{11} + (3 + a_0^2)B_{33} \right] / (a_0^2 + 1). \quad (38)$$

Рассмотрим выражение S_0 из (36). При величине λ_3^2 стоит отрицательный множитель. Следовательно при достаточно больших значениях величины λ_3 будет выполняться неравенство $S_0 < 0$. Ранее (при анализе решения уравнения (14)) на основании ограничения $\beta_1 > -\beta_2 > 0$ было принято условие, что величина λ_3 принимает достаточно большие значения. Учитывая (38) и результаты по изучению условия $S_0 < 0$, приходим к выводу о том, что выбор достаточно больших значений λ_3 обеспечит требование периодичности решения уравнения (14) и выполнение неравенств $L_0 < 0$, $S_0 < 0$.

Приходим к следующему утверждению: если параметр θ_0 удовлетворяет неравенству (37), то существуют такие положительные (достаточно большие) значения параметра λ_3 , для которых $p(t) < 0$ ($p(t) \neq 0$); уравнение (33) с функцией $p(t) < 0$ из (35) имеет решение с положительным характеристическим числом α_0^2

$$x_2(t) = ce^{-\alpha_0^2 t} \varphi_1(t), \quad (39)$$

где $\varphi_1(t)$ – периодическая функция периода (19), c – произвольная постоянная.

После нахождения решения (39) уравнения Хилла (33) функцию $x_3(t)$ можно найти из третьего уравнения системы (31). Например, решение однородной системы в силу (39) таково

$$x_3(t) = c \operatorname{dn}(\sigma_0 t, k_*) \int_t^{\infty} \frac{h_{32}(t) \varphi_1(t) e^{-\alpha_0^2 t} dt}{\operatorname{dn}(\sigma_0 t, k_*)}. \quad (40)$$

Формулы (39), (40) позволяют из (32) найти функцию $x_1(t)$. Последние три уравнения системы (31) приводят к равенствам $x_4 = c_1$, $x_5 = c_2$, $x_6 = c_3$. Для построения рядов Ляпунова необходимо для первого приближения принять c_i ($i = \overline{1,3}$) равными нулю. Таким образом строится решение для фазового вектора $\mathbf{x}(t)$ из уравнения (30). Это позволяет определить вектор-функцию $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$. Тогда вектор функции $\mathbf{\Omega}(t)$, $\mathbf{\gamma}(t)$ в линейном приближении находятся из формул (26). Линейная система (21) имеет одно положительное характеристическое число α_0^2 . Поскольку она является правильной (коэффициенты при фазовых переменных в системе (20) – периодические функции времени), то в силу теоремы Ляпунова [2] нелинейная система (20) допускает однопараметрическое решение

$$\Omega_i = \sum_{n=1}^{\infty} N_i^{(n)}(t) c^n e^{-\alpha_0^2 n t}, \quad \gamma_i = \sum_{m=1}^{\infty} M_i^{(m)}(t) c^m e^{-\alpha_0^2 m t}, \quad (41)$$

В котором характеристические числа функций $N_i^{(n)}(t)$, $M_i^{(n)}(t)$ не менее нуля. Ряды (41) сходятся абсолютно при $t \rightarrow \infty$, $\Omega_i \rightarrow 0$, $\gamma_i \rightarrow 0$ ($i = \overline{1,3}$).

Выводы. В статье показано, что если выполнено условие (37), а параметр λ_3 принимает достаточно большое значение, то существует однопараметрическое семейство решений (41), описывающее асимптотически-прецессионные движения гиростата, предельным движением которых является прецессия общего вида (16) – (18).

Вид функции (35) позволяет привести и другие достаточные условия существования асимптотически-прецессионных движений. Например, положим $B_{ii} = 0$ ($i = \overline{1,3}$), $\lambda_3 = 0$. Тогда в силу (36) $L_0 = 0$ и

$$S_0 = -0,5(1 + 10a_0^2) a_0^{-1} s_3 + (0,5 - 6a_0^2)(C_{11} - C_{33}). \quad (42)$$

Кроме указанных предположений будем считать, что параметр θ_0 изменяется в промежутке

$$0 < \theta_0 < \arccos(1/\sqrt{12}) \quad (43)$$

В силу того, что эллиптическая функция $\operatorname{dn}(\sigma_0 t, k_*)$ изменяется в интервале $(\sqrt{1 - k_*^2}, 1)$ потребуем, чтобы выполнялись условия $2\mu\sigma_0^2(12a_0^2 - 1) + S_0 < 0$, $2\mu\sigma_0^2(12a_0^2 - 1)(1 - k_*^2) + S_0 < 0$, которые в силу равенства $\sigma_0^2 = 0,25(\beta_1 - \beta_2)$ и выражений (13), (42) (для простоты записи положим $C_{13} > 0$, $C_{23} = 0$) можно привести к неравенству

$$s_3 > C_{13} (12a_0^2 - 1) / (3a_0'). \quad (44)$$

Если учесть условие $\beta_1 > -\beta_2$ существования решения уравнения (14), то получим дополнительное ограничение на параметр s_3

$$s_3 > a_0 (C_{33} - C_{11}) + 2a_0' C_{13} / (3a_0). \quad (45)$$

Очевидно, что при выполнении условий (43) – (45) функция (35) отрицательна для всех значений времени. То есть опять выполняется достаточное условие существования положительного характеристического числа решения уравнения (33) и существует решение вида (41) для нелинейной системы (20).

РЕЗЮМЕ

Одержано умови існування асимптотично-прецесійних рухів сферичного гіростату під дією потенційних і гіроскопічних сил у разі, коли граничний рух описується прецесією загального вигляду, зазначеною О. В. Мазневим.

Ключові слова: гіростат, асимптотично-прецесійні рухи, метод Ляпунова.

SUMMARY

The terms of existence spherical gyrostatt asymptotically precession motions under the action of potential and gyroscopic forces in case the limit motion describes the general form precession which have Maznev are got.

Keywords: gyrostatt, asymptotically precession motions, Lyapunov's method.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вархалев Ю.П. Первый метод Ляпунова в исследовании асимптотических движений в динамике твердого тела / Ю.П. Вархалев, Г.В. Горр // Механика твердого тела. – 1992. – Вып. 24. – С. 25-41.
2. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения / А.М. Ляпунов // Собр. соч.: В 5 т. – М.: Л.: Изд-во АН СССР, 1952. – Т. 2. – С. 7-263.
3. Yehia H.M. On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces. I: The equations of motion and motion and their transformations / H.M. Yehia // J. Mecanic Theoretical Applications. – 1986. – Vol. 5, No 5. – P. 747-748.
4. Горр Г.В. Об асимптотически-прецессионных движениях гиростата в обобщенной задаче динамики / Г.В. Горр, Д.И. Думбай // Механика твердого тела. – 1994. – Вып. 26 (I). – С. 20-28.
5. Мазнев А.В. Асимптотически-равномерные движения относительно наклонной оси гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил / А.В. Мазнев, Ю.Ю. Пилпани // Прикладная математика и механика. – 2012. – Т. 76, вып. 2. – С. 237-246
6. Пилпани Ю.Ю. Об одном классе асимптотически-прецессионных движений сферического гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил / Ю.Ю. Пилпани // Тр. Ин-та прикладной математики и механики НАНУ. – 2011. – Т. 22. – С. 177-183.
7. Горр Г.В. об асимптотически – прецессионных движениях сферического гиростата / Г.В. Горр, Е.М. Миронова // Механика твердого тела. – 2008. – Вып. 38. – С. 56-62.
8. Горр Г.В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку / Г.В. Горр, А.В. Мазнев. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.
9. Мазнев А.В. О редукции уравнений в вариациях задачи об асимптотически – прецессионных движениях гиростата / А.В. Мазнев, Ю.Ю. Пилпани // Тр. Ин-та прикладной математики и механики НАНУ. – 2013. – Т. 25. – С. 177-183

Поступила в редакцию 21.01.2013 г.

УДК 539.3

ОДНОРОДНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О РАВНОВЕСИИ УПРУГИХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН С НЕСОВЕРШЕННЫМ КОНТАКТОМ СЛОЕВ

М.В. Фоменко

В трехмерной постановке рассмотрены две задачи упругого равновесия трехслойной изотропной пластины симметричного строения. Торцы пластины жестко защемлены или покрыты диафрагмой, а на границе раздела слоев выполняются условия скользящего контакта. Получены однородные решения уравнений равновесия в перемещениях в виде суммы вихревого, потенциального и бигармонического состояний. Выполнены аналитические и численные исследования трансцендентных уравнений для нахождения собственных значений. Исследован характер проявления краевого эффекта.

Ключевые слова: трехслойная пластина, упругое равновесие, скользящий контакт, граничные условия жесткого защемления или диафрагмы, однородные решения, трансцендентные уравнения, собственные функции, собственные значения, погранслой.

Анализ математических теорий поперечно-неоднородных упругих пластин и методов решения конкретных задач отражен в работах [1 – 5]. В них отмечается актуальность развития аналитических методов исследования напряженно-деформированного состояния слоистых конструкций на основе уравнений пространственной теории упругости. Одним из эффективных точных аналитических методов приведения трехмерных краевых задач о равновесии упругих трехслойных пластин к двумерным задачам является метод однородных решений [4 – 11], который впервые был предложен А.И. Лурье [12]. Однородные решения задач о равновесии трехслойных пластин симметричного строения с учетом различных граничных условий на торцах в случае идеального контакта слоев получены в работах [4, 6 – 9]. При проскальзывании слоев пластины в работах [10, 11] рассмотрены аналогичные задачи в случае свободных от напряжений плоских граней и скользящей заделки торцов.

В данной статье получены однородные решения уравнений упругого равновесия трехслойной пластины симметричного строения с жестко защемленными или покрытыми диафрагмой торцами и скользящим контактом слоев.

Постановка задач. Рассмотрим трехслойную пластину симметричного строения относительно ее срединной плоскости со слоями из изотропных материалов и находящимися друг с другом в условиях скользящего контакта. Лицевые грани пластины жестко защемлены (*задача 1*) или покрыты диафрагмой (*задача 2*). На боковой поверхности действуют симметричные или кососимметричные внешние усилия.

Построение однородных решений задач об упругом равновесии рассматриваемой пластины сводится к интегрированию уравнений равновесия

$$\begin{aligned} \lambda^{-2} \partial_3^2 u_{mj} + D^2 u_{mj} + \nu_{m0} \partial_j \theta_m &= 0 \quad (j = 1, 2), \\ \lambda^{-2} \partial_3^2 u_{m3} + D^2 u_{m3} + \lambda^{-1} \nu_{m0} \partial_3 \theta_m &= 0 \quad (m = 1, 2) \end{aligned} \quad (1)$$

с учетом одного из граничных условий на плоских гранях

$$u_{1i}(x_1, x_2, 1) = 0 \quad (j = \overline{1, 3}); \quad (2)$$

$$u_{1j}(x_1, x_2, 1) = 0, \quad \sigma_{1j3}(x_1, x_2, 1) = 0 \quad (3)$$

и условий проскальзывания слоев

$$\begin{aligned} u_{13}(x_1, x_2, \lambda_2) &= u_{23}(x_1, x_2, \lambda_2), \quad \sigma_{133}(x_1, x_2, \lambda_2) = \sigma_{233}(x_1, x_2, \lambda_2), \\ \sigma_{1j3}(x_1, x_2, \lambda_2) &= 0, \quad \sigma_{2j3}(x_1, x_2, \lambda_2) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь

$$\partial_i = \partial / \partial x_i \quad (i = \overline{1, 3}), \quad D^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad \theta_m = \partial_1 u_{m1} + \partial_2 u_{m2} + \lambda^{-1} \partial_3 u_{m3}, \quad \nu_{m0} = 1 / (1 - 2\nu_m).$$

Другие обозначения здесь и ниже соответствуют принятым в работах [7, 8, 10, 11].

Построение однородных решений. Однородные решения задач (1), (2), (4) и (1), (3), (4) для симметричной (обозначаемой значком «+» сверху) и кососимметричной (обозначаемой значком «-») деформаций можно представить в виде суммы вихревого, потенциального и бигармонического состояний [9]

$$\begin{Bmatrix} u_{m1}^{\pm}(x_1, x_2, x_3) \\ u_{m2}^{\pm}(x_1, x_2, x_3) \\ u_{m3}^{\pm}(x_1, x_2, x_3) \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} p_{mk}^{\pm}(x_3) \partial_2 B_k^{\pm}(x_1, x_2) \\ -p_{mk}^{\pm}(x_3) \partial_1 B_k^{\pm}(x_1, x_2) \\ 0 \end{Bmatrix} + \sum_{p=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} n_{mp}^{\pm}(x_3) \partial_1 C_p^{\pm}(x_1, x_2) \\ n_{mp}^{\pm}(x_3) \partial_2 C_p^{\pm}(x_1, x_2) \\ q_{mp}^{\pm}(x_3) C_p^{\pm}(x_1, x_2) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_{m1B}^{\pm} \\ u_{m2B}^{\pm} \\ u_{m3B}^{\pm} \end{Bmatrix}.$$

Здесь $B_k^{\pm}(x_1, x_2)$, $C_p^{\pm}(x_1, x_2)$ – метагармонические функции

$$D^2 B_k^{\pm}(x_1, x_2) - \left(\delta_k^{\pm}/\lambda\right)^2 B_k^{\pm}(x_1, x_2) = 0, \quad D^2 C_p^{\pm}(x_1, x_2) - \left(\gamma_p^{\pm}/\lambda\right)^2 C_p^{\pm}(x_1, x_2) = 0;$$

$p_{mk}^{\pm}(x_3)$ – собственные функции вихревого состояния

$$p_{1k}^{\pm}(x_3) = \cos \delta_{1k}^{\pm}(x_3 - \lambda_2), \quad p_{2k}^{\pm}(x_3) = \cos \delta_{2k}^{\pm} x_3, \quad p_{2k}^{\bar{}}(x_3) = \frac{1}{\delta_{2k}^{\bar{}}} \sin \delta_{2k}^{\bar{}} x_3,$$

$$\delta_{1k}^{\pm} = \frac{\pi(2k-1)}{2\lambda_1}, \quad \delta_{2k}^{\pm} = \frac{\pi k}{\lambda_2}, \quad \delta_{2k}^{\bar{}} = \frac{\pi(2k-1)}{2\lambda_2};$$

δ_k^{\pm} – собственные значения

$$\{\delta_k^{\pm}\} = \{\delta_{1k}^{\pm}\} \cup \{\delta_{2k}^{\pm}\};$$

$n_{mp}^{\pm}(x_3)$, $q_{mp}^{\pm}(x_3)$ и γ_p^{\pm} – неизвестные функции и параметр разделения переменных потенциального состояния, которые находятся из задачи на собственные значения

$$n_m'' + \gamma^2(1 + \nu_{m0})n_m + \lambda \nu_{m0} q_m' = 0, \quad q_m'' + \frac{\gamma^2}{1 + \nu_{m0}} q_m + \frac{\gamma^2 \nu_{m0}}{\lambda(1 + \nu_{m0})} n_m' = 0,$$

$$n_1(1) = 0, \quad r q_1(1) + (1-r) \left[\gamma^2 (\nu_{10} - 1) n_1(1) + \lambda (\nu_{10} + 1) q_1'(1) \right] = 0,$$

$$\lambda q_1(\lambda_2) + n_1'(\lambda_2) = 0, \quad \lambda q_2(\lambda_2) + n_2'(\lambda_2) = 0, \quad q_1(\lambda_2) = q_2(\lambda_2),$$

$$G \left[\gamma^2 (\nu_{10} - 1) n_1(\lambda_2) + \lambda (\nu_{10} + 1) q_1'(\lambda_2) \right] = \gamma^2 (\nu_{20} - 1) n_2(\lambda_2) + \lambda (\nu_{20} + 1) q_2'(\lambda_2); \quad (5)$$

$$r = \begin{cases} 1, & \text{в задаче 1;} \\ 0, & \text{в задаче 2;} \end{cases}$$

$u_{miB}^{\pm} = u_{miB}^{\pm}(x_1, x_2, x_3)$ – компоненты вектора перемещений бигармонического состояния.

Решением краевой задачи (5) являются функции

$$n_{1p}^{\pm}(x_3) = H_{1p}^{\pm} \cos \gamma_p^{\pm}(x_3 - \lambda_2) + H_{2p}^{\pm} \sin \gamma_p^{\pm}(x_3 - \lambda_2) +$$

$$+ H_{3p}^{\pm}(x_3 - \lambda_2) \cos \gamma_p^{\pm}(x_3 - \lambda_2) + H_{4p}^{\pm}(x_3 - \lambda_2) \sin \gamma_p^{\pm}(x_3 - \lambda_2),$$

$$q_{1p}^{\pm}(x_3) = Q_{1p}^{\pm} \sin \gamma_p^{\pm}(x_3 - \lambda_2) + Q_{2p}^{\pm} \cos \gamma_p^{\pm}(x_3 - \lambda_2) +$$

$$+ Q_{3p}^{\pm} \left((x_3 - \lambda_2) \sin \gamma_p^{\pm}(x_3 - \lambda_2) + k_{13p}^{\pm} \cos \gamma_p^{\pm}(x_3 - \lambda_2) \right) +$$

$$+ Q_{4p}^{\pm} \left((x_3 - \lambda_2) \cos \gamma_p^{\pm}(x_3 - \lambda_2) - k_{13p}^{\pm} \sin \gamma_p^{\pm}(x_3 - \lambda_2) \right),$$

$$n_{2p}^+(x_3) = H_{5p}^+ \cos \gamma_p^+ x_3 + H_{6p}^+ x_3 \sin \gamma_p^+ x_3,$$

$$q_{2p}^+(x_3) = Q_{5p}^+ \sin \gamma_p^+ x_3 + Q_{6p}^+ \left(x_3 \cos \gamma_p^+ x_3 - k_{23p}^+ \sin \gamma_p^+ x_3 \right),$$

$$n_{2p}^-(x_3) = H_{5p}^- \sin \gamma_p^- x_3 + H_{6p}^- x_3 \cos \gamma_p^- x_3,$$

$$q_{2p}^-(x_3) = Q_{5p}^- \cos \gamma_p^- x_3 + Q_{6p}^- \left(x_3 \sin \gamma_p^- x_3 + k_{23p}^- \cos \gamma_p^- x_3 \right),$$

где

$$k_{m3p}^{\pm} = (3 - 4\nu_m) / \gamma_p^{\pm}; \quad Q_{ip}^{\pm} = a_{ip}^{\pm} H_{ip}^{\pm} / \lambda \quad (i = \overline{1, 6}),$$

$$a_{1p}^{\pm} = a_{3p}^{\pm} = -\gamma_p^{\pm}, \quad a_{2p}^{\pm} = a_{4p}^{\pm} = \gamma_p^{\pm}, \quad a_{5p}^{\pm} = \mp \gamma_p^{\pm}, \quad a_{6p}^{\pm} = \pm \gamma_p^{\pm}.$$

Коэффициенты H_{ip}^{\pm} ($i = \overline{1, 6}$) в задаче 1 получаются такими:

$$H_{1p}^{\pm} = 2(1 - \nu_2) \left((3 - 4\nu_1)(1 - 2\nu_1) \sin^2 z_{1p}^{\pm} - (z_{1p}^{\pm})^2 \right) \left(1 \mp \cos 2z_{2p}^{\pm} \right),$$

$$H_{2p}^{\pm} = -(1 - 2\nu_1)(1 - \nu_2) \left((3 - 4\nu_1) \sin 2z_{1p}^{\pm} - 2z_{1p}^{\pm} \right) \left(1 \mp \cos 2z_{2p}^{\pm} \right),$$

$$H_{3p}^{\pm} = -\gamma_p^{\pm} (1 - \nu_2) \left((3 - 4\nu_1) \sin 2z_{1p}^{\pm} - 2z_{1p}^{\pm} \right) \left(1 \mp \cos 2z_{2p}^{\pm} \right),$$

$$H_{4p}^{\pm} = 2\gamma_p^{\pm} (1 - \nu_2) \left((3 - 4\nu_1) \cos^2 z_{1p}^{\pm} - (1 - 2\nu_1) \right) \left(1 \mp \cos 2z_{2p}^{\pm} \right),$$

$$H_{5p}^{\pm} = \pm 2(1 - \nu_1) \left((3 - 4\nu_1) \sin 2z_{1p}^{\pm} - 2z_{1p}^{\pm} \right) \left((1 - 2\nu_2) \frac{\sin z_{2p}^{\pm}}{\cos z_{2p}^{\pm}} \mp z_{2p}^{\pm} \frac{\cos z_{2p}^{\pm}}{\sin z_{2p}^{\pm}} \right),$$

$$H_{6p}^{\pm} = -2\gamma_p^{\pm} (1 - \nu_1) \left((3 - 4\nu_1) \sin 2z_{1p}^{\pm} - 2z_{1p}^{\pm} \right) \frac{\sin z_{2p}^{\pm}}{\cos z_{2p}^{\pm}},$$

а в задаче 2 выглядят следующим образом:

$$H_{1p}^{\pm} = -\frac{1}{\gamma_p^{\pm}} (1 - \nu_2) \left((1 - 2\nu_1) \sin 2z_{1p}^{\pm} + 2z_{1p}^{\pm} \right) \left(1 \mp \cos 2z_{2p}^{\pm} \right),$$

$$H_{2p}^{\pm} = \frac{2}{\gamma_p^{\pm}} (1 - 2\nu_1)(1 - \nu_2) \cos^2 z_{1p}^{\pm} \left(1 \mp \cos 2z_{2p}^{\pm} \right),$$

$$H_{3p}^{\pm} = 2(1 - \nu_2) \cos^2 z_{1p}^{\pm} \left(1 \mp \cos 2z_{2p}^{\pm} \right), \quad H_{4p}^{\pm} = (1 - \nu_2) \sin 2z_{1p}^{\pm} \left(1 \mp \cos 2z_{2p}^{\pm} \right),$$

$$H_{5p}^{\pm} = \mp \frac{4}{\gamma_p^{\pm}} (1 - \nu_1) \cos^2 z_{1p}^{\pm} \left((1 - 2\nu_2) \frac{\sin z_{2p}^{\pm}}{\cos z_{2p}^{\pm}} \mp z_{2p}^{\pm} \frac{\cos z_{2p}^{\pm}}{\sin z_{2p}^{\pm}} \right),$$

$$H_{6p}^{\pm} = 4(1 - \nu_1) \cos^2 z_{1p}^{\pm} \frac{\sin z_{2p}^{\pm}}{\cos z_{2p}^{\pm}}.$$

Здесь $z_{1p}^{\pm} = \gamma_p^{\pm} \lambda_1$, $z_{2p}^{\pm} = \gamma_p^{\pm} \lambda_2$.

Собственные значения γ_p^{\pm} в задачах 1 и 2 находятся соответственно из дисперсионных уравнений

$$F_1^{\pm}(\gamma; G, \nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2) \equiv (1 - \nu_1) \left((3 - 4\nu_1) \sin 2\gamma^{\pm} \lambda_1 - 2\gamma^{\pm} \lambda_1 \right) \left(\sin 2\gamma^{\pm} \lambda_2 \pm 2\gamma^{\pm} \lambda_2 \right) \pm$$

$$\pm 2G(1 - \nu_2) \left((3 - 4\nu_1) \cos^2 \gamma^{\pm} \lambda_1 - (\gamma^{\pm} \lambda_1)^2 + (1 - 2\nu_1)^2 \right) \left(1 \mp \cos 2\gamma^{\pm} \lambda_2 \right) = 0; \quad (6)$$

$$F_2^{\pm}(\gamma; G, \nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2) \equiv 2(1 - \nu_1) \cos^2 \gamma^{\pm} \lambda_1 \left(\sin 2\gamma^{\pm} \lambda_2 \pm 2\gamma^{\pm} \lambda_2 \right) \mp$$

$$\mp G(1 - \nu_2) \left(\sin 2\gamma^{\pm} \lambda_1 - 2\gamma^{\pm} \lambda_1 \right) \left(1 \mp \cos 2\gamma^{\pm} \lambda_2 \right) = 0. \quad (7)$$

Все корни γ_p^{\pm} уравнений (6), (7) являются действительными или комплексными, расположенными симметрично в четырех квадрантах γ -плоскости. Среди корней нет мнимых, поэтому потенциальное решение носит характер погранслоя.

Представляют интерес некоторые предельные случаи трансцендентных уравнений (6), (7). Если $G \rightarrow 0$ (внешние слои – мягкие или внутренний – жесткий), то из уравнений (6) и (7) получаем

$$\left((3 - 4\nu_1) \sin 2\gamma^{\pm} \lambda_1 - 2\gamma^{\pm} \lambda_1 \right) \left(\sin 2\gamma^{\pm} \lambda_2 \pm 2\gamma^{\pm} \lambda_2 \right) = 0;$$

$$\cos^2 \gamma^{\pm} \lambda_1 \left(\sin 2\gamma^{\pm} \lambda_2 \pm 2\gamma^{\pm} \lambda_2 \right) = 0.$$

Когда $G \rightarrow \infty$ (внутренний слой – мягкий или внешние слои – жесткие), то уравнения для нахождения собственных значений γ_p^\pm трансформируются к следующим

$$\begin{aligned} & \left((3-4\nu_1)\cos^2\gamma^\pm\lambda_1 - (\gamma^\pm\lambda_1)^2 + (1-2\nu_1)^2 \right) \left(1 \mp \cos 2\gamma^\pm\lambda_2 \right) = 0; \\ & \left(\sin 2\gamma^\pm\lambda_1 - 2\gamma^\pm\lambda_1 \right) \left(1 \mp \cos 2\gamma^\pm\lambda_2 \right) = 0. \end{aligned}$$

В случае $\lambda_1 = 0$ дисперсионные уравнения (6), (7) сводятся к следующим

$$1 \mp \cos 2\gamma^\pm\lambda_2 = 0; \quad \sin 2\gamma^\pm \pm 2\gamma^\pm = 0.$$

При $\lambda_2 \rightarrow 0$ из уравнений (6), (7) следует

$$\begin{aligned} (3-4\nu_1)\sin 2\gamma^+ - 2\gamma^+ = 0, \quad (3-4\nu_1)\cos^2\gamma^-/2 - (\gamma^-/2)^2 + (1-2\nu_1)^2 = 0; \\ \cos^2\gamma^+ = 0, \quad \sin 2\gamma^- - 2\gamma^- = 0. \end{aligned}$$

Для $G=1$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$ уравнения (6) и (7) принимают вид

$$\begin{aligned} 2\left((3-4\nu_1)\sin\gamma^\pm - \gamma^\pm \right) \left(\sin\gamma^\pm \pm \gamma^\pm \right) \pm \left(\gamma^\pm \frac{\cos\gamma^\pm/2}{\sin\gamma^\pm/2} - (3 \mp 1 - 4\nu) \frac{\sin\gamma^\pm/2}{\cos\gamma^\pm/2} \right)^2 = 0; \\ \sin 2\gamma^+ + 2\gamma^+ = 0, \quad \left(\sin\gamma^- - \gamma^- \right) \cos^2\gamma^-/2 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в случае несовершенного контакта невозможен переход от трехслойной пластины к однослойной [13, 14], если принять одинаковыми упругие характеристики материалов слоев пластины. В данном случае имеем однородную пластину с расслоением.

В симметричной задаче 1, а также в симметричной и кососимметричной задаче 2 нулевые собственные значения $\delta_0 = \gamma_0 = 0$ в вихревом и потенциальном состояниях являются в совокупности кратными и им соответствует бигармоническое решение. Компоненты вектора перемещений бигармонического состояния u_{miB}^\pm ($m=1, 2$, $i=\overline{1, 3}$) в задаче 1 имеют вид

$$\begin{aligned} u_{1jB}^+(x_1, x_2, x_3) &= (1-x_3) \left(a_0^+ + a_1^+ x_3 \right) \partial_j D^2 \Phi^+ \quad (j=1, 2), \\ u_{13B}^+(x_1, x_2, x_3) &= b_0^+ (1-x_3) D^2 \Phi^+, \\ u_{2jB}^+(x_1, x_2, x_3) &= \partial_j \left(\Phi^+ + (-1)^{j+1} \Phi_C + e_2^+ x_3^2 D^2 \Phi^+ \right) \quad (j=1, 2), \\ u_{23B}^+(x_1, x_2, x_3) &= e_1^+ x_3 D^2 \Phi^+; \\ u_{miB}^-(x_1, x_2, x_3) &= 0 \quad (i=\overline{1, 3}, m=1, 2). \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь

$$\begin{aligned} D^2 D^2 \Phi^+(x_1, x_2) &= 0; \\ a_0^+ &= \lambda^2 \lambda_2 \nu_2 \frac{1-4\nu_1\lambda_1}{2\Delta_1^+}, \quad a_1^+ = -\lambda^2 \lambda_2 \nu_2 \frac{1}{2\Delta_1^+}, \quad b_0^+ = \lambda \lambda_2 \nu_2 \frac{1-2\nu_1}{\Delta_1^+}, \quad e_1^+ = \lambda \lambda_1 \nu_2 \frac{1-2\nu_1}{\Delta_1^+}, \\ e_2^+ &= -\lambda^2 \lambda_1 \nu_2 \frac{1-2\nu_1}{2\Delta_1^+}, \quad \Delta_1^+ = \lambda_1 (1-2\nu_1)(1+\nu_2) + G \lambda_2 (1-\nu_1). \end{aligned}$$

В задаче 2 компоненты вектора перемещений бигармонического состояния такие:

$$\begin{aligned} u_{1jB}^+(x_1, x_2, x_3) &= a_0^+ (1-x_3) \partial_j D^2 \Phi^+ \quad (j=1, 2), \quad u_{13B}^+(x_1, x_2, x_3) = b_0^+ D^2 \Phi^+, \\ u_{2jB}^+(x_1, x_2, x_3) &= \partial_j \left(\Phi^+ + (-1)^{j+1} \Phi_C + e_2^+ x_3^2 D^2 \Phi^+ \right) \quad (j=1, 2), \\ u_{23B}^+(x_1, x_2, x_3) &= e_1^+ x_3 D^2 \Phi^+; \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 u_{jB}^-(x_1, x_2, x_3) &= (x_3 - 1) \partial_j \left(\Phi^- + (a_0^- + a_1^- x_3 + a_2^- x_3^2) D^2 \Phi^- \right) \quad (j=1, 2), \\
 u_{13B}^-(x_1, x_2, x_3) &= -\frac{1}{\lambda} \Phi^- + (b_0^- + b_1^- x_3 + b_2^- x_3^2) D^2 \Phi^-, \\
 u_{2jB}^-(x_1, x_2, x_3) &= \partial_j \left(x_3 \Phi^- + e_3^- x_3^3 D^2 \Phi^- \right) \quad (j=1, 2), \\
 u_{23B}^-(x_1, x_2, x_3) &= -\frac{1}{\lambda} \Phi^- + (e_0^- + e_2^- x_3^2) D^2 \Phi^-,
 \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned}
 D^2 D^2 \Phi^\pm(x_1, x_2) &= 0; \\
 a_0^+ &= \lambda^2 \lambda_2 \nu_2 / \Delta_2^+, \quad b_0^+ = \lambda \lambda_2 \nu_2 / \Delta_2^+, \quad e_1^+ = \lambda \nu_2 / \Delta_2^+, \quad e_2^+ = -\lambda^2 \nu_2 / (2 \Delta_2^+), \quad \Delta_2^+ = 1 + \nu_2; \\
 a_0^- &= \frac{\lambda^2}{1 - \nu_1} \left(\frac{1 - 3\lambda_2}{3} (2 - \nu_1) + \frac{\lambda_2^2}{2} \frac{\nu_1 - \nu_2}{1 - \nu_2} \right), \quad a_1^- = \frac{\lambda^2}{3} \frac{2 - \nu_1}{1 - \nu_1}, \quad a_2^- = -\frac{\lambda^2}{6} \frac{2 - \nu_1}{1 - \nu_1}, \\
 b_0^- &= \frac{\lambda \lambda_2}{1 - \nu_1} \left(\lambda_2 - \nu_1 - \frac{\lambda_2}{2} \frac{\nu_1 - \nu_2}{1 - \nu_2} \right), \quad b_1^- = \lambda \frac{\nu_1}{1 - \nu_1}, \quad b_2^- = \frac{\lambda}{2} \frac{\nu_1}{1 - \nu_1}, \\
 e_0^- &= \lambda \lambda_2^2 \frac{1}{1 - \nu_2}, \quad e_2^- = -\frac{\lambda}{2} \frac{\nu_2}{1 - \nu_2}, \quad e_3^- = -\frac{\lambda^2}{6} \frac{2 - \nu_2}{1 - \nu_2}.
 \end{aligned}$$

Гармоническая функция $\Phi_C(x_1, x_2)$ в соотношениях (8), (9) связана с бигармонической $\Phi^+(x_1, x_2)$ соотношением

$$\partial_2^2 \Phi_C = -\partial_1^2 \Phi_C = e_0^+ D^2 \Phi^+,$$

в котором

$$e_0^+ = r \frac{G \lambda_2 (1 - \nu_1) (1 - \nu_2) + \lambda_1 (1 - 2\nu_1)}{\Delta_1^+} + (1 - r) \frac{1}{\Delta_2^+}.$$

Анализ результатов численных исследований. В табл. 1 и 2 для $G = 2$, $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$, $\lambda_1 = 0,1$ приведены значения первых пятнадцати в порядке возрастания реальной части корней γ_p^\pm уравнений (6), (7) из первого квадранта комплексной плоскости, а также аналогичные результаты работ [10, 11]. При этом данные табл. 1 соответствуют симметричной деформации пластины, а табл. 2 – кососимметричной. Столбцы в таблицах с номером 1 соответствуют задаче 1, столбцы 2 – задаче 2, столбцы 3 – свободным от напряжений плоским граням [10], а столбцы 4 – скользящей заделке торцов [11].

Таблица 1

p	1		2		3		4	
	Re γ_p^+	Im γ_p^+	Re γ_p^+	Im γ_p^+	Re γ_p^+	Im γ_p^+	Re γ_p^+	Im γ_p^+
1	3,3876112	0,4853227	2,3344023	1,2671402	2,3390104	1,2545085	3,3656792	0,5308196
2	6,8312730	0,8876257	6,0661478	2,0429790	5,9774858	1,7688663	6,7780742	0,9739256
3	8,9453457	0	7,7108278	3,0426253	9,6794519	2,1188107	10,228531	1,3105504
4	10,271752	1,3236686	10,673214	1,2865774	11,978353	5,7251517	13,713506	1,5539416
5	13,703580	1,5464396	14,057994	0,4059579	13,673109	2,1378269	17,256314	1,6992836
6	17,183233	1,7338514	17,375005	0,3670789	17,359003	1,8273156	20,889274	1,6797999
7	20,691754	1,8683843	20,795769	0,9320670	20,869627	1,6388707	22,098404	9,0414817
8	24,238383	1,9335315	24,271229	1,2992952	24,342237	1,5770627	24,544599	1,3722145
9	27,608201	12,248881	27,769278	1,5361288	27,815939	1,5989672	28,069975	0,7724189
10	27,813264	1,9049475	31,296636	1,6675693	31,301245	1,6545706	34,778818	0,7008260
11	31,372373	1,7887093	34,867254	1,6736355	34,798947	1,7077476	38,247750	1,1745271
12	34,882437	1,6508445	38,075243	11,717812	38,306748	1,7381865	41,750964	1,4663025
13	38,353803	1,5681761	38,468989	1,4941758	41,819662	1,7375296	45,273311	1,6323755
14	41,816348	1,5691660	42,034825	1,0688871	43,152378	20,234539	48,822302	1,6819768
15	45,290008	1,6257167	45,465665	0,3901902	45,330134	1,7087922	52,398905	1,5859449

Таблица 2

p	1		2		3		4	
	Re γ_p^-	Im γ_p^-	Re γ_p^-	Im γ_p^-	Re γ_p^-	Im γ_p^-	Re γ_p^-	Im γ_p^-
1	1,6899598	0,2486266	4,1777964	1,6246295	4,1699348	1,5561773	1,6782295	0,2722138
2	5,0982537	0,7004291	7,2562265	3,0969117	7,8007414	1,9510231	5,0660329	0,7660662
3	8,6251130	1,1059011	8,8739880	1,8565759	11,666923	2,2211975	8,4993655	1,1547254
4	8,8310225	0	12,389336	0,8342360	11,983035	5,7140196	11,965885	1,4433662
5	11,974775	1,4375765	19,073729	0,6788303	15,556096	1,9734678	15,475231	1,6409098
6	15,440299	1,6460619	22,530137	1,1354210	19,123623	1,7156214	19,061489	1,7181709
7	18,933231	1,8084794	26,017445	1,4313696	22,607229	1,5942985	22,098375	9,0414858
8	22,460088	1,9111714	29,528311	1,6152132	26,077920	1,5808577	22,724872	1,5662591
9	26,024474	1,9320096	33,076140	1,6893101	29,556988	1,6252336	26,330041	1,1043757
10	27,608201	12,248881	36,667216	1,6115861	33,048637	1,6830474	29,759420	0,3938209
11	29,597886	1,8547787	38,075243	11,717812	36,551824	1,7265866	33,080445	0,3746626
12	33,133774	1,7170854	40,262200	1,3146489	40,062998	1,7418373	36,505752	0,9656214
13	36,621122	1,5992599	43,773074	0,7566804	43,152378	20,234539	39,997041	1,3384697
14	40,084496	1,5590281	50,485346	0,7096897	43,575710	1,7260091	43,509398	1,5634720
15	43,551255	1,5933775	53,959921	1,1922581	47,082116	1,6880779	47,043977	1,6727653

Из данных таблиц видно, что вид граничных условий на торцах и вид симметрии деформации пластины оказывает значительное влияние на величину собственных значений γ_p^\pm . В случае жесткого защемления торцов (*задача 1*) среди собственных значений γ_p^+ и γ_p^- существует только одно действительное: $\gamma_3^+ \approx 8,945$ и $\gamma_4^- \approx 8,831$. Остальные γ_p^\pm в *задаче 1* являются комплексными. В случае покрытых диафрагмой, свободных от напряжений или скользящей заделки торцов среди собственных значений γ_p^\pm нет действительных, все они являются комплексными.

Так как потенциальное состояние представляет собой решение типа погранслоя, то характер проникания его внутрь области определяется первым по модулю корнем γ_1^\pm . На рис. 1 для симметричной (рис. 1, а) и кососимметричной (рис. 1, б) деформаций пластины приведены в полулогарифмическом масштабе графики изменения модуля первого собственного значения γ_1^\pm в зависимости от относительной жесткости G при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,5$. Графики изменения модуля первого собственного

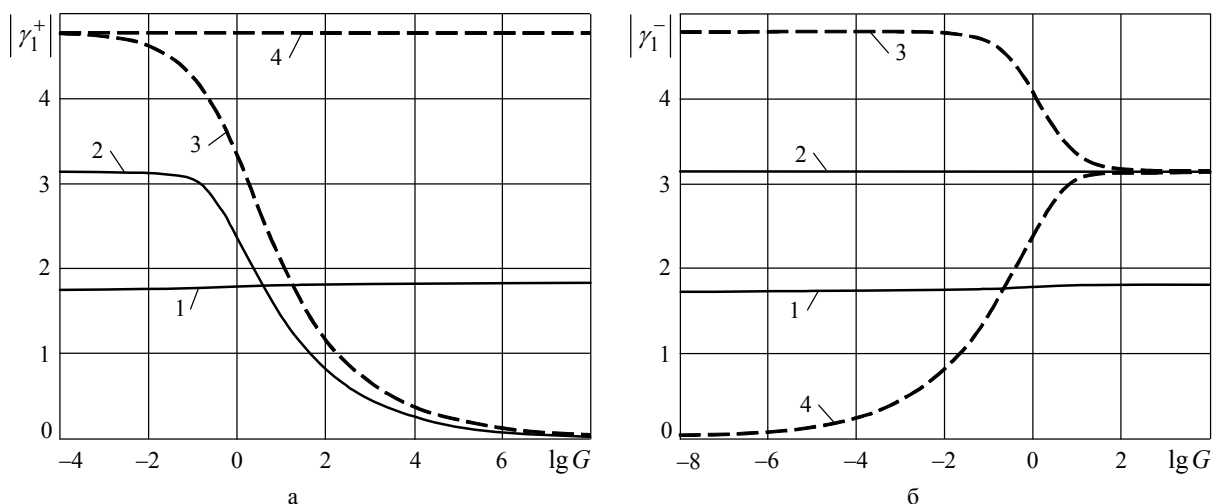


Рис. 1

значения в зависимости от относительной толщины внешних слоев λ_1 при $G = 1$ изображены на рис. 2. Значения коэффициентов Пуассона ν_1, ν_2 в каждом из рассматриваемых случаев принимались равными 0,3. Кривые 1 соответствуют *задаче 1*, кривые 2 – *задаче 2*, кривые 3 – свободным от напряжений плоским граням [10], а кривые 4 – скользящей заделке торцов [11].

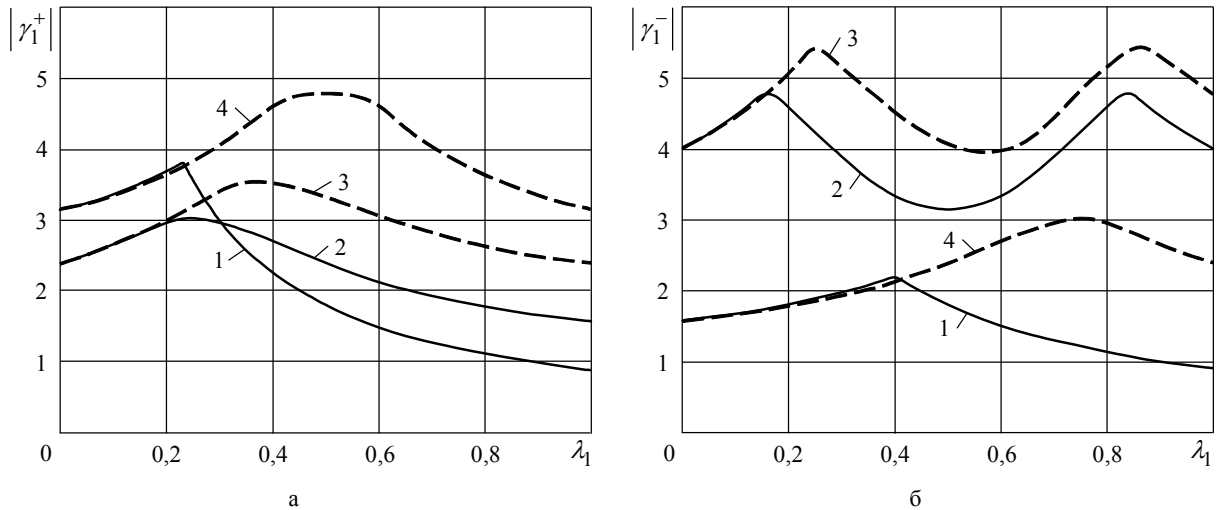


Рис. 2

В задаче 1 величины γ_1^\pm на интервале $G \in (0; \infty)$ являются действительными, монотонно возрастают незначительно и $\gamma_1^+ < \gamma_1^-$ (см. рис. 1). При $G \rightarrow 0$ величины γ_1^\pm стремятся к 1,766 – первому корню уравнения $(3 - 4\nu)\sin \gamma - \gamma = 0$. В случае $G \rightarrow \infty$ величины γ_1^\pm приближаются к 1,826 – первому корню уравнения $(3 - 4\nu)\cos^2 \gamma/2 - (\gamma/2)^2 + (1 - 2\nu)^2 = 0$. В точке $G = 1$ имеем $\gamma_1^+ = 1,798$, $\gamma_1^- = 1,808$. Следовательно, в трехслойной пластине с уменьшением жесткости заполнителя (среднего слоя) характер проникания потенциального решения внутрь области ослабевает незначительно.

В задаче 2 величина γ_1^\pm является комплексной на интервале $G \in (0; \infty)$, а ее модуль монотонно убывает (см. рис. 1, а). Для различных относительных жесткостей слоев величина γ_1^- остается постоянной и равной π . При $G \rightarrow 0$ величина γ_1^+ стремится к π , а при $G \rightarrow \infty$ – к нулю. При $G = 1$ значение $|\gamma_1^+| = 2,388$. Следовательно, при симметричной деформации трехслойной пластины с более жестким заполнителем ($G < 1$) потенциальное решение проникает внутрь области слабее, чем в пластине со слабым средним слоем. Чем жестче заполнитель, тем характер проникания слабее.

Изменение $|\gamma_1^\pm|$ в зависимости от λ_1 носит более сложный немонотонный характер (см. рис. 2). Так, в задаче 1 при симметричной деформации пластины (см. рис. 2, а, кривая 1) промежуток $(0; 1)$ изменения параметра λ_1 условно разбивается на два интервала $(0; 0,23)$, $(0,23; 1)$ в зависимости от характера поведения модуля первого собственного значения. Величина γ_1^+ на интервале $(0; 0,23)$ является комплексной, а на интервале $(0,23; 1)$ – действительной. В окрестности точки $\lambda_1 = 0,23$ величина $|\gamma_1^+|$ достигает наибольшего значения, приблизительно равного 3,81, и потенциальное решение проникает внутрь области наиболее слабо. В точке $\lambda_1 = 1$ значение величины $\gamma_1^+ = 0,883$ (первый корень уравнения $(3 - 4\nu)\sin 2\gamma - 2\gamma = 0$), и характер проникания потенциального решения внутрь области наиболее сильный. При $\lambda_1 = 0$ имеем $\gamma_1^+ = \pi$. В случае кососимметричной деформации (см. рис. 2, б, кривая 1) величина γ_1^- на интервале $\lambda_1 \in (0; 1)$ изменяется от 0,913 (первый корень уравнения $(3 - 4\nu)\cos^2 \gamma - \gamma^2 + (1 - 2\nu)^2 = 0$) в точке $\lambda_1 = 1$ до $\approx 2,20$ (при $\lambda_1 \approx 0,4$). В точке $\lambda_1 = 0$ значение $\gamma_1^- = \pi/2$. Краевой эффект, описываемый первым собственным значением потенциального решения в задаче 2 на основе кривых 2 (см. рис. 2), носит иной характер по сравнению с задачей 1. Таким образом, данные рис. 2 свидетельствуют о том, что первое собственное значение γ_1 существенно зависит от относительных толщин слоев λ_1 (λ_2) и для неидеального контакта при одинаковых упругих характеристиках материалов слоев ($G = 1$, $\nu_1 = \nu_2$) невозможен переход от трехслойной пластины к однослойной.

Выводы. В виде суммы вихревого, потенциального и бигармонического состояний получены однородные решения систем уравнений равновесия в перемещениях для трехслойной изотропной пластины симметричного строения с жестко защемленными или покрытыми диафрагмой торцами и скользящим

контактом слоев. Исходные трехмерные краевые задачи сведены к счетному множеству двумерных задач относительно метагармонических и бигармонической функций.

Собственные функции вихревого и потенциального решений найдены в явном виде. Собственные значения вихревого решения также находятся в явном виде. Для определения собственных значений потенциального состояния получены трансцендентные уравнения в форме, приспособленной для эффективного проведения численно-аналитических исследований.

Выполнены аналитические и численные исследования трансцендентных уравнений. На основе численных исследований изучено поведение собственных значений и исследовано проникание пограничного слоя внутрь области (характер проявления краевого эффекта) в зависимости от изменения относительной жесткости и толщин слоев пластины. Показано, что краевые эффекты могут быть как слабее, так и сильнее, в зависимости от физических и геометрических параметров трехслойной пластины.

РЕЗЮМЕ

У тривимірній постановці розглянуто дві задачі пружної рівноваги тришарової ізотропної пластини симетричної будови. Торці пластини жорстко зафіксовані або вкриті діафрагмою, а на межі поділу шарів виконуються умови ковзного контакту. Одержано однорідні розв'язки рівнянь рівноваги в переміщеннях у вигляді суми вихревого, потенціального і бигармонічного станів. Здійснено аналітичні та чисельні дослідження трансцендентних рівнянь для знаходження власних значень. Досліджено характер прояву крайового ефекту.

Ключові слова: тришарова пластина, пружна рівновага, ковзний контакт, граничні умови жорсткого зафіксування або діафрагми, однорідні розв'язки, трансцендентні рівняння, власні функції, власні значення, прилеглий шар.

SUMMARY

Two problems of elastic equilibrium of a three-layer isotropic plate of symmetric structure are considered in the three-dimensional statement. The plate faces are fixed rigidly or covered by diaphragm. The conditions of sliding contact are satisfied on the interface of layers. The homogeneous solutions of the equilibrium equations in displacements are received as the sum of the vortex, potential and biharmonic states. The analytical and computational researches of the transcendental equations for the eigenvalues determinations are carried out. The nature of the developing process of the edge effect is researched.

Keywords: three-layer plate, elastic equilibrium, sliding contact, boundary conditions of rigid fixing or diaphragm, homogeneous solutions, transcendental equations, eigenfunctions, eigenvalues, boundary layer.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Altenbach H. Theories for laminated and sandwich plates. A review / H. Altenbach // *Mechanics of Composite Materials* – 1998. – Vol. 34, No 3. – P. 243-252.
2. Carrera E. Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells / E. Carrera // *Applied Mechanics. Reviews.* – 2003. – Vol. 56, No 3. – P. 287-308.
3. Пискунов В. Г. Развитие теории слоистых пластин и оболочек / В. Г. Пискунов, А. О. Рассказов // *Прикладная механика.* – 2002. – Т. 38, № 2. – С. 22-56.
4. Космодамианский А. С. Толстые многосвязные пластины / А. С. Космодамианский, В. А. Шалдырван. – Киев.: Наук. думка, 1978. – 240 с.
5. Устинов Ю. А. Математическая теория поперечно-неоднородных плит / Ю. А. Устинов. – Ростов-на-Дону: ООО ЦВВР, 2006. – 257 с.
6. Алтухов Е. В. Равновесие трехслойной пластины с жесткими торцами / Е. В. Алтухов, И. Е. Кулиш // *Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А. Природн. науки.* – 2001. – № 1. – С. 314-321.
7. Алтухов Е. В. Деформация трехслойных пластин в случае смешанных граничных условий на торцах / Е. В. Алтухов, М. В. Фоменко // *Теорет. и прикладная механика.* – 2011. – № 2 (48). – С. 29-39.
8. Алтухов Е. В. Упругое равновесие трехслойной пластины с покрытыми диафрагмой плоскими гранями / Е. В. Алтухов, М. В. Фоменко // *Вісн. Донецьк. нац. ун-ту. Сер. А. Природн. науки.* – 2011. – № 1. – С. 19-26.
9. Воронич И. И. Качественное исследование напряженно-деформированного состояния трехслойной плиты / И. И. Воронич, И. Г. Кадомцев // *Прикладная математика и механика.* – 1970. – Т. 34, № 5. – С. 870-876.
10. Алтухов Е. В. Упругое равновесие трехслойной пластины с неидеальным контактом слоев / Е. В. Алтухов, М. В. Фоменко // *Вісн. Донецьк. нац. ун-ту. Сер. А: Природн. науки.* – 2010. – № 1. – С. 17-22.
11. Шевченко В. П. Деформация трехслойных пластин со скользящей заделкой торцов и несовершенным контактом слоев / В. П. Шевченко, Е. В. Алтухов, М. В. Фоменко // *Доповіді НАН України.* – 2012. – № 8. – С. 61-66.
12. Лурье А. И. К теории толстых плит / А. И. Лурье // *Прикладная математика и механика.* – 1942. – Т. 6, №. 2-3. – С. 151-168.
13. Космодамианский А. С. Метод однородных решений в смешанных задачах теории упругости и термоупругости для толстых многосвязных пластин / А. С. Космодамианский, Е. В. Алтухов, В. А. Галич // *Докл. АН УССР. Сер. А.* – 1981. – № 11. – С. 62-65.
14. Алтухов Е. В. Упругое равновесие слоя с полостью для граничных условий смешанного типа на торцах / Е. В. Алтухов // *Теоретическая и прикладная механика.* – 1993. – Вып. 24. – С. 3-7.

Поступила в редакцию 18.03.2013 г.

УДК 531.36, 531.38

ВЛИЯНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ТОНОВ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ И СТАБИЛИЗАЦИЮ ВРАЩЕНИЯ НЕСВОБОДНОГО ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА, НАПОЛНЕННОГО ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Т.В. Хомяк

Рассматривается задача об устойчивости и стабилизации неустойчивого вращения несвободного волчка Лагранжа с произвольной осесимметричной полостью, заполненной идеальной жидкостью, при помощи вращающегося твердого тела. В рамках необходимых условий устойчивости аналитически показана возможность стабилизации с учетом дополнительных тонов колебания жидкости. Численные расчеты подтвердили результаты аналитических исследований.

Ключевые слова: волчок Лагранжа, идеальная жидкость, устойчивость, пассивная стабилизация, цилиндрическая полость.

Введение. Известно, что жидкость оказывает дестабилизирующее влияние на устойчивость вращения твердого тела. Как показано в работе С. Л. Соболева [1] вращение такого тела является довольно неустойчивым. В этой связи актуальной является задача поиска возможностей стабилизации такой механической системы. Одной из возможностей является ограничение подвижности жидкости путем введения в полость перегородок. В работе [2] показана возможность стабилизации вращения волчка при помощи безмассовых поперечных и коаксиальных перегородок. Однако на практике это не всегда может быть выполнено. Другой возможностью стабилизации могут быть гироскопические силы [3], внешние моменты [4]. Интересный эффект стабилизации неуравновешенного гироскопа Лагранжа вторым вращающимся был обнаружен донецкой школой механиков [5, 6]. В дальнейшем эффект стабилизации был исследован учениками А. Я. Савченко [7, 8].

В работах [9, 10] с учетом основного тона колебания жидкости показана возможность стабилизации неустойчивого свободного и несвободного вращения твердого тела с жидкостью при помощи вращающегося твердого тела. В статье [11] с учетом дополнительных тонов колебания жидкости разработана методика исследования задачи стабилизации свободного твердого тела с жидкостью вращающимся твердым телом. Данная статья является продолжением работы [11] на случай несвободного волчка Лагранжа с жидкостью.

Постановка задачи и метод исследования. Рассмотрим несвободную (точка O_1 неподвижная) систему двух твердых тел S_1 и S_2^0 , связанных упругим сферическим шарниром в точке O_2 (рис. 1). Тело S_1 содержит произвольную осесимметричную полость, полностью заполненную однородной, несжимаемой, идеальной жидкостью. В невозмущенном движении тело S_1 вращается как одно целое с угловой скоростью $\bar{\omega}_{01}$, а S_2^0 – с $\bar{\omega}_{02}$. Эти вращения происходят вокруг общей оси симметрии, параллельной вектору \bar{g} . Поставим задачу о возможности стабилизации неустойчивого вращения тела S_1 вторым вращающимся телом S_2^0 с учетом дополнительных тонов колебания жидкости.

Разработанный в статье [11] для свободной системы метод исследования будет распространен на случай несвободной системы. Уравнения возмущенного движения несвободной системы упруго связанных двух твердых тел, одно из которых содержит жидкость, имеют вид [12, 13]

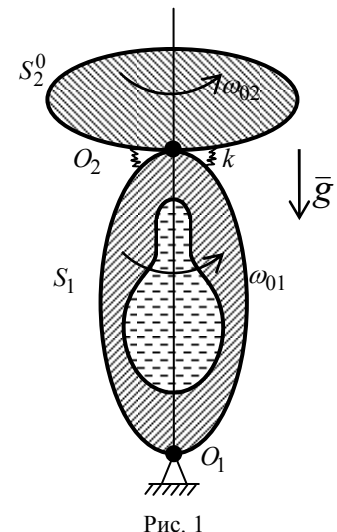
$$A'_1 \dot{\Omega}_1 + iC_1 \omega_{01} \Omega_1 + \tilde{a}_1 s_2 \dot{\Omega}_1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \dot{S}'_n = (\tilde{a}_1 g - k) \gamma_1,$$

$$A'_2 \dot{\Omega}_2 + iC_2 \omega_{02} \Omega_2 + s_2 \tilde{a}_1 \dot{\Omega}_1 = (\tilde{a}_2 g - k) \gamma_2, \quad \dot{\gamma}_1 = \Omega_1, \quad \dot{\gamma}_2 = \Omega_2, \quad (1)$$

$$\dot{S}'_n + i(\omega_{01} - \lambda_n) S'_n + a_n N_n^{-2} (\dot{\Omega}_1 + i\omega_{01} \Omega_1) = 0 \quad (n=1, 2, \dots),$$

$$A'_1 = A_1 + m_2 s_1^2, \quad A'_2 = A_2, \quad \tilde{a}_1 = m_1 c_1 + s_1 m_2, \quad \tilde{a}_2 = m_2 c_2.$$

Здесь A_j и C_j – соответственно главный экваториальный и осевой момент инерции тел S_1 и S_2^0 относительно точки O_j ($j=1, 2$);



$\Omega_j = q'_j - ip'_j$, $S'_n = e^{-i\omega_0 t} S_n$, $\gamma_j = \alpha_{13}^j + i\alpha_{23}^j$, $s_1 = O_1 O_2$, $c_1 = O_1 \tilde{C}_1$, $c_2 = O_2 \tilde{C}_2$; p'_j , q'_j – проекції возмущенної углової швидкості j -го тіла; S_n – коефіцієнти розкладання возмущенної відносительної швидкості жидкості; α_{13}^j і α_{23}^j – направляючі косинуси j -го тіла ($j = 1, 2$). В отличие от работы [11] в уравнении (1) моменты инерции A_j и C_j вычислены относительно точки O_j ($j = 1, 2$).

Частотное уравнение движения такой системы записывается следующим образом [11 – 13]

$$F_1 F_2 - \left(\mu + k / \lambda^2 \right)^2 = 0, \quad (2)$$

где

$$F_1 = A'_1 + \frac{C_1 \omega_{01}}{\lambda} + \frac{\tilde{a}_1 g - k}{\lambda^2} - (\lambda + \omega_{01}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n}{\lambda + \tilde{\lambda}_n}, \quad F_2 = A'_2 + \frac{C_2 \omega_{02}}{\lambda} + \frac{\tilde{a}_2 g - k}{\lambda^2},$$

$$\mu = s_1 \tilde{a}_2, \quad \tilde{\lambda}_n = (1 - 2 / \kappa_n) \omega_{01}.$$

В случае вырождения сферического шарнира в цилиндрический ($k = \infty$) уравнение (2) принимает вид

$$\tilde{F}_1 + \tilde{F}_2 + 2\mu = 0. \quad (3)$$

Здесь

$$\tilde{F}_1 = A'_1 + \frac{C_1 \omega_{01}}{\lambda} + \frac{\tilde{a}_1 g}{\lambda^2} - (\lambda + \omega_{01}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n}{\lambda + \tilde{\lambda}_n}, \quad \tilde{F}_2 = A'_2 + \frac{C_2 \omega_{02}}{\lambda} + \frac{\tilde{a}_2 g}{\lambda^2}.$$

С учетом только основного тона колебания жидкости ($n = 1$) частотное уравнение (2) принимает вид полинома 5-ой степени, которое исследовано в работах [9, 10], а при $n = 1, 2$ уравнение (2) записывается следующим образом

$$b_0 \lambda^6 + b_1 \lambda^5 + b_2 \lambda^4 + b_3 \lambda^3 + b_4 \lambda^2 + b_5 \lambda + b_6 = 0, \quad (4)$$

коэффициенты которого имеют вид

$$b_j = b_{j1} \tilde{\lambda}_1 + b_{j2} \tilde{\lambda}_2 + b_{j-2}^*(0, 0) \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 + b_j^*, \quad b_{j1} = b_{j-1}^*(0, E_2), \quad b_{j2} = b_{j-1}^*(E_1, 0), \quad (j = \overline{1, 6})$$

$$A_1^* = A'_1 - E_1 - E_2, \quad C_1^* = (C_1 - E_1 - E_2) \omega_{01}, \quad \tilde{C}_2 = C_2 \omega_{02};$$

$$b_0 = b_0^*(E_1, E_2) = A_1^* A'_2 - \mu^2, \quad b_1^*(E_1, E_2) = A'_2 C_1^* + A_1^* \tilde{C}_2, \quad b_{-1}^* = b_5^* = b_6^* = b_{61} = b_{62} = 0,$$

$$b_2^*(E_1, E_2) = -(A_1^* + A'_2 + 2\mu)k + C_1^* \tilde{C}_2 + g(A'_2 \tilde{a}_1 + A_1^* \tilde{a}_2),$$

$$b_3^*(E_1, E_2) = -(C_1^* + \tilde{C}_2)k + g(\tilde{C}_2 \tilde{a}_1 + C_1^* \tilde{a}_2), \quad b_4^* = g(\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 g - (\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2)k),$$

В случае трех тонов ($n = \overline{1, 3}$) уравнение (2) является полиномом 7-ой степени

$$b_0 \lambda^7 + b_1 \lambda^6 + b_2 \lambda^5 + b_3 \lambda^4 + b_4 \lambda^3 + b_5 \lambda^2 + b_6 \lambda + b_7 = 0, \quad (6)$$

где

$$b_j = b_{j1} \tilde{\lambda}_1 + b_{j2} \tilde{\lambda}_2 + b_{j3} \tilde{\lambda}_3 + b_{j-2}^*(0, 0, E_3) \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 + b_{j-2}^*(0, E_2, 0) \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_3 + b_{j-2}^*(E_1, 0, 0) \tilde{\lambda}_2 \tilde{\lambda}_3 +$$

$$+ b_{j-3}^*(0, 0, 0) \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \tilde{\lambda}_3 + b_j^*, \quad b_{j1} = b_{j-1}^*(0, E_2, E_3), \quad b_{j2} = b_{j-1}^*(E_1, 0, E_3), \quad b_{j3} = b_{j-1}^*(E_1, E_2, 0), \quad (7)$$

$$A_1^* = A'_1 - E_1 - E_2 - E_3, \quad \tilde{C}_2 = C_2 \omega_{02}, \quad C_1^* = (C_1 - E_1 - E_2 - E_3) \omega_{01};$$

$$b_0 = b_0^*(E_1, E_2, E_3) = A_1^* A'_2 - \mu^2, \quad b_1^*(E_1, E_2, E_3) = A'_2 C_1^* + A_1^* \tilde{C}_2, \quad b_{-1}^* = b_{-2}^* = b_5^* = b_6^* = b_7^* =$$

$$= b_{61} = b_{62} = b_{63} = b_{71} = b_{72} = b_{73} = 0, \quad b_2^*(E_1, E_2, E_3) = -(A_1^* + A'_2 + 2\mu)k + C_1^* \tilde{C}_2 + g(A'_2 \tilde{a}_1 + A_1^* \tilde{a}_2),$$

$$b_3^*(E_1, E_2, E_3) = -(C_1^* + \tilde{C}_2)k + g(\tilde{C}_2 \tilde{a}_1 + C_1^* \tilde{a}_2), \quad b_4^* = g(\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 g - (\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2)k), \quad (j = \overline{1, 7}).$$

Для свободной системы уравнения аналогичные (4) и (6) имели 5-ю и 6-ю степени соответственно [11]. Уравнение (3) при вырождении сферического шарнира в цилиндрический ($k = \infty$) и $n = 1$ будет кубическим

$$b_0 \lambda^3 + b_1 \lambda^2 + b_2 \lambda + b_3 = 0, \quad (8)$$

где

$$b_j = b_{j1} \tilde{\lambda}_1 + b_j^*, \quad b_{j1} = b_{j-1}^*(0), \quad (j = \overline{1, 3}), \quad b_{-1}^* = b_3^* = 0, \quad b_0 = b_0^*(E_1) = A_1^* + A'_2 + 2\mu,$$

$$b_1^*(E_1) = C_1^* + \tilde{C}_2, \quad b_2^*(E_1) = (\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2)g, \quad A_1^* = A'_1 - E_1, \quad C_1^* = (C_1 - E_1) \omega_{01}, \quad \tilde{C}_2 = C_2 \omega_{02}.$$

В случае цилиндрического шарнира ($k = \infty$) и $n = 1, 2$ уравнение (3) принимает вид

$$b_0 \lambda^4 + b_1 \lambda^3 + b_2 \lambda^2 + b_3 \lambda + b_4 = 0. \quad (9)$$

Коэффициенты уравнения (9) записываются в виде соотношений (5), в которых

$$b_0 = b_0^*(E_1, E_2) = A_1^* + A_2' + 2\mu, \quad b_1^*(E_1, E_2) = C_1^* + \tilde{C}_2, \\ b_2^*(E_1, E_2) = (\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2)g, \quad b_{-1}^* = b_{-2}^* = b_3^* = b_{41} = b_{42} = b_4^* = 0 \quad (j = \overline{1, 4}).$$

При $k = \infty$ и $n = \overline{1, 3}$ уравнение (3) записывается следующим образом

$$b_0 \lambda^5 + b_1 \lambda^4 + b_2 \lambda^3 + b_3 \lambda^2 + b_4 \lambda + b_5 = 0. \quad (10)$$

Коэффициенты этого уравнения находятся из рекуррентных формул (7), где

$$b_0 = b_0^*(E_1, E_2, E_3) = A_1^* + A_2' + 2\mu, \quad b_1^*(E_1, E_2, E_3) = C_1^* + \tilde{C}_2, \quad b_2^*(E_1, E_2) = (\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2)g, \\ b_{-1}^* = b_{-2}^* = b_3^* = b_4^* = b_{41} = b_{42} = 0 \quad (j = \overline{1, 5}).$$

Для аналитического исследования возможностей стабилизации и условий устойчивости необходимы условия действительности корней полученных многочленов 3-й, 4-ой, 5-ой, 6-ой и 7-ой степени. В настоящее время известен ряд критериев действительности всех корней алгебраических уравнений n -ой степени [14 – 16]. Однако ввиду громоздкости и сложности некоторые условия не являются общеприменимыми. Для поставленной задачи используются условия действительности корней, приведенные в работе [14].

Согласно работам [9 – 11], стабилизировать неустойчивое вращение несвободного волчка Лагранжа с жидкостью можно при помощи угловой скорости вращающегося твердого тела ω_{02} и его параметров: C_2, m_2, c_2 , а также при помощи коэффициента упругости шарнира k .

Влияние угловой скорости вращения и осевого момента инерции твердого тела на стабилизацию. Обозначим $\omega_0 = C_2 \omega_{02}$ и покажем, что с учетом двух гармоник ($n = 1, 2$) стабилизация при помощи основного параметра ω_0 возможна. Для этого представим коэффициенты уравнения (4) в виде соотношений $b_1 = a_{11}\omega_0 + \tilde{b}_1, b_2 = a_{21}\omega_0 + \tilde{b}_2, b_3 = a_{31}\omega_0 + \tilde{b}_3, b_4 = a_{41}\omega_0 + \tilde{b}_4, b_5 = a_{51}\omega_0 + \tilde{b}_5$. Подставив эти соотношения в условия действительности корней для уравнения 6-ой степени [14], получим условия устойчивости в виде 5-ти неравенств

$$d_{12}\omega_0^2 + d_{11}\omega_0 + d_{10} > 0, \\ d_{24}\omega_0^4 + d_{23}\omega_0^3 + \dots + d_{21}\omega_0 + d_{20} > 0, \\ d_{36}\omega_0^6 + d_{35}\omega_0^5 + \dots + d_{31}\omega_0 + d_{30} > 0, \\ d_{48}\omega_0^8 + d_{47}\omega_0^7 + \dots + d_{41}\omega_0 + d_{40} > 0, \\ d_{510}\omega_0^{10} + d_{59}\omega_0^9 + \dots + d_{51}\omega_0 + d_{50} > 0. \quad (11)$$

Здесь

$$d_{12} = 5a_{11}^2, \quad d_{24} = \tilde{d}_{21}k + \tilde{d}_{20}, \quad \tilde{d}_{21} = 60a_{11}^3, \quad a_{11} = A_1^* > 0, \quad d_{36} = \tilde{d}_{33}k^3 + \tilde{d}_{32}k^2 + \tilde{d}_{31}k + \tilde{d}_{30}, \\ \tilde{d}_{33} = 432a_{11}^3, \quad d_{48} = \tilde{d}_{45}k^5 + \tilde{d}_{44}k^4 + \dots + \tilde{d}_{41}k + \tilde{d}_{40}, \quad \tilde{d}_{45} = 1728a_{11}^3(\tilde{\lambda}_1^2 - \tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2 + \tilde{\lambda}_2^2), \\ d_{510} = \tilde{d}_{57}k^7 + \tilde{d}_{56}k^6 + \dots + \tilde{d}_{51}k + \tilde{d}_{50}, \quad \tilde{d}_{57} = 5184a_{11}^3\tilde{\lambda}_1^2\tilde{\lambda}_2^2(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2)^2.$$

Индексы в обозначении d_{ij} имеют следующий смысл: i – номер неравенства, j – степень параметра ω_0 ($i = \overline{1, 5}; j = \overline{1, 10}$). Следует отметить, что в отличие от свободной системы [11] в неравенствах (11) для несвободной системы добавилось последнее неравенство.

В неравенствах (11) коэффициент $d_{12} > 0$, а d_{24}, d_{36}, d_{48} и d_{510} являются многочленами относительно k с положительными коэффициентами при старших степенях, так как $a_{11} > 0, \tilde{\lambda}_1^2 + \tilde{\lambda}_2^2 - \tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2 = (\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2)^2 + \tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2 > 0$. Также, как и для свободной системы [11], при достаточно больших значениях k эти коэффициенты будут положительными. Следовательно, все коэффициенты при старших степенях в системе неравенств (11) положительные, откуда следует, что при достаточно больших ω_0 эти неравенства всегда будут верными.

Таким образом, показана возможность стабилизации с учетом двух гармоник. Проведем аналогичные исследования для трех гармоник ($n = \overline{1, 3}$). С этой целью представим коэффициенты (7) в виде соот-

ношений $b_1 = a_{11}\omega_0 + \tilde{b}_1$, $b_2 = a_{21}\omega_0 + \tilde{b}_2$, $b_3 = a_{31}\omega_0 + \tilde{b}_3$, $b_4 = a_{41}\omega_0 + \tilde{b}_4$, $b_5 = a_{51}\omega_0 + \tilde{b}_5$, $b_6 = a_{61}\omega_0 + \tilde{b}_6$ и, подставив их в условия действительности корней для уравнения 7-ой степени [14], получаем условия устойчивости в виде системы 6-ти неравенств. Первые пять неравенств имеют вид системы (11), а последнее записывается так

$$d_{612}\omega_0^{12} + d_{611}\omega_0^{11} + \dots + d_{61}\omega_0 + d_{60} > 0, \quad (12)$$

где

$$d_{12} = 6a_{11}^2, \quad d_{24} = \tilde{d}_{21}k + \tilde{d}_{20}, \quad \tilde{d}_{21} = 84a_{11}^3, \quad d_{36} = \tilde{d}_{33}k^3 + \tilde{d}_{32}k^2 + \tilde{d}_{31}k + \tilde{d}_{30}, \quad \tilde{d}_{33} = 784a_{11}^3, \\ d_{48} = \tilde{d}_{45}k^5 + \tilde{d}_{44}k^4 + \dots + \tilde{d}_{41}k + \tilde{d}_{40}, \quad \tilde{d}_{45} = 1372a_{11}^3(3\tilde{\lambda}_1^2 + 3\tilde{\lambda}_2^2 + 3\tilde{\lambda}_3^2 - 2\tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2 - 2\tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_3 - 2\tilde{\lambda}_2\tilde{\lambda}_3), \\ d_{510} = \tilde{d}_{57}k^7 + \tilde{d}_{56}k^6 + \dots + \tilde{d}_{51}k + \tilde{d}_{50},$$

$$\tilde{d}_{57} = 19208a_{11}^3 \left[[(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_3)^2 + \tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_3]\tilde{\lambda}_2^4 - (\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_3)[(\sqrt{2}\tilde{\lambda}_1 - \sqrt{2}\tilde{\lambda}_3)^2 + \tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_3]\tilde{\lambda}_2^3 + \right. \\ \left. + [\tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_3((\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_3)^2 + \tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_3) + (\tilde{\lambda}_1^2 - \tilde{\lambda}_3^2)]\tilde{\lambda}_2^2 - \tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_3(\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_3)(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_3)^2\tilde{\lambda}_2 + \tilde{\lambda}_1^2\tilde{\lambda}_3^2(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_3)^2 \right],$$

$$d_{612} = \tilde{d}_{69}k^9 + \tilde{d}_{68}k^8 + \dots + \tilde{d}_{61}k + \tilde{d}_{60}, \quad \tilde{d}_{69} = 67228a_{11}^3\tilde{\lambda}_1^2\tilde{\lambda}_2^2\tilde{\lambda}_3^2(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_3)^2(\tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_3)^2(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2)^2,$$

в обозначении d_{ij} : i – номер неравенства, j – степень параметра ω_0 ($i = \overline{1, 6}$; $j = \overline{1, 12}$).

Выписанные с учетом двух и трех гармоник неравенства (11), (12) уточняют условия устойчивости и стабилизации, полученные в работах [9, 10] для основного тона колебания жидкости. Проведя аналогичные рассуждения, делаем вывод о том, что при достаточно больших значениях ω_0 и k с учетом как двух, так и трех тонов колебания жидкости возможна стабилизация неустойчивого вращения волчка Лагранжа с жидкостью при помощи вращающегося твердого тела.

Влияние коэффициента упругости сферического шарнира на стабилизацию. Представив коэффициенты уравнения (4) в виде соотношений: $b_2 = a_{21}k + \tilde{b}_2$, $b_3 = a_{31}k + \tilde{b}_3$, $b_4 = a_{41}k + \tilde{b}_4$, $b_5 = a_{51}k + \tilde{b}_5$, $b_6 = a_{61}k + \tilde{b}_6$ и, воспользовавшись условиями действительности корней для уравнения 6-ой степени [14], получим условия устойчивости относительно параметра k с учетом двух тонов ($n = \overline{1, 2}$)

$$d_{11}k + d_{10} > 0, \\ d_{23}k^3 + d_{22}k^2 + d_{21}k + d_{20} > 0, \\ d_{35}k^5 + d_{34}k^4 + \dots + d_{31}k + d_{30} > 0, \\ d_{47}k^7 + d_{46}k^6 + \dots + d_{41}k + d_{40} > 0, \\ d_{59}k^9 + d_{58}k^8 + \dots + d_{51}k + d_{50} > 0. \quad (13)$$

Здесь

$$d_{11} = -12b_0a_{21}, \quad d_{23} = -96b_0a_{21}^3, \quad d_{35} = \tilde{d}_{32}\omega_0^2 + \tilde{d}_{31}\omega_0 + \tilde{d}_{30}, \quad \tilde{d}_{32} = -432b_0a_{21}^3, \\ d_{47} = \tilde{d}_{44}\omega_0^4 + \tilde{d}_{43}\omega_0^3 + \dots + \tilde{d}_{41}\omega_0 + \tilde{d}_{40}, \quad \tilde{d}_{44} = -1728b_0a_{21}^3(\tilde{\lambda}_1^2 - \tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2 + \tilde{\lambda}_2^2), \quad b_0 = A_1^*A_2' - \mu^2, \\ d_{59} = \tilde{d}_{56}\omega_0^6 + \tilde{d}_{55}\omega_0^5 + \dots + \tilde{d}_{51}\omega_0 + \tilde{d}_{50}, \quad \tilde{d}_{56} = -5184b_0a_{21}^3\tilde{\lambda}_1^2\tilde{\lambda}_2^2(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2)^2, \quad a_{21} = -(A_1^* + A_2' + 2\mu).$$

В системе неравенств (13) коэффициенты d_{11} и d_{23} положительные, так как $b_0 > 0$ и $a_{21} < 0$, а d_{35} , d_{47} и d_{59} являются многочленами относительно ω_0 с положительными коэффициентами при старших степенях. Аналогично работе [11], при достаточно больших значениях ω_0 эти коэффициенты будут положительными. Следовательно, все коэффициенты при старших степенях в системах неравенств (13) положительные, откуда следует, что при достаточно больших k эти неравенства всегда будут выполнены.

Таким образом, показана возможность стабилизации с учетом двух гармоник. Проведем аналогичные исследования для трех гармоник ($n = \overline{1, 3}$). Для этого представим коэффициенты уравнения (6) следующим образом: $b_2 = a_{21}k + \tilde{b}_2$, $b_3 = a_{31}k + \tilde{b}_3$, $b_4 = a_{41}k + \tilde{b}_4$, $b_5 = a_{51}k + \tilde{b}_5$, $b_6 = a_{61}k + \tilde{b}_6$, $b_7 = a_{71}k + \tilde{b}_7$. Подставив их в условия действительности корней для уравнения 7-ой степени [14], получим условия устойчивости относительно параметра k в виде 6-ти неравенств. Первые пять неравенств имеют вид (13), а шестое – записывается так

$$d_{611}k^{11} + d_{610}k^{10} + \dots + d_{61}k + d_{60} > 0, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} d_{11} &= -14b_0a_{21}, \quad d_{23} = -140b_0a_{21}^3, \quad d_{35} = \tilde{d}_{32}\omega_0^2 + \tilde{d}_{31}\omega_0 + \tilde{d}_{30}, \quad b_0 = A_1^*A_2' - \mu^2 > 0, \\ \tilde{d}_{32} &= -784b_0a_{21}^3, \quad d_{47} = \tilde{d}_{44}\omega_0^4 + \tilde{d}_{43}\omega_0^3 + \dots + \tilde{d}_{41}\omega_0 + \tilde{d}_{40}, \quad a_{21} = -(A_1^* + A_2' + 2\mu) < 0, \\ \tilde{d}_{44} &= -1372b_0a_{21}^3(3\tilde{\lambda}_1^2 + 3\tilde{\lambda}_2^2 + 3\tilde{\lambda}_3^2 - 2\tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2 - 2\tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_3 - 2\tilde{\lambda}_2\tilde{\lambda}_3), \\ d_{59} &= \tilde{d}_{56}\omega_0^6 + \tilde{d}_{55}\omega_0^5 + \dots + \tilde{d}_{51}\omega_0 + \tilde{d}_{50}, \quad d_{611} = \tilde{d}_{68}\omega_0^8 + \tilde{d}_{67}\omega_0^7 + \dots + \tilde{d}_{61}\omega_0 + \tilde{d}_{60}, \\ \tilde{d}_{56} &= -19208b_0a_{21}^3 \left[[(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_3)^2 + \tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_3]\tilde{\lambda}_2^4 - (\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_3)[(\sqrt{2}\tilde{\lambda}_1 - \sqrt{2}\tilde{\lambda}_3)^2 + \tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_3]\tilde{\lambda}_2^3 + \right. \\ &+ \left. [\tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_3((\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_3)^2 + \tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_3) + (\tilde{\lambda}_1^2 - \tilde{\lambda}_3^2)]\tilde{\lambda}_2^2 - \tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_3(\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_3)(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_3)^2\tilde{\lambda}_2 + \tilde{\lambda}_1^2\tilde{\lambda}_3^2(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_3)^2 \right], \\ \tilde{d}_{68} &= -67228b_0a_{21}^3\tilde{\lambda}_1^2\tilde{\lambda}_2^2\tilde{\lambda}_3^2(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2)^2(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_3)^2(\tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_3)^2. \end{aligned}$$

Аналогичным образом доказывается, что при достаточно больших значениях ω_0 и k система неравенств (13) – (14) выполнена, и значит с учетом трех тонов колебания жидкости возможна стабилизация неустойчивого вращения волчка Лагранжа с жидкостью при помощи вращающегося твердого тела.

Влияние цилиндрического шарнира на возможность стабилизации. С учетом основного тона условия действительности корней для уравнения (8) записываются в виде первых двух неравенств системы (11), в которых старшие коэффициенты такие: $d_{12} = a_{11}^2$, $d_{24} = 3a_{11}^2a_{21}^2$, $a_{11} = 1$, $a_{21} = \tilde{\lambda}_1$.

С учетом двух тонов условия действительности корней для уравнения (9) имеют вид первых трех неравенств системы (11), в которых $d_{12} = a_{11}^2$, $d_{24} = 12a_{11}^4$, $d_{36} = (3a_{21}^2 - 4a_{11}a_{31})^3 - 108a_{11}^2a_{21}^2a_{31}^2$, $4a_{11} = 1$, $6a_{21} = \tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2$, $4a_{31} = \tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2$.

При учете трех тонов условия действительности корней для уравнения (10) записываются в виде первых четырех неравенств системы (11), где $d_{12} = 4a_{11}^2$, $d_{24} = 5a_{11}^2(3a_{21}^2 - 8a_{11}a_{31})$, $a_{11} = 1$, $d_{36} = 50a_{11}^2(a_{21}^2a_{31}^2 - 3a_{21}^3a_{41} - 4a_{11}a_{31}^3 + 14a_{11}a_{21}a_{31}a_{41} - 18a_{11}^2a_{41}^2)$, $a_{31} = \tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2 + \tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_3 + \tilde{\lambda}_2\tilde{\lambda}_3$, $a_{21} = \tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2 + \tilde{\lambda}_3$, $a_{41} = \tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2\tilde{\lambda}_3$.

Как и ранее, полученные условия устойчивости и стабилизации выполнены при достаточно больших значениях ω_0 .

Численные расчеты. В качестве примера, подтверждающего аналитические исследования, проведены численные расчеты для цилиндрической полости. Твердое тело S_1^0 выбирается в виде безмассовой ($m_{10} = 0$) и безинерционной оболочки ($A_{10} = C_{10} = 0$), а вращающееся твердое тело полагается в виде тонкого кругового диска с параметрами $m_2 = 1$, $r = 1$ и центром масс, совпадающим с общей точкой ($c_2 = 0$). Как и для свободной системы [11], остановимся на случаях $n = \{0, 1\} \cup \{0, 2\}$ – два тона колебания жидкости и $n = \{0, 1\} \cup \{0, 2\} \cup \{0, 3\}$ – три тона колебания жидкости.

Все области представлены в зависимости от параметров ω_0 и H ($H = h/a$, где $2h$ и a – высота и радиус цилиндрической полости соответственно). Области устойчивости закрашены. При изменении геометрии полости (h и a) масса жидкости не меняется.

Одновременное увеличение угловой скорости вращения твердого тела и коэффициента упругости шарнира приводит к увеличению области устойчивости (рис. 2).

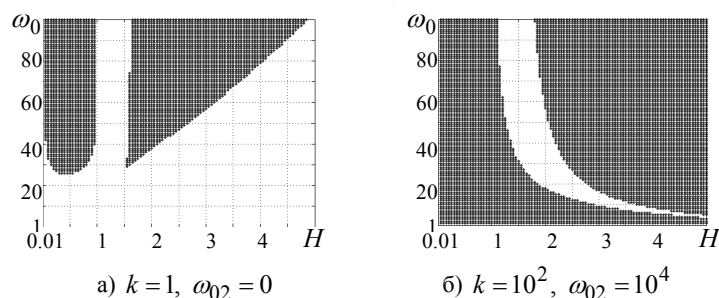


Рис. 2. Области устойчивости с учетом основного тона (сферический шарнир)

Из рис. 3 следует, что с увеличением угловой скорости ($\omega_{02} = 0 \div 10^3$) область неустойчивости уменьшается и смещается вправо, а при $\omega_{02} = 8 \cdot 10^4$ – полностью исчезает. Если вращение волчка с жидкостью и твердого тела происходят в противоположные стороны ($\omega_0 \cdot \omega_{02} < 0$), то область неустойчивости смещается вверх, при $\omega_{02} = 7 \cdot 10^3$ – волчок с жидкостью стабилизируется.

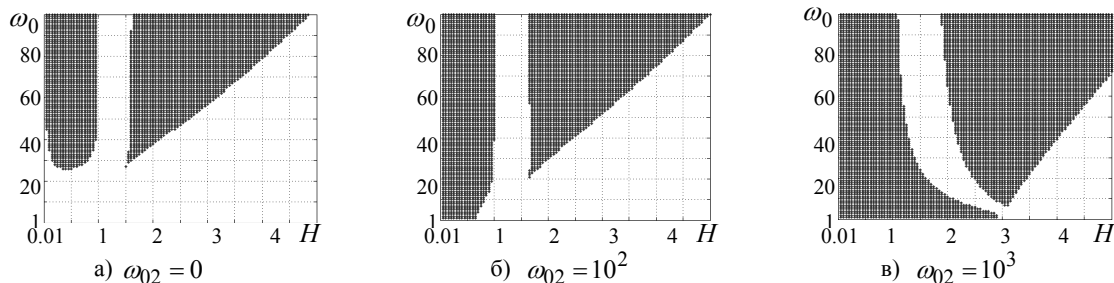


Рис. 3. Области устойчивости с учетом основного тона (цилиндрический шарнир)

С учетом двух и трех тонов колебания жидкости в зоне устойчивости появляется дополнительная область неустойчивости (рис. 4, 5), что соответствует результатам работы [17].

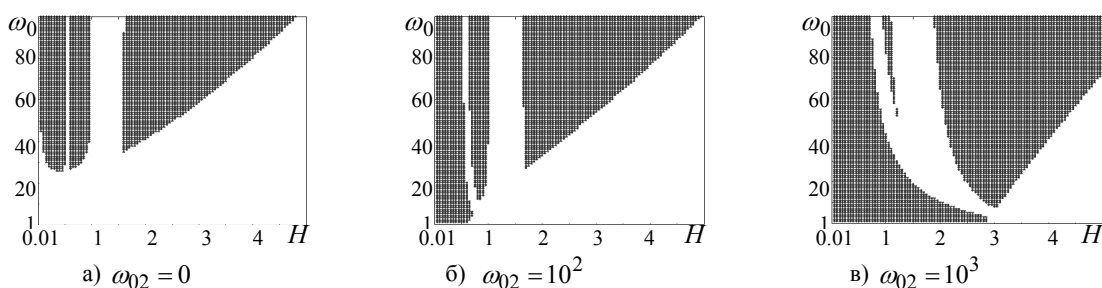


Рис. 4. Области устойчивости с учетом двух тонов (цилиндрический шарнир)

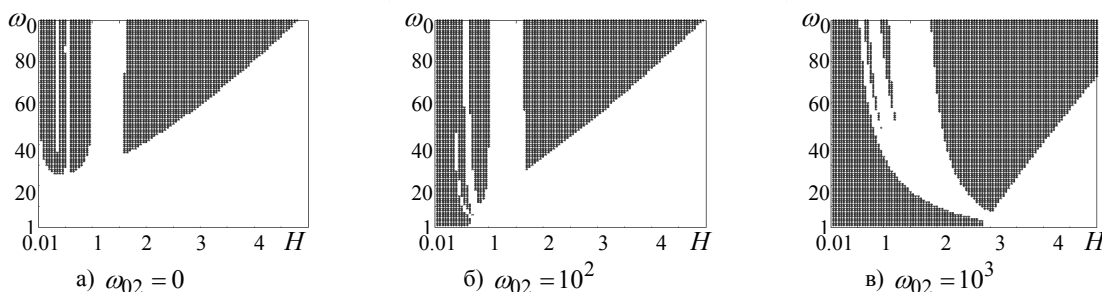


Рис. 5. Области устойчивости с учетом трех тонов (цилиндрический шарнир)

Выводы. С учетом дополнительных тонов колебания идеальной жидкости получены необходимые условия устойчивости равномерного вращения несвободной системы двух упруго связанных волчков Лагранжа, один из которых содержит жидкость. Аналитически показана возможность стабилизации при помощи вращающегося твердого тела неустойчивого вращения волчка Лагранжа с произвольной осесимметричной полостью, содержащей идеальную жидкость. Результаты аналитических исследований подтверждены проведенными численными расчетами для цилиндрической полости. Как и для свободной системы [11], эффективность стабилизации возрастает при замене сферических шарниров на цилиндрические. Стабилизация наиболее эффективна, когда волчок с жидкостью и твердое тело вращаются в противоположные стороны. Из приведенных ранее расчетов с учетом только основного тона колебания [9, 10] и проведенных в данной работе с учетом двух и трех тонов следует, что учет дополнительных тонов приводит к появлению незначительных дополнительных областей неустойчивости, которые исчезают с увеличением угловой скорости вращения твердого тела и коэффициента упругости шарнира.

Таким образом, методика, разработанная для свободной системы обобщена на случай несвободной системы. Несмотря на то, что механические системы отличаются принципиально, основные механические эффекты для этих систем проявляются аналогичным образом. Следует также отметить, что эффект стабилизации несвободной системы наступает быстрее, чем для свободной, хотя области неустойчивости для несвободной системы значительно больше по сравнению с областями для свободной системы.

РЕЗЮМЕ

Розглядається задача про стійкість та стабілізацію нестійкого обертання невільного вовчка Лагранжа з довільною осесиметричною порожниною, що містить ідеальну рідину, за допомогою твердого тіла, що обертається. В рамках необхідних умов стійкості аналітично показано можливість стабілізації з урахуванням додаткових тонів коливання рідини. Чисельні розрахунки підтвердили результати аналітичних досліджень.

Ключові слова: вовчок Лагранжа, ідеальна рідина, стійкість, пасивна стабілізація, циліндрична порожнина.

SUMMARY

The problem about stability and stabilization by rotating rigid body of unsteady rotation of the not free top Lagrange with an arbitrary axisymmetrical cavity with an ideal fluid is examined. On the necessary conditions of stability the possibility stabilization is shown analytically with account additional tones of oscillation fluid. Numerical calculations were confirmed by the results of analytical researches.

Keywords: top of Lagrange, ideal fluid, stability, passive stabilization, cylindrical cavity.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Соболев С. Л. О движении симметричного волчка с полостью, наполненной жидкостью / С. Л. Соболев // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1960. – № 3. – С. 20-55.
2. Кононов Ю. Н. О влиянии перегородок в цилиндрической полости на устойчивость равномерного вращения волчка Лагранжа / Ю.Н.Кононов // Мат. физика и нелинейная механика. – 1992. – Вып. 7 (51). – С. 33-37.
3. El-Gohary Awad. Optimal stabilization of a rigid body motion using rotors systems / El-Gohary Awad // Appl. Math. and Comput. – 2003. – Vol. 136, No 2-3. – P. 229-239.
4. Агафонова С. А. Стабилизация стационарного движения спутника-гиростата с помощью внешних моментов / С. А. Агафонова, А. Д. Герман // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2004. – № 4. – С. 3-6.
5. Савченко А. Я. Устойчивость стационарных движений механических систем / А. Я. Савченко. – К.: Наук. думка. – 1977. – 160 с.
6. Савченко А. Я. Устойчивость движения систем связанных твердых тел / А. Я. Савченко, И. А. Болградская, Г. А. Кононыхин. – К.: Наук. думка, 1991. – 168 с.
7. Лесина М. Е. О стабилизации покоящегося уравновешенного гироскопа Лагранжа / М. Е. Лесина // Механика твердого тела. – 1979. – Вып. 11. – С. 88-92.
8. Светличная Н. В. Об эффекте стабилизации покоящегося неуравновешенного гироскопа вторым вращающимся / Н. В. Светличная // Механика твердого тела. – 1989. – Вып. 21. – С. 74-76.
9. Кононов Ю. Н. Об эффекте стабилизации неустойчивого вращения твердого тела с жидкостью вращающимся твердым телом / Ю. Н. Кононов, Т. В. Хомяк // Механика твердого тела. – 2004. – Вып. 34. – С. 161-169.
10. Kononov Y. N. On the rotation stabilization of the unstable gyroscope containing fluid by rotating the rigid body / Y. N. Kononov, T. V. Khomyak // Facta Universitatis, Series Mechanics, Automatic Control and Robotics. – 2005. – Vol. 4, No 17 – P. 195-201.
11. Кононов Ю. Н. Влияние дополнительных тонов колебания жидкости на устойчивость и стабилизацию вращения свободного волчка Лагранжа с идеальной жидкостью / Ю. Н. Кононов, Т. В. Хомяк // Вісник Донецького нац. ун-ту, Сер. А: Природничі науки. – 2011. – Вип. 1. – С. 7-13.
12. Кононов Ю. Н. Об устойчивости движения системы связанных твердых тел с полостями, содержащими жидкость / Ю. Н. Кононов // Механика твердого тела. – 2006. – Вып. 36. – С. 75-82.
13. Кононов Ю. Н. О движении системы двух твердых тел с полостями, содержащими жидкость / Ю. Н. Кононов // Механика твердого тела. – 1997. – Вып. 29. – С. 76–85.
14. Коваль В. И. О действительности всех корней характеристического многочлена уравнений первого приближения в динамике твердого тела / В. И. Коваль // Механика твердого тела – 1999. – Вып. 28. – С. 130-145.
15. Ручкин К. А. Устойчивость равномерных вращений и стабилизация движений системы двух твердых тел: дис... канд. физ.-мат. наук: 01.02.01 / К. А. Ручкин. – Донецк, 1999. – 146 с.
16. Lu Yang. Recent Advances on Determining the Number of Real Roots of Parametric Polynomials / Lu Yang // J. Symb. Comput. – 1999. – Vol. 28 (1-2). – P. 225-242.
17. Докучаев Л. В. Об устойчивости стационарного вращения твердого тела с полостью, содержащей жидкость / Л. В. Докучаев, Р. В. Рвалов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – № 2. – С. 6-14.

Поступила в редакцию 12.12.2012 г.

УДК 539.213; 530.1

**УПОРЯДОЧЕНИЕ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОЛЯ ДЕФОРМАЦИИ
ФРАКТАЛЬНОЙ ДИСЛОКАЦИИ В МОДЕЛЬНОЙ НАНОСИСТЕМЕ***В.С. Абрамов**Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина НАН Украины, г. Донецк*

Выполнено обобщение двухточечной модели на случай смешанных состояний. Исследованы статистические свойства поля деформации фрактальной дислокации в модельной наносистеме. Изменение порядка следования отдельных операторов в парных составных операторах приводит к эффекту отклонения функций распределения типа Ферми-Дирака, Бозе-Эйнштейна, смешанной статистики от исходных. Показано, что отдельные узловые плоскости модельной наносистемы могут находиться в инверсных структурных состояниях.

Ключевые слова: фрактальная дислокация, двухточечная модель, статистические свойства, функции распределения, эффект упорядочения.

Введение. В качестве активных элементов в наноструктурных системах обычно выбирают примесные кристаллы с активными рабочими атомами (или группой атомов, агрегатов, кластеров [1]). Для экспериментальных исследований физических свойств отдельных атомов (электронов, фотонов) и квантовых измерений необходимо создание специальных ловушек: наносистем – плененная частица (или группа частиц) в ловушке. Такие ловушки могут быть полезными для реализации оптических квантовых вычислений при обработке квантовой информации [2, 3], измерений в квантовой оптике [4]. В работе [5] В. Пауль рассмотрел электромагнитные ловушки для заряженных и нейтральных частиц (обладающих дипольным моментом). Такие ловушки (осуществляющие фокусировку и захват частиц полем электрических или магнитных мультиполей) не имеют материальных стенок и позволяют исследовать группу изолированных частиц (даже одиночных) в течение длительных интервалов времени, дают возможность измерять различные физические свойства этих частиц с предельно высокой точностью. Обычно все измерения проводятся с ансамблями частиц, а измеряемая величина является усредненной по всем частицам. При этом молчаливо полагают, что статистическое поведение всех частиц, точно такое же, как если бы результат был получен с одиночной частицей. Однако, качественно новые атомные измерения можно выполнить имея плененный одиночный атом в ловушке: наблюдать взаимодействие этого атома с полем излучения и собственное статистическое поведение отдельного атома в чистом виде. В работах [6, 7] предложены экспериментальные методы, которые сделали реальным измерения отдельных квантовых систем и управление ими. Экспериментальные исследования особенностей статистических свойств отдельных квантовых систем в нейтронных спиновых измерениях [8], при наблюдении Бозе-Эйнштейновской конденсации [9] показали присутствие корреляций в измеряемых величинах. Фрактальная дислокация является одним из структурных объектов в наноструктурных материалах [10 – 13]. В данной работе рассматривается модельная наносистема: модельный образец конечных размеров с объемной решеткой в виде прямоугольного параллелепипеда. Для описания статистических свойств поля деформации фрактальной дислокации в [13] была предложена двухточечная модель. В этой работе для описания чистых состояний поля деформации фрактальной дислокации при получении усредненных функций предполагалась выполнимость операции перестановки операторов под знаком вычисления следа квадратных матриц (Sp). Однако, указанная операция строго справедлива только для эрмитовых операторов. В нашем случае эти операторы не являются эрмитовыми, поскольку им соответствуют исходные прямоугольные матрицы с комплексными матричными элементами. С другой стороны, описание смешанных состояний для функций смещений узлов решетки требует введения плотности состояний и учета распределения этой плотности состояний по узлам объемной решетки. При этом статистические свойства поля деформации фрактальной дислокации зависят от порядка следования отдельных операторов смещения в эффективных составных операторах, через которые определяются усредненные функции – корреляционные функции, функции распределения в основных и инверсных структурных состояниях, коэффициенты корреляции.

Цель данной работы – обобщение двухточечной модели на случай смешанных состояний и учет эффекта упорядочения операторов при описании как чистых, так и смешанных состояний поля деформации фрактальной дислокации.

Описание чистых состояний в рамках двухточечной модели. Рассматривается образец конечных размеров с объемной решеткой $N_1 \times N_2 \times N_3$ в виде прямоугольного параллелепипеда. Отклонения узлов решетки от состояния покоя в отдельной плоскости $N_1 \times N_2$ при фиксированных значениях z_1 и

z_2 описываются не эрмитовыми операторами смещений $\hat{u}(z_1)$ и $\hat{u}(z_2)$, которым соответствуют прямоугольные матрицы с размерами $N_1 \times N_2$. При этом

$$z_1 = 0.053 + 0.1(j-1); \quad z_2 = 6.653 - 0.1(j-1); \quad j = \overline{1; N_3}. \quad (1)$$

Выбор такой схемы для z_1 и z_2 соответствует прямой и обратной волнам смещений $u_{nm}(z_1)$ и $u_{nm}(z_2)$ внутри объемной решетки $N_1 \times N_2 \times N_3$. Элементы $u_{nm}(z_1)$ и $u_{nm}(z_2)$ в общем случае являются случайными комплексными функциями от действительных переменных z_1 и z_2 , а также зависят от фрактальной размерности α вдоль оси Oz и ряда других внутренних, внешних управляющих параметров. Поэтому для описания комплексного поля деформации фрактальной дислокации используются элементы теории случайных матриц и вводятся усредненные функции в рамках статистического подхода, где усреднение выполняется по узловым индексам n, m . Отметим, что при этом усреднение по z отсутствует. Не эрмитовым операторам $\hat{u}^+(z_1), \hat{u}^+(z_2)$ соответствуют прямоугольные матрицы с размерами $N_2 \times N_1$, где значок «+» означает операцию эрмитового сопряжения. В общем случае элементы этих матриц являются случайными комплексными функциями от целочисленных индексов n, m, j . С целью описания поля деформации фрактальной дислокации в терминах квадратных матриц вводим составные операторы

$$\hat{M}_1 = \hat{u}(z_1) \hat{u}^+(z_1); \quad \hat{M}_3 = \hat{u}(z_2) \hat{u}^+(z_2); \quad \hat{M}_5 = \hat{u}(z_1) \hat{u}^+(z_2); \quad \hat{M}_7 = \hat{M}_5^+ = \hat{u}(z_2) \hat{u}^+(z_1); \quad (2)$$

$$\hat{M}_2 = \hat{u}^+(z_2) \hat{u}(z_2); \quad \hat{M}_4 = \hat{u}^+(z_1) \hat{u}(z_1); \quad \hat{M}_6 = \hat{u}^+(z_2) \hat{u}(z_1); \quad \hat{M}_8 = \hat{M}_6^+ = \hat{u}^+(z_1) \hat{u}(z_2). \quad (3)$$

Операторам из (2) и (3) соответствуют квадратные матрицы с размерами $N_1 \times N_1$ и $N_2 \times N_2$. Составные операторы $\hat{M}_1, \hat{M}_2, \hat{M}_3, \hat{M}_4$ из (2), (3) являются эрмитовыми операторами и удовлетворяют условиям

$$(\hat{M}_1)^+ = \hat{M}_1^+ = \hat{M}_1; \quad \hat{M}_3^+ = \hat{M}_3; \quad \hat{M}_2^+ = \hat{M}_2; \quad \hat{M}_4^+ = \hat{M}_4. \quad (4)$$

Выполнив усреднение по узловым индексам n, m с помощью операции вычисления следа Sp квадратных матриц (2), (3), получим усредненные функции $M_p, H_p, tg\varphi_p$

$$M_p = Sp \hat{M}_p = M'_p + M''_p; \quad M_p^* = Sp \hat{M}_p^+; \quad H_p = |M_p|^2 = (Sp \hat{M}_p)(Sp \hat{M}_p^+); \quad tg\varphi_p = M''_p / M'_p. \quad (5)$$

где $M'_p = \text{Re} M_p$, $M''_p = \text{Im} M_p$ соответствующей комплексной усредненной функции M_p ; Re, Im – операции выделения реальной, мнимой частей; i – мнимая единица; значок «*» означает операцию комплексного сопряжения; индекс p принимает целочисленные значения 1, 2, 3, ..., 8. Далее вводим эрмитовые операторы \hat{S}_p , усредненные функции S_p , корреляционные функции K_p

$$K_p = S_p - H_p; \quad S_p = Sp \hat{S}_p; \quad \hat{S}_p = \hat{M}_p \hat{M}_p^+; \quad \hat{S}_p^+ = \hat{S}_p. \quad (6)$$

Введенные усредненные и корреляционные функции (5), (6) зависят от двух точек z_1 и z_2 , что следует из (2), (3). Поведение самих точек z_1 и z_2 параметрически связано зависимостями от целочисленного индекса j . В общем случае выбор указанных зависимостей определяется конкретной задачей. В данной работе рассматривается схема зависимостей в виде (1). Поэтому все введенные усредненные и корреляционные функции являются сложными функциями от $z_1(j)$ и $z_2(j)$. При этом функции $K_1(z_1(j), z_1(j))$, $K_2(z_2(j), z_2(j))$, $K_3(z_2(j), z_2(j))$, $K_4(z_1(j), z_1(j))$ имеют смысл автокорреляционных функций, а функции $K_5(z_1(j), z_2(j))$, $K_6(z_2(j), z_1(j))$, $K_7(z_2(j), z_1(j))$, $K_8(z_1(j), z_2(j))$ – взаимных корреляционных функций. Выполнив нормировку указанных функций, получим

$$f'_p - f_p = 1; \quad f'_p = H_p / S_p; \quad f_p = -K_p / S_p; \quad (7)$$

$$F'_p + F_p = 1; \quad F'_p = S_p / H_p; \quad F_p = -K_p / H_p. \quad (8)$$

Отметим, что в нашем случае функции $S_p(j)$ являются положительными. Для $p = 1, 2, 3, 4$ функции K_p являются отрицательными при всех $j \in [1; N_3]$, поэтому f_p и f'_p являются положительными и допускают интерпретацию типа функций распределения Бозе-Эйнштейна в основном и возбужденном состояниях, соответственно. При этом F_p и F'_p допускают интерпретацию типа функций распределения Ферми-Дирака в основном и возбужденном состояниях, соответственно. Для $p = 5, 6, 7, 8$ функции K_p являются знакопеременными внутри области изменения $j \in [1; N_3]$. При этом для тех областей изменения j , где функции K_p становятся положительными, f_p и f'_p теперь допускают интерпретацию типа функций рас-

пределения Ферми-Дирака, а F_p и F'_p допускают интерпретацию типа функций распределения Бозе-Эйнштейна в основном и возбужденном состояниях, соответственно. Таким образом, для $p = 5, 6, 7, 8$ функции f_p, f'_p, F_p, F'_p описывают состояния со смешанной статистикой внутри отрезка $j \in [1; N_3]$.

Описание смешанных состояний в рамках двухточечной модели. Для описания смешанных состояний вводим эффективные составные операторы смещений в состояниях ρp , соответственно,

$$\hat{u}_{\rho 1} = \hat{\rho}_{12} \hat{u}^+(z_1); \quad \hat{u}_{\rho 3} = \hat{\rho}_{12} \hat{u}^+(z_2); \quad \hat{u}_{\rho 5} = \hat{u}_{\rho 1}^+ = \hat{u}(z_1) \hat{\rho}_{12}^T; \quad \hat{u}_{\rho 7} = \hat{u}_{\rho 3}^+ = \hat{u}(z_2) \hat{\rho}_{12}^T; \quad (9)$$

$$\hat{u}_{\rho 2} = \hat{\rho}_{21} \hat{u}(z_1); \quad \hat{u}_{\rho 4} = \hat{\rho}_{21} \hat{u}(z_2); \quad \hat{u}_{\rho 6} = \hat{u}_{\rho 2}^+ = \hat{u}^+(z_1) \hat{\rho}_{21}^T; \quad \hat{u}_{\rho 8} = \hat{u}_{\rho 4}^+ = \hat{u}^+(z_2) \hat{\rho}_{21}^T. \quad (10)$$

Введённым операторам $\hat{u}_{\rho p}$ соответствуют квадратные матрицы с размерами $N_1 \times N_1$ для $p = 1, 3, 5, 7$ и с размерами $N_2 \times N_2$ для $p = 2, 4, 6, 8$. Операторы плотности состояний $\hat{\rho}_{12}, \hat{\rho}_{12}^T, \hat{\rho}_{21}, \hat{\rho}_{21}^T$ имеют вид

$$\hat{\rho}_{12} = \hat{\xi}_{N_1}^T \hat{\xi}_{N_2} / N_1 N_2; \quad \hat{\rho}_{12}^T = \hat{\xi}_{N_2}^T \hat{\xi}_{N_1} / N_1 N_2; \quad \hat{\rho}_{21} = \hat{\rho}_{12}^T; \quad \hat{\rho}_{21}^T = \hat{\rho}_{12}, \quad (11)$$

где значок T означает операцию транспонирования; $\hat{\xi}_{N_1}, \hat{\xi}_{N_2}$ – вектор-строки размерности $1 \times N_1, 1 \times N_2$ с элементами равными единице. Прямоугольные матрицы $\hat{\rho}_{12}, \hat{\rho}_{21}$ имеют размеры $N_1 \times N_2, N_2 \times N_1$. Для операторов из (11) выполняются условия нормировки

$$\hat{\xi}_{N_1} \hat{\rho}_{12} \hat{\xi}_{N_2}^T = 1; \quad \hat{\xi}_{N_2} \hat{\rho}_{21} \hat{\xi}_{N_1}^T = 1. \quad (12)$$

Выполнив усреднение по узловым индексам n, m с помощью операции вычисления следа Sp квадратных матриц (9), (10), получим усредненные функции $u_{\rho p}, H_{\rho p}, tg\varphi_{\rho p}$

$$u_{\rho p} = Sp \hat{u}_{\rho p} = u'_{\rho p} + i u''_{\rho p}; \quad u_{\rho p}^* = Sp \hat{u}_{\rho p}^+; \quad H_{\rho p} = |u_{\rho p}|^2 = (Sp \hat{u}_{\rho p})(Sp \hat{u}_{\rho p}^+); \quad tg\varphi_{\rho p} = u''_{\rho p} / u'_{\rho p}. \quad (13)$$

где $u'_{\rho p} = Re u_{\rho p}, u''_{\rho p} = Im u_{\rho p}$ соответствующей комплексной усредненной функции $u_{\rho p}$; индекс p принимает целочисленные значения 1, 2, 3, ..., 8. Далее вводим эрмитовые операторы $\hat{S}_{\rho p}$, усредненные функции $S_{\rho p}$, корреляционные функции K_{sp}

$$K_{sp} = S_{\rho p} - H_{\rho p}; \quad S_{\rho p} = Sp \hat{S}_{\rho p}; \quad \hat{S}_{\rho p} = \hat{u}_{\rho p} \hat{u}_{\rho p}^+; \quad \hat{S}_{\rho p}^+ = \hat{S}_{\rho p}. \quad (14)$$

Введенные усредненные и корреляционные функции (13), (14) зависят от двух точек z_1 и z_2 , что следует из (9), (10) и (14), которые, в свою очередь, параметрически зависят выражениями (1) от целочисленного индекса j . При этом функции $K_{s1}(z_1(j), z_1(j)), K_{s3}(z_2(j), z_2(j)), K_{s5}(z_1(j), z_1(j)), K_{s7}(z_2(j), z_2(j))$ и $K_{s2}(z_1(j), z_1(j)), K_{s4}(z_2(j), z_2(j)), K_{s6}(z_1(j), z_1(j)), K_{s8}(z_2(j), z_2(j))$ имеют смысл автокорреляционных функций для состояний sp с $p = 1, 3, 5, 7$ и с $p = 2, 4, 6, 8$, соответственно. Методом численного моделирования будет показано, что все корреляционные функции $K_{sp}(j)$ являются положительными внутри отрезка $j \in [1; N_3]$. Выполнив нормировку указанных функций, получим

$$f'_{sp} - f_{sp} = 1; \quad f'_{sp} = S_{\rho p} / H_{\rho p}; \quad f_{sp} = K_{sp} / H_{\rho p}; \quad (15)$$

$$F'_{sp} + F_{sp} = 1; \quad F_{sp} = H_{\rho p} / S_{\rho p}; \quad F'_{sp} = K_{sp} / S_{\rho p}. \quad (16)$$

Численное моделирование и анализ результатов. Исходные прямоугольные матрицы смещений $\hat{u}(z_1)$ и $\hat{u}(z_2)$ с элементами $u_{nm}(z_1) = u_{\varepsilon 1}(z_1), u_{nm}(z_2) = u_{\varepsilon 1}(z_2)$ внутри объемной решетки $N_1 \times N_2 \times N_3 = 30 \times 40 \times 67$ были получены методом итераций по индексу m для первой ветви безразмерной комплексной функции смещения $u(z) = u_{\varepsilon 1}(z)$ по формулам из работы [2] при тех же исходных параметрах и начальных условиях. При этом $n = \overline{1, 30}; m = \overline{1, 40}$; выбор модельных параметров соответствовал состоянию прямоугольной дискретной подрешетки $N_1 \times N_2$ с фрактальной дислокацией, локализованной внутри этой области параллельно оси Om . Для чистых состояний с $p = 1, 2, 3, 4$ показано, что $M''_p = 0$ и выполняется условие $S_p < H_p$, поэтому $M_p = M'_p, tg\varphi_p = 0, H_p = |M'_p|^2, K_p < 0$ (отрицательные корреляции для операторов \hat{M}_p, \hat{M}_p^+). При этом автокорреляционные функции K_p в терминах операторов \hat{M}_p из (6) являются корреляционными функциями первого порядка. С другой стороны, в терминах операторов $\hat{u}(z)$ из (2), (3), эти функции можно рассматривать как корреляционные

функції другого порядку. На рис. 1, 2 приведені залежності функцій розподілення типу Бозе-Ейнштейна (рис. 1) і Фермі-Дірака (рис. 2) від цілочисленного індексу $j = \overline{1; 67}$ узлової площини для чистих состояний с $p = 1, 2, 3, 4$, які враховують наявність негативних кореляцій. Функція розподілення $f_4(j)$ при збільшенні j (рис. 1, а) змінюється хаотично поблизу значення 1, виходить на стохастичний пік при $j = 26$ зі значенням $f_4(26) = 4.3818$ і далі знову хаотично змінюється по іншому закону поблизу значення 1. Функція розподілення $f_2(j)$ при збільшенні j (рис. 1, в) так же змінюється хаотично поблизу значення 1, виходить на стохастичний пік при іншому значенні $j = 42$ з тим же значенням $f_4(42) = 4.3818$ і далі знову хаотично змінюється по іншому закону поблизу значення 1. Для функцій розподілення типу Фермі-Дірака глобальні максимуми зі значеннями $F_4(26) = F_2(42) = 0.8142$ (рис. 2, а, в) спостерігаються в тих же точках, в яких у функцій $f_4(j)$, $f_2(j)$ спостерігаються основні піки. При цьому значення функцій $F_4(j)$, $F_2(j)$ в окремих піках перевищують значення 0.5, що характерно для інверсних состояний Фермі-системи.

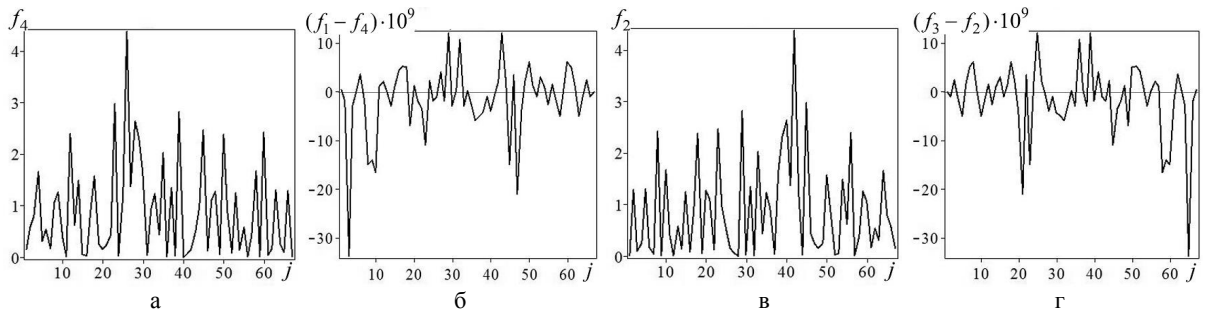


Рис. 1

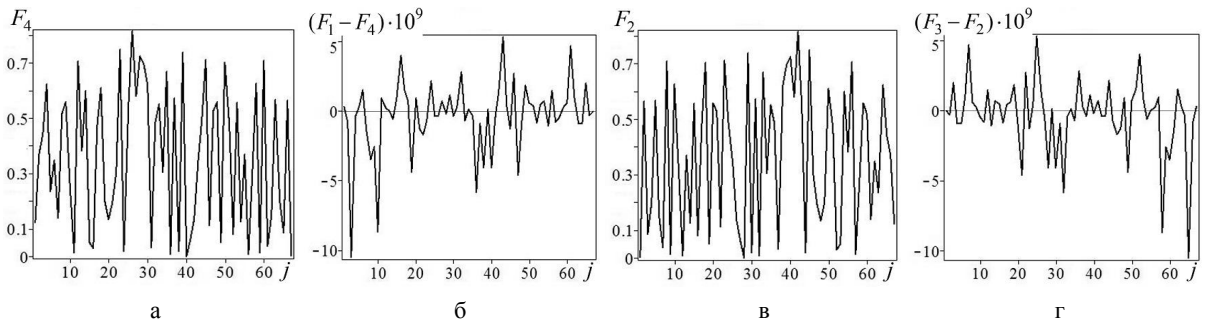


Рис. 2

Залежності функцій розподілення зі змішаною статистикою від цілочисленного індексу j узлової площини для чистих состояний с $p = 5, 6, 7, 8$ приведені на рис. 3, 4: а – f_7 , F_7 , б – $f_5 - f_7$, $F_5 - F_7$, в – f_8 , F_8 ; з – $f_6 - f_8$, $F_6 - F_8$. Зміна знаку у функцій f_7, f_8 (рис. 3, а, в), F_7, F_8 (рис. 4, а, в) в окремих точках при зміні j підтверджує наявність змішаної статистики. Поведіння функцій розподілення залежить від порядку слідування операторів \hat{u}, \hat{u}^+ в (2), (3). Зміна порядку слідування цих операторів супроводжується зміною розмірності квадратних матриць. Так операторам з (2) і (3) відповідають квадратні матриць з різними розмірами 30×30 і 40×40 , тому далі виконано порівняння відповідних функцій розподілення. При цьому якісне поведіння функцій

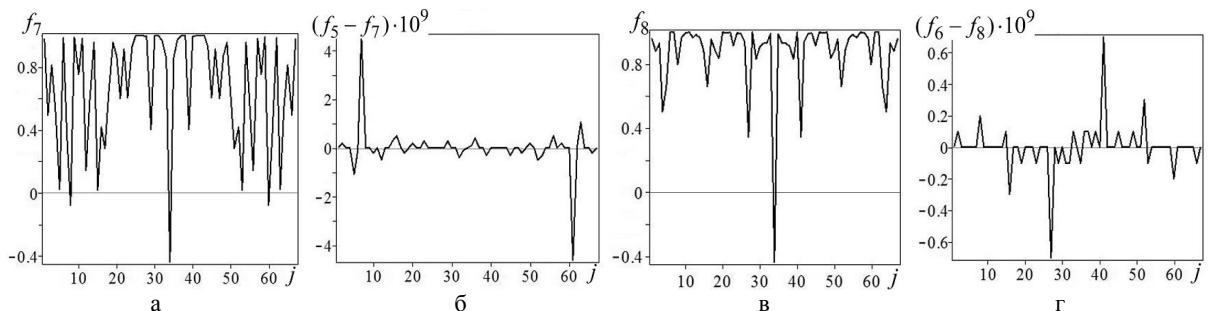


Рис. 3

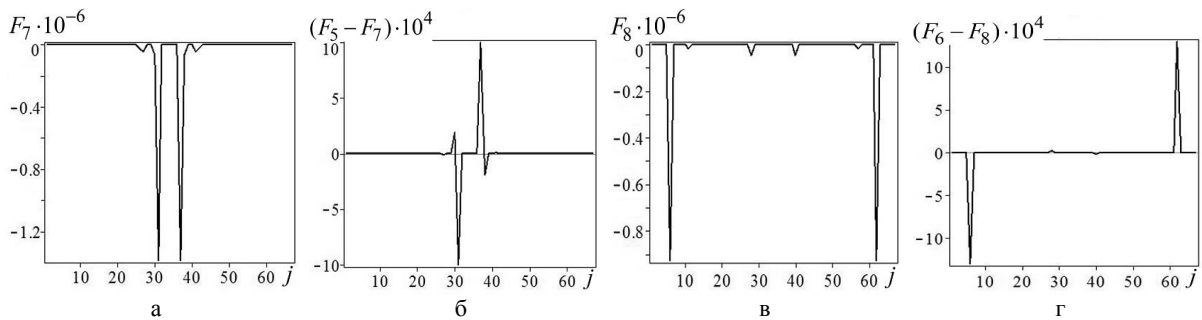


Рис. 4

распределений из конкретной пары функций: (f_1, f_4) – рис. 1, б; (f_3, f_2) – рис. 1, з; (f_5, f_7) – рис. 3, б; (f_6, f_8) – рис. 3, з; (F_1, F_4) – рис. 2, б; (F_3, F_2) – рис. 2, з практически совпадает. Имеются лишь небольшие отклонения порядка $10^{-8} \div 10^{-9}$ для всех $j = 1; 67$. Для пар функций (F_5, F_7) – рис. 4, б; (F_6, F_8) – рис. 4, з отклонения также порядка $10^{-8} \div 10^{-9}$, за исключением отдельных значений j , где отклонения порядка $10^{-3} \div 10^{-4}$. Это связано с различным поведением функций распределения со смешанной статистикой F_5, F_6, F_7 (рис. 4, а), F_8 (рис. 4, в) для этих отдельных значений j . На рис. 5 приведены зависимости отклонений функций распределений от целочисленного индекса j узловой плоскости для чистых состояний в разных точках z_1, z_2 : а – для функций типа Бозе-Эйнштейна $f_2 - f_4$; б – для функций типа Ферми-Дирака $F_2 - F_4$; для функций со смешанной статистикой в – $f_7 - f_8$, з – $F_7 - F_8$.

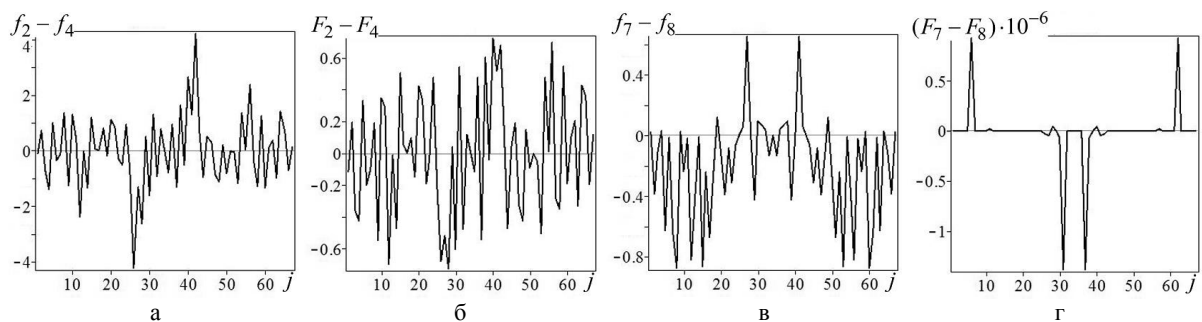


Рис. 5

Анализ результатов численного моделирования для смешанных состояний показывает, что все корреляционные функции первого порядка K_{sp} являются положительно определенными на всем отрезке $j \in [1, 67]$. Это означает, что для состояний sp выполняются неравенства $S_{\rho\rho} > H_{\rho\rho}$, $K_{sp} > 0$, т.е. существуют корреляционные связи с положительными коэффициентами корреляции R_{sp} (основное состояние) или R'_{sp} (возбужденное состояние). Поведение R_{sp} , R'_{sp} , как функций от j совпадает с поведением функций распределения типа Ферми-Дирака $F_{sp} = R_{sp}$, $F'_{sp} = R'_{sp}$.

На рис. 6 приведены зависимости функций распределения типа Ферми-Дирака а – F_{s5} , в – F_{s7} и Бозе-Эйнштейна б – f_{s5} , з – f_{s7} от целочисленного индекса j узловой плоскости для смешанных состояний sp для $p = 5, 7$. Функция распределения $F_{s5}(j)$ при увеличении j (рис. 6, а) изменяется хаотически вблизи значения 0.1, выходит на стохастический пик при $j = 26$ со значением $F_{s5}(26) = 0.3315$ и далее вновь хаотически изменяется по другому закону вблизи значения 0.1. Функция распределения $F_{s7}(j)$ при увеличении j (рис. 6, в) так же изменяется хаотически вблизи значения 0.1, выходит на стохастический пик при другом значения $j = 42$ с тем же значением $F_{s7}(42) = 0.3315$ и далее вновь хаотически изменяется по другому закону вблизи значения 0.1. При этом значения функций $F_{s5}(j)$, $F_{s7}(j)$ в пиках не превышают значения 0.5, что характерно для основного состояния Ферми-системы. Функции распределения типа Бозе-Эйнштейна $f_{s5}(j)$, $f_{s7}(j)$ (рис. 6, б, з) хаотически изменяются при увеличении j вблизи числа заполнения равного 10, в отдельных плоскостях наблюдаются пики с большими числами заполнения. Такое поведение функций $f_{s5}(j)$, $f_{s7}(j)$ указывает на то, что основное состояние

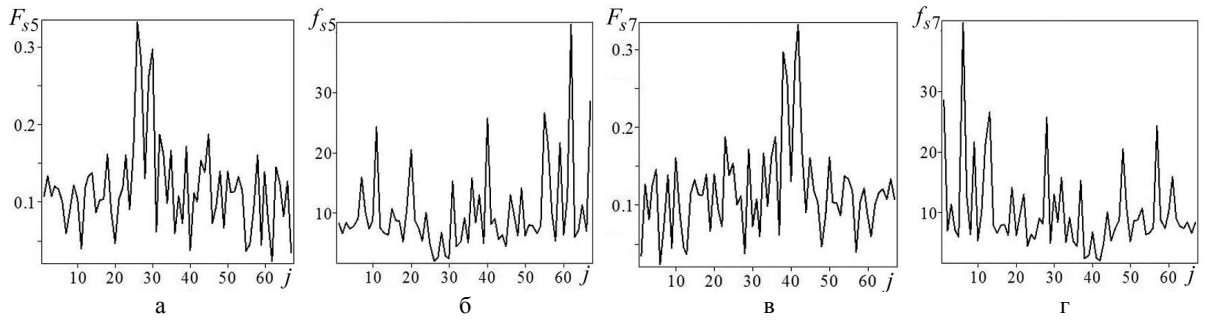


Рис. 6

Бозе-система является заполненной (число заполнения больше 1). Глобальные минимумы со значениями $f_{s5}(26) = f_{s7}(42) = 2.0162$ наблюдаются в точках, в которых у функций $F_{s5}(j)$, $F_{s7}(j)$ наблюдаются основные пики. Указанные значения функций в глобальных минимумах и основных пиках свидетельствуют об учете корреляций в основных и возбужденных состояниях как Бозе-, так и Ферми-системы. При этом автокорреляционная функция K_{s5} описывает прямую волну в состоянии $s5$, а автокорреляционная функция K_{s7} – обратную волну для состояния $s7$.

На рис. 7 приведены зависимости функций распределения типа Ферми-Дирака $a - F_{s6}$, $в - F_{s8}$ и Бозе-Эйнштейна $б - f_{s6}$, $г - f_{s8}$ от целочисленного индекса j узловой плоскости для смешанных состояний sp с $p = 6, 8$. Функции распределения типа Ферми-Дирака $F_{s6}(j)$, $F_{s8}(j)$ при увеличении j (рис. 7, а, в) изменяются хаотически вблизи значения 0.5. При этом значения функций в отдельных пиках превышают значения 0.5, что характерно для инверсных состояний Ферми-системы. Функции распределения типа Бозе-Эйнштейна $f_{s6}(j)$, $f_{s8}(j)$ (рис. 7, б, г) хаотически изменяются при увеличении j вблизи чисел заполнения от 0 до 10, в отдельных плоскостях наблюдаются пики с большими числами заполнения.

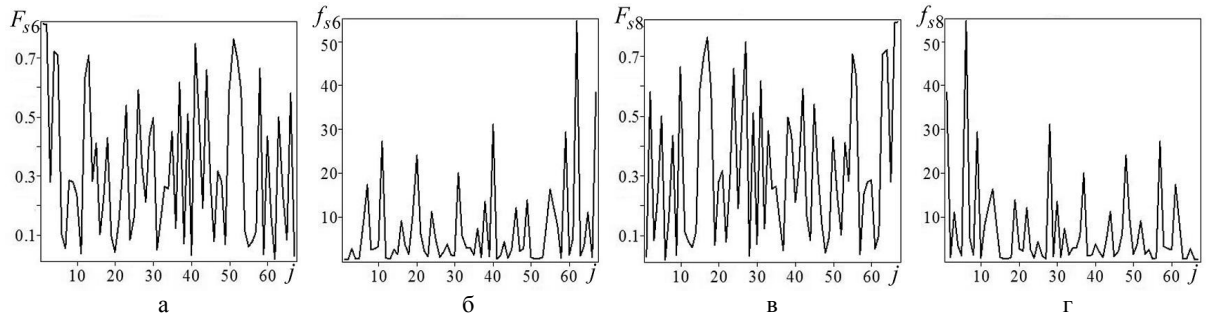


Рис. 7

Учет упорядочения в парных составных операторах (смещения и плотности распределения состояний по узлам решетки) из (9), (10) приводит к эффекту отклонения функций распределения. Качественное поведение функций распределения из конкретной пары функций (f_{s1}, f_{s5}) , (f_{s2}, f_{s6}) , (f_{s3}, f_{s7}) , (f_{s4}, f_{s8}) , (F_{s1}, F_{s5}) , (F_{s2}, F_{s6}) , (F_{s3}, F_{s7}) , (F_{s4}, F_{s8}) практически совпадает. Имеются лишь небольшие отклонения порядка $10^{-8} \div 10^{-9}$ для всех $j = \overline{1; 67}$. Однако отклонения функций распределения из разных пар для смешанных состояний в разных точках z_1, z_2 существенны (рис. 8). Указанные отклонения при $j = 34$ строго равны нулю, а поведение функций относительно этого значения j антисимметрично.

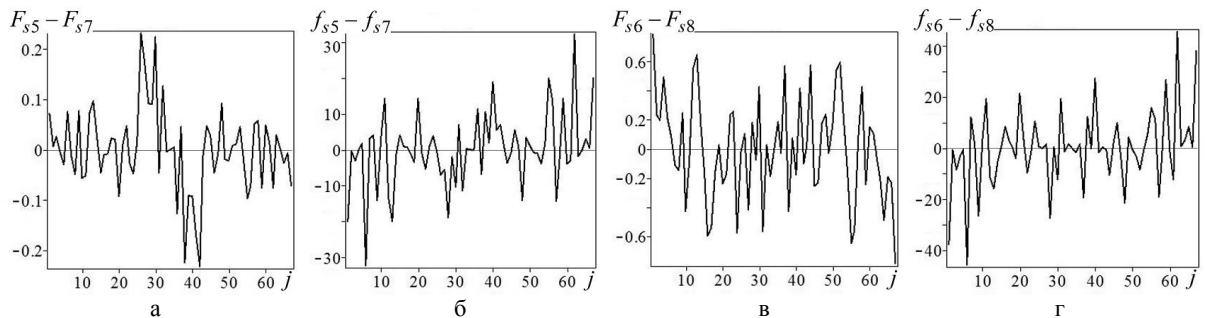


Рис. 8

Выводы. Для чистых состояний поведение функций распределения зависит от порядка следования операторов смещения \hat{u}, \hat{u}^+ в составных операторах типа \hat{M}_p и для смешанных состояний – от порядка следования операторов плотности состояний $\hat{\rho}_{12}, \hat{\rho}_{21}$ и операторов смещения \hat{u}, \hat{u}^+ в эффективных составных операторах типа $\hat{u}_{\rho\rho}$. Изменение порядка следования операторов в составных операторах приводит к эффекту отклонения соответствующих функций распределения от исходных. Методом численного моделирования установлено ярко выраженное стохастическое поведение функций распределения, показано изменение статистики с типа Ферми-Дирака на статистику типа Бозе-Эйнштейна для отдельных внутренних узловых плоскостей. Это подтверждает теоретический вывод о наличии смешанной статистики. Анализ функций распределений показывает, что отдельные узловые плоскости могут находиться в инверсных структурных состояниях. Для смешанных состояний существуют корреляционные связи с положительными коэффициентами корреляции, а для чистых состояний имеют место отрицательные корреляции.

РЕЗЮМЕ

Виконано узагальнення двохточечної моделі на випадок змішаних станів поля деформації фрактальної дислокації в модельній наносистемі. Досліджено статистичні властивості поля деформації фрактальної дислокації. Зміна порядку слідування окремих операторів в парних складових операторах приводить до ефекту відхилення функцій розподілу типу Фермі-Дірака, Бозе-Ейнштейна, змішаної статистики від вихідних. Показано, що окремі вузлові площини модельної наносистеми можуть знаходитися в інверсних структурних станах.

Ключові слова: фрактальна дислокація, двохточечна модель, статистичні властивості, функції розподілу, ефект упорядкування.

SUMMARY

The generalization of the two-point model to the case of mixed states of the fractal dislocation deformation field in model nanosystem is fulfilled. The statistical properties of the deformation field of fractal dislocation are investigated. The change of order of the following of separate operators in pair composite operators results in the effect of deviation of Fermi-Dirac and Bose-Einstein distribution functions, mixed statistics from the initial ones. It is shown that the individual nodal plane of the model nanosystem can be in the inverse structural states.

Keywords: fractal dislocation, two-point model, statistical properties, distribution functions, effect of ordering.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Шпак А.Н. Кластерные и наноструктурные материалы. Т. 1 / А.Н. Шпак, Ю.А. Куницкий, В.Л. Карбовский. – К.: издательский дом «Академперіодика», 2001. – 588 с.
2. Башаров А.М. Когерентный контроль квантовых корреляций в атомных системах / А.М. Башаров, А.А. Башкеев, Э.А. Манькин // ЖЭТФ. – 2005. – Т. 127, вып. 3. – С. 536-550.
3. Мирошниченко Г.Г. Дискретное фотодетектирование для протоколов линейных оптических квантовых вычислений и коммуникаций / Г.Г. Мирошниченко // ЖЭТФ. – 2011. – Т. 139, вып. 6. – С. 1055-1065.
4. Скалли М.О. Квантовая оптика: Пер. с англ. / М.О. Скалли, М.С. Зубайри / Под ред. В.В. Самарцева. – М.: Физматлит, 2003. – 512 с.
5. Пауль В. Электромагнитные ловушки для заряженных и нейтральных частиц // УФН. – 1990. – Т. 160, вып. 12. – С. 109-127.
6. Gleyzes S. Quantum jumps of light recording the birth and death of a photon in a cavity / S. Gleyzes, S. Kuhr, C. Guerlin // Nature. – 2007. – Vol. 446. – P. 297-300.
7. Chou C.W. Optical Clocks and Relativity / C.W. Chou, D.B. Hume, T. Rosenband // Science. – 2010. – Vol. 329. – P. 1630-1633.
8. Erhart J. Experimental demonstration of a universally valid error-disturbance uncertainty relation in spin measurements / J. Erhart, S. Sponar, G. Sulyok // Nature Physics. – 2012. – Vol. 8. – P. 185-189.
9. Perrin A. Hanbury Brown and Twiss correlations across the Bose-Einstein condensation threshold / A. Perrin, R. Bücker, S. Manz // Nature Physics. – 2012. – Vol. 8. – P. 195-198.
10. Абрамов В.С. Фрактальная дислокация как один из неклассических структурных объектов в наноразмерных системах / В.С. Абрамов // Металлофизика и новейшие технологии. – 2011. – Т. 33, № 2. – С. 247-251.
11. Абрамова О.П. Перестройка структуры стохастического поля деформации дислокации при изменении управляющих параметров / О.П. Абрамова, С.В. Абрамов // Металлофизика и новейшие технологии. – 2011. – Т. 33, № 4. – С. 519-524.
12. Абрамова О.П. Детерминированное и стохастическое управления перестройкой структуры фрактальной дислокации / О.П. Абрамова, С.В. Абрамов // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2011. – № 2. – С. 30-35.
13. Абрамов В.С. Особенности статистических свойств поля деформации фрактальной дислокации / В.С. Абрамов // Вісник Донецьк. нац. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2012. – № 1. – С. 105-113.

Поступила в редакцію 26.02.2013 г.

УДК 538.95

РОЗРАХУНКИ АНТИФЕРОМАГНІТНОГО СТАНУ ТА ДІЛЕКТРИЧНОЇ ЩІЛИНИ ЯДРА ВИХОРУ АБРИКОСОВА АНТИФЕРОМАГНІТНОГО НАДПРОВІДНИКА S і D ТИПУ

В.В. Гаркуша

Одержано квазікласичні рівняння надпровідності для надпровідних антиферромагнітних металів з d-типом спарювання електронів, у яких той самий тип електронів є носієм магнітних і надпровідних властивостей системи, а закон дисперсії електронів і дірок для досить великого числа векторів, що лежать поблизу поверхні Фермі, має властивість нестінга. В рамках запропонованої моделі одержані вирази дозволяють розрахувати параметри антиферромагнітного та надпровідного упорядкування для вихору Абрикосова з антиферромагнітним ядром у випадку відсутності просторової ізотропності, а також вивчити область співіснування антиферромагнетизму та надпровідності для надпровідників d-типу. Проведено числові розрахунки параметрів порядку у «першому наближенні».

Ключові слова: функції Гріна, параметр надпровідного упорядкування, параметр антиферромагнітного упорядкування.

Вступ. Однією з найбільш цікавих властивостей високотемпературних надпровідників являється тісна взаємодія між антиферромагнітною та надпровідною фазами. Надпровідність та антиферромагнетизм являються антагоністичними явищами і їх співіснування в однорідних матеріалах вимагає виконання дуже складних умов. Основний ряд високотемпературних надпровідних матеріалів отримують в результаті допіювання шаруватих антиферромагнетиків, і інтенсивні антиферромагнітні кореляції спинів міді в площинах CuO є їх характерною рисою (див., наприклад, огляди [1]). Відомо також (див., наприклад, [2]), що антиферромагнітний порядок більш сприятливий для появи надпровідності, чим ферромагнітний. Тому природно очікувати, що фаза співіснування надпровідності та антиферромагнетизму на H - T діаграмі станів буде займати більшу область, ніж для фаз з іншою структурою магнітного порядку [3]. Останнє важливо для практичного застосування таких об'єктів.

Було виявлено, що вихоривий стан на відміну від надпровідного має сильнішу тенденцію щодо «відтворення» магнітного порядку. Так як магнетизм розповсюджується за межі ядра вихору, це означає, що антиферромагнітні кореляції і надпровідність співіснують і в глибині матеріалу. Дійсно, в ряді експериментальних робіт по вивченню поведінки ядра надпровідного вихору в магнітному полі для надпровідників на основі купратів (наприклад для структур $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_x$, $\text{Tl}_2\text{Ba}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_2\text{O}_y$), була підтверджена наявність антиферромагнітних кореляцій не лише в середині ядра вихору, але й за його межами [4 – 8].

Проблема тісної взаємодії між антиферромагнетизмом та надпровідністю інтенсивно вивчається протягом останніх років як для надпровідників s-типу так і для надпровідників d-типу в рамках різних моделей [9 – 12]. Серед важливих проблем, які інтенсивно вивчаються в даному напрямку можна виділити вивчення структури надпровідного вихору з антиферромагнітним ядром та встановлення типу симетрії параметра порядку. Зокрема в роботах [9, 13 – 15] на основі різних моделей проводились розрахунки параметрів надпровідного та антиферромагнітного порядку для вихору з антиферромагнітним ядром.

Нещодавнє відкриття [15, 16] високотемпературних надпровідних властивостей у сполука типу $\text{LaFeAs}(\text{O}_{1-x}\text{F}_x)$ (з $T_C = 26$ К при $x=0.11$) та інших споріднених матеріалах з найвищою температурою надпровідного переходу T_C до 55 К у $\text{SmFeAs}(\text{O}_{1-x}\text{F}_x)$ викликано значний інтерес і надало новий зміст проблемі конкуренції антиферромагнітного та надпровідного параметрів порядку. Це пов'язано з тим, що «батьківський» матеріал LaFeAsO має слоїсту структуру і антиферромагнітний порядок, а надпровідні властивості, подібно до високотемпературних купратних надпровідників, виникає після допіювання. При цьому магнітний порядок придушується. Розрахунки зонної структури сполук типу LaOFeAs показують, що у цих напівметалах існує майже ідеальний нестінг поверхні Фермі, що й веде до антиферромагнітного стану типу «spin density wave».

Проблема конкуренції антиферромагнітного та надпровідного параметрів порядку отримала додаткову мотивацію у зв'язку з відкриттям надпровідних властивостей у оксидних FeAs пніктидів [14 – 16]. Так як і в високотемпературних надпровідниках, в цих матеріалах надпровідний режим реалізується поблизу антиферромагнітного основного стану.

В роботі квазікласичні рівняння надпровідності для металів, у яких один і той самий тип електронів є носієм магнітних і надпровідних властивостей системи, а закон дисперсії електронів і дірок для досить великого числа векторів, що лежать поблизу поверхні Фермі, має властивість нестінга, розв'язуються методом розкладу по параметру магнітного порядку. Проведені чисельні розрахунки структури надпровідного вихору Абрикосова з антиферромагнітним ядром для випадку $T_C > T_N$, вивчена можливість співіснування антиферромагнетизму та надпровідності для надпровідників d-типу у моделі, принципово відмінній від $\text{SO}(5)$.

Розв'язок рівнянь Ейленбергера розкладом по степенях параметру надпровідності. Будемо виходити з положення, що магнітні властивості майже усіх відомих зонних антиферромагнетиків, у яких спостерігається перехід у надпровідний стан, тісно зв'язані з особливостями їхньої зонної структури [18]. А саме: поверхня Фермі таких металів має властивість нестінга, тобто складається з майже співпадаючих при трансляції на деякий хвильовий вектор Q електронних і діркових ділянок. Перехід у магнітовпорядкований стан супроводжується появою на поверхні Фермі триплетної по спіну діелектричної щільності, що впливає не тільки на нормальні, але і на надпровідні властивості системи. Теорія термодинамічних і транспортних властивостей систем, що демонструють співіснування надпровідності і хвиль спінової щільності, інтенсивно розвивалася останнім часом (див., наприклад, монографію [19] і огляд [1]). Разом з тим, узагальнення рівнянь Ейленбергера [22] чи Узаделя [21] на такого типу системи виконані тільки для окремих випадків [9]. Раніше вважалося, що описати структуру вихору в рамках квазічасткової теорії неможливо, але авторами в роботі [9] в рамках даної теорії була розрахована структура вихору з урахуванням s -спарювання електронів.

Було одержано квазікласичні рівняння надпровідності для надпровідних антиферромагнітних металів з d -типом спарювання електронів, у яких той самий тип електронів є носієм магнітних і надпровідних властивостей системи, а закон дисперсії електронів і дірок для досить великого числа векторів, що лежать поблизу поверхні Фермі, має властивість нестінга. Гамільтоніан такої системи має вигляд:

$$H = \sum_{\sigma} \int d\vec{r} \left\{ \psi_{\sigma}^{\dagger} \xi_1 \psi_{\sigma} + \phi_{\sigma}^{\dagger} \xi_2 \phi_{\sigma} \right\} + \int d\vec{r} \left\{ \Delta_A \psi_{\uparrow}^{\dagger} \phi_{\uparrow} + \Delta_A \psi_{\downarrow}^{\dagger} \phi_{\downarrow} + \Delta_A \phi_{\downarrow}^{\dagger} \psi_{\downarrow} + \Delta_A \phi_{\uparrow}^{\dagger} \psi_{\uparrow} \right\} + \int d\vec{r} \left\{ \left[\Delta_1(\vec{r}) \psi_{\uparrow}^{\dagger} \psi_{\downarrow}^{\dagger} + \Delta_2(\vec{r}) \phi_{\uparrow}^{\dagger} \phi_{\downarrow}^{\dagger} \right] - \left[\Delta_1^*(\vec{r}) \psi_{\uparrow} \psi_{\downarrow} + \Delta_2^*(\vec{r}) \phi_{\uparrow} \phi_{\downarrow} \right] \right\}.$$

Тут ψ_{σ}^{\dagger} , ψ_{σ} та ϕ_{σ}^{\dagger} , ϕ_{σ} – оператори народження і знищення електронів і дірок у 1-й і 2-й зонах, відповідно, закон дисперсії яких задовольняє умові (нестінг):

$$\xi(\vec{p}) = \xi_p - \mu, \quad \xi(\vec{p} - \vec{Q}) = -\xi_p - \mu.$$

Тут для випадку антиферромагнітної (подвоєної) комірки $\vec{Q} = \pm \vec{K}/2$, \vec{K} – вектор оберненої ґратки кристала. Під оператором ξ_p мається на увазі оператор $p^2/2m - E_F$, якщо немає зовнішнього магнітного поля, і $(p^2 - e\vec{A})^2/2m - E_F$, при наявності поля (\vec{A} – векторний потенціал). $\Delta_1(\vec{r})$, $\Delta_2(\vec{r})$ – зонні параметри надпровідного упорядкування; параметр магнітного упорядкування; Δ_A (молекулярне поле Нееля) можна вважати дійсною величиною; $E_F = p_0^2/2m$ – енергія Фермі, μ – хімічний потенціал; у даному розділі ми поклали $\hbar = 1$.

Використовуючи загальну схему теорії наближень, проведемо розв'язок наступних рівнянь Ейленбергера розкладом по степенях параметру надпровідності у випадку коли температура Нееля менше температури надпровідного стану ($T_N < T_{CSC}$):

$$(i\nu_F \vec{n} \nabla_R) G_{11} + \Delta F_{11} - \Delta^* F_{11} + \Delta_A^* G_{12} - \Delta_A G_{21} = 0, \quad (1)$$

$$(2i\omega - i\nu_F \vec{n} \nabla_R - 2p_F \vec{n} \vec{v}_S) F_{11} + \Delta^* (G_{11} + \tilde{G}_{11}) = 0, \quad (2)$$

$$(2i\omega - i\nu_F \vec{n} \nabla_R) G_{21} - \Delta_A^* (G_{11} + G_{22}) = 0, \quad (3)$$

$$(i\nu_F \vec{n} \nabla_R) \tilde{G}_{11} - \Delta^* \tilde{F}_{11} + \Delta F_{11} - \Delta_A \tilde{G}_{21} + \Delta_A^* \tilde{G}_{12} = 0, \quad (4)$$

$$(2i\omega + i\nu_F \vec{n} \nabla_R - 2p_F \vec{n} \vec{v}_S) \tilde{F}_{11} + \Delta (G_{11} + \tilde{G}_{11}) = 0, \quad (5)$$

$$(2i\omega + i\nu_F \vec{n} \nabla_R) \tilde{G}_{21} + \Delta_A^* (\tilde{G}_{22} + \tilde{G}_{11}) = 0, \quad (6)$$

$$(i\nu_F \vec{n} \nabla_R) G_{22} + \Delta F_{22} - \Delta^* \tilde{F}_{22} + \Delta_A^* G_{12} - \Delta_A G_{21} = 0, \quad (7)$$

$$(2i\omega + i\nu_F \vec{n} \nabla_R + 2p_F \vec{n} \vec{v}_S) F_{22} - \Delta^* (G_{22} + \tilde{G}_{22}) = 0, \quad (8)$$

$$(2i\omega + i\nu_F \vec{n} \nabla_R) G_{12} - \Delta_A (G_{11} + G_{22}) = 0, \quad (9)$$

$$(i\nu_F \vec{n} \nabla_R) \tilde{G}_{22} + \Delta_A^* \tilde{G}_{12} - \Delta \tilde{G}_{21} - \Delta^* \tilde{F}_{22} + \Delta F_{22} = 0, \quad (10)$$

$$(2i\omega - i\nu_F \vec{n} \nabla_R + 2p_F \vec{n} \vec{v}_S) \tilde{F}_{22} - \Delta (G_{22} + \tilde{G}_{22}) = 0, \quad (11)$$

$$(2i\omega - i\nu_F \vec{n} \nabla_R) \tilde{G}_{12} + \Delta_A (\tilde{G}_{22} + \tilde{G}_{11}) = 0, \quad (12)$$

Будемо розглядати випадок відсутності надпровідного струму, коли $\vec{v}_S = 0$. При наявності магнітного поля $\vec{\nabla}_R \rightarrow \vec{\nabla}_R + e\vec{A}$. Звернемо увагу, що векторний потенціал входить лише в одне рівняння для функції F_{11} .

Одержана система рівнянь доповнюється граничними умовами у глибині надпровідника, які можна записати у наступному вигляді:

$$G_{11} = \tilde{G}_{11} = G_{22} = \tilde{G}_{22} = -i\omega_n/\Delta, \quad \tilde{F}_{11} = F_{11} = -\tilde{F}_{22} = F_{22} = -\Delta_d/\Delta, \quad G_{12} = \Delta_A/\Delta, \\ G_{21} = -\Delta_A^*/\Delta, \quad \tilde{G}_{21} = \Delta_A^*/\Delta, \quad \tilde{G}_{12} = \Delta_A/\Delta, \quad \Delta = 2\sqrt{(\omega_n)^2 + \Delta_d^2 + \Delta_A^2}.$$

Рівняння самоузгодження запишемо у вигляді [9]:

$$\Delta_d = 2\pi T \sum_{n \geq 0} F_{ii} \left[\ln \frac{T}{T_{C0}} + 2\pi T \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\hbar\omega_n} \right]^{-1}, \quad \Delta_A = 2\pi T \sum_{n \geq 0} G_{ij} \left[\ln \frac{T}{T_{N0}} + 2\pi T \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\hbar\omega_n} \right]^{-1}$$

де $\hbar\omega_n = \pi T(2n+1)$ – мацубаровські частоти ($k_B = 1$).

Відзначимо, що у вибраній моделі нехтується надпровідним спарюванням електронів з різних енергетичних зон та антиферомагнітними кореляціями всередині однієї зони. Можна очікувати, що це наближення не внесе суттєвих змін в результати, модель відображає фізику явища. Враховано також очевидні додаткові умови: $G_{11} = \tilde{G}_{11}$, $G_{22} = \tilde{G}_{22}$, а також виконана загально прийнята процедура нормування не змінюючи позначень величин:

$$\Delta_d \rightarrow i\Delta_d, \quad \Delta_d^* \rightarrow -i\Delta_d^*, \quad \Delta_A \rightarrow i\Delta_A, \quad \Delta_A^* \rightarrow -i\Delta_A^*, \\ G_{11} \rightarrow \frac{G_{11}}{2i}, \quad F_{11} \rightarrow \frac{F_{11}}{2i}, \quad G_{12} \rightarrow \frac{G_{12}}{2i}, \quad G_{21} \rightarrow -\frac{G_{21}}{2i}, \quad \tilde{F}_{11} \rightarrow -\frac{\tilde{F}_{11}}{2i}$$

Легко переконалися, що система рівнянь Горькова для електронів першої зони відрізняється від стандартної додатковими функціями $G_{21}(1,2)$, $G_{12}(1,2)$, $\tilde{G}_{12}(1,2)$, $\tilde{G}_{21}(1,2)$ які описують антиферомагнітні кореляції електронів з різних зон, і $F_{ii}, \tilde{F}_{ii}, i=1,2$, які описують надпровідні кореляції електронів у межах однієї зони. Рівняння також задовольняють загальновідомій умові нормування: $G_{ii} + F_{ii}\tilde{F}_{ii} + G_{ij}G_{ji} = 1$. Виконаємо розв'язування одержаних рівнянь розкладом по степенях параметру магнітного упорядкування, що можливо при виконанні умови $T \approx T_C$ (для виконання числових розрахунків виберемо випадок: $T \approx 0.9T_C$, $T_c > T_N$, $T_C = 2T_N$).

При виконанні всіх вище названих умов із наведеної системи рівнянь (1) – (12) достатньо вибрати лише наступні:

$$(i\nu_F \vec{n} \nabla_R)G_{11} + 2\Delta_d F_{11} + \Delta_A G_{12} - \Delta_A G_{21} = 0, \quad (13)$$

$$(2i\omega - i\nu_F \vec{n} \nabla_R)F_{11} + 2\Delta_d G_{11} = 0, \quad (14)$$

$$(2i\omega + i\nu_F \vec{n} \nabla_R)G_{12} - 2\Delta_A G_{11} = 0, \quad (15)$$

$$(2i\omega - i\nu_F \vec{n} \nabla_R)G_{21} - 2\Delta_A G_{11} = 0, \quad (16)$$

Для спрощення виразів введемо наступні позначення: $\Delta_A/T_C = \Delta_A^c$, $\Delta_d/T_C = \Delta_d^c$, $T/T_C = T^c$. В «наближенні однорідного стану» одержуємо наступну систему нелінійних алгебраїчних рівнянь:

$$G_{12}^{(0)} = \frac{\Delta_A^c}{\sqrt{(\pi T^c (2n+1))^2 + (\Delta_A^c)^2 + (\Delta_d^c)^2}}, \quad F_{11}^{(0)} = \frac{\Delta_d^c}{\sqrt{(\pi T^c (2n+1))^2 + (\Delta_A^c)^2 + (\Delta_d^c)^2}},$$

$$\Delta_d^c = 2\pi T^c \sum_{n \geq 0} F_{11}^{(0)} \left[\ln T^c + 2 \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2n+1} \right]^{-1}, \quad \Delta_A^c = 2\pi T^c \sum_{n \geq 0} G_{12}^{(0)} \left[\ln \left(T^c \frac{T_C}{T_N} \right) + 2 \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2n+1} \right]^{-1}$$

з двома невідомими: Δ_d^c та Δ_A^c .

Так як два рівняння із системи містять в собі сумування, то розв'язування можливо виконати лише методом перебору значень невідомих із області фізично допустимих значень. Після виконання простих алгебраїчних перетворень одержимо спрощену систему:

$$\frac{2\pi T^c}{\left[\ln \left(T^c \frac{T_C}{T_N} \right) + 2 \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2n+1} \right]} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\sqrt{(\pi T^c (2n+1))^2 + (\Delta_A^c)^2 + (\Delta_d^c)^2}} = 1,$$

$$\left[\ln \left(T^c \frac{T_C}{T_N} \right) + 2 \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2n+1} \right] \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\sqrt{(\pi T^c (2n+1))^2 + (\Delta_A^c)^2 + (\Delta_d^c)^2}} = 1.$$

Після розв'язування рівнянь одержимо наступні значення невідомих параметрів $\Delta_A^{c(0)} = 0.98$ та $\Delta_d^{c(0)} = 0.15$, які будуть використані в наступних розрахунках.

У разі неоднорідного стану (вихор Абрикосова), у першому наближенні відносно малого параметру Δ_A , з усієї системи (13) – (16) відмінна від нуля лише функція F_{11} . Тому залишається наступна система рівнянь:

$$(2i\omega + i\nu_F \vec{n} \nabla_R) G_{12}^{(1)} - 2\Delta_A G_{11}^{(0)} = 0, \quad \Delta_A^c = 2\pi T^c \sum_{n \geq 0} G_{12}^{(1)} \left[\ln \left(T^c \frac{T_C}{T_N} \right) + 2 \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2n+1} \right]^{-1},$$

яка доповнюється граничною умовою для функції $G_{12}^{(1)}$ при $R \rightarrow \infty$:

$$G_{12}^{(1)} = \frac{\Delta_A^c}{\sqrt{(\pi T^c (2n+1))^2 + (\Delta_d^c)^2}} \left[1 - \frac{0.5\Delta_A^c}{(\pi T^c (2n+1))^2 + (\Delta_d^c)^2} \right].$$

В другому наближенні відносно малого параметру Δ_A система рівнянь має наступний вигляд:

$$(i\nu_F \vec{n} \nabla_R) G_{11}^{(2)} + 2\Delta_d F_{11}^{(1)} + \Delta_A G_{12}^{(2)} - \Delta_A G_{21}^{(2)} = 0, \quad (17)$$

$$(2i\omega + i\nu_F \vec{n} \nabla_R) G_{12}^{(2)} - 2\Delta_A G_{11}^{(2)} = 0, \quad (18)$$

$$(2i\omega - i\nu_F \vec{n} \nabla_R) G_{21}^{(2)} - 2\Delta_A G_{11}^{(2)} = 0, \quad (19)$$

$$\Delta_A^c = 2\pi T^c \sum_{n \geq 0} G_{12}^{(2)} \left[\ln \left(T^c \frac{T_C}{T_N} \right) + 2 \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2n+1} \right]^{-1}. \quad (20)$$

Вона доповнюється наступними граничними умовами при $R \rightarrow \infty$:

$$G_{11}^{(2)} = \frac{\left(\frac{\pi T (2n+1)}{T_C} \right)}{\Delta_1} \left[1 - \frac{0.5\Delta_A^c}{\Delta_1^2} \right], \quad G_{12}^{(2)} = \frac{\Delta_A^c}{\Delta_1} \left[1 - \frac{0.5\Delta_A^c}{\Delta_1^2} \right],$$

$$G_{21}^{(2)} = -\frac{\Delta_A^c}{\Delta_1} \left[1 - \frac{0.5\Delta_A^c}{\Delta_1^2} \right], \quad \Delta_1 = \sqrt{(\pi T^c (2n+1))^2 + (\Delta_d^c)^2},$$

У випадку просторової ізотропії задача має аналітичне розв'язування за допомогою перетворень Фур'є, але у випадку d-симетрії, коли кутова залежність надпровідного параметру порядку та функції Гріна задається функцією $\cos(2\theta)$, таке розв'язування виконати не вдалося, і, як на думку авторів із огляду літературних даних, його ніхто не виконував. Тому всі рівняння розв'язувались за допомогою числових методів.

При проведенні числових розрахунків усі функції, що входять у наведені рівняння зводились до безрозмірних величин. При цьому застосовувались наступні характерні величини: l – довжина вільного пробігу електронів, довжина надпровідних кореляцій $\xi_d \approx \hbar v_F / \Delta_{d0}$ та довжина антиферомагнітних кореляцій $\xi_A \approx \hbar v_F / \Delta_{A0}$. Тут введені наступні позначення: Δ_{d0} – надпровідний параметр порядку при відсутності антиферомагнітного спарювання, Δ_{A0} – антиферомагнітний параметр порядку при відсутності надпровідного.

Як відомо для всіх відомих надпровідників $T_c / E_F \ll 1$. З другого боку (дивись наприклад [13]) $v_s \approx T_c / p_0$, звідки випливає, що $mv_s^2 / p_0 \approx T_c / E_F \ll 1$. Таким чином швидкість \vec{v} руху пари як цілого менше характерної швидкості руху електронів, які створюють пару. Можна сказати, що рух куперовських пар завжди квазікласичний. Ця обставина дозволяє спростити рівняння теорії надпровідності: ми можемо виділити головні члени і відкинути ті, які менші головних у відношенні T_c / E_F . При цьому зручно

вести координати центра інерції пари R і координати відносного руху r. Візьмемо до уваги, що всі функції в залежності від координат центра інерції змінюються повільно, а саме на довжинах порядку ξ .

Врахуємо, що в циліндричній системі координат, яка задовольняє симетрії задачі

$$\vec{n}\vec{\nabla}_R = \cos\theta \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta},$$

та проведемо нормування просторової змінної $R \rightarrow R/\xi$. Як відомо [30,31,32], у випадку d-симетрії кутова і просторова залежність параметра надпровідного упорядкування та функцій Гріна може бути вибрана в наступному вигляді:

$$\Delta_d(R, \theta) = \Delta_d(R) \cos(2\theta), \quad F_{ij}(R, \theta) = F_{ij}(R) \cos(2\theta), \quad G_{ij}(R, \theta) = G_{ij}(R) \cos(2\theta).$$

Це дозволить спростити розв'язування диференціальних рівнянь – змінну θ можна задавати як параметр (наприклад $\theta = 0, \pi/6, \pi/4, \pi/3$). Цього достатньо, щоб дослідити кутову залежність параметрів порядку, тому що, як відомо у випадку d-симетрії ядро вихору Абрикосова деформується у чотири листкову форму.

З урахуванням сказаного вище система рівнянь для функцій Гріна (17) – (20) у «першому» та «другому» наближеннях матиме вигляд:

– «перше наближення»:

$$\left(\cos\theta \cos 2\theta \frac{\partial}{\partial R} - \frac{2}{R} \sin\theta \sin 2\theta - 2(\pi T^c (2n+1)) \cos(2\theta) \right) G_{12}^{(1)}(R) + 2\Delta_A^{c(1)} \cos 2\theta \frac{\pi\Gamma(2n+1)}{\sqrt{(\pi T^c (2n+1))^2 + (\Delta_d^{c(0)})^2}} = 0, \quad (21)$$

$$\Delta_A^{c(1)} = 2\pi T^c \sum_{n \geq 0} G_{12}^{(1)} \left[\ln \left(T^c \frac{T_C}{T_N} \right) + 2 \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2n+1} \right]^{-1}; \quad (22)$$

– «друге наближення»:

$$\left(\cos\theta \cos 2\theta \frac{\partial}{\partial R} - \frac{2}{R} \sin\theta \sin 2\theta + C_1 J_2(R) \sin\theta \cos^2(2\theta) - 2(\pi T^c (2n+1)) \cos(2\theta) \right) \times F_{11}^{(2)}(R) + 2\Delta_d^{c(2)} \cos 2\theta \frac{\pi\Gamma(2n+1)}{\sqrt{(\pi T^c (2n+1))^2 + (\Delta_A^{c(1)})^2}} = 0, \quad (23)$$

$$\left(\cos\theta \cos(2\theta) \frac{\partial}{\partial R} - \frac{2}{R} \sin\theta \sin(2\theta) \right) G_{11}^{(2)}(R) + 2\Delta_d^{c(2)} F_{11}^{(1)}(R) \cos(2\theta) + \Delta_A^{c(1)} \left(G_{12}^{(2)}(R) - G_{21}^{(2)}(R) \right) \cos(2\theta) = 0, \quad (24)$$

$$\left(\cos\theta \cos 2\theta \frac{\partial}{\partial R} - \frac{2}{R} \sin\theta \sin 2\theta - 2(\pi T^c (2n+1)) \cos(2\theta) \right) G_{21}^{(2)}(R) + 2\Delta_A^{c(1)} G_{11}^{(2)}(R) \cos(2\theta) = 0, \quad (25)$$

$$\Delta_d^c = 2\pi T^c \sum_{n \geq 0} F_{11}^{(2)} \left[\ln T^c + 2 \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2n+1} \right]^{-1}. \quad (26)$$

Значення векторного потенціалу в кожній точці знаходяться за допомогою розв'язування додаткового диференціального рівняння і виражаються через модифіковані функції Бесселя уявного аргументу $J_2(R)$. Наведені системи рівнянь (21), (22) та (23) – (26) легко розв'язуються за допомогою звичайних числових методів. При розв'язуванні диференціальних рівнянь виникає одна принципова математична складність, яка при розрахунку структури вихорів, шляхом розв'язування рівнянь Узаделя вперше обговорювалась в роботі [23], а шляхом розв'язування рівнянь Ейленберґера для ізотропної моделі в роботі [24]. Йдеться про те, що при розв'язуванні диференціальних рівнянь можна одержати декілька класів розв'язків, які задовольняють граничним умовам при $R \rightarrow \infty$, але лише один із них відповідає фізично-му змісту задачі. Авторами в роботі [9] при розрахунках структури вихору з урахуванням s-спарювання

електронів ця проблема була вирішена шляхом задавання в граничних умовах значення функцій при $R \rightarrow \infty$, та значення їх перших похідних при $R \rightarrow 0$, що дало можливість вибрати правильні початкові нахили кривих та одержати результати, що узгоджуються з аналогічними розрахунками інших авторів.

На цьому етапі авторам вдалось розв'язати рівняння у «першому наближенні». На рис. 1 наведені результати радіальної координатної залежності надпровідного параметру порядку $\Delta_d(R)$ (лінія 1) та антиферромагнітного параметру порядку $\Delta_A(R)$ (лінія 2) для значень $T/T_C=0.8$; $T_C=2T_N$.

Висновки. В роботі квазікласичні рівняння надпровідності для металів, у яких один і той самий тип електронів є носієм магнітних і надпровідних властивостей системи, а закон дисперсії електронів і дірок для досить великого числа векторів, що лежать поблизу поверхні Фермі, має властивість нестінга, розв'язуються методом розкладу по параметру магнітного порядку. Проведені чисельні розрахунки структури надпровідного вихору Абрикосова з антиферромагнітним ядром для випадку $T_C > T_N$, вивчена можливість співіснування антиферромагнетизму та надпровідності для надпровідників d-типу у моделі, принципово відмінній від SO(5).

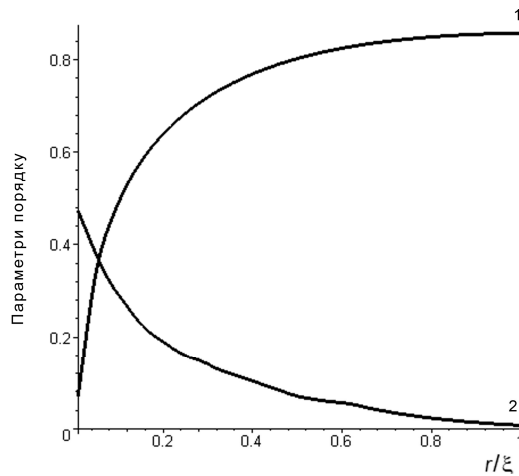


Рис. 1

РЕЗЮМЕ

Получены квазиклассические уравнения сверхпроводимости для сверхпроводящих антиферромагнитных металлов с d-типом спаривания электронов, в которых один и тот же тип электронов является носителем магнитных и сверхпроводящих свойств системы, а закон дисперсии электронов и дырок для достаточно большого числа векторов, лежащих вблизи поверхности Ферми, имеет свойство нестинга. В рамках предложенной модели полученные выражения позволяют рассчитать параметры антиферромагнитного и сверхпроводящего упорядочения для вихря Абрикосова с антиферромагнитным ядром в случае отсутствия пространственной изотропности, а также изучить область сосуществования антиферромагнетизма и сверхпроводимости для сверхпроводников d-типа. Проведены численные расчеты параметров порядка в «первом приближении».

Ключевые слова: функции Грина, параметр сверхпроводящего упорядочения, параметр антиферромагнитного упорядочения.

SUMMARY

We obtained the semiclassical equations of superconductivity for superconducting antiferromagnetic metals with d-type pairing of electrons, which is the same type of electrons is a carrier of the magnetic and superconducting properties of the system, and the dispersion of electrons and holes for a sufficiently large number of vectors that lie near the Fermi surface, has a property nesting. Under the proposed model the expressions permit calculating the parameters of superconductivity and antiferromagnetic ordering for antiferromagnetic vortex with apricot kernel in the absence of spatial isotropy and study area of coexistence of superconductivity and antiferromagnetism to d-type superconductor. Carried out numerical calculations of order parameters in the "first approximation".

Keywords: Greens functions, superconducting order parameter, antiferromagnetic order parameter.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Изюмов Ю. А. Спин-флуктуационный механизм высокотемпературной сверхпроводимости и симметрия параметра порядка / Ю. А. Изюмов // Успехи физических наук. – 1999. – Т. 169, № 2. – С. 225-254.
2. Мейпл М. Сверхпроводимость в тройных соединениях. Т. 2: Сверхпроводимость и магнетизм / М. Мейпл, Э. Фишер. – М.: Мир, 1985. – 392 с.
3. Bumsoo Kyung. Mean-field study of the interplay between antiferromagnetism and d-wave superconductivity / Bumsoo Kyung // Phys. Rev. B. – 2000. – Vol. 62, No 13. – P. 9083-9088.
4. Plausibility of antiferromagnetism in and around the vortex cores of Bi2212 and Tl2223 / J. Lee, K. Prudchenko, E. J. Ruiz, C. J. Boekema // Appl. Phys. – 2004. – Vol. 95, No 13. – P. 6906-6912.
5. Local tunneling spectroscopy of the electron-doped cuprate Sml.85Ce0.15CuO4 / A. Zimmers, Y. Noat, T. Cren et al. // Phys. Rev. B. – 2007. – Vol. 76, No 12. – P. 132105-1325111.
6. Katano S. Neutron diffraction of hole holaron ordering in la1-xSrxMnO3(x~1/8) / S. Katano, M. Sato, K. Yamada // Phys. Rev. B. – 2000. – Vol. 62, No 22. – P. 146771-146776.
7. Observation of the low temperature pseudogap in the vortex core of Bi2Sr2CaCu2O8+δ / C. H. Renner, B. Revaz, K. Kodovski et al. // Phys. Rev. Lett. – 1998. – Vol. 80, No 16. – P. 3606-3612.
8. Expansion of vortex cores by strong electronic correlation in La2-xSrxCuO4 at low magnetic induction / R. Kadono, W. Higemoto, A. Koda et al. // Phys. Rev. B. – 2004. – Vol. 69, No 10. – P. 104523-104527.
9. Garkusha V. V. Antiferromagnetic order and dielectric gap wthin the vortex core of antiferromagnetic superconductor / V. V. Garkusha, V. N. Krivoruchko // J. Low. Temp. Phys. – 2005. – Vol. 139, No 1. – P. 37-47.

10. Katano S. Enhancement of static antiferromagnetic correlations by magnetic field in a superconductor $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ with $x=0.12$ / S. Katano, K. Msato, K. Yamada // *Phys. Rev. B.* – 2000.– Vol. 62, No 22.– P. 14667-14674.
11. Yan Chen. Magnetic–field–induced spin-density wave in high-temperature superconductors / Yan Chen, C.S. Ting // *Phys. Rev. B.* – 2002. – Vol. 65, No 18. – P. 180513-180518.
12. Loktev V. M. Superconductivity and superconducting order parameter phase fluctuations in a weakly doped antiferromagnet / V. M. Loktev, V. M. Turkowski // *Phys. Rev. B.* – 2007. – Vol. 75, No 22. – P. 224513-224517.
13. Свидзинский А. В. Пространственно-неоднородные задачи теории сверхпроводимости / А. В. Свидзинский. – М.: Наука, 1982. – 312 с.
14. Even parity, orbital singlet, and spin triplet pairing for superconducting $\text{LaFeAsO}_{1-x}\text{Fx}$ / Xi Dai, Zhong Fang, Yi Zhou, Fu-Chun Zhang // *Phys. Rev. Lett.* – 2008. – Vol. 101, No 5. – P. 057008-057012.
15. Qimiao Si. Strong Correlations and Magnetic Frustration in the High Tc Iron Pnictides / Qimiao Si, Elihu Abrahams // *Phys. Rev. Lett.* – 2008. – Vol. 101, No 7.– P. 076401-076405.
16. Commensurate Spin Density Wave in LaFeAsO : A Local Probe Study / H. H. Klauss, H. Luetkens, R. Klingeler et al. // *Phys. Rev. Lett.* – 2008. – Vol. 101, No 7. – P. 077005-077010.
17. Изюмов Ю. А. Магнетизм и сверхпроводимость в сильно коррелированной системе / Ю. А. Изюмов // *Успехи физических наук.* – 1991.– Т. 161, № 12. – С. 1-46.
18. Куликов Н. И. Волны спиновой плотности и зонный антиферромагнетизм в металлах / Н. И. Куликов, В. В. Тугушев // *Успехи физических наук.* – 1984. – Т. 144. – С. 643-680.
19. Москаленко В. Л. Низкотемпературные свойства металлов с особенностями зонного спектра / В. Л. Москаленко, Л. З. Кон, М. Е. Палистрант. – Кишинев: Штиинца, 1989. – 285 с.
20. Eilenberger G. Transformation of Gorkov's equation for type II superconductors into transport-like equations / G. Eilenberger // *Z. Phys.* – 1968. – Vol. 214. – P. 195-204.
21. Usadel K. D. Generalized diffusion equation for superconducting alloys / K. D. Usadel // *Phys. Rev. Lett.* – 1970. – Vol. 25, No 8. – P. 507-511.
22. Копаев Ю. В. Интерференция диэлектрических и сверхпроводящих корреляций в высокотемпературных сверхпроводниках / Ю. В. Копаев // *Успехи физических наук.* – 1989.–Т. 159, № 3. – С. 567-577.
23. Watts-Tobin R. J. Calculation of the vortex structure in a superconducting alloy / R. J. Watts-Tobin, G. M. Waterworth // *Z. Physik.* – 1973. – Vol. 261. – P. 249-268.
24. Klein U. Microscopic calculation on the vortex state of type II superconductor / U. Klein // *Journal of Low Temperature Physics.* – 1987. – Vol. 69. – P. 1-37.

Поступила в редакцию 11.03.2013 г.

УДК 622.621.928.8

ВЛИЯНИЕ ОРИЕНТАЦИИ ФЕРРОМАГНИТНОГО ЦИЛИНДРА ОТНОСИТЕЛЬНО НАПРАВЛЕНИЯ НАМАГНИЧИВАЮЩЕГО ПОЛЯ НА ЕГО УЛАВЛИВАЮЩУЮ СПОСОБНОСТЬ*Ю.А. Легенький, Ю.Н. Пименов, О.О. Тарасова*

Отработана методика измерения зависимости улавливающей способности ферромагнитного цилиндра в зависимости от угла между его продольной осью и направлением внешнего намагничивающего поля для ферромагнитных микрочастиц. Показано, что зависимость массы ферромагнитных частиц, которую захватывает цилиндр при изменении угла от перпендикулярной ориентации его оси относительно направления внешнего магнитного поля к параллельной, имеет максимум. Показано, что такая зависимость коррелирует с угловой зависимостью напряженности магнитного поля на полюсах улавливающего цилиндра.

Ключевые слова: градиентное магнитное поле, магнитофорез, улавливание микрочастиц, угловая зависимость, ферромагнитный цилиндр.

Введение. Интенсивное использование магнитных фильтров и сепараторов в целом ряде областей машиностроения, химии, медицины, биологии, обогащательной промышленности и других стимулирует научные исследования по их совершенствованию. Ферромагнитные стержневые и проволочные элементы широко используются как активные элементы магнитных фильтров и сепараторов. Одиночные ферромагнитные цилиндры (стержни) используют для моделирования и исследования работы многоэлементных устройств, а также для исследовательских целей в биологии, физике, медицине [1 – 3]. Большинство исследований улавливающей способности ферромагнитных цилиндров проведено в условиях, в которых цилиндры считались бесконечно длинными. Для таких условий в целом ряде работ [4 – 8] показано теоретически и экспериментально, что максимальная улавливающая способность наблюдается при ортогональной ориентации цилиндра, то есть когда его продольная ось расположена перпендикулярно направлению внешнего намагничивающего поля. При этом для углов, превышающих определенное значение, улавливание парамагнитных частиц не наблюдается. Однако, как показано в работах [5 – 7] для стержней, имеющих конечную длину, концы ферромагнитного стержня при его ориентации относительно внешнего магнитного поля отличной от ортогональной, дают существенный вклад в общий захват частиц. Так в работе [1], показано, что даже для ориентации улавливающей никелевой проволоки (размерами 60 мм длиной и 125 мкм диаметром), когда угол между продольной осью проволоки и внешним магнитным полем составлял 80° , наблюдался существенный захват парамагнитных частиц $Mn_2P_2O_7$.

Исследования улавливающей способности ферромагнитных стержней ограниченной длины проведены также и в работах [5 – 7]. В работе [5] теоретически изучены движение диа- и парамагнитных микрочастиц вблизи короткого ортогонально намагниченного цилиндра, и показана перспективность такой конфигурации для регистрации и пространственного разделения диамагнитных частиц по величине магнитной восприимчивости. В работе [6] изучено движение диа- и парамагнитных микрочастиц, оседающих в жидкости вблизи вертикального намагниченного цилиндра конечной длины в плоскости, поперечной направлению намагничивания и описано явление пространственного разделения парамагнитных частиц по величине магнитной восприимчивости. В работе [8] отмечается, что теоретическое описание захвата частиц на ферромагнитные стержни конечной длины при их произвольной ориентации относительно направления внешнего намагничивающего поля, на данный момент не произведено, так как нет теоретического описания распределения магнитного поля в окрестности концов ферромагнитного стержня ограниченных размеров.

Из обзора исследованной литературы следует перспективность и актуальность исследований улавливающих и магнитофоретических возможностей ферромагнитных цилиндров конечного размера расположенных под различными углами к внешнему намагничивающему полю. Целью данной работы было экспериментальное исследование влияния ориентации ферромагнитного стержня (цилиндра конечных размеров) относительно направления намагничивающего поля на его улавливающую способность при захвате ферромагнитных частиц.

Образцы, методика эксперимента, и результаты эксперимента. В работах [4, 8] улавливающая способность ферромагнитных проволок оценивалась по размерам кластеров захваченных парамагнитных частиц. В нашей работе мы применяли другой метод для оценки магнитофоретических свойств ферромагнитных стержней, так как при повороте стержня относительно намагничивающего поля величина напряженности в окрестности стержня изменяется в несколько раз и при захвате ферромагнитных частиц магнитная сила, ответственная за притяжение, удержание и плотность их укладки в кластере захваченных частиц будет существенно отличаться для разных углов. Поэтому размеры кластера захваченных

частиц, в нашем случае могут не характеризовать количество захваченных частиц из-за разницы в плотностях кластеров захваченных частиц, полученных при разных ориентациях ферромагнитного стержня. В данных исследованиях мы применили прямой метод оценки количества захваченных частиц с помощью их сбора и взвешивания.

Экспериментальное исследование улавливающей способности для ферромагнитных стержней расположенных при различных углах α между нормалью к их продольной оси и направлением внешнего магнитного поля, проводилось с помощью метода отделения и взвешивания массы захваченных ферромагнитных частиц на установке, блок схема которой представлена на рис. 1.

Стальной ферромагнитный стержень (насадка) 1, изготовленный из стали ШХ-15 (ГОСТ 801-78), крепится в центре дна кюветы 2, имеющий размер 90x120x50 мм. Продольная ось стержня располагается параллельно большей стенке кюветы. Кювета 2 помещается на поворотное устройство 3, имеющее градуированный лимб и позволяющее производить поворот кюветы с образцом вокруг вертикальной оси на 360°. Поворотное устройство располагается в магнитной системе, собранной из постоянных магнитов, создающих в центре системы магнитное поле напряженностью $H = 170$ Э. Размеры кюветы выбраны из соображений удобства разделения захваченного на ферромагнитный стержень ферромагнитного порошка и той части порошка, которая остается не захваченной, после достижения насыщения в процессе улавливания.

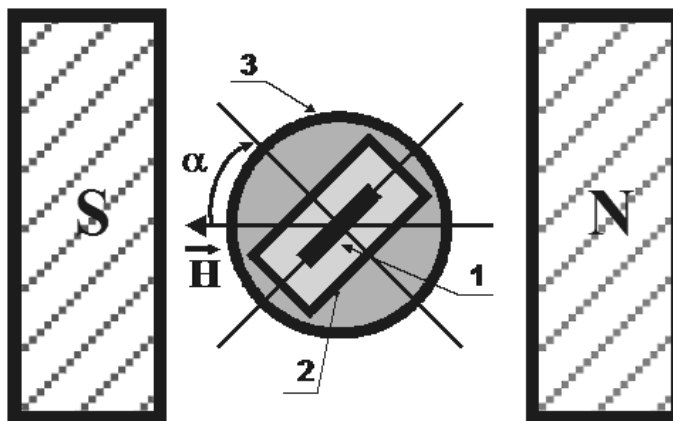


Рис. 1

Модельный раствор для экспериментов приготавливался при смешивании мелко дисперсного порошка Mg-Zn-феррита и воды в соотношении 1:150 (порция для заливки в кювету при измерениях состоит из: феррита 2 г, воды 300мл). После тщательного перемешивания, раствор заливался в кювету. Ферромагнитный стержень перед началом каждого измерения размагничивался с помощью переменного магнитного поля частотой 50 Гц и амплитудой убывающей от 200 Э до 0 Э и помещался на поворотное устройство под углом α , при котором будет производиться измерение.

Насыщение улавливающей способности стержня достигалось путем принудительного нанесения, находящегося в кювете порошка феррита на насадку, до тех пор, пока насадка уже не могла удерживать дополнительные порции феррита. При этом ферритовый порошок, уловленный насадкой, находился вокруг насадки в центре кюветы, а излишки ферритового порошка стягивались внешним магнитным полем к краям кюветы. При этом, между уловленным и не уловленным порошком, на дне кюветы, образовывалось свободное от ферромагнитного порошка пространство достаточное для обеспечения удобства раздельного извлечения захваченной и не захваченной стержнем частей общего количества порошка, находящегося при данном измерении в модельном растворе в кювете.

Извлечение порошка, не захваченного испытуемым образцом, производилось из кюветы, находящейся во внешнем магнитном поле, при помощи стального дополнительного стержня, присоединенного к отдельному постоянному магниту (с соблюдением необходимой для извлечения полярности при присоединении магнита к дополнительному стержню). Когда излишки ферромагнитного порошка извлекались от стенки кюветы, находящейся вблизи северного магнитного полюса внешнего магнита, то стальной стержень, с помощью которого извлекался не уловленный испытуемой насадкой ферромагнитный порошок, прикреплялся к южному полюсу дополнительного магнита. А когда ферромагнитный порошок извлекался от стенки кюветы, находящейся вблизи южного полюса, то стержень, предназначенный для извлечения порошка, крепился к северному полюсу дополнительного магнита. Такая взаимная ориентация внешнего магнитного поля и поля, создаваемого на собирающем стержне дополнительным магнитом, способствовала хорошему удержанию ферромагнитного порошка на собирающем стержне, что давало возможность свободного его извлечения из кюветы с жидкостью, преодолевая поверхностное натяжение жидкости и перенесения его в собирающую емкость для отработанного ферромагнитного порошка.

После извлечения из кюветы ферромагнитного порошка, не захваченного стержнем, кювета с оставшимся на ферромагнитном стержне порошком, извлекалась из внешнего магнитного поля, что облегчало дальнейшее отделение магнитного порошка от стержня. Порошок, отделившийся от ферромагнитной насадки, собирался у стенки кюветы, а затем извлекался с помощью стального стержня, соединенного с дополнительным магнитом, так же, как описано выше, и помещался в емкость известного веса для последующего высушивания и взвешивания.

После этого кювета с ферромагнитным стержнем отмывалась, высушивалась, ферромагнитный стержень размагничивался с помощью переменного магнитного поля и, после этого, оборудование было готово для проведения следующего опыта.

На рис. 2 представлены фотографии, демонстрирующие кластеры захваченных ферромагнитных частиц при нескольких положениях стержня относительно направления внешнего поля. Углы α указаны под рисунками.

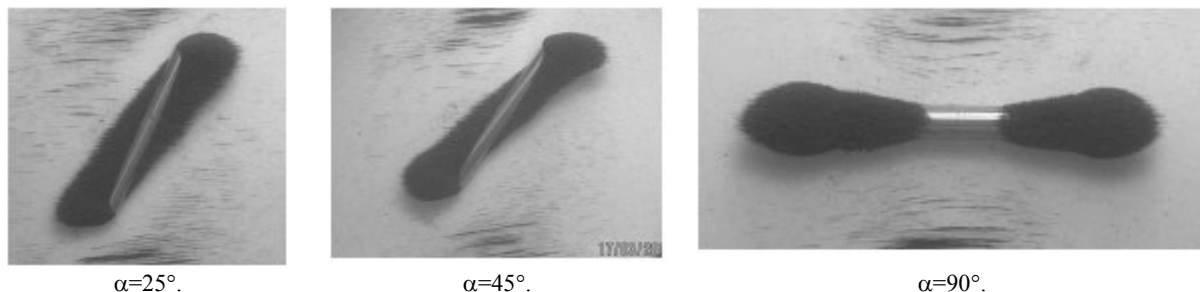


Рис. 2

Из рис. 2 видно, что в отличие от бесконечного стержня на стержне конечных размеров даже на больших углах α происходит захват ферромагнитных частиц. Результаты измерения массы захваченных частиц для нескольких стержней разной конфигурации показали, что при увеличении угла α от $\alpha=0^\circ$ до $\alpha=90^\circ$ масса частиц захваченных стержнем увеличивается. На рис. 3 для примера представлены результаты по измерению угловой зависимости улавливающей способности ферромагнитного стержня диаметром 4 мм и длиной 35 мм. По оси «Y» отложены значения массы захваченных частиц M . Единицы измерения M – граммы. По оси «X» отложен угол α , измеряемый в градусах. Каждая точка на рис. 3 получена усреднением не менее 3 измерений.

Из рис. 3 видно, что при повороте улавливающего стержня (при увеличении угла α) наблюдается увеличение массы захваченных частиц с пологом максимумом при $\alpha=60^\circ$. Так как из литературы [3] известно, что для бесконечных стержней наблюдается противоположная зависимость, следовательно, в нашем случае основной вклад в улавливание дают концы стержня. Мы полагаем, что возрастание улавливающей способности при повороте стержня от ортогональной ориентации $\alpha=0^\circ$ до продольной $\alpha=90^\circ$ в полях, для которых материал стержня далек от магнитного насыщения, связано с увеличением напряженности магнитного поля вблизи магнитных полюсов стержня, так как при таком повороте уменьшается размагничивающий фактор стержня и увеличивается средняя намагниченность внутри стержня.

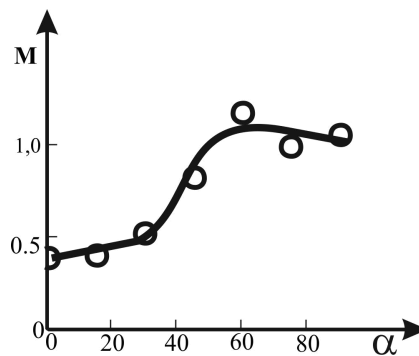


Рис. 3

Для подтверждения данного положения нами была проведена качественная оценка относительно изменения напряженности магнитного поля вблизи полюсов ферромагнитного анизодиаметрического тела при повороте этого тела относительно направления внешнего магнитного поля с помощью программы Elcut [9]. Программа Elcut позволяет решать магнитостатические задачи в плоскопараллельной или осесимметричной постановке с учетом нелинейной зависимости магнитной проницаемости от индукции магнитного поля. В программе Elcut используется формулировка задачи относительно векторного магнитного потенциала \mathbf{A} ($\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$, \mathbf{B} – вектор магнитной индукции). При решении этих задач используется уравнение Пуассона для векторного магнитного потенциала \mathbf{A} [9]. В рассматриваемых задачах вектор индукции \mathbf{B} всегда лежит в плоскости модели (xy или zt), а вектор плотности тока \mathbf{j} и векторный потенциал \mathbf{A} перпендикулярны к ней. Отличны от нуля только компоненты j_z и A_z в плоскопараллельном случае или j_θ и A_θ в осесимметричных задачах. Если обозначить их как \mathbf{j} и \mathbf{A} , то для плоскопараллельных задач уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu_x} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu_y} \frac{\partial A}{\partial y} \right) = -j + \left(\frac{\partial H_{cy}}{\partial x} - \frac{\partial H_{cx}}{\partial y} \right) \quad (1)$$

где компоненты тензора магнитной проницаемости μ_x и μ_y , составляющие коэрцитивной силы H_{cx} и H_{cy} , а также плотность тока j – постоянные величины в пределах каждого из блоков модели.

На рис. 4, а представлена картина силових ліній магнітного поля, отримана з рішення задачі (1) для ферромагнітної пластини при її повороті во зовнішньому однорідному полі відносно його напрямку. Розміри ферромагнітної пластини вибрані такими, щоб її сечення збігалося з сеченням стержня, для якого отримані дані представлені на рис. 3. На рис. 4, б представлена фотографія, що відображає картину силових ліній для ферромагнітного циліндра, отримана експериментально з допомогою ферромагнітного порошку.

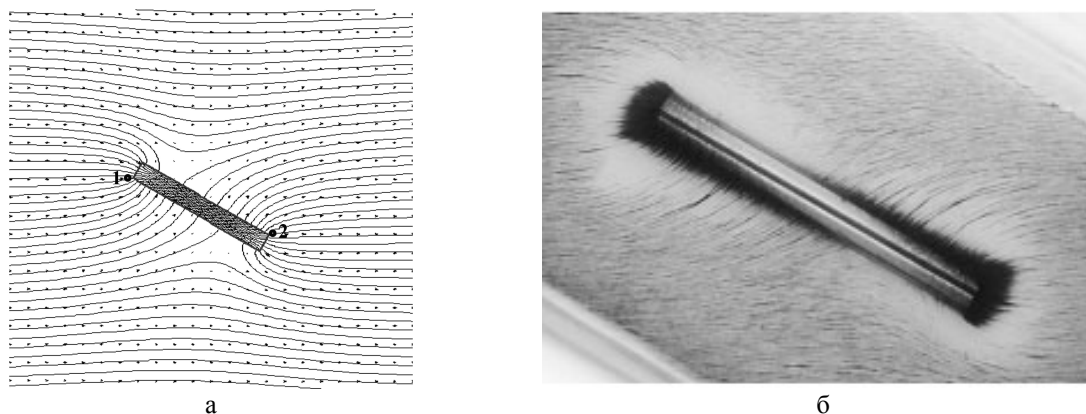


Рис. 4

Из сопоставления рис. 4, а и 4, б видно качественное соответствие картин распределения силовых линий для таких ферромагнитных тел. Следовательно, можем ожидать качественное соответствие распределения напряженностей магнитного поля в окрестности этих тел. Поэтому были рассчитаны величины напряженности магнитного поля H_p на полюсах такой ферромагнитной пластинки (в точках 1 и 2 см. рис. 4, а) при ее повороте относительно направления внешнего магнитного поля.

На рис. 5 представлены, в сопоставлении, данные по зависимости напряженности магнитного поля на магнитных полюсах ферромагнитной пластинки H_p (кривая 1), полученные из решения задачи для ферромагнитной пластинки, вращающейся во внешнем однородном поле относительно его направления от угла $\alpha=0^\circ$ до $\alpha=90^\circ$ и нормированные данные, показанные на рис. 3 (кривая 2 на рис. 5).

Обе кривые на рис. 5 нормированы на свои начальные значения при $\alpha=0^\circ$. Из сопоставления кривых 1 и 2 на рис. 5 видно качественное соответствие в поведении этих кривых.

Выводы. Таким образом в настоящей работе исследованы угловые зависимости улавливающей способности ферромагнитных цилиндров при их повороте относительно направления намагничивающего поля при захвате ферромагнитных микрочастиц. Показано, что угловые зависимости имеют немонокотный характер. Показано, что их поведение качественно соответствует поведению угловых зависимостей напряженности магнитного поля на полюсах анизодиметрического тела при его вращении относительно направления внешнего магнитного поля. Полученные результаты могут быть использованы для разработки новых более эффективных магнитных фильтров и сепараторов.

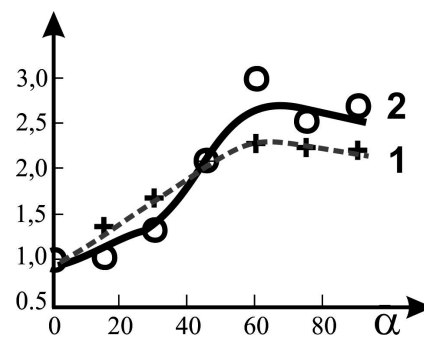


Рис. 5

РЕЗЮМЕ

Відпрацьовано методику вимірювання залежності захоплюючої здатності ферромагнітного циліндра залежно від кута між його поздовжньою віссю і напрямом зовнішнього намагнічуючого поля, для ферромагнітних мікрочасток. Показано, що залежність маси ферромагнітних частинок, яку захоплює циліндр при зміні кута від перпендикулярної орієнтації його осі відносно напрямку зовнішнього магнітного поля до паралельної, має максимум. Показано, що така залежність корелює з кутовою залежністю напруженості магнітного поля на полюсах уловлюючого циліндра.

Ключові слова: градієнтне магнітне поле, магнітофорез, уловлювання мікрочасток, кутова залежність, ферромагнітний циліндр.

SUMMARY

Technique for measurements of captive ability of a ferromagnetic cylinder as a function of the angle between its longitudinal axis and the direction of external magnetic field has been developed for ferromagnetic micro particles. It has been shown that the dependence of the mass of ferromagnetic particles captured by a cylinder with angle variation from perpendicular orientation of its axis in respect to the external field direction has maximum. It has demonstrated that such a dependence correlates with the angular distribution of magnetic field strength at the poles of the captive cylinder.

Keywords: gradient magnetic field, magnetophoresis, micro particles capture, angular dependence, ferromagnetic cylinder.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Friedman G. Magnetic separation, manipulation and assembly of solid phase in fluids / G.Friedman, B. Yellen // Current Opinion in Colloid & Interface Science. – 2005. – Vol. 10. – P.158-166.
2. Norina S.B. Diamagnetic micro particle movement in high gradient magnetic Separation Analyses / S.B. Norina, Sang-Hyun Park, Kwang-Sup Soh // Journal of the Korean Physical Society. – 2005. – Vol. 47, No 2. – P. 297-305.
3. Watson J.H.P. The evolution of HGMS for mineral processing with a single wire / J.H.P. Watson, A.S. Bahaj, D. Rassi // Magnetic Separation News. – 1983. – Vol. 1. – P. 57-60.
4. Statistics of particle capture in HGMS / R. Birss M. Parker, T. Sheerer et al. // Magnetics, IEEE Transactions on, 1980. – Vol. 16. – P. 830-832.
5. Жолудь А.М. Диа- и парамагнетическое разделение микрочастиц вблизи короткого намагниченного цилиндра / А.М. Жолудь, Б. Э. Кашевский // Инженерно-физический журнал. – 2010. – Т. 83, № 3. – С. 554-559.
6. Жолудь А. М. Динамика магнетического разделения суспензий слабомагнитных микрочастиц в высокоградиентном поле намагниченного стержня / А. М. Жолудь, Б. Э. Кашевский // Инженерно-физический журнал. – 2009. – Т. 82, № 2. – С. 221-226.
7. Жолудь А. М. Пространственное фракционирование парамагнитных частиц, оседающих в высокоградиентном магнитном поле короткого намагниченного цилиндра / А. М. Жолудь // Инженерно-физический журнал. – 2010. – Т. 83, № 5. – С. 447-452.
8. Single wire particle collection with magnetic field components along wire axis / J.Svoboda, F.J. Friedlaender, Fu Hua; S.W. Luan // Magnetics, IEEE Transactions. – 1988. – Vol. 24, Iss. 6. – P. 2419-2421.
9. Дубицкий С. ELCUT – инженерная система моделирования двумерных физических полей / С. Дубицкий, В. Поднос // CADmaster. – 2001. – № 1. – С. 17-21.

Поступила в редакцию 04.04.2013 г.

УДК 530.1

**ФАЗОВЫЕ ПОРТРЕТЫ НЕЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА
С ДВУХЯМНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ***Л.С. Метлов**Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина НАН Украины, г. Донецк*

Методам молекулярной динамики исследован нелинейный осциллятор с двумя минимумами потенциала взаимодействия, который может служить элементом для моделирования структурных дефектов в твердых телах на 1D нелинейных цепочках. Предложен вид потенциала взаимодействия и его различные представления, полезные для практических расчетов. Построены фазовые портреты таких осцилляторов при различных значениях его полной энергии или при различных начальных отклонениях его от положения равновесия. Эволюция элементарного объема фазового пространства, представленного «регулярным» ансамблем Гиббса, демонстрирует переход от регулярной структуры к хаотической. Результаты исследований могут быть использованы при чтении курса «Стохастические методы в физике».

Ключевые слова: фазовый портрет, нелинейная цепочка, двухямный потенциал, молекулярная динамика.

Введение. В исследованиях кристаллической решетки широко используются методы молекулярной динамики, основанной на различного рода приближениях в описании взаимодействия между частицами (атомами). Существует направление молекулярной динамики, использующие степенные разложения в окрестности равновесных положений атомов [1 – 4]. Однако, в таком приближении невозможно реалистично описать сильные возбуждения с большим отклонением атомов от положений равновесия. Более продвинутое направление использует парные потенциалы взаимодействия с учетом всех степеней нелинейности (реалистические потенциалы), такие как потенциал Леннард-Джонса [5, 6], потенциал Букингема и т.д. Это позволяет описать сильные возбуждения солитонного типа, например, в нелинейных цепочках [5, 6]. В то же время, концепция парных потенциалов представляет собой попытку свести задачу многих тел даже для двух атомов (атомных остовов и электронов) к задаче двух тел, что возможно только в некоторых предельных случаях, и особенно проблематично для металлов, в которых имеются коллективизированные электроны. Для преодоления этого недостатка в последнее время интенсивно развиваются различного рода многочастичные методы, в том числе из «первых принципов» [7, 8].

В то же время, концепция парных потенциалов может быть важной в двух аспектах. В чисто техническом аспекте, в силу простоты модели это малое время, требуемое для расчетов. При расчетах больших систем и длительной временной асимптотики это играет немаловажную роль. И второй аспект, это изучение статистических закономерностей, которые, как известно, не чувствительны к деталям взаимодействия между частицами, но требуют для расчетов длительных временных интервалов. В том числе, к этой проблеме относится и сверхзадача, вывести необратимые законы статистической физики из обратимых законов движения механики материальных точек.

Важнейшей задачей физики твердого тела является моделирование его кристаллической структуры и нарушений этой структуры в виде различного рода структурных дефектов, таких как вакансии, межузельные атомы, дислокации, границы зерен и т.д. Для моделирования дефектов кристаллической решетки стараются, как можно точнее учесть взаимодействия атомов, и используют для этого, практически, потенциалы с одним минимумом. При этом, объем вычислений резко возрастает с ростом размерности задачи. Выходом могло бы быть снижение размерности задачи, но считается, что моделировать структурные дефекты на одномерных нелинейных цепочках не имеет смысла в силу отсутствия для этого соответствующих топологических условий. В то же время, даже на нелинейных цепочках такая возможность существует, но не в отношении классических структурных дефектов, перечисленных выше, а в отношении атомов, находящихся в основном и возбужденном состояниях. При этом возбужденное состояние атома, в силу его большего равновесного расстояния и энергии, можно интерпретировать, как особый вид структурного дефекта. При этом возбужденное состояние может быть стабилизировано внешними механическими, например, растягивающими напряжениями. Простейшей реализацией нелинейной цепочки с такими свойствами будет нелинейный осциллятор с двухямным потенциалом взаимодействия.

В настоящей работе предложено степенное выражение для потенциала взаимодействия и удобная процедура для поиска его параметров, исследуются фазовые портреты и эволюция ансамбля Гиббса нелинейных осцилляторов с таким потенциалом взаимодействия.

Двухямный парный потенциал взаимодействия между частицами. Выбор параметров. Наиболее часто используемый в исследованиях парный потенциал взаимодействия между частицами, потен-

циал Леннард-Джонса U , являється двухпараметричним:

$$U = E \left(\left(\frac{r}{r_0} \right)^{12} - 2 \left(\frac{r}{r_0} \right)^6 \right), \quad (1)$$

где r – расстояние частицы от центра взаимодействия, совпадающего с началом системы координат. Параметрами потенциала является энергия связи E_b и равновесное расстояние r_0 . Известны также трехпараметрические парные потенциалы, которые вводились с целью лучшего описания физических свойств кристаллов благородных газов [9]. Однако, двухямный потенциал невозможно описать в рамках двухпараметрической или трехпараметрической модели, и как минимум необходима модель, имеющая четыре параметра. Выберем его в виде:

$$U = \frac{A}{r^{16}} - \frac{B}{r^{12}} + \frac{C}{r^8} - \frac{D}{r^4}, \quad (2)$$

где A, B, C, D – параметры модели. Чередування знаків вибрано з метою, щоб кількість нулевих значень потенціала було максимальним при позитивних параметрах моделі. Рівновесні значення відстані визначимо з умови

$$\frac{dU}{dr} = -16 \frac{A}{r^{17}} + 12 \frac{B}{r^{13}} - 8 \frac{C}{r^9} + 4 \frac{D}{r^5} = 0, \quad (3)$$

что относительно обратных расстояний

$$s = 1/r^4 \quad (4)$$

дає рівняння

$$4As^3 - 3Bs^2 + 2Cs - D = 0, \quad (5)$$

Для практичних розрахунків потенціалів і динаміки матеріальних точок зручніше, однак, задавати не коефіцієнти A, B, C, D , а корні рівняння (5) s_1, s_2, s_3 , полагаючи

$$4A(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3) = 0, \quad (5)$$

Откуда

$$B = 4A(s_1 + s_2 + s_3)/3 = \frac{4}{3}A \left(\frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^4} + \frac{1}{r_3^4} \right),$$

$$C = 2A(s_1s_2 + s_2s_3 + s_1s_3) = 2A \left(\frac{1}{r_1^4 r_2^4} + \frac{1}{r_2^4 r_3^4} + \frac{1}{r_1^4 r_3^4} \right), \quad (6)$$

$$D = 4As_1s_2s_3 = 4A \frac{1}{r_1^4 r_2^4 r_3^4},$$

где масштабный множитель A задается произвольно, и при одних и тех же значениях корней уравнения (4) определяет крутизну потенциального «рельефа», глубину потенциальных ям, высоту потенциального барьера и силу взаимодействия частиц.

Различные варианты зависимости потенциала взаимодействия от параметров r при различных параметрах r_1, r_2 и r_3 приведены на рис. 1 (расстояние до первого минимума принято за единицу длины).

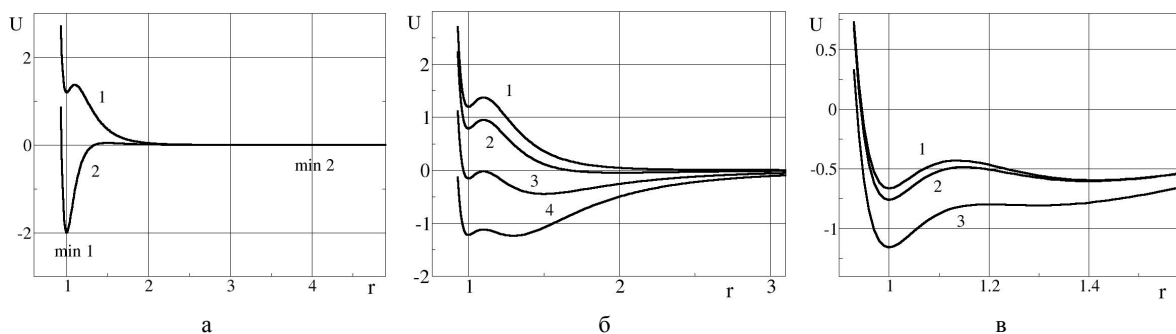


Рис. 1. Парный потенциал взаимодействия: 1 – при $r_2 = 1.1362, r_3 = 1.414$; 2 – при $r_2 = 1.15, r_3 = 1.4$; 3 – при $r_2 = 1.2, r_3 = 1.3$

Если выбрать соотношение расстояний между минимумами r_3/r_1 такое же, как соотношение в атоме водорода, между радиусом первого возбужденного и основного состояния, то есть, 1:4, и, кроме того, вы-

брать $r_1 = 1$, $r_2 = 1.1$ (кривая 1, рис. 1, а) и $r_2 = 1.5$ (кривая 2), то второй минимум в «запланированной» области $r_3 = 4$ визуально не обнаруживается. Это свидетельствует о непригодности выбранных параметров потенциала для описания «структурных» дефектов. Кроме того, когда второй корень r_2 ближе к первому (кривая 1, рис. 1, а), то первая потенциальная яма получается более узкой, но менее глубокой, энергия основного первого минимума выше энергии «возбужденного» второго минимума, что также противоречит очевидным физическим требованиям к потенциалам такого рода.

Варьирование параметра r_3 (кривые 1 – $r_3 = 4$; 2 – $r_3 = 2$; 3 – $r_3 = 1.5$; 4 – $r_3 = 1.3$, рис. 1, б) при значениях других параметров $r_1 = 1$, $r_2 = 1.1$ уже дает более ожидаемый результат, второй минимум формируется более явно и уже конкурирует с первым минимумом. Одновременная вариация по двум параметрам (кривые 1 – при $r_2 = 1.1362$, $r_3 = 1.414$; 2 – при $r_2 = 1.15$, $r_3 = 1.4$; 3 – при $r_2 = 1.2$, $r_3 = 1.3$, рис. 1, в) дает уже результат приемлемый для последующих моделирований. Для определенности исследование фазовых портретов проведем для потенциала взаимодействия соответствующие кривой 1 на рис. 1, в.

Фазовые портреты нелинейного осциллятора с двухямым потенциалом взаимодействия. Рассмотрим нелинейный осциллятор с потенциалом взаимодействия (2). Уравнения Гамильтона для него будут иметь вид:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{p}{m}, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 16 \frac{A}{q^{17}} - 12 \frac{B}{q^{13}} + 8 \frac{C}{q^9} - 4 \frac{D}{q^5}, \quad (7)$$

где в качестве обобщенной координаты выбрана безразмерная величина (деформация):

$$q = \frac{r - r_0}{r_0} \quad (8)$$

Фазовый портрет такого осциллятора, построенного для потенциала задаваемого кривой 1 на рис. 1, в, представляет собой в общем случае сложную фигуру (рис. 2, а). В зависимости от энергии осциллятора, параметризуемой начальным смещением от положения равновесия при нулевой начальной скорости, можно выделить систему эллипсов вокруг первого (верхний) и второго (нижний) минимума. Биссектриса, разделяющая режимы осцилляций вокруг каждого из минимумов, соответствует максимуму потенциала взаимодействия. При высокой энергии осциллятора фазовые траектории охватывают оба минимума. В силу того, что потенциал в области отталкивания идет круче, а в области притяжения является более пологим, то в целом фазовые траектории оказываются вытянутыми в направлении возрастания координаты. Фазовый портрет для потенциала задаваемого кривой 2 на рис. 1, в состоит в основном из линий, охватывающих оба минимума (рис. 2, б).

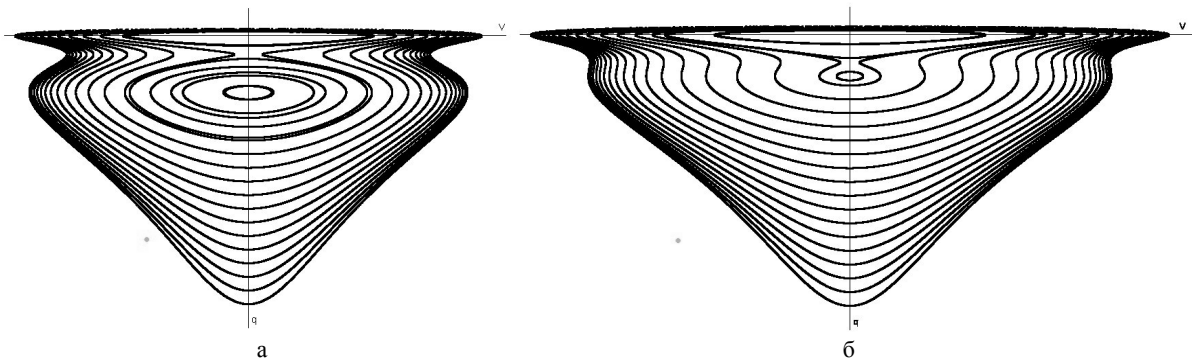


Рис. 2

Представляет интерес рассмотреть эволюцию ансамбля Гиббса и визуально убедиться в выполнении постулата несжимаемости фазового объема, заложенного в основу доказательства теоремы Лиувилля. Для этого зададим систему осцилляторов с начальными условиями, равномерно заполняющих прямоугольный элемент фазового объема. (рис. 3, а).

Выбор регулярного распределения элементов (осцилляторов) ансамбля Гиббса в фазовом пространстве в начальный момент времени (рис. 3, а) предопределяет особенности дальнейшей эволюции ансамбля. Визуально видно, что постулат несжимаемости элементов объема фазового пространства приблизительно выполняется, там где регулярные линии располагаются реже (и казалось бы в фазовом пространстве возникают пустоты), там точки вдоль линии располагаются гуще (рис. 3, б-е). На завершающей стадии распределение систем в фазовом пространстве полностью стохастизируется (рис. 3, ж-и). При этом густота точек в центральных областях фазового пространства заметно выше густоты точек на периферии (нижняя часть рис. 3, ж-и), что можно трактовать, как расширение «несжимаемой жидкости».

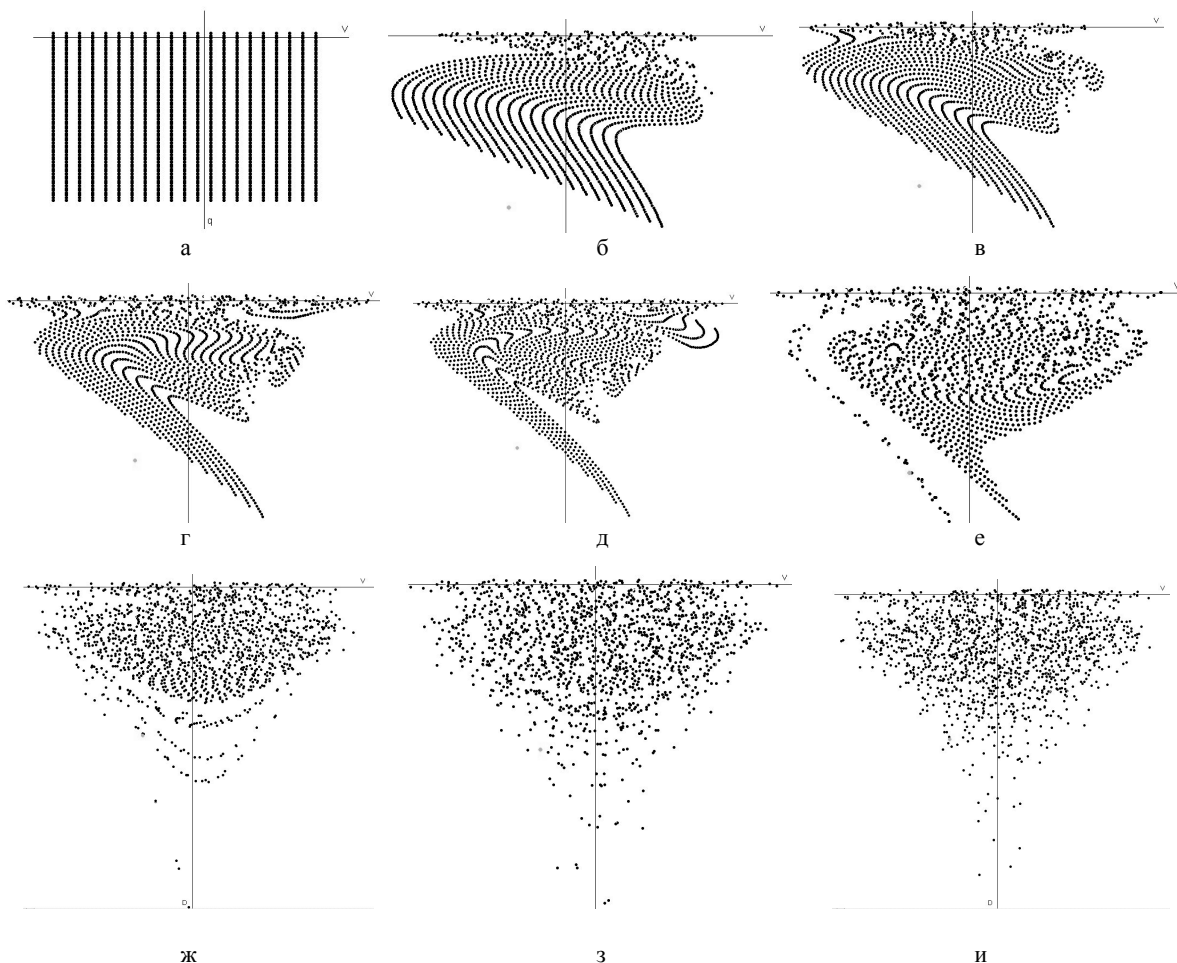


Рис. 3

Кроме того, следует отметить, что не все осцилляторы, образующие ансамбль остались в ограниченной области фазового (и обычного, координатного) пространства. Часть частиц, у которых было максимальное отклонение в положительном направлении от положения равновесия и максимальная скорость (нижняя левая и правая участки элемента фазового объема на рис. 3, а), ушли на бесконечность. При увеличении начального объема элементарного фазового пространства еще большее количество точек уйдет на бесконечность, и, следовательно, фазовый объем будет разорван. Причем, в зависимости от начальной энергии, частицы будут улетать на бесконечность с разной скоростью, и полоса фазового объема этой части ансамбля Гиббса будет постоянно расширяться.

Выводы. Фазовые портреты нелинейного осциллятора с двухямным потенциалом взаимодействия представляют собой семейство эллиптических кривых, параметризованных значением полной энергии осциллятора или начальным значением обобщенной координаты, вытянутых в направлении больших значений обобщенной координаты. В зависимости от начального объема фазового пространства, занимаемого ансамблем Гиббса, часть частиц, образующих «осцилляторов», уйдет на бесконечность. Осцилляторы, оставшиеся в финитной области на промежуточной стадии эволюции ансамбля, формируют более плотное распределение в центральных областях вблизи первого и второго минимума и более разреженное распределение на периферийных участках доступного фазового пространства.

РЕЗЮМЕ

Методом молекулярної динаміки досліджено нелінійний осцилятор з двома мінімумами потенціалу взаємодії, який може бути елементом для моделювання структурних дефектів твердих тіл на 1D нелінійних ланцюгах. Запропоновано вид потенціалу взаємодії і його різні форми, які корисні для практичних розрахунків. Побудовані фазові портрети таких осциляторів при різних значеннях його повної енергії або при різних відхиленнях його від положення рівноваги. Еволюція елементарного об'єму фазового простору, який було представлено «регулярним» ансамблем Гіббса, демонструє перехід від регулярної структури до хаотичної. Результати досліджень можуть бути використані при читанні курсу «Стохастичні методи у фізиці»

Ключові слова: фазові портрети, нелінійні ланцюги, двухямний потенціал, молекулярна динаміка.

SUMMARY

A nonlinear oscillator with two minimums of interaction potential, which can be as an element for simulation of structural defects of solids on 1D nonlinear chains, is investigated by the method of molecular dynamics. A type of interaction potential and its different forms are proposed that are useful for practical calculations. The phase portraits of such oscillators are constructed at different values of total energy or at different deviations from its equilibrium positions. Evolution of elementary phase space volume presented by a «regular» Gibbs ensemble demonstrates transition from regular structure to chaotic one. The results can be used for course «Stochastic methods in physics».

Keywords: phase portraits, nonlinear chains, two-well potentials, molecular dynamics.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Долгов А.С. О локализации колебаний в нелинейной кристаллической структуре / А.С. Долгов // Физика твердого тела. – 1986. – Т. 28. – С. 1641-1644.
2. Sandusky K.W. Stability and motion of intrinsic localized modes in nonlinear periodic lattices / K.W. Sandusky, J.B. Page, K.E. Schmidt // Physical Review B. – 1992. – Vol. 46. – P. 6161.
3. Bickham S.R. Stationary and moving intrinsic localized modes in one-dimensional monatomic lattices with cubic and quartic anharmonicity / S.R. Bickham, S.A. Kiselev, A.J. Sievers // Physical Review B. – 1993. – Vol. 47. – P. 14206.
4. Localization and equipartition of energy in the β -FPU chain: Chaotic breathers / T. Cretegny, T. Dauxois, S. Ruffo, A. Torcini // Pysica D. – 1998. – Vol. 121. – P. 109.
5. Sandusky K.W. Interrelation between the stability of extended normal modes and the existence of intrinsic localized modes in nonlinear lattices with realistic potentials / K.W. Sandusky, J.B. Page // Physical Review B. – 1994. – Vol. 50. – P. 866.
6. Metlov L.S. Spontaneously appearing discrete moving kinks in nonlinear acoustic chain with realistic potential / L.S. Metlov, Yu.V. Ereimeichenkova // Condensed Matter Physics. – 2003. – Vol. 6. – P. 105.
7. Marx D. Modern methods and algorithms of quantum chemistry / D. Marx, J. Hutter; Ed. by J. Grotendorst. – Juelich: John von Neumann Institute for Computing, 2000. – NIC Series, Vol. 1. – P. 301.
8. Саврасов С.Ю. Расчеты динамики решетки кристаллов из первых принципов / С.Ю. Саврасов, Е.Г. Максимумов // Успехи физических наук. – 1995. – Т. 165. – С. 773.
9. Рейсленд Дж. Физика фононов / Дж. Рейсленд – М.: Мир, 1975. – 366 с.

Поступила в редакцию 23.10.2012 г.

УДК 621.7.669.017(075.8)

IMPROVEMENT OF SOME MECHANICAL PROPERTIES STEEL U8 VIA AMMONIA GAS HEAT TREATMENT

A.Y. Barhoum

Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria

This paper aims to improve some mechanical properties in the surface layers of U8 via ammonia gas heat treatment at a temperature range (600 to 950)°C where the nitrogen is introduced into the surface of U8, while it is in the ferrite state. The hardness was determined using Vickers tester with values ranged between 196-430HV. In addition, the forms of nitride phases are investigated using optical microscope and scanning electron microscope type JMS-6490LV. Furthermore, the corrosion resistance was studied after immersing it in seawater for 30 months where the mass loss was determined each three months.

Keywords: diffusion, nitriding, steel, gas, mechanical properties.

Introduction. Development of chemical and thermal treatment (CTT) of metals in the XX century followed the path of accumulation of experimental data on different types of technologies of this process. The scientific part of the study of CTT was limited to the traditional statement properties and structure of the diffusion layer. The mechanism of the formation of the diffusion with layer considered a unilateral mistaken point of view, based on the sequential process of structure formation in the diffusion of elements in the surface of the metal, i.e. in accordance with diagrams of the equilibrium state of the alloys. Insufficient attention was paid to physical and chemical nature of saturating environment that have a significant effect on the mechanism of the diffusion layer. In the study of conditions for the formation of the diffusion layer only in a few cases the equilibrium thermodynamics was involved. The scientific interpretation of emergent properties in most cases limited to the study of the layer hardness, residual stresses, corrosion resistance and other properties. The absence of the CTT theory very brake as the development of science itself, and its implementation in practice.

The CTT theory must be based on a common approach to the process in each case in terms of the technological conditions of the process. In this connection should be allot great attention to the detailed study of physico-chemical and kinetic factors that form the diffusion layer. Necessary detailed study of the free metal surface (Gibbs surface), its structural and energetic state before and after the saturation of the diffusing element, as it will determine not only the physico-chemical properties of the diffusion layer, and the bulk properties of the metal. Creation theory CTT metals and alloys require attracting modern precision equipment [1].

Major development trends of nitriding at this stage are: 1) improving the nitriding process, providing reception of nitride layers, not prone to brittle fracture, and 2) the development of high-temperature nitriding processes that allow: a) accelerate the process of saturation, and b) to integrated layers consisting from the surface layer with the characteristics of the nitriding layers and downstream diffusion sublayer with the characteristics of the hardened layers; 3) development nitriding processes of and the nitriding, oxinitriding and carbonitriding under reduced pressure with using nitric oxide N_2O as a gas-catalyst and oxidant, and 4) the further development of the processes of plasma (ion) nitriding and more modern processes of plasma carbonitriding; 5) the development of combined processes of saturation, improve the tribological characteristics of components (hardness and wear resistance) in dry sliding friction, 6) improving the nitriding powder alloys, and 7) improving the nitriding corrosion-resistant steels and other.

NH_3 gas heat nitriding of the surface of tools, discs and parts of machines made of ferrite metals and alloys aims at forming harder protection layer to improve surface hardness, corrosion and fatigue resistance, and tolerance. Now, several methods to form protection layers of mechanical part surfaces are available: PDV, CVD surface laser coating, thermal depletion, ion implantation, treatment methods by surface melting using electron beams and others.

Proper change of the properties (mechanical, electrical, etc.) of metal products' surfaces is partly due to gas heat treatment, where both chemical and microstructure plus properties of surface layers change. This is ascribed to the reaction with ambient medium whether it is solid, liquid or gas by heating. As a result of this change the transitions in the phase change, and consequently the microstructure of these layers also changes.

The importance of this research is represented by increasing the hardness of surface layers in U8 carbon steel leaving the internal part as it is in terms of flexibility, giving this kind of steel special importance for resisting corrosion, abrasion and generated stresses to be able to absorb shock during service. The objectives of this study are:

1. Determine the microhardness of considered samples of U8 carbon steel after NH_3 gas heat treatment using Vickers method and *microhardness* ПИМТ-3 tester.
2. Study the microstructure after NH_3 gas heat treatment using *Optical microscope МИМ-7* and the electronic scanner *Scanning microscope JSM-6490L V*.

3. Study the resistance of considered samples to abrasion by immersing them in seawater for two and half years using the sensitive scale Sartorius TE64 (60 g x 0.1 mg).

Gaseous nitriding. In the stable $Fe-N$ system and at equilibrium there are two Fe phases: α and γ in forms of solid and gaseous solutions. The nitriding compounds (nitrides) are produced from N release under high pressure and its accumulation in the defect zones, capillary interstices (pores), grain boundaries, etc. (fig.1) Collection in the first stage is in atomic form and then in molecular form. However, as the case in $Fe-N$ system, the basic sense isn't ascribed to inequilibrium but to the stable ($Fe-N$) system [2 – 4].

Nitriding – a diffusive saturation process of steel surface layers with nitrogen. It takes place by heating steel in solid, liquid and gaseous media. The most common gaseous nitriding is in NH_3 medium. Gaseous nitriding increases microhardness, fatigue resistance and resistance of surface solid layer against oxidization by air, water, vapour, etc.

Nitriding process in the ($Fe-N$) stable system is accompanied by formation of several successive surface layers that contain two or more kinds of nitrides, and is composed of nitride phases in form of layers starting by a surface layer representing a mixture of ($Fe_{2-3}N$) for $Fe_4N + [N] \rightarrow 2Fe_2N(\varepsilon - phase)$ and Fe_4N for $4FeN + [N] \rightarrow Fe_4N(\gamma' - phase)$, followed by a separate layer of Fe_4N for γ' phase. The following layer is produced from eutectoid dissociation of γ phase according to $\gamma \rightarrow \alpha + \gamma'$ process. The last layer is a solid solution from nitrogen in $\alpha - Fe$.

Percentage and structure of nitride phases change depending on steel structure and alloys, where most doping elements (Mo , Cr , Mn and others) excluding (Ti , Si , Al) reduce N solubility in $(Fe, M)_{2-3}N(\varepsilon)$, and consequently N content and nitrided layer thickness are reduced. Existence of Ti , Si and Al increases the thickness of (γ') phase layer plus formation of $(Fe, M)_4N$ in form of continuous interlaced layer or uncontinuous layers on the boundaries of shifts and grains that can reach a high depth causing fragility of diffusion zone. The more nitride-forming elements in the steel and its alloys, the more dominant the (ε) phase. On the other hand, high concentration of N in nitrided layer produces the fragile phase (ξ), (Fe_2N) that is formed by cooling phase zones (ε). In case of nitriding steel in NH_3 and saturation with oxygen and carbon, $Fe_{2-3}(N, C)$ are formed and $Fe_{2-3}(N, C, O)$ are accompanied by nitriding in a medium rich in N by brittleness of surface layers and appearance of pores, resulting in low plasticity of nitrided layers and cracks in surface layers and finally their destruction [2, 5, 6].

Formation of porous surfaces is consistent with stable phases in shift zones and grain boundaries and created vacancies, where different cracks containing N amounts are initially formed in atomic form under high pressure and then in molecular form. Pores are formed as single separate dots or as a system linked with successive and deep channels that cause deep damage to the surface and this damage can be monitored by micromagnification [5].

According to the data of this research [7], the formed pores appear in the transitional phase (ε) at concentration exceeding (8.15% N) post-cooling. This part of the layer remains single-phase at N concentration reaching (6.1–7.15% N) in phase layer (ε) plus absence of porosity, while phase (γ') increases after slow cooling. As nitriding time increases the thickness of phase zone ($\varepsilon + \gamma'$) doesn't change but phase cracks (ε) increase. According to the research data [4], cracks increase by increasing the thickness of phase zone ε . Accordingly, increased carbon content in the steel sharply increases the thickness of porous layer. The walls of pore boundaries are mostly oxidized. Oxidation happens during cooling process of parts in the air [8], facilitating the oxidation and interaction of thin layers with sulphur.

Nitriding region is a polyphase one: solid solutions from the base-metal nitrides, nitrides and doping nitrides. Based on chemical activity of doping elements, two regions can be distinguished: I-type nitriding region and II-type nitriding region. Nitriding region is technically formed from the I-type in pure metals and alloys that contain low amounts of doping elements with low capacity for forming nitrides as compared to base metal. In this case, the intersurface diffusion region (nitriding region) is solid solutions from nitrides, including nitrides of intersurface diffusion region of base metal. As nitride density increases, concentration of nitriding regions able to grow near metal surface decreases. Moreover, the concentration of these regions increases in the volume and depth of diffusion region. I-type internal nitriding regions are characterized by low hardness number between

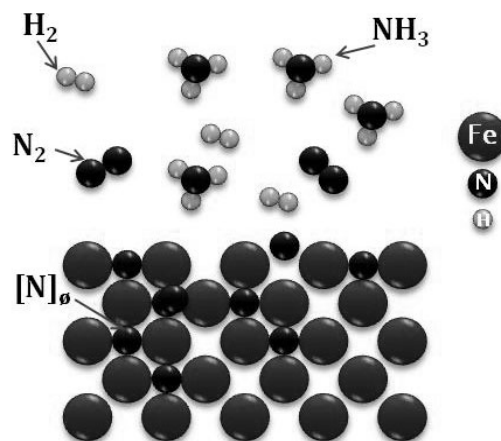


Fig. 1. Schematic illustration of gas nitriding

(150–300)HV, but they increase the tolerance of steel and its alloys. II-type nitriding regions are formed in alloys where doping elements have more chemical affinity with nitrogen than with base metal. Here, nitrogen solubility increases noticeably and its diffusive motion is larger than that of doping elements. The inter-diffusive layer (secondary diffusion layer) represents II-type internal nitriding regions which are composed of solid solutions of Fe nitrides in the phase (γ') and doping elements. Changes of solid solution are the reason beyond formation of interrelated regions firstly then regions of "Ghener – Briston" type, followed by a separate region of independent intrinsic phases. Formation of nitrides results in low energy of free gypsium, particularly when the nucleons have round form (equilibrium state). As nucleon (crystal atoms) grows, the solubility or laminar regions are associated with nitride separation and loss of nitrogen for solid solutions and doping elements.

Research methodology. The samples were prepared from U8 carbon steel (tab. 1) in form of rectangular parallelepiped (8×10×15) mm and put into quartz tube (11) for 30 min inside the heating chamber in normal electric tubular furnace at room temperature (fig. 2). Meanwhile, NH₃ gas was pumped into the acting medium to release air from the system. NH₃ nitriding was carried out on an initial set of samples in a quartz tube for 8 hours at temperatures (600°C, 800°C and 950°C). Temperature in the working zone was measured using electrothermal platinum duplicator with accuracy ±10°C. The velocity of gas flow into the acting medium 20 cm³/min post-treatment left the samples inside heating chamber to cool to the room temperature.

Table 1

Chemical composition of U8 carbon steel

Elements	C	Si	Mn	Ni	S	P	Cr	Cu	rest
% W	0.76-0.83	0.17-0.33	0.17-0.33	≤0.25	≤0.028	≤0.03	≤0.20	≤0.25	Fe

After getting out the samples, the cross section was polished well to measure the microhardness and then to develop their surface with a mixture of ethanol (98%) and HNO₃ (2%) for 20 sec.

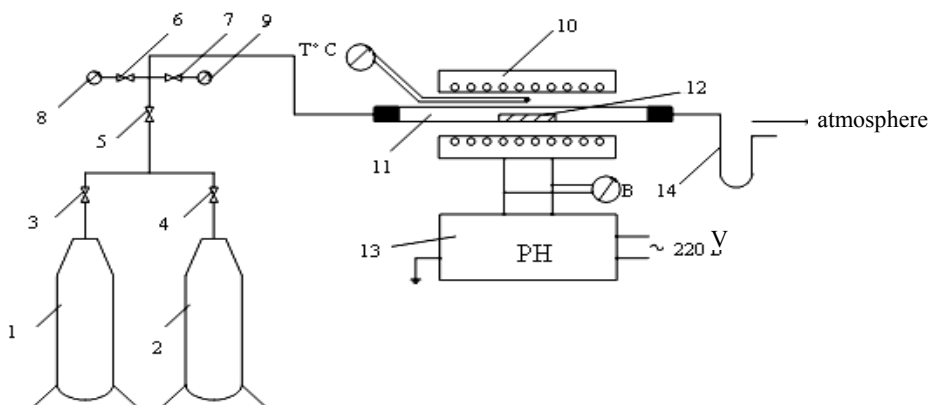


Fig. 2. Diagram of the device applied in gaseous physio-chemical treatment (thermal) of samples (1) NH₃ gas cylinder, (2) different gas cylinders (for compound gaseous treatment), (3,4) valves, (5, 6,7) control valves, (8,9) gas pressure gauges, (10) electric heating unit, (11) a quartz tube, (12) samples, (13) electric feeding unit and (14) water pond (reverse controller)

Results and discussion. Fig. 3 shows the results of microhardness distribution in function of diffusion layer thickness in U8 carbon steel after NH₃ gas heat treatment at temperatures (600°C, 800°C and 950°C) for 8 hours. It has been revealed that the microhardness at 600°C is ranging between 196 HV and 430 HV. Microhardness approximately increases 2.5 times due to the phase (ϵ), and this is related to the generated pores i.e. the microhardness between porous zones and holes filled with molecular nitrogen. As temperature rises to 800°C, the microhardness ranges between 150 HV and 430 HV.

Major contribution to increasing microhardness at a nearly rate of three times is approximately due to the phase (γ'), [solid solution of nitrides (Fe_4N)]. Low interference on the surface layer of hardness

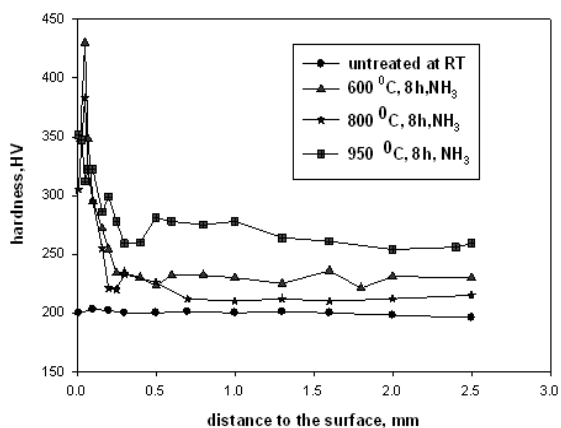


Fig. 3. Changes of hardness in function of hardened layer depth in U8 carbon steel after NH₃ gas heat nitriding

distribution curves at different temperatures plus remarkable decline of hardness near the surface layer at 800°C are noticed. When nitriding temperature rises to 950°C the phase (ε) practically gets absent, and the microhardness ranges between 150 HV and 350 HV. This is in agreement with the research results [5, 7, 8]. Therefore, and due to non-formation of a uniform layer from ($Fe - \alpha$), but a porous layer from the phase ε , the nitriding process goes on as pores and holes, in this case, are filled with molecular nitrogen under pressure reaching 30 atm., i.e. it represents reservoirs for supplying with nitrogen moving between pores and holes, resulting in continual nitriding even after stopping NH_3 pumping into the middle of treatment.

To certify this data, we studied the microstructure of U8 carbon steel using the metalizing microscopic МИМ-7 (fig. 4, a) that shows the change of microstructure at temperature 950°C after nitriding for 8 hours.

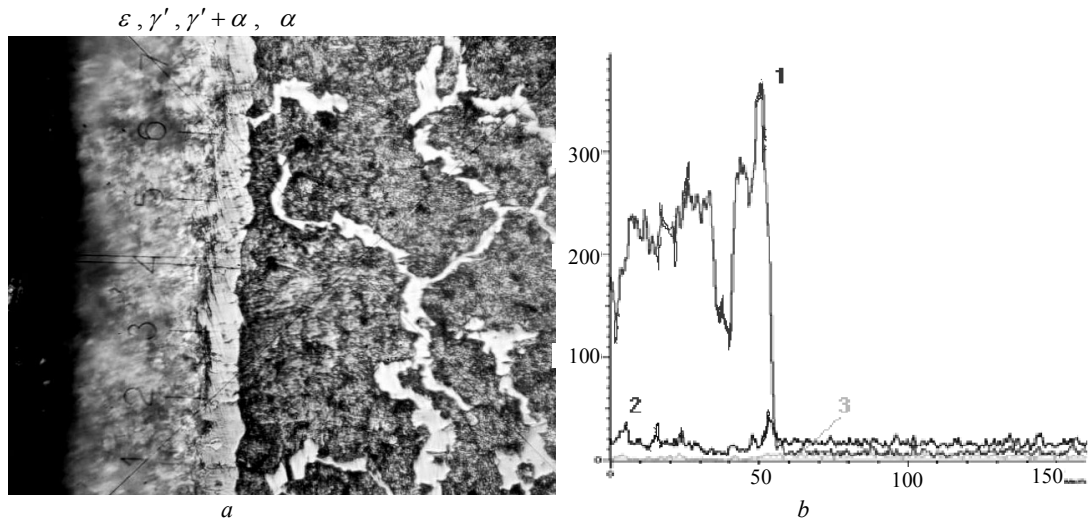


Fig. 4. a – microstructure of U8 carbon steel after NH_3 gas heat nitriding for 8 hours at temperature 950°C (x 300); b – shows the distribution of doping elements during diffusion layer thickness after nitriding process. nitrogen (1), carbon (2), oxygen (3)

Fig. 4, b illustrates the distribution of doping elements during diffusion layer thickness after nitriding process, while fig. 5 shows the resistance of U8 carbon steel against corrosion in seawater for 30 months after NH_3 gas heat treatment.

Conclusions.

1. The effect of NH_3 gas heat treatment on properties and measurements of interactive diffusion layer in U8 carbon steel as a result of complicated processes occur in the phase $\varepsilon + \gamma'$, pores and holes filled with nitrogen and others was obtained. This increased the thickness of such layer from 1.5 to 3 times.
2. It has been obtained that the NH_3 gas heat nitriding in function of thermal factor leads to an increase in the microhardness of diffusion layer of 2.5 times, keeping the sample interior with its elasticity to be able to absorb external shocks and stresses.
3. There is a discrepancy in the resistance of sample corrosion after nitriding by its immersing in seawater for two years. This is due to inconsistency of surface nitriding.
4. The probable existence of closed pores filled with molecular nitrogen in the phase ε and the effect of oxygen on gas heat treatment process need further study.

РЕЗЮМЕ

Метою даної роботи є покращення механічних властивостей поверхневих шарів сталі У8 в результаті термічної обробки в аміаку при температурах (600-950)°С, яке має місце за рахунок проникнення азоту щодо поверхневого шару У8, який вміщує феритну фазу. Твердість, яку було виміряне за методом Вікерса, має діапазон у межах 196-430 НВ. Утворення нітридних фаз спостерігали за допомогою оптичного мікроскопу і скануючого електронного мікроскопу JMS-6490LV. Опір корозії вивчали в морській воді протягом 30 місяців з шагом у 3 місяці

Ключові слова: дифузія, азотування, сталь, газ, механічні властивості.

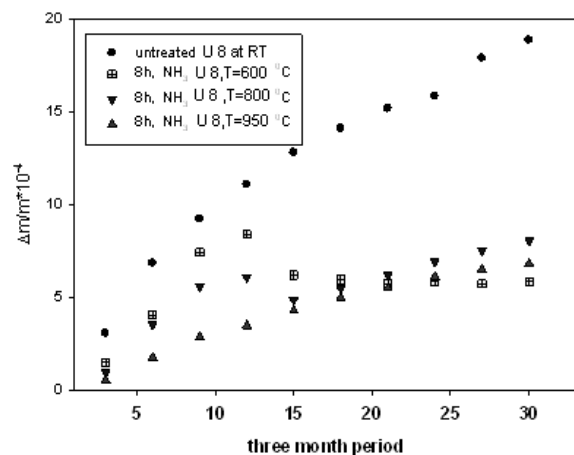


Fig. 5. Resistance of U8 carbon steel after corrosion in seawater for 30 months after NH_3 gas heat treatment

РЕЗЮМЕ

Целью настоящей работы является улучшение механических свойств поверхностных слоев стали У8 в результате термической обработки в аммиаке при температурах (600-950)°С, которое происходит за счет проникновения азота в поверхность У8, содержащую ферритную фазу. Измеренная твердость по методу Виккерса оказалась в пределах 196-430 НV. Образование нитридных фаз наблюдалось с помощью оптического микроскопа и сканирующего электронного микроскопа JMS-6490LV. Сопротивление коррозии изучалось в морской воде в течение 30 месяцев с шагом 3 месяца.

Ключевые слова: диффузия, азотирование, сталь, газ, механические свойства.

REFERENCES

1. Дубинин Г.Н. О перспективах развития химико-термической обработки металлов / Г.Н. Дубинин // *Металловедение и термическая обработка металлов.* – 2004. – № 7. – С. 5-6.
2. Pye D. *Steel Heat Treatment, Metallurgy and Technologies* / D. Pye. – Paris, CRC Press 2006. – 821 p.
3. Фраге Н. Изменение фазового состава, структуры и твердости металлокерамики "карбид титана – высокоуглеродистая сталь" при термической обработке / Н. Фраге, Л.М. Капуткина, В.Г. Прокошкина // *Металловедение и термическая обработка металлов.* – 2007. – № 4. – С. 11-15.
4. Проблемы оптимизации процессов газовой химико-физической (термической) обработки металлов и сплавов / В.Г. Барьяхтар, Ю.М. Буравлёв, А.Г. Милославский, Н.П. Иваницын. – Донецк, ДонНУ, 2009. – 180 с.
5. Goodarzi M. Dependence of overload performance on weld attributes for resistance spot welded galvanized low carbon / M. Goodarzi, S.P.H. Marashi, M. Pouranvari // *J. of Materials Processing Technology.* – 2009. – Vol. 209, No 9. – P. 4379-4384.
6. Буравлев Ю.М. Об особенностях процессов в реакционно-диффузионной зоне при газовой химико-термической обработке металлов и сплавов / Ю.М. Буравлев, О.О. Демянюк // *Вестник Донецкого университета. Серия А: Естественные науки.* – 2005. – № 2. – С. 163-170.
7. Особенности формирования поверхностных слоев сталей после их газовой физико-химической обработки / Ю.М. Буравлев, А.Г. Милославский, М.П. Кушнир, А. Бархум // *Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки.* – 2010. – № 1. – С.107-111.
8. Белашова И.С. Кинетика роста диффузионного слоя при термогазоциклическом способе азотирования / И.С. Белашова, А.О. Шашков // *Металловедение и термическая обработка металлов.* – 2012. – № 6. – С. 46-50.

Received March 11, 2013

УДК 547.567.5

ГИДРОГАЛОГЕНИРОВАНИЕ N-БЕНЗИЛИДЕН(ФЕНОКСИ, 4-ТОЛИЛ)АЦЕТИЛ-1,4-БЕНЗОХИНОНМОНОИМИНОВ

А.П. Авдеенко, С.А. Коновалова, В.М. Васильева

Донбасская государственная машиностроительная академия, г. Краматорск

Гидрогалогенирование N-бензилиден(фенокси, 4-толил)ацетил-2,5-диметил- и 2-метил(2,3-диметил)-N-бензилиденацетил-1,4-бензохинонмоноиминов протекает по схеме 1,4-присоединения, N-бензилиден-(фенокси, 4-толил)ацетил-2,6-диметил-1,4-бензохинонмоноиминов – по схеме 6,3-присоединения.

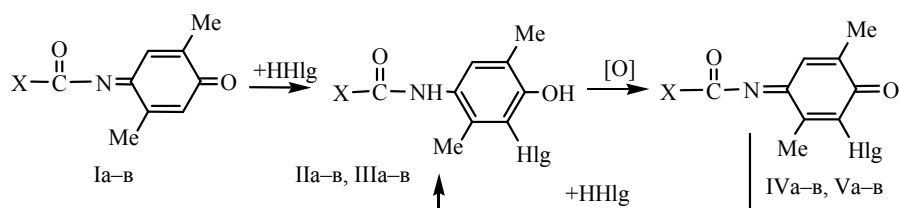
Ключевые слова: 1,4-бензохинонмоноимины, гидрогалогенирование, 1,4-присоединение, 6,3-присоединение.

Введение. Гидрогалогенирование N-арил- [1], N-ароил- [2, 3], N-ацетил- [3], N-[арилсульфо-нилимино(фенил)метил]- [4, 5], N-арилсульфинил- [6] и N-арилсульфонил-1,4-бензохинонмоноиминов [7, 8] изучено достаточно подробно. Установлено, что присоединение хлороводорода на первой стадии в большинстве случаев (при наличии в молекуле хинонмоноимина свободного положения 2 и/или 6 хиноидного ядра) протекает по схеме 1,4-присоединения. Продукты 6,3-присоединения получены только в случае N-n-толил-1,4-бензохинонмоноимина [9] и при гидрогалогенировании 2,6-диметилпроизводных 1,4-бензохинонмоноиминов [5].

Вторая стадия гидрогалогенирования диметилзамещенных 1,4-бензохинонмоноиминов, уже содержащих один атом галогена, возможна только в случае N-[арилсульфонилимино(фенил)метил]-2,6-диметил-1,4-бензохинонмоноиминов [5]. Для всех других N-замещенных 1,4-бензохинонмоноиминов, содержащих два алкильных заместителя в хиноидном ядре, получить продукт присоединения второй молекулы галогеноводорода по схеме 6,3-присоединения не удалось [3].

Целью настоящей работы является выявление особенностей гидрохлорирования и гидробромирования N-бензилиден(фенокси, 4-толил)ацетил-1,4-бензохинонмоноиминов, синтезированных нами ранее [10].

Результаты и их обсуждение. Гидрохлорирование N-бензилиден(фенокси, 4-толил)ацетил-2,5-диметил-1,4-бензохинонмоно-иминов (Ia–в) проводили газообразным хлороводородом в осушенном хлороформе, гидробромирование – 40%-ной бромистоводородной кислотой в ледяной уксусной кислоте (схема 1). В результате получены только продукты 1,4-присоединения (IIa–в – IIIa–в), последующее окисление которых тетраацетатом свинца в уксусной кислоте приводило к образованию соответствующих 1,4-бензохинонмоноиминов (IVa–в – Va–в). Попытки получить продукты присоединения второй молекулы галогеноводорода к хинонмоноиминам (IVa–в – Va–в) оказались неуспешными – протекало только восстановление хинонмоноиминов до соответствующих аминофенолов (IIa–в – IIIa–в).



I – V: X=PhCHCH (a), PhOCH₂ (б), 4-CH₃C₆H₄CH₂ (в); Hlg = Cl (II, IV), Br (III, V).

Схема 1

Строение продуктов реакции установлено на основании данных элементного анализа (табл. 1) и спектров ЯМР ¹H (табл. 2). С целью выявления всех возможных продуктов реакции гидрогалогенирования проводился анализ спектров ЯМР ¹H как продуктов, выделенных из реакционных смесей без предварительной кристаллизации, так и продуктов, полученных после перекристаллизации.

Таблица 1

Выходы, температуры плавления и данные элементного анализа соединений (IIa–в – Va–в, VIIa–в, VIIIa–в, Xa, б, XIa, б)

Номер соединения	Выход, %	Тпл., °С	Найдено, %		Брутто-формула	Вычислено, %	
			N	Cl или Br		N	Cl или Br
IIa	80	194–196	4,94; 4,76	11,46; 11,87	C ₁₇ H ₁₆ ClNO ₂	4,64	11,75
IIб	64	149–150	4,49; 4,36	11,84; 12,15	C ₁₆ H ₁₆ ClNO ₃	4,58	11,60
IIв	71	209–210	4,83; 4,47	12,20; 11,42	C ₁₇ H ₁₈ ClNO ₂	4,61	11,67

Продолж. табл. 1

IIIa	58	199–201	4,26; 3,90	24,67; 22,75	C ₁₇ H ₁₆ BrNO ₂	4,05	23,08
IIIб	74	150–151	4,12; 3,85	23,50; 23,96	C ₁₆ H ₁₆ BrNO ₃	4,00	22,82
IIIв	88	204–206	4,20; 3,74	22,18; 24,09	C ₁₆ H ₁₆ BrNO ₃	4,02	22,95
IVa	50	121–122	4,33; 4,85	10,72; 11,10	C ₁₇ H ₁₄ ClNO ₂	4,67	11,83
IVб	44	89–91	4,55; 4,42	12,81; 11,98	C ₁₆ H ₁₄ ClNO ₃	4,61	11,67
IVв	82	130–131	4,80; 4,74	11,09; 13,65	C ₁₇ H ₁₆ ClNO ₂	4,64	11,75
Va	62	122–123	3,86; 4,12	20,64; 22,32	C ₁₇ H ₁₄ BrNO ₂	4,07	23,21
Vб	41	71–72	4,19; 3,27	24,50; 23,87	C ₁₆ H ₁₄ BrNO ₃	4,02	22,95
Vв	47	113–115	4,31; 3,75	25,08; 22,63	C ₁₇ H ₁₈ BrNO ₂	4,05	23,08
VIIб	41	131–132	4,36; 4,62	12,45; 11,52	C ₁₆ H ₁₆ ClNO ₃	4,58	11,60
VIIIa	86	214–215	4,22; 3,87	23,95; 22,73	C ₁₇ H ₁₆ BrNO ₂	4,05	23,08
VIIIб	64	160–161	4,17; 3,89	22,26; 24,15	C ₁₆ H ₁₆ BrNO ₃	4,00	22,82
VIIIв	81	174–176	4,23; 3,30	21,87; 23,53	C ₁₆ H ₁₆ BrNO ₃	4,02	22,95
Xa	78	206–207	4,68; 4,95	11,29; 13,04	C ₁₆ H ₁₄ ClNO ₂	4,87	12,32
Xб	43	160–161	4,37; 4,44	24,97; 25,71	C ₁₆ H ₁₄ BrNO ₂	4,22	24,05
XIa	73	236–237	4,41; 4,50	11,22; 11,90	C ₁₇ H ₁₆ ClNO ₂	4,64	11,75
XIб	60	213–215	3,79; 3,92	24,16; 23,69	C ₁₇ H ₁₆ BrNO ₂	4,05	23,08

Таблица 2

Спектры ЯМР ¹H соединений (IIa–в – Va–в, VIIa–в, VIIIa–в, Xa, б, XIa, б)

Номер соединения (р-ль)	Химические сдвиги, δ, м.д.		
	протонов аминифенольного (хиноидного) ядра	протонов групп NH, OH	протонов групп PhCHCHCO, 4-CH ₃ C ₆ H ₄ CH ₂ CO, PhOCH ₂ CO
1	2	3	4
IIa (DMSO-d ₆)	2,09 с (3H, Me ²), 2,19 с (6H, Me ⁵), 7,09 с (1H, H ³)	8,34 с (1H, NH), 9,67 с (1H, OH)	6,91 д (1H, CH=CH, J 15,9 Гц), 7,39–7,63 м (5H, Ph), 7,54 д (1H, CH=CH, J 15,6 Гц)
IIб (DMSO-d ₆)	2,10 с (3H, Me ²), 2,17 с (3H, Me ⁵), 6,96 с (1H, H ³)	8,99 с (1H, NH), 9,60 с (1H, OH)	4,68 с (2H, OCH ₂), 6,99–7,36 м (5H, Ph)
IIв (DMSO-d ₆)	2,08 с (3H, Me ²), 2,14 с (3H, Me ⁵), 6,90 с (1H, H ³)	8,93 уш.с (1H, NH), 9,55 с (1H, OH)	2,28 с (3H, 4-CH ₃ C ₆ H ₄), 3,55 с (2H, CH ₂), 7,13 д (2H, H ^{6,2} , J 8,1 Гц), 7,23 д (2H, H ^{5,3} , J 8,1 Гц)
IIIб (DMSO-d ₆)	2,14 с (3H, Me ²), 2,19 с (3H, Me ⁵), 6,98 с (1H, H ³)	8,93 с (1H, NH), 9,62 с (1H, OH)	4,68 с (2H, OCH ₂), 6,96–7,36 м (5H, Ph)
IIIв (DMSO-d ₆)	2,12 с (3H, Me ²), 2,16 с (3H, Me ⁵), 6,92 с (1H, H ³)	9,00 с (1H, NH), 9,55 с (1H, OH)	2,28 с (3H, 4-CH ₃ C ₆ H ₄), 3,54 с (2H, CH ₂), 7,13 д (2H, H ^{6,2} , J 8,1 Гц), 7,22 д (2H, H ^{5,3} , J 8,1 Гц)
IVa (CDCl ₃)	2,04 д (3H, Me ² , J 1,5 Гц), 2,39 с (3H, Me ⁵), 6,75 к (1H, H ³)	–	6,66 д (1H, CH=CH, J 16,2 Гц), 7,36–7,57 м (5H, Ph), 7,53 д (1H, CH=CH, J 16,2 Гц)
IVб (CDCl ₃)	2,02 д (3H, Me ² , J 2,1 Гц), 2,22 с (3H, Me ⁵), 6,63 к (1H, H ³)	–	4,86 с (2H, OCH ₂), 6,89–7,33 м (5H, Ph)
IVв (CDCl ₃)	1,86 д (3H, Me ² , J 1,5 Гц), 2,26 с (3H, Me ⁵), 6,18 к (1H, H ³)	–	2,31 с (3H, 4-CH ₃ C ₆ H ₄), 3,80 с (2H, CH ₂), 7,12 уш.с (4H, 4-CH ₃ C ₆ H ₄)
Va (CDCl ₃)	2,05 уш.с (3H, Me ²), 2,44 с (3H, Me ⁵), 6,74 уш.с (1H, H ³)	–	6,66 д (1H, CH=CH, J 16,2 Гц), 7,43–7,57 м (5H, Ph), 7,53 д (1H, CH=CH, J 16,5 Гц)
Vб (CDCl ₃)	2,02 уш.с (3H, Me ²), 2,26 с (3H, Me ⁵), 6,63 уш.с (1H, H ³)	–	4,85 с (2H, OCH ₂), 6,89–7,32 м (5H, Ph)
Vв (CDCl ₃)	1,87 д (3H, Me ² , J 1,5 Гц), 2,31 с (6H, Me ⁵), 6,18 к (1H, H ³)	–	2,31 с (3H, 4-CH ₃ C ₆ H ₄), 3,80 с (2H, CH ₂), 7,12 уш.с (4H, 4-CH ₃ C ₆ H ₄)
VIIa (DMSO-d ₆)	2,17 с (3H, Me ⁶), 2,24 с (3H, Me ⁷), 7,30 с (1H, H ⁵)	8,75 с (1H, NH), 9,51 с (1H, OH)	6,95 д (1H, CH=CH, J 15,6 Гц), 7,40–7,64 м (5H, Ph), 7,54 д (1H, CH=CH, J 15,9 Гц)
VIIб (DMSO-d ₆)	2,17 с (3H, Me ⁶), 2,25 с (3H, Me ⁷), 7,29 с (1H, H ⁵)	8,69 с (1H, NH), 9,42 с (1H, OH)	4,71 с (2H, OCH ₂), 6,97–7,36 м (5H, Ph)
VIIв (DMSO-d ₆)	2,13 с (3H, Me ⁶), 2,21 с (3H, Me ⁷), 7,15 с (1H, H ⁵)	8,95 с (1H, NH), 9,58 с (1H, OH)	2,28 с (3H, 4-CH ₃ C ₆ H ₄ CH ₂), 3,52 с (2H, CH ₂), 7,11 д (2H, H ^{6,2} , J 8,1 Гц), 7,20 д (2H, H ^{5,3} , J 8,1 Гц)
VIIIa (DMSO-d ₆)	2,17 с (3H, Me ⁶), 2,32 с (3H, Me ⁷), 7,23 с (1H, H ⁵)	8,70 с (1H, NH), 9,47 с (1H, OH)	6,97 д (1H, CH=CH, J 15,6 Гц), 7,40–7,64 м (5H, Ph), 7,55 д (1H, CH=CH, J 15,9 Гц)
VIIIб (DMSO-d ₆)	2,15 с (3H, Me ⁶), 2,29 с (3H, Me ⁷), 7,28 с (1H, H ⁵)	8,71 с (1H, NH), 9,42 с (1H, OH)	4,69 с (2H, OCH ₂), 6,97–7,36 м (5H, Ph)
VIIIв (DMSO-d ₆)	2,13 с (3H, Me ⁶), 2,28 с (3H, Me ⁷), 7,04 с (1H, H ⁵)	8,66 с (1H, NH), 9,40 с (1H, OH)	2,28 с (3H, 4-CH ₃ C ₆ H ₄), 3,58 с (2H, CH ₂), 7,13 д (2H, H ^{6,2} , J 8,1 Гц), 7,24 д (2H, H ^{5,3} , J 8,1 Гц)
Xa (DMSO-d ₆)	2,21 с (3H, Me ²), 7,32 д (1H, H ³ , J 1,8 Гц), 7,76 д (1H, H ⁵ , J 1,8 Гц)	8,85 уш.с (1H, OH), 10,37 с (1H, NH)	6,90 д (1H, CH=CH, J 15,6 Гц), 7,41–7,64 м (5H, Ph), 7,55 д (1H, CH=CH, J 15,9 Гц)

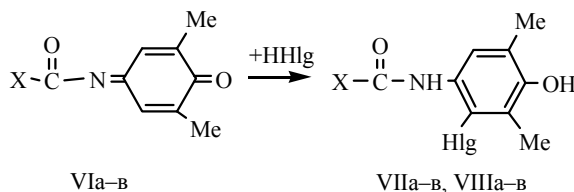
Продолж. табл. 2

Xб (DMSO-d6)	2,09 с (3H, Me ³), 2,19 с (3H, Me ³), 7,31 с (1H, H ⁵),	8,96 уш. с (1H, NH), 9,53 с (1H, OH)	6,92 д (1H, CH=CH, J 15,6 Гц), 7,38–7,64 м (5H, Ph), 7,55 д (1H, CH=CH, J 15,9 Гц)
XIa (DMSO-d6)	2,23 с (3H, Me ³), 7,30 д (1H, H ³ , J 1,8 Гц), 7,87 д (1H, H ⁵ , J 1,8 Гц)	8,87 уш. с (1H, NH), 10,10 с (1H, OH)	6,78 д (1H, CH=CH, J 15,6 Гц), 7,40–7,63 м (5H, Ph), 7,56 д (1H, CH=CH, J 15,9 Гц)
XIб (DMSO-d6)	2,08 с (3H, Me ³), 2,19 с (3H, Me ³), 7,42 с (1H, H ⁵)	8,85 уш. с (1H, NH), 9,54 с (1H, OH)	6,91 д (1H, CH=CH, J 15,6 Гц), 7,40–7,64 м (5H, Ph), 7,56 д (1H, CH=CH, J 15,9 Гц)

В спектрах ЯМР ¹H аминафенолов (IIa–в – IIIa–в) синглет протона аминафенольного ядра H³ имеет химический сдвиг 6,92–7,09 м.д., синглеты протонов группы OH проявляются в области δ 9,55–9,60 м.д., группы NH – δ 8,93–9,00 м.д. Форма и химический сдвиг атома H³ хинонмоноиминов (IVa–в, Va–в) – квадруплет при δ 6.18–6.74 м.д. – полностью подтверждают их строение.

Ранее установлено, что введение атома галогена в хиноидное ядро хинонмоноиминов повышает их окислительно-восстановительный потенциал (ОВП) [11]. В связи с этим можно предположить, что ОВП хинонмоноиминов (IVa–в – Va–в) должен быть выше, чем хинонмоноиминов (Ia–в), поэтому при гидрогалогенировании хинонмоноиминов (IVa–в – Va–в) процесс восстановления становится более выгодным, чем гидрогалогенирование, то есть возможность гидрогалогенирования определяется конкуренцией двух процессов – гидрогалогенирования и восстановления.

При гидрогалогенировании N-бензилиден(фенокси, 4-толил)ацетил-2,6-диметил-1,4-бензохинониминов (VIa–в), синтезированных ранее [10], получены продукты 6,3-присоединения (VIIa–в – VIIIa–в) (схема 2), причем при гидрохлорировании хинонмоноиминов (VIa, в) выделить продукты в индивидуальном виде не удалось – получены смеси аминафенолов (VIIa, в) и продукта гидролиза (2,6-диметил-3-хлор-1,4-бензохинона), разделить которые не удалось.



VI – VIII: X=PhCHCH (a), PhOCH₂ (б), 4-CH₂C₆H₄CH₂ (в); Hlg = Cl (VII), Br (VIII).

Схема 2

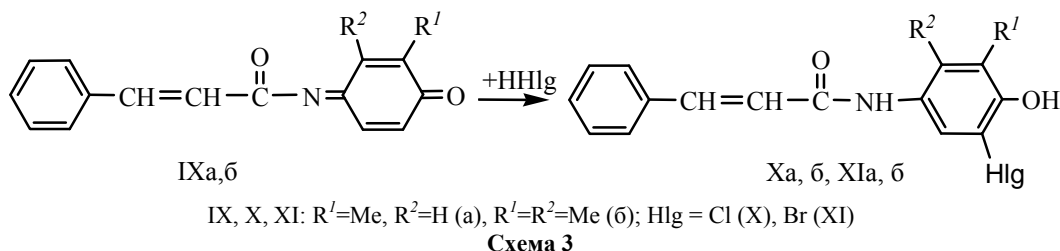
Строение соединений (VIIa–в, VIIIa–в) доказано с помощью данных спектров ЯМР ¹H (см. табл. 2) и элементного анализа (см. табл. 1) для индивидуально выделенных соединений (VIIб, VIIIa–в). В спектрах ЯМР ¹H соединений (VIIa–в, VIIIa–в) присутствует характерный синглет атома H⁵ в области δ 7,15–7,28 м.д., два синглета атомов водорода метильных групп Me² (δ 2,21–2,32 м.д.), Me⁶ (δ 2,13–2,17 м.д.) и синглеты атомов водорода групп NH (δ 8,69–8,95 м.д.), OH (δ 9,40–9,58 м.д.).

Ранее на основании данных квантово-химических расчетов установлено, что для N-замещенных 1,4-бензохинонмоноиминов (Ia–в) значение энергии НСМО уменьшается в ряду PhCHCHC(O)- (–356,33 кДж/моль) > PhCH₂C(O)- (–366,13 кДж/моль) > PhOCH₂C(O)- (–386,89 кДж/моль) [12], причем для N-бензилиденацетил-1,4-бензохинонимина оно наиболее близко к значению энергии НСМО N-*n*-толил-1,4-бензохинонимина (–324,12 кДж/моль), для которого ранее наблюдалось 6,3-присоединение хлороводорода [9]. В работе [4] для определения направления присоединения атома галогена в хиноидное ядро 1,4-бензохинонмоноиминов предложено использовать значения плотности НСМО на атомах углерода хиноидного ядра, причем было высказано предположение, что для 1,4-бензохинонмоноиминов, имеющих группу СО у атома азота возможно как 1,4-, так 6,3-присоединение. Но в работе [3] в результате гидрогалогенирования N-ацетил- и N-ароил-1,4-бензохинонмоноиминов, энергия НСМО которых составляет –366,651 кДж/моль и –364,971 кДж/моль, получены только продукты 1,4-присоединения. Так как N-бензилиденацетил-1,4-бензохинонимин среди рассматриваемых хинонмоноиминов имеет наиболее высокое и близкое к N-*n*-толил-1,4-бензохинонимину значение энергии НСМО, то необходимо проверить возможность образования продуктов 6,3-присоединения для N-бензилиденацетил-1,4-бензохинониминов, имеющих свободную связь С=С хиноидного ядра.

С целью проверки данного предположения мы исследовали присоединение галогеноводородов к N-бензилиденацетил-1,4-бензохинониминам (IXa, б), имеющим свободную связь С=С хиноидного ядра. Для выявления всех возможных продуктов реакции проводился анализ как продуктов, выделенных из реакционной смеси, так и продуктов, полученных после перекристаллизации.

В результате установлено, что гидрогалогенирование хинонмоноиминов (IXa, б) идет только по схеме 1,4-присоединения (схема 3) – получены аминафенолы (Xa, б, XIa, б), продуктов 6,3-присоединения не выявлено.

На основании этого можно предположить, что хинонмоноимины (IXa, б) имеют все же недостаточно высокое значение энергии НСМО для протекания гидрогалогенирования по схеме 6,3-



присоединения. Так, ранее смесь продуктов 1,4- и 6,3-присоединения была получена при гидрохлорировании *N*-*n*-хлорфенил-1,4-бензохинонимина [1], имеющего энергию НСМО –345,41 кДж/моль. То есть значение энергии НСМО хинонмоноимина, при котором становится возможным 6,3-присоединение галогеноводородов должно быть порядка –345 кДж/моль или больше.

Строение соединений (Xa, б, XIa, б) доказано с помощью данных спектров ЯМР ¹H (табл. 2) и элементного анализа (см. табл. 1). Для спектров ЯМР ¹H соединений (Xa, XIa) характерно наличие сигналов атомов Н³ и Н⁵ которые проявляются в виде дублета в области δ 7,30–7,32 м.д и δ 7,76–7,87 м.д соответственно, протоны группы Me² в области δ 2,21–2,23 м.д. В спектрах ЯМР ¹H соединений (Xб, XIб) присутствует характерный синглет атома Н⁷ в области δ 7,31–7,42 м.д., два синглета атомов водорода метильных групп Me² (δ 2,08–2,09 м.д.), Me³ (δ 2,19 м.д.) и синглеты атомов водорода групп NH (δ 8,85–8,96 м.д.), OH (δ 9,53–9,54 м.д.).

Экспериментальная часть. Спектры ЯМР ¹H измерены на приборе Varian VXR-300 с рабочей частотой 300 МГц относительно ТМС в DMSO-d₆ для соединений (IIa–в – IIIa–в, VIIa–в, VIIIa–в, Xa, б, XIa, б) и в CDCl₃ для соединений (IVa–в – Va–в). Анализ чистоты соединений проводили методом ТСХ на пластинках Silufol UV-254. В качестве растворителя использовали ацетон, элюент спирт–хлороформ (10:1) для соединений (IIa–в – IIIa–в, VIIa–в, VIIIa–в, Xa, б, XIa, б), для соединений (IVa–в – Va–в) в качестве растворителя использовали хлороформ, элюент бензол–гексан (10:1), проявляли УФ светом.

Общая методика гидрохлорирования N-бензилиден(фенокси, 4-толил)ацетил-1,4-бензохинониминов (Ia–в, VIa–в, IXa, б). Через раствор 0,01 моль хинонимина (Ia–в, VIa–в, IXa, б) в 5 мл осушенного хлороформа 35–40 мин пропускали ток сухого газообразного хлористого водорода. Реакционный раствор светлел, выпадал белый осадок, который отфильтровывали. Часть осадка анализировали без кристаллизации, а часть после перекристаллизации из уксусной кислоты.

Выходы, температуры плавления, данные элементного анализа индивидуально выделенных соединений приведены в табл. 1, спектральные характеристики – в табл. 2.

Общая методика гидробромирования N-бензилиден(фенокси, 4-толил)ацетил-1,4-бензохинониминов (Ia–в, VIa–в, IXa, б). В раствор 0,01 моль хинонмоноимина (Ia–в, VIa–в, IXa, б) в 10 мл AcOH при перемешивании порциями вносили 2 мл 40%-ного водного раствора бромистоводородной кислоты. Раствор перемешивали в течение часа. Реакционный раствор светлел, при добавлении воды к реакционной массе выпадал бесцветный осадок, который отфильтровывали. Часть осадка анализировали без кристаллизации, а часть после перекристаллизации из уксусной кислоты.

Общая методика окисления соединений (IIa–в – IIIa–в). К охлажденной на водяной бане суспензии 3,7 ммоль 4-амино-N-бензилиден(фенокси, 4-толил)ацетилфенолов (IIa–в – IIIa–в) в небольшом количестве ледяной уксусной кислоты (4–5 мл) прибавляли 4,1 ммоль тетраацетата свинца. Смесь перемешивали 10 минут до образования кристаллической желтой массы, добавляли несколько капель этиленгликоля, перемешивали 5 минут и отфильтровывали. Осадок перекристаллизовывали из смеси бензол–гексан (1:3).

Выводы. Эксперимент показал, что гидрогалогенирование N-бензилиден(фенокси, 4-толил)ацетил-2,5-диметил(2-метил-, 2,3-диметил-)-1,4-бензохинонмоноиминов проходит по схеме 1,4-присоединения, 2,6-диметил-1,4-бензохинонмоноиминов – по схеме 6,3-присоединения. При гидрогалогенировании N-бензилиден(фенокси, 4-толил)ацетил-2,5-диметил-6-галоген-1,4-бензохинонмоноиминов более выгодным является процесс восстановления, чем присоединение молекулы галогеноводорода.

РЕЗЮМЕ

Гидрогалогенування N-бензіліден(фенокси, 4-толіл)ацетил-2,5-диметил- та 2-метил(2,3-диметил)-N-бензіліденацетил-1,4-бензохінонмоноімінів перебігає за схемою 1,4-приєднання, N-бензіліден(фенокси, 4-толіл)ацетил-2,6-диметил-1,4-бензохінонмоноімінів – за схемою 6,3-приєднання.

Ключові слова: 1,4-бензохінонмоноіміни, гідрогалогенування, 1,4-приєднання, 6,3-приєднання.

SUMMARY

The hydrohalogenation of N-benzylidene(phenoxy-, 4-tolyl)acetyl-2,5-dimethyl- and 2-methyl(2,3-dimethyl)-N-benzylidenacetyl-1,4-benzoquinoneminoimines goes under scheme of 1,4-addition. The hydrohalogenation of N-benzyliden(phenoxy-, 4-tolyl)acetyl-2,6-dimethyl-1,4-benzoquinoneminoimines gives the products of 6,3-addition.

Keywords: 1,4-benzoquinoneminoimines, hydrohalogenation, 1,4-addition, 6,3-addition.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бурмистров К.С. Присоединение хлористого водорода к N-арил-1,4-бензохинонмоноиминам / К.С. Бурмистров, А.Г. Юрченко // Журн. орган. химии. – 1985. – Т. 21, вып. 3. – С. 575-578.
2. Гидрохлорирование и гидробромирование некоторых N-арил-1,4-бензохинонмоноиминов / А.П. Авдеенко, С.А. Коновалова, О.Н. Лудченко и др. // Вопр. химии и хим. технологии. – 2007. – № 1. – С. 19-24.
3. Авдеенко А.П. Галогенирование N-замещенных *para*-хинонмоноиминов и эфиров *para*-хинонмонооксимов. X. Галогенирование N-арил-2,5(2,3)-диалкил-1,4-бензохинонмоноиминов и их восстановленных форм / А.П. Авдеенко, С.А. Коновалова, О.Н. Лудченко // Журн. орган. химии. – 2009. – Т. 45, вып. 12. – С. 1804-1817.
4. Авдеенко А.П. Гидрохлорирование и гидробромирование N-(N-арилсульфониларилимидаил)-1,4-бензохинониминов / А.П. Авдеенко, И.Л. Марченко, С.А. Коновалова // Журн. орган. химии. – 2001. – Т. 37, вып. 1. – С. 82-92.
5. Гидрогалогенирование алкилзамещенных в хиноидном ядре N-[арилсульфонилимино(фенил)метил]-1,4-бензохинонмоноиминов / А.П. Авдеенко, С.А. Коновалова, В.В. Пироженоко и др. // Журн. орган. химии. – 2011. – Т. 47, вып. 7. – С. 1020-1028.
6. Авдеенко А.П. Реакция N-арилсульфинил-1,4-бензохинонмоноиминов с хлористым водородом / А.П. Авдеенко, С.А. Коновалова, А.А. Санталова // Вопр. химии и хим. технологии. – 2008. – № 3. – С. 10-15.
7. Adams R. The synthesis and Reactions of Quinine mono- and di- imines / R. Adams, W. Reifschneider // Bull. Soc. Chim. France. – 1958. – Vol. 25. – P. 23-65.
8. Adams R. Quinone Imides. XXXVI. Orientation of groups in adducts of Quinone Diimides with Different N-Substituents / R. Adams, R.S. Colgrove // J. Am. Chem. Soc. – 1954. – Vol. 76. – P. 3584-3587.
9. Бурмистров К.С. Присоединение хлористого водорода к N-(*n*-толил)-1,4-бензохинонмоноимину и его хлорзамещенным / К.С. Бурмистров, Н.В. Торопин // Журн. орган. химии. – 1985. – Т. 21, вып.7. – С. 1544-1550.
10. Синтез и структура N-арил(фенокси, бензилиден)ацетил-1,4-бензохинонмоноиминов / А.П. Авдеенко, С.А. Коновалова, В.М. Васильева и др. // Журн. органич. химии. – 2012. – Т. 48, вып. 10. – С. 1313-1323.
11. Бурмистров К.С. Окислительно-восстановительные потенциалы N-бензолсульфонил-1,4-бензо(нафто)-хинондииминов / К.С. Бурмистров, Н.В. Торопин, С.И. Бурмистров // Укр. хим. журн. – 1983. – Т. 49, № 11. – С. 1208-1211.
12. Авдеенко А.П. Взаимодействие N-арил(бензилиден, фенокси)ацетил-1,4-бензохинонмоноиминов с роданидом калия и азидом натрия / А.П. Авдеенко, С.А. Коновалова, В.М. Васильева // Вопр. химии и хим. технологии. – 2012. – № 6. – С. 17-22.

Поступила в редакцию 30.01.2013 г.

УДК 541.128:546.92

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ (DFT) ИССЛЕДОВАНИЕ
ВЛИЯНИЯ КООРДИНАЦИОННОЙ СФЕРЫ ПЛАТИНОВОГО КАТАЛИЗАТОРА
НА НАПРАВЛЕНИЕ С-С СОЧЕТАНИЯ АРЕНОВ И АРИЛИОДИДОВ**

Т.В. Безбожная*, С.Л. Литвиненко*, А.О. Харанеко, Н.С. Янатьева*, В.В. Замашиков**

*Институт физико-органической химии и углехимии им. Л.М. Литвиненко НАН Украины, г. Донецк

**Азово-Черноморская агроинженерная академия Минсельхоза РФ, Ростовская обл., г. Зерноград

Изучены составы и соотношения продуктов реакций сочетания аренов (ArH) и арилиодидов (Ar'I), катализируемых комплексами Pt(phen)Cl₂ и PtCl₄²⁻. На основании квантовохимических расчетов зарядов на атоме платины, а также энергий граничных молекулярных орбиталей металлокомплексов и субстратов предложен подход к прогнозированию влияния строения катализатора на направление процессов сочетания.

Ключевые слова: арены, арилиодиды, сочетание, катализ, комплексы платины, метод DFT.

Введение. Структурная единица бифенила является частью природных и синтетических биологически активных соединений, красителей, материалов для электронной промышленности и др. [1]. В основе большинства современных методов синтеза несимметричных бифенилов лежат реакции аналогичные кросс-сочетанию по Кумада – Кори [2] (схема 1; M = Mg, R, R' = алкил, алкенил, арил; X = Cl, Br, I, OTf; катализатор = Ni(PPh)₂Cl₂, Pd(PPh₃)₂Cl₂), Судзуки (M = B, катализатор = Pd⁰L_n) [3], Стилле (Sn, Pd⁰L_n) [4], Неджиши (Zn, Pd⁰L_n) [5] и др.

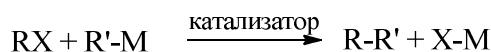


Схема 1

Симметричные бифенилы получают главным образом по реакциям гомосочетания арилгалогенидов по Ульману и аналогичным процессам [6] (схема 2):

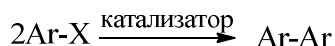


Схема 2

В последние годы все более активно развиваются методы прямого арилирования ароматических субстратов [7, 8], не требующие предварительного синтеза и выделения металлоорганического соединения. На схеме 3 показаны типичные механизмы [9, 10] прямого арилирования аренов арилгалогенидами (3a) и гомосочетания последних (3b) при катализе комплексами переходных металлов.

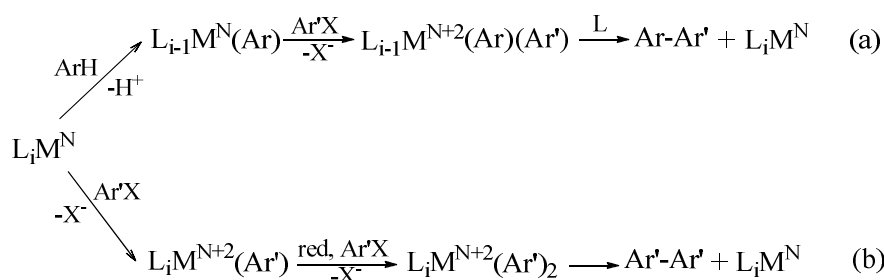


Схема 3

Гетеросочетание ArH и Ar'X включает последовательность реакций металлирования арена по связи С-Н комплексом переходного металла L_iM^N в степени окисления N с образованием арильного производного L_{i-1}M^N(Ar), окислительное присоединение Ar'X к этой частице с образованием диарильного комплекса L_{i-1}M^{N+2}(Ar)(Ar'), который способен восстановительно элиминировать диарил Ar-Ar' с регенерацией катализатора.

Гомосочетание арилгалогенидов начинается с окислительного присоединения Ar'X к L_iM^N, за которым следует восстановление металлоорганического комплекса L_iM^{N+2}(Ar') и присоединение второй молекулы субстрата. Полагают [10, 12], что восстановителем здесь является молекула растворителя. Каталитический цикл, как и в предыдущем случае, завершается восстановительным элиминированием, однако продуктами здесь являются симметричные производные Ar'-Ar'.

Ключевыми на схеме 3 являются реакции, приводящие к образованию связи арил-переходный металл (Ar-M). Это – металлизирование С-Н связи (3а) и окислительное присоединение (3б). Очевидно, что приоритетное образование металлорганического интермедиата по одному из этих маршрутов определяет протекание процесса по пути кросс- или гомосочетания.

Актуальной задачей является развитие методов селективного регулирования направления ароматического С-С сочетания (маршруты 3а или 3б на схеме 3), а также и выяснение факторов, контролирующих протекание процесса по маршруту гетеро- или гомосочетания.

Ранее [11, 12], основываясь на способности комплексов платины реагировать с аренами или арилгалогенидами с образованием арилплатиновых производных, мы предложили каталитические системы, в которых “*in situ*” генерируются арильные производные платины. Так, нагревание растворов *n*-иоднитробензола в ароматических углеводородах ArH (бензол, толуол, *n*-ксилол или мезитилен) в присутствии каталитических количеств фенантролинового комплекса Pt^{II}(phen)Cl₂ (**1**), 50 % водного гидроксида калия и катализатора межфазного переноса (18-краун-6) приводит к образованию несимметричных бифенилов (схема 4) [11]. Выходы составляют 20-30 % на арилиодид; число каталитических циклов достигает 120. В отсутствие щелочи и/или краун-эфира реакции не идут.

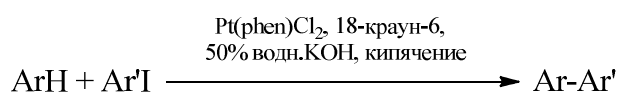


Схема 4

При кипячении растворов *n*- или *m*-иоднитробензола и K₂PtCl₄ (**2**) в диметилформамиде (DMF) в присутствии 18-краун-6 с выходами ~50 % селективно образуются симметричные 4,4'- и 3,3'-динитробифенилы [12] (схема 5):

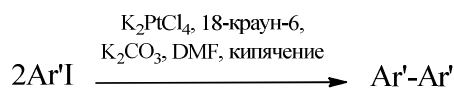


Схема 5

Таким образом, в зависимости от условий возможна реализация либо прямого каталитического кросс-сочетания аренов и арилиодидов, либо гомосочетания последних. Для выяснения причин, влияющих на направление сочетания аренов и арилиодидов, в настоящей работе путем вариации среды и природы лигандов комплекса платины изучены составы и соотношения продуктов реакций сочетания аренов (ArH) и арилиодидов (Ar'I), катализируемых комплексами **1** и **2**, в сходных условиях. Также, на основании результатов квантовохимических расчетов структур комплексов предложен подход к прогнозированию влияния строения катализатора на направление процессов сочетания.

Результаты и их обсуждение. Данные по условиям проведения и составам продуктов реакций представлены в табл.1. Кипячение растворов *n*-иоднитробензола в *n*-ксилоле или мезитиле в присутствии комплекса **1** приводит к образованию несимметричных бифенилов Ar-Ar' в результате кросс-сочетания (опыты 1, 2). Проведение реакции в смешанном растворителе – диметилформамид-мезитилен – не изменяет направление сочетания *n*-иоднитробензола и мезитилена (ср. опыты 2 и 3). Арилиодиды, содержащие в ароматическом ядре электронодонорные заместители, в исследованных условиях в реакции перекрестного сочетания не вовлекаются – после кипячения в присутствии **1** растворов *n*-MeC₆H₄I и *n*-MeOC₆H₄I в *n*-ксилоле в течение 30-60 час. из реакционной смеси были выделены только исходные Ar'I (оп. 4, 5).

При использовании в качестве катализатора комплекса **2** арены в процесс сочетания не вовлекаются, даже когда они являются основными компонентами реакционной смеси. Образуются только продукты гомосочетания арилиодидов Ar'-Ar' (опыты 6-10), причем в отличие от систем с **1** здесь удалось зарегистрировать продукты гомосочетания *n*-иодтолуола и *n*-иоданизола, однако выходы 4,4'-диметил- и 4,4'-диметоксибифенила заметно ниже, чем в случае нитропроизводных.

Процесс окислительного присоединения Ar'I к d⁸-комплексам платины формально представляет собой ароматическое нуклеофильное замещение. Следовательно, реакционная способность металлокомплекса определяется энергией высшей занятой молекулярной орбитали атома платины (ВЗМО-Pt), способной к эффективному перекрыванию с низшей свободной молекулярной (НСМО-Ar'I) орбиталью субстрата, причем, чем ниже абсолютная величина разности энергий этих орбиталей (|E_{НСМО-АгI} – E_{ВЗМО-Рt}|), тем легче протекает процесс окислительного присоединения [13].

Металлизирование арена представляет собой ароматическое электрофильное замещение. Связывание субстрата с электрофилом (комплексом платины) осуществляется за счет переноса электронов с ВЗМО арена на НСМО платины. Соответственно, реакционная способность комплекса должна увеличи-

ваться при уменьшении абсолютной величины разности энергий НСМО атома платины и ВЗМО арена ($E_{\text{НСМО Pt}} - E_{\text{ВЗМО ArH}}$).

Таблица 1

Составы реакционных растворов и выходы продуктов реакций сочетания

№	Составы реакционных растворов ^{а,б}	Время, час	Продукты сочетания (выход, % на Pt ^{II} /прореаг. ArI)	Степень превращения ArI, %
катализатор 1				
1	<i>n</i> -ксилол ($4,00 \cdot 10^{-2}$), <i>n</i> -иоднитробензол ($1,60 \cdot 10^{-3}$),	75	2,5-диметил-4'-нитробифенил (320/10)	80
2	мезитилен ($3,60 \cdot 10^{-2}$), <i>n</i> -иоднитробензол ($1,80 \cdot 10^{-3}$),	40	1,3,5-триметил-4'-нитробифенил (1500/38)	100
3	мезитилен ($1,80 \cdot 10^{-2}$), <i>n</i> -иоднитробензол ($1,60 \cdot 10^{-3}$), ДМФ ($6,40 \cdot 10^{-2}$)	21	1,3,5-триметил-4'-нитробифенил (830/20)	100
4	<i>n</i> -ксилол ($4,00 \cdot 10^{-2}$), <i>n</i> -иоданизол ($4,85 \cdot 10^{-3}$),	30	в	0
5	<i>n</i> -ксилол ($2,00 \cdot 10^{-2}$), <i>n</i> -иодтолуол ($2,29 \cdot 10^{-3}$), ДМФ ($6,40 \cdot 10^{-2}$)	60	в	0
катализатор 2				
6	мезитилен ($1,80 \cdot 10^{-2}$), <i>n</i> -иоднитробензол ($6,02 \cdot 10^{-3}$), ДМФ ($6,4 \cdot 10^{-2}$),	7	4,4'-динитробифенил (780/40)	100
7	<i>n</i> -ксилол ($4,00 \cdot 10^{-2}$), <i>n</i> -иоданизол ($6,40 \cdot 10^{-3}$),	16	4,4'-диметокси-бифенил (470/80)	30
8	<i>n</i> -ксилол ($4,00 \cdot 10^{-2}$), <i>n</i> -иодтолуол ($2,45 \cdot 10^{-3}$),	55	4,4'-диметилбифенил (180/30)	35
9	<i>n</i> -ксилол ($4,00 \cdot 10^{-2}$), <i>n</i> -иоднитробензол ($1,36 \cdot 10^{-3}$),	25	4,4'-динитробифенил (815/75)	75
10	мезитилен ($1,80 \cdot 10^{-2}$), <i>m</i> -иоднитробензол ($6,02 \cdot 10^{-3}$), ДМФ ($6,4 \cdot 10^{-2}$),	10	3,3'-динитробифенил (650/30)	100
^а количества в молях; ^б все опыты проводили в присутствии 2,5 мольн.% комплекса платины (в расчете на ArI), 18-краун-6 (0,1 г) и тв. фазы K ₂ CO ₃ ($2,9 \cdot 10^{-3} - 3,6 \cdot 10^{-3}$ моль); ^в реакции не идут.				

Для определения предпочтительного пути взаимодействия комплекса платины(II) мы в качестве первого шага оптимизировали методом DFT структуры комплексов **1** и **2**, а также типичных субстратов-участников каталитического сочетания - *n*-иоднитробензола и *n*-ксилола. Энергии граничных орбиталей исходных субстратов и комплексов платины, а также заряды на атоме платины в **1** и **2** приведены в табл. 2. Конфигурации граничных орбиталей показаны на рисунке.

Таблица 2

Заряды по Малликену на атоме Pt в комплексах **1** – **2** и энергии (хартри) низших свободных (НСМО) и высших занятых (ВЗМО) молекулярных орбиталей этих комплексов, а также *n*-ксилола, *n*-иоднитробензола и *n*-иоданизола.

Комплекс	Заряд на Pt	$E_{\text{НСМО}}$	$E_{\text{ВЗМО}}$	$ E_{\text{НСМО-Pt}} - E_{\text{ВЗМО-ArH}} $	$ E_{\text{НСМО-ArI}} - E_{\text{ВЗМО-Pt}} $
Pt(phen)Cl ₂	+0,058	-0,11	-0,22	0,12	0,11
PtCl ₄ ²⁻	-0,070	+0,22	+0,07	0,45	0,18
<i>n</i> -ксилол	–	-0,01	-0,23	–	–
<i>n</i> -NO ₂ C ₆ H ₄ I	–	-0,11	-0,27	–	–

При переходе от **1** к **2** заряд на атоме платины изменяется от +0,058 до -0,070. Это означает, что атом платины в комплексе **2** характеризуется большей электронной плотностью по сравнению с таким же атомом в **1**. Соответственно, для **2** следует ожидать нуклеофильных свойств и преимущественной для него должна быть активация связи C-I иодарена. В случае более электрофильного **2** вначале происходит активация C-H связи арена с последующим образованием продуктов гетеросочетания.

Эти выводы подтверждаются анализом энергий граничных орбиталей органических субстратов и фрагментов металлокомплексов-катализаторов, принимающих участие в образовании активных проме-

жучочных частиц. Для **1** близость величин $|E_{\text{НСМО-Рt}} - E_{\text{ВЗМО-АгН}}| \approx |E_{\text{НСМО-АгН}} - E_{\text{ВЗМО-Рt}}|$ (0,12 и 0,11 хартри, соответственно) предполагает его равновероятную атаку как на ароматическое ядро AgH, так и окислительное присоединение по связи C-I арилиодида. При этом, при условии большого избытка арена по сравнению с арилиодидом, должно наблюдаться образование несимметричных бифенилов, что согласуется с экспериментом. Соотношение аналогичных величин $|E_{\text{НСМО-АгН}} - E_{\text{ВЗМО-Рt}}| < |E_{\text{НСМО-Рt}} - E_{\text{ВЗМО-АгН}}|$ для **2** (0,18 и 0,45) свидетельствуют об его нуклеофильном характере и, как следствие, суммарный процесс направляется в сторону гомосочетания Ag^I.

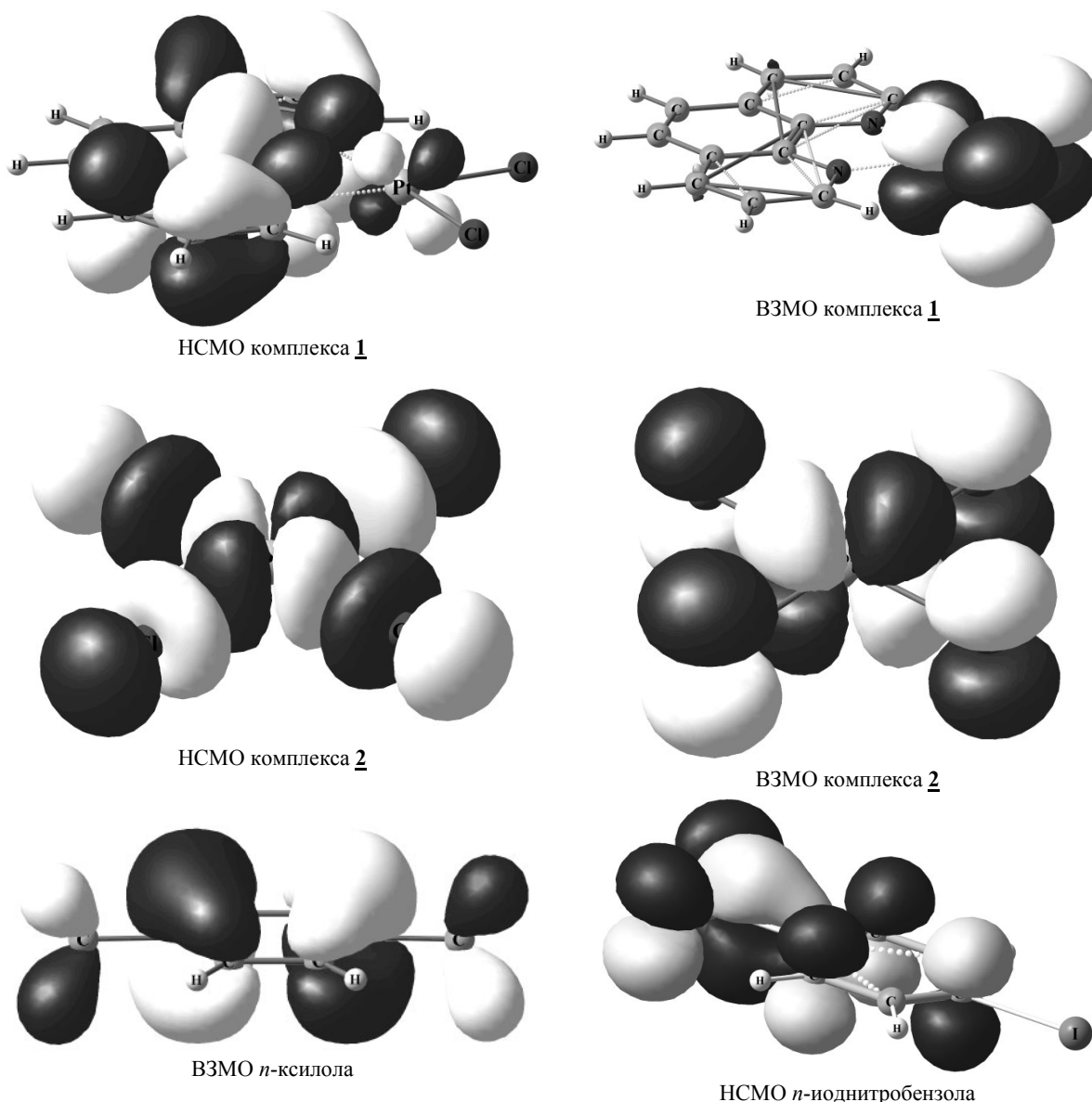


Рис. 1. Конфигурации граничных орбиталей комплексов **1** и **2**, а также *p*-ксилола и *p*-иоднитробензола.

Таким образом, эффективный заряд на атоме платины и энергии граничных молекулярных орбиталей участников каталитического сочетания аренов и арилиодидов, по-видимому, могут быть использованы для прогнозирования направления реакции.

Методы исследования. Исходные комплексы платины синтезировали по методике [14]. Синтез и выделение бифенилов проводили аналогично [11, 12]. За расходом исходных арилиодидов и накоплением продуктов реакции следили методами ГЖХ (хроматограф ЛХМ-8МД с пламенно-ионизационным детектором, колонка – 2000 x 3мм, неподвижная фаза SE-30, газ-носитель азот, температура – 150-200 °С) и ЯМР ¹H спектроскопии (прибор BRUKER AVANCE 400 МГц, спектры записывали в CDCl₃). Продукты реакции идентифицировали ГЖХ-методом по времени удерживания стандартных образцов и сравнением спектров ЯМР ¹H с литературными данными [10, 11].

Оптимизацию структур комплексов платины и субстратов проводили методом DFT в приближении B3LYP/SBKJС с использованием квантовохимического пакета программ FIREFLY версия 7.1.G.

Выводы. Проведен сравнительный анализ продуктов реакций сочетания аренов и арилиодидов, катализируемых комплексами $Pt^{II}(phen)Cl_2$ и K_2PtCl_4 в сходных условиях. Методом DFT проанализированы свойства этих комплексов. Предложен подход к выбору селективного катализатора гомо- или гетеросочетания аренов и арилиодидов.

РЕЗЮМЕ

Вивчено склад і співвідношення продуктів реакцій сполучення аренів (ArH) і арилиодидів (Ar'I), що каталізовані комплексами $Pt(phen)Cl_2$ і $PtCl_4^{2-}$. На підставі квантовохімічних розрахунків зарядів на атомі платини, а також енергій граничних молекулярних орбіталей металокомплексів і субстратів запропоновано підхід до прогнозування впливу будови катализатора на напрямок процесів сполучення.

Ключові слова: ацени, арилиодиди, сполучення, каталіз, комплекси платини, метод DFT.

SUMMARY

Compositions and proportions of products of arenes (ArH) and aryl iodides (Ar'I) coupling, catalyzed by $Pt(phen)Cl_2$ and $PtCl_4^{2-}$ have been studied. Based on the quantum chemical calculations of the charges on platinum, as well as the energies of frontier molecular orbitals of the metal complexes and substrates, an approach to prediction of the influence of the catalyst structure on the direction of the coupling has been established.

Keywords: arenes, aryl iodides, coupling, catalysis, platinum complexes, DFT method.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Cu/L (L = pyridine-functionalized 1,3-diketones) catalyzed C-N coupling reactions of aryl halides with NH-containing heterocycles / Xi Z., Liu F., Zhou Y., Chen W. // *Tetrahedron*. – 2008. – Vol. 64. – P. 4254-4259.
2. Tasler S. Nickel-on-charcoal-catalyzed aromatic aminations and Kumada coupling: mechanistic and synthetic aspects / S. Tasler, B.H. Lipshutz // *Journal of Organic Chemistry*. – 2003. – Vol. 68. – P. 1190-1199.
3. Suzuki A. Cross-coupling reactions via organoboranes / A. Suzuki A. // *Journal of Organometallic Chemistry*. – 2002. – Vol. 653. – P.83-90.
4. Milstein D. A general, selective, and facile method for ketone synthesis from acid chlorides and organotin compound catalyzed by palladium / D. Milstein, J.K. Stille // *Journal of American Chemical Society*. – 1978. – Vol. 100. – P. 3636-3638.
5. Negishi E.-I. Novel stereoselective alkenyl-aryl coupling via nickel-catalyzed reaction of alkenylalanes with aryl halides / E.-I. Negishi, S. Baba // *Journal of Chemical Society, Chemical Communication*. – 1976. – P. 596-597.
6. Hajipour A. R. A comparative homocoupling reaction of aryl halides using monomeric orthopalladated complex of 4-methoxybenzoylmethylenetriphenylphosphorane under conventional and microwave irradiation conditions / A.R. Hajipour, K. Karami, G.A. Tavakoli // *Application of Organometallic Chemistry*. – 2011. – Vol. 25. – P. 567-576.
7. Lafrance M. Palladium-catalyzed benzene arylation: incorporation of catalytic pivalic acid as a proton shuttle and a key element in catalyst design / M. Lafrance, K. Fagnou // *Journal of American Chemical Society*. – 2006. – Vol. 128, No 51. – P. 16496-16497.
8. Iranpoor N. Imidazolium-based phosphinite ionic liquid (IL-OPPh₂) as Pd ligand and solvent for selective dehalogenation or homocoupling of aryl halides / N. Iranpoor, H. Firouzabadi, R. Azadi // *Journal of Organometallic Chemistry*. – 2008. – Vol. 693. – P.2469-2472.
9. Godula K. Site-specific phenylation of pyridine catalyzed by phosphido-bridged ruthenium dimer complexes: a prototype for C-H arylation of electron-deficient heteroarenes / K. Godula, B. Sezen, D. Sames // *Journal of American Chemical Society*. – 2005. – Vol. 127. – P. 3648-3653.
10. Palladium catalyzed reductive homocoupling reactions of aromatic halides in dimethyl sulfoxide (DMSO) solution / C. Qi, X. Sun, C. Lu, J. Yang et. al. // *Journal of Organometallic Chemistry*. – 2009. – Vol. 694, No 18. – P. 2912-2916.
11. Литвиненко С.Л. Каталитическое сочетание аренов с *n*-иоднитробензолом в системе ArH – ArI – Pt^{II} – 50 % водный КОН – 18-краун-6 / С.Л. Литвиненко, Т.В. Безбожная, В.В. Замашиков // *Теоретическая и экспериментальная химия*. – 2007. – Т. 43, № 6. – С. 364-366.
12. Активация связи С-Н диметилформамида как ключевая стадия окислительного присоединения арилиодидов к платине (II) в системе PtCl₄²⁻-диметилформамид / Т.В. Безбожная, С.Л. Литвиненко, С.Ю. Скрипник, В.В. Замашиков // *Журнал общей химии*. – 1999. – Т. 69, вып. 8. – С.1244-1249.
13. Crabtree R. H. *The organometallic chemistry of the transition metals* / R. H. Crabtree. – New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2005. – 546 p.
14. Синтез комплексных соединений металлов платиновой группы / Под ред. И.Н.Черняева. – М.: Наука, 1964. – 340 с.

Поступила в редакцию 22.01.2013 г.

УДК 54-165: 549.753.1

УТОЧНЕНИЕ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ СОЕДИНЕНИЯ
СОСТАВА $Pb_8La_2(GeO_4)_4(VO_4)_2$

Е.И. Гетьман, Н.В. Яблочкова, С.Н. Лобода, Л.В. Каракай

Методом твердофазных реакций синтезирован ванадато-германат свинца и лантана состава $Pb_8La_2(GeO_4)_4(VO_4)_2$ со структурой апатита. Уточнена кристаллическая структура методом Ритвельда, определены координаты атомов, межатомные расстояния и распределение элементов по позициям в структуре.

Ключевые слова: апатит, кристаллическая структура, изоморфные замещения, элементарная ячейка, межатомные расстояния.

Введение. Апатитоподобные соединения имеют общий состав $M_{10}(ZO_4)_6X_2$, где $M = Ca, Sr, Ba, Pb$, редкоземельные элементы и др.; $Z = P, V, As, Si, S, Ge$ и т.д.; $X = F, Cl, Br, OH, O$, вакансия. Благодаря замещениям в структуре гидроксиапатита названными элементами можно получать соединения с аналогичным строением, различающиеся по составу. Кристаллическая структура таких соединений относится к гексагональной сингонии, пространственная группа $R\bar{6}_3/m$. Для структуры апатита характерно наличие двух структурно неэквивалентных позиций в катионной подрешетке, условно обозначаемых $M(1)$ и $M(2)$. Позиция $M(1)$ имеет окружение из девяти атомов кислорода (каждый из которых входит в состав тетраэдров PO_4), образующих координационный полиэдр – девятивершинник. Координационное окружение позиции $M(2)$ составляют шесть атомов кислорода, входящих в состав тетраэдров PO_4 и F^- (Cl^- , OH^- , O_2^- и т.д.) ионы, которые образуют координационный полиэдр – семивершинник. Равносторонние треугольники $M(2)$ в структуре апатита образуют канал, в котором располагаются ионы F^- (Cl^- , OH^- , O_2^- и т.д.)

Соединения со структурой апатита продолжают привлекать внимание исследователей, благодаря своим уникальным свойствам прикладного характера. Среди таковых, следует, в первую очередь, отметить способность к изоморфным замещениям в катионной и анионной подрешетке, что и обуславливает получение модифицированных составов, которые приобретают важные для практического использования характеристики. Наиболее изученным соединением этого семейства является гидроксиапатит кальция $Ca_{10}(PO_4)_6(OH)_2$. Являясь структурным аналогом главной неорганической составляющей костной и зубной тканей организма, это вещество имеет тот же химический состав (следовательно, сходные физические и механические свойства) и обладает биологической совместимостью. На этом основано его широкое применение в медицине. Соединения со структурой апатита разного состава, допированные РЗЭ, могут быть использованы, например, в качестве твердых стабильных форм для утилизации радиоактивных отходов, сорбентов [1], в качестве твердых электролитов [2], катализаторов [3], люминофоров, лазерных материалов [4] и во многих других случаях. Путем варьирования наименований и количеств заместителей можно регулировать свойства конечных материалов. В частности, путем частичного замещения в структуре апатита ионов двухвалентных элементов на ионы РЗЭ и других элементов получают люминесцентные и лазерные материалы [5]. Значительный интерес в плане практического использования вызывают люминесцентные свойства ванадиевых апатитов. Эти свойства обнаружены у галогенованадатов. Так, в работе [6] исследовали люминесцентные свойства апатита $Ca_5(VO_4)_3Cl$, модифицированного Eu^{3+} , Tb^{3+} , Ho^{3+} . В качестве люминесцентных и лазерных материалов так же используют РЗЭ-замещенные фтор- и хлорванадаты стронция.

Ванадиевый апатит свинца $Pb_{10}(VO_4)_6(OH)_2$ после модифицирования РЗЭ может стать люминофором [7, 8], щелочными металлами - твердым электролитом с более высокой ионной проводимостью, чем $Pb_8Na_2(PO_4)_6$ [9]. Кристаллическое строение составов данного структурного типа таково, что позволяет также повышать величину ионной проводимости за счет гетеровалентных замещений анионообразующих элементов (Si, P, Ge, V).

Из германато-ванадатов известен $Pb_4La(GeO_4)_2(VO_4)$, но не изучена его кристаллическая структура [10], однако перспективным является направление, в котором такие вещества могут использоваться, как люминофоры, катализаторы, сорбенты. Аналоги апатита, содержащие германий, ранее были охарактеризованы как отличные ионные проводники [11].

В данной работе получено соединение $Pb_8La_2(GeO_4)_4(VO_4)_2$ и уточнена его кристаллическая структура.

Экспериментальная часть. Синтез $Pb_8La_2(GeO_4)_4(VO_4)_2$ проводили твердофазным способом. В качестве исходных использовали следующие реактивы: оксиды свинца и ванадия квалификации «чда», оксид германия – «осч», оксид лантана марки ЛаО-Д.

Компоненты шихты взвешивали на аналитических весах типа ВЛА-200 с точностью $\pm 0,0002$ г, а затем измельчали в агатовой ступке в течение 30 минут. После этого навеску подвергали термическому обжигу в алундовых тиглях, постепенно повышая температуру от 500 °С до 800 °С с шагом 100 °С. При каждом промежуточном значении температуры образец выдерживали 5 – 6 часов, после чего перетирали спек в течении 10 – 15 мин, снимали рентгенограммы и повышали температуру.

Рентгенограммы снимали на дифрактометре ДРОН-2 с использованием CuK_{α} -излучения и Ni фильтра. Скорость движения счетчика составляла 2° в минуту (2θ).

Для уточнения кристаллической структуры использовался массив экспериментальных интенсивностей и углов отражения в интервале от 15 до 140° (2θ), полученных из поликристаллических образцов в пошаговом режиме съемки на том же дифрактометре. Время экспозиции в каждой точке и шаг сканирования составляли соответственно 10 секунд и 0,05°. Расчет теоретических интенсивностей и уточнения параметров элементарной ячейки, координат атомов, изотропных температурных параметров атомов, коэффициентов заполнения правильных систем точек проводили с использованием программы FullProf.2k (version 2.80) из пакета программ WinPLOTR. В качестве исходных данных для расчетов использовали координаты атомов в гидроксипатите кальция [12].

Анализ результатов. Методом рентгенофазового анализа было установлено, что в образце состава $Pb_8La_2(GeO_4)_4(VO_4)_2$ фаза со структурой апатита начинает кристаллизоваться при 600°С, однако количество ее при этой температуре еще незначительно.

Одновременно в образце наблюдается присутствие значительного количества примесных фаз. Достичь же постоянства фазового состава и получить однофазный образец удалось после прокаливании в течение 35 часов при температуре 800 °С (рис. 1).

Результаты уточнения кристаллической структуры: координаты, изотропные тепловые параметры атомов и заполнение позиций (G) для $Pb_8La_2(GeO_4)_4(VO_4)_2$ приведены в табл. 1. Уточнение проводили по 970 линиям до следующих факторов достоверности: $R_p = 7,03$; $R_f = 5,72$; $R_{wp} = 9,15$; Bragg R – factor = 6,10; $\chi^2 = 1,35$.

Приведенные величины показывают удовлетворительное соответствие расчетной и экспериментальной моделей. Это доказывает образование гомогенного образца со структурой апатита, в котором элементы равномерно распределены по поверхности частиц.

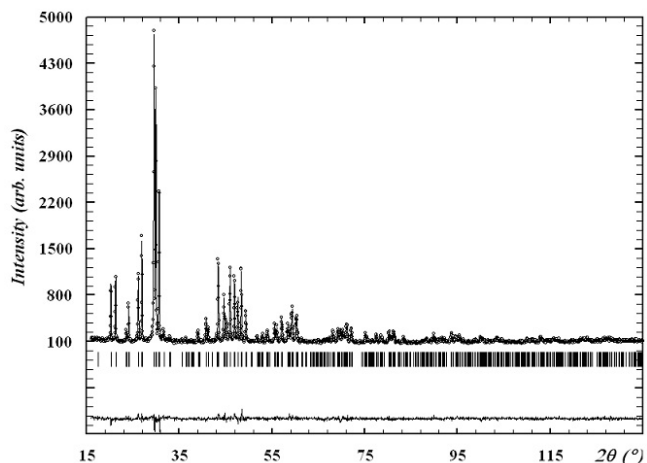


Рис. 1. Рентгенограмма $Pb_8La_2(GeO_4)_4(VO_4)_2$

Таблица 1

Координаты атомов, тепловые параметры (B_{iso}) и заселенность кристаллографических позиций (G) для $Pb_8La_2(GeO_4)_4(VO_4)_2$ (пространственная группа $P6_3/m$, $a = 10,0957(3)$, $c = 7,3808(3)$, Å)

Атом	Позиция	x	y	z	$B_{iso}, \text{Å}^2$	G
Pb1	4f	2/3	1/3	0,005(1)	1,35(8)	2,39(5)
La1	4f	2/3	1/3	0,005(1)	1,35(8)	1,61(5)
Pb2	6h	0,2580(3)	0,0076(5)	1/4	1,49(6)	5,61(5)
La2	6h	0,2580(3)	0,0076(5)	1/4	0,87(7)	0,39(5)
V	6h	0,4073(9)	0,3821(9)	1/4	0,41(18)	2
Ge	6h	0,4073(9)	0,3821(9)	1/4	0,41(18)	4
O1	6h	0,3263(37)	0,4985(39)	1/4	2,49(54)	6
O2	6h	0,5938(40)	0,4840(36)	1/4	2,49(54)	6
O3	12i	0,3683(28)	0,2622(25)	0,0623(28)	2,49(54)	12

Проведенные ранее исследования замещения в структуре гидроксипатита кальция показали, что преимущественное заселение катионных позиций определяется разностью эффективных зарядов замещающих друг друга ионов. В том случае, если эффективный заряд у замещающего иона меньше, чем у кальция, то он преимущественно занимает большую по размерам позицию Ca(1). В случае же большего эффективного заряда у замещающего иона, он преимущественно заселяет меньшую по размерам позицию Ca(2) [13].

В случае исследованного нами соединения наблюдается обратная картина: при вхождении в структуру лантана в соединении состава $Pb_8La_2(GeO_4)_4(VO_4)_2$, атомы РЗЭ располагаются в основном в позиции Pb(1), хотя эффективный заряд La^{3+} больше, чем эффективный заряд Pb^{2+} , как это имело место в ранее описанном ванадате стронция со структурой апатита [14].

Межатомные расстояния представлены в табл. 2. Среднее расстояние Pb(1)–O(1,2,3), равное 2,65 Å, в пределах погрешности, практически, равно среднему расстоянию Pb(2)–O(1,2,3) – 2,62 Å. Выравнивание этих расстояний, по-видимому, связано с тем, что атомы лантана, меньшие по размеру, чем атомы свинца, размещаются преимущественно в позиции Pb(1). Наличие расстояний Pb–Pb, несколько превышающих 4Å, свидетельствует о возможности эффективных люминесцентных свойств, так как согласно [8] в этом случае гашение люминесценции не происходит.

Таблица 2

Связь	d, Å
<Ge–O(1,2,3)>	1,72(3)
<Pb(1)–O(1,2,3)>	2,65(3)
<Pb(2)–O(1,2,3)>	2,62(3)
Pb(2)–Pb(2)	4,446(4)

РЕЗЮМЕ

Методом твердофазних реакцій синтезований ванадати-германатов свинцю і лантану складу $Pb_8La_2(GeO_4)_4(VO_4)_2$ зі структурою апатиту. Уточнена кристалічна структура методом Рітвельда, визначені координати атомів, міжатомні відстані та розподіл елементів по позиціях в структурі.

Ключові слова: апатит, кристалічна структура, ізоморфні заміщення, елементарна комірка, міжатомні відстані

SUMMARY

Synthesized by solid-phase reactions germanate-vanadate of lead and lanthanum with apatite $Pb_8La_2(GeO_4)_4(VO_4)_2$ structure was detected. Crystal structure was refined using the Rietveld method, determined the atomic coordinates, interatomic distances and distribution of elements on the positions in the structure were detected.

Keywords: apatite, crystal structure, isomorphic substitution, the unit cell, the interatomic distances

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Manecki M. Uptake of aqueous Pb by Cl^- , F^- , and OH^- apatites: Mineralogic evidence for nucleation mechanisms / M. Manecki, P.A. Maurice, S.J. Traina // American Mineralogist. – 2000. – Vol. 85. – P. 932-942.
2. Effect of Apatite Amendments on Plant Uptake of Lead from Contaminated Soil / V. Laperche, T.J. Logan, P. Gaddam, S.J. Traina // Environ. Sci. Technol. – 1997. – Vol. 31. – P. 2745-2753.
3. Humidity-sensitivity of yttrium substituted apatite ceramics / K. Yamashita, H. Owada, T. Kanazawa, et al. // Solid State Ionics. – 1990. – Vol. 35. – P. 401-404.
4. Blasse G. Influence of local charge compensation on site occupation and luminescence of apatites / G. Blasse // Journal of Solid State Chemistry. – 1975. – Vol. 14. – P. 181-184.
5. Luminescence of Pr^{3+} in minerals / M. Gaft, R. Reisfeld, G. Panczer [et al] // Optical Materials. – 1999. – Vol. 13, No 1. – P. 71-79.
6. Ванадиевые кристаллофосфоры / А.А. Фотиев, Б.В. Шульгин, А.С. Москвин [и др.]. – М.: Наука, 1976. – 123 с.
7. Blasse G. Search for luminescence in some lead phosphates / G. Blasse, G.J. Dirksen // Materials Chemistry and Physics. – Vol. 12. – 1985. – P. 551-556.
8. Synthesis and photoluminescence of $Pb_5(VO_4)_3OH$ nanocrystals / Z. Haiping, L. Mengkai, X. Zhiliang [et al] // Journal of Alloys and Compounds. – 2005. – P. 243-246.
9. Synthesis, characterization and electrical properties of a lead sodium vanadate apatite / E. Chakroun-Ouadhour, R. Ternane, D. Ben Hassen-Chehimi, M. Trabelsi-Ayadi // Materials Research Bulletin. – 2008. – Vol. 43. – P. 2451-2456.
10. Журавлєв В.Д. Ванадатогерманаты свинца – лантана и стронция – лантана со структурой апатита и оксоapatита / В.Д. Журавлєв, Ю.А. Великодний // Журнал неорганической химии. – 2009. – Т. 54, № 10. – С. 1626-1627.
11. Orega A. New chemical systems for solid oxide fuel cells / A. Orega, P.R. Slater // Chemistry of Materials. – 2010. – Vol. 22. – P. 675-690.
12. Wilson R.M. American Mineralogist / R.M. Wilson, J.C. Elliot, S.E.P. Dowker. – 1999. – Vol. 84. – P. 1406-1407.
13. Урусов В.С. Энергетический анализ упорядочения катионов в структуре апатита / В.С. Урусов, В.О. Худоложкин // Геохимия. – 1974. – № 10. – С. 1509-1512.
14. Isomorphous substitution of europium for strontium in the structure of synthetic hydroxovanadate / E.I. Get'man, N.V. Yablochkova, S.N. Loboda [et al.] // Journal of Solid State Chemistry. – 2008. – No 9. – P. 2386-2392.

Поступила в редакцию 01.04.2013 г.

ВИЗНАЧЕННЯ ТАЛІЮ В ҐРУНТАХ ТА МУЛІ

Н.П. Дмитрук

Розроблено методику екстракційно-атомно-абсорбційного та екстракційно-фотометричного визначення талію в ґрунтах з попередньою мінералізацією нітратною кислотою та пероксидом водню та послідуною екстракцією толуолом у вигляді іонного асоціату $TlCl_4^-$ з метиловим фіолетовим.

Ключові слова: талій, електротермічне атомно-абсорбційне визначення, екстракція, фотометричне визначення, ґрунти, донні відкладення.

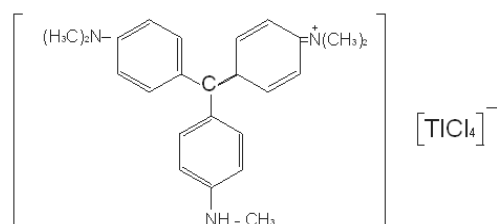
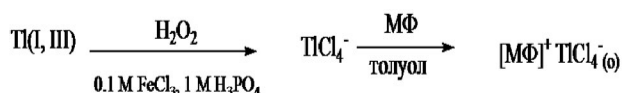
Вступ. Талій відноситься до найбільш токсичних елементів і вміст його у ґрунті нормується на рівні 1,0 мг/кг (для порівняння ГДК ртуті та кадмію складають 2,1 та 2,0 мг/кг відповідно). Головним антропогенним джерелом забруднення талієм є викиди від процесів спалювання вугілля. Зола ТЕС використовується в будівельних сумішах та в якості підлужувача кислих ґрунтів. Сполуки талію при таких процесах вивільнюються та накопичуються у ґрунті та донних відкладеннях поблизу ТЕС та в місцях використання золи вугілля [1, 2]. Сполуки талію(I), маючи відносно велику розчинність та хімічну поведінку подібну до лужних металів (K, Rb, Cs), легко транспортуються за водними маршрутами у довкілля. Вони можуть переходити з ґрунту та накопичуватися у сільськогосподарчих культурах [3]. Це все вказує на необхідність контролю талію в ґрунтах та донних відкладеннях промислового мегаполісу.

Постановка задачі. Існуючі стандартні методики визначення талію (інверсійна вольтамперометрія [4], атомно-емісійна спектроскопія [5] та атомно-абсорбційна спектроскопія (гідридний спосіб) [6]) або мають малу чутливість (0,5 ГДК) або потребують складного технічного забезпечення. Визначення талію за допомогою атомно-абсорбційної спектроскопії в графітовому атомізаторі відповідає вимогам за чутливістю, але має труднощі, пов'язані зі спектральними та іншими заважаючими впливами у складних матрицях. Завдяки високій енергії дисоціації (368 кДж/моль) хлорид талію(I) важко відділити в газовій фазі та легко втратити. Усунути матричні впливи можливо з використанням умов концепції СТПП (температурно-стабілізована піч з платформою) та використанням модифікаторів [7]. Іншою альтернативою визначення талію, особливо у його двох формах знаходження $Tl(I)$ та $Tl(III)$, що мають різну токсичність, є розділення та концентрування [8, 9]. Багаточисленні аналітичні методи були запропоновані для розділення та концентрування талію на основі рідинної екстракції [10], твердофазної екстракції [11 – 13], флоатації [14] та співосадження [15]. Відомі багаточисленні методики екстракційно-фотометричного визначення талію з попередньою екстракцією асоціатів талію(I) та талію(III) (Vg^- , Cl^-) з трифенілметановими, родаміновими та азо-барвниками [16 – 20]. Головним недоліком вказаних методів є невелика селективність та чутливість. Але фотометричний аналіз широко використовується при масових визначеннях хімічними лабораторіями. Тому при розробці методики визначення талію в ґрунтах та мулах слід орієнтуватися також на доступність апаратури та реагентів для масового застосування.

Метою роботи є розробка екстракційно-атомно-абсорбційної та екстракційно-фотометричної методики визначення талію(I, III) у ґрунтах та донних відкладеннях.

Побудова розв'язку задачі. Нами запропоновано проводити мінералізацію з використанням нітратної кислоти та пероксиду водню з послідуною екстракцією $Tl(III)$ толуолом у вигляді іонного асоціату $TlCl_4^-$ з метиловим фіолетовим. Відомі екстракційні системи було адаптовано до електротермічної атомно-абсорбційної спектроскопії та запропоновано новий модифікатор 1 М розчин H_3PO_4 для усунення заважаючого впливу складної матриці концентрату.

Аналіз результатів. Екстракція є простим та швидким методом розділення. Проблема полягала у тому, що не всі екстрагенти добре сполучаються з графітовим атомізатором. На величину атомного поглинання при атомізації екстрактів суттєво впливає природа екстракційного реагенту і розчинника. Толуол має низьке неспецифічне поглинання і не містить хлору. В оптимальних умовах екстракції талію(III) на 99,9 % екстрагується толуолом у вигляді іонного асоціату $TlCl_4^-$ з метиловим фіолетовим [21, 22]. Попереднє окислення $Tl(I)$ за допомогою пероксиду водню в присутності каталізатора хлориду заліза також дозволяє перевести цю форму в екстракт за наступною схемою:



При оптимальних умовах атомно-абсорбційного визначення розчинник практично повністю відганяється на стадії сушки і не дає неселективного поглинання. Але хлорид заліза(III) співекстрагується і має депресуючий вплив. В якості хімічного модифікатора використовували 1 М розчин H_3PO_4 , механізм дії якого зводиться до видалення хлоридів у вигляді HCl та утворення малорозчинних важколетких фосфатів [23]. Використання в якості екстрагента метилового фіолетового забезпечує максимальну температуру піролізу 1000 °С і мінімальний рівень фонового неселективного поглинання та дає можливість відігнати талій без втрат.

Існують декілька способів мінералізації ґрунту, найкращим вважається суміш нітратної, хлоридної та фторидної кислот, але треба мати на увазі те, що талій утворює легкі галогеніди.

Проведено порівняльну оцінку способів мінералізації ґрунтів перед екстракційно-електротермічним атомно-абсорбційним визначенням талію (табл. 1).

Таблиця 1

Порівняльна оцінка різних способів мінералізації ґрунтів

Проба	Способи мінералізації ґрунту з використанням			
	$HNO_3 + H_2O_2$	HNO_3	$HNO_3 + HCl$	$HNO_3 + HCl + HF$
Вміст Тl, мг/кг				
Лісосмуга Пролетарського р-на м. Донецька	0,90	0,4	0,3	0,02
Бульвар Пушкіна, м. Донецьк	0,94	0,5	0,2	0,06
Лівий берег Старобешівського водосховища	9,80	1,7	0,2	0,04

Видно, що мінералізація однією нітратною кислотою (або її сумішшю з хлоридною) відбувається неповністю, при розкладанні сумішшю з хлоридною та фторидною кислот спостерігається заниження результатів аналізу через втрату легких галогенідів талію. Найбільша повнота вилучення спостерігається при розкладі сумішшю нітратної кислоти з пероксидом водню. Це пов'язано з тим, що талій міститься в органічній частині ґрунту (гумусі) у вигляді стійких комплексних сполук з гуміновими та фульвокислотами.

Запропоновано проводити мінералізацію з використанням нітратної кислоти та перекису водню з послідуною екстракцією толуолом у вигляді іонного асоціату $TlCl_4^-$ з метиловим фіолетовим.

На основі вищенаведених досліджень було розроблено методику визначення талію у ґрунтах та донних відкладеннях (мулах). Проби ґрунту відбирали за ГОСТ 17.4.3.01-83 «Охрана природы. Почвы. Общие требования к отбору проб». Наважки повітряно-сухої проби ґрунту 1,00 г розкладали 20 см³ концентрованої нітратної кислоти при нагріванні, випарювали до вологих солей, додавали 20 см³ 30%-го розчину перексиду водню в кожний стакан та знову випарювали до вологих солей. Паралельно проводили обробку холостої проби. Після упарювання обмивали дистильованою водою стінки стакана, відфільтровували в колби на 50 см³, доводили до мітки. 50 см³ отриманого розчину вносили в ділильну воронку, додавали 30 см³ фосфатної кислоти ($\rho = 1,16 \text{ г/см}^3$), 1 см³ 20%-ного розчину хлориду заліза(III), 7-8 крапель 30%-го розчину перексиду водню, перемішували та витримували 30-40 хв. Потім додавали 1 см³ толуолу і 1 см³ 0,2 % метилового фіолетового, струшували протягом 30 с, відстоювали та відділяли толуольний шар. 20 мкл екстракту дозатором поміщали на платформу з пірографіту електротермічного атомізатора Графіт-2 атомно-абсорбційного спектрофотометра Сатурн-3. Джерелом резонансного випромінювання була лампа ВСБ-2 (ток 140 мА). Використовували резонансну лінію 276,8 нм. Для усунення завад вимірювання проводили з дейтерієвим коректором фона. Нагрів атомізатора проводили за програмою: 1) сушка – 120 °С, 40 с; 2) піроліз – плавний нагрів до 1000 °С, 40 с; 3) прискорений розігрів – 3100 °С, 0,45с; 5) атомізація – 2400 °С, 5 с при зупиненому потоці аргону.

Вимірювання проводили також спектрофотометричним методом, збільшивши наважку та об'єм толуолу. Наважки повітряно-сухої проби ґрунту 10,00 г розкладали 20 см³ концентрованої нітратної кислоти при нагріванні, випарювали до вологих солей, додавали 20 см³ 30%-го розчину перексиду водню в кожний стакан. Паралельно ставили холосту пробу. Після упарювання обмивали дистильованою водою стінки стакана, відфільтровували в колби на 50 см³, доводили до мітки. 50 см³ отриманого розчину вносили в ділильну воронку, додавали 30 см³ фосфатної кислоти ($\rho = 1,16 \text{ г/см}^3$), 1 см³ 20%-ного розчину хлориду заліза(III), 7-8 крапель 30%-го розчину перексиду водню, перемішували та витримували 30-40 хв. Потім додавали 25 см³ толуолу і 1 см³ 0,2 % метилового фіолетового, струшували протягом 30 с, відстоювали та відділяли толуольний шар в сухі склянки та фільтрували крізь паперовий фільтр. Оптичну густину екстракту вимірювали при $\lambda = 540 \text{ нм}$.

Проводили визначення вмісту талію в пробах ґрунту м. Донецька. Результати визначення обома методами наведено нижче (табл. 2).

Таблиця 2

Результати визначення талію в ґрунтах м. Донецька (n=5; P=0,95)

Місце відбору проби ґрунту	Знайдено методами, мг/кг			
	атомно-абсорбційним	S _r	спектрофотометричним	S _r
Терикон Пролетарського району	0,75 ± 0,05	0,08	0,80 ± 0,05	0,08
Лісосмуга Пролетарського району	0,90 ± 0,07	0,07	0,85 ± 0,07	0,07
Вул. Філатова, школа №130	0,67 ± 0,06	0,07	0,72 ± 0,06	0,08
Бібліотека ім. Крупської, Ворошиловський район	0,74 ± 0,04	0,08	0,70 ± 0,04	0,08
Бульвар Пушкіна, Ворошиловський район	0,94 ± 0,06	0,08	0,95 ± 0,06	0,08

Знайдено, що в ґрунтах м. Донецька вміст талію досягає ГДК (1 мг/кг). Були також досліджені донні відкладення (мули) водосховища поблизу Старобешівської ТЕС. Перевірку правильності проводили методом добавок (табл. 3). Як видно, отримані значення в 7-10 разів перевищують ГДК.

Таблиця 3

Результати визначення талію в донних відкладеннях Старобешівської ТЕС (n=5; P=0,95)

Проба	Знайдено, мг/кг	S _r	Перевірка правильності результатів		
			Введено, мг/кг	Знайдено, мг/кг	S _r
Проба №1 Старобешівське водосховище (лівий берег)	9,8 ± 0,8	0,08	5,0	15,2 ± 1,0	0,08
Проба №2 Старобешівське водосховище (місце впадіння водовідводного каналу)	6,6 ± 0,5	0,07	5,0	12,0 ± 0,8	0,07
Проба №3 Старобешівське водосховище (правий берег)	7,5 ± 0,5	0,07	5,0	12,9 ± 0,9	0,08
Проба №4 Старобешівське водосховище (навпроти ставка-освітлювача)	8,5 ± 0,7	0,08	5,0	14,0 ± 1,0	0,08

Висновки. Таким чином, була розроблена методика екстракційно-атомно-абсорбційного та екстракційно-фотометричного визначення талію в ґрунтах з попередньою мінералізацією нітратною кислотою та пероксидом водню та послідуною екстракцією толуолом у вигляді іонного асоціату TiCl_4^- з метиловим фіолетовим та використанням 1 М розчину H_3PO_4 для усунення заважаючого впливу складної матриці концентрату, яка відрізняється від існуючих більшою чутливістю (0,05 ГДК) і доступністю апаратури та реагентів.

РЕЗЮМЕ

Разработана методика экстракционно-атомно-абсорбционного и экстракционно-фотометрического определения таллия в почвах с предварительной минерализацией азотной кислотой с пероксидом водорода и последующей экстракцией толуолом в виде ионного асоциата TiCl_4^- с метиловым фиолетовым.

Ключевые слова: таллий, электротермическое атомно-абсорбционное определение, экстракция, фотометрическое определение, почвы, донные отложения.

SUMMARY

The technique extraction-atomic absorption, and extraction-photometric determination of thallium in soils with a pre-mineralization with nitric acid and hydrogen peroxide followed by extraction with toluene as an ion association TiCl_4^- with methyl violet.

Keywords: thallium, electrothermal atomic absorption determination, extraction, photometric determination, soil, bottom sediment.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Thallium in coal: Analysis and environmental implications / M.A. Lopez Anton, D.A. Spears, M.D. Somoano, M.R.M. Tarazona // Fuel. – 2012. – Vol. 105, No 3. – P. 13-18.
2. Thallium in fractions of soil formed on floodplain terraces / M. Jakubowska, A. Pasieczna, W. Zembuski, Z. Swit // Chemosphere. – 2007. – Vol. 66, No 4. – P. 611-618.
3. Peter A.L.J. Thallium: a view of public health and environmental concerns / A.L.J. Peter, T. Viraraghavan // Environment International. – Vol. 31, No 4. – 2005. – P. 493-501.
4. МВИ ФР.1.31.2002.00594. Методика выполнения измерений массовой концентрации кислоторастворимых форм тяжёлых металлов токсичных элементов (Cd, Pb, Cu, Zn, Bi, Tl, Ag, Fe, Se, Co, Ni, As, Sb, Hg, Mn) в почвах, грунтах, донных отложениях, осадках сточных вод методом инверсионной вольтамперометрии. – НПНФ «Аквилон». – 2002. – 13 с.
5. М-МВИ 80-2008. Методика выполнения измерений массовой доли элементов в пробах почв, грунтов и донных отложениях методами атомно-эмиссионной спектроскопии. – 2008. – 11 с.
6. РД 52.18.373–96. Методические указания. Определение массовой доли таллия в пробах почв и донных отложений методом атомно-абсорбционной спектроскопии с беспламенной атомизацией (гидридная техника). – НПО «Тайфун». – 1996. – 12 с.

7. Goreti R.V.M. Spectral and non-spectral interferences in the determination of thallium in environmental materials using electrothermal atomization and vaporization techniques – a case study / R.V.M. Goreti, B. Welz // Spectrochimica Acta Part B: Atomic Spectroscopy – 2002. – Vol. 57, No 12. – P. 1821-1834.
8. Determination of thallium in wine by electrothermal atomic absorption spectrometry after extraction preconcentration / J. Cvetkovic, S. Arpadjan, T. Karadjova, T. Stafilov // Spectrochimica Acta Part B: Atomic Spectroscopy. – 2002. – Vol. 57, No 6. – P. 1101-1106.
9. Separation of Tl(I) and Tl(III) from environmental water samples by flotation method coupled with Zeeman ETAAS determination / J.M. Bundalevska, T. Stafilov, I. Koyuncu et al. // J. Environ. Sci. Health, Part A. – 2005. – Vol. 40, No 5. – P. 348-351.
10. Determination of thallium in soils by flame atomic absorption spectrometry / T. Asami, C. Mizui, T. Shimoda, M. Kubota // Fresenius J. Anal. Chem. – 1996. – Vol. 356, No 5. – P. 348-351.
11. Lin T.S. Thallium speciation in river waters with Chelex-100 resin / T.S. Lin, J.O. Nriagu // Anal.Chim.Acta. – 1999. – Vol. 395, No 3. – P. 301-308.
12. Mobarakeh S.Z.M. FAAS determination of thallium after preconcentration using nitroso-S and TDBA onto benophenone / S.Z.M. Mobarakeh, F.S. Mahani // Bull. Chem. Soc. Ethiop. – 2005 – Vol. 19, No 1. – P. 17-22.
13. Dadfarnia S. Speciation and determination of thallium by on-line microcolumn separation / preconcentration by flow injection-flame AAS using immobilized oxine as sorbent // J. Hazard. Mater. – 2007. – Vol. 148, No 1-2. – P. 446-452.
14. Stafilov T. Determination of total thallium in fresh water by electrothermal atomic absorption spectrometry after colloid precipitate flotation / T. Stafilov, K. Gundeva // Talanta. – 1998. – Vol. 46, No 6. – P. 1321-1328.
15. Козина С.А. Концентрирование микроколичеств таллия соосаждением на коллекторе с последующим инверсионным вольтамперометрическим определением / С.А. Козина // Химия и технология воды. – 2005. – Т. 27, № 4. – С. 357-363.
16. Гадаскина И.Д. Определение промышленных неорганических ядов в организме / И.Д. Гадаскина, Н.Д. Гадаскина, В.А.Филов. – Л.: Медицина, 1975. – 288 с.
17. Комплексообразование и экстракция Tl(III) с галогенид-ионами и циановыми красителями – производными 1,3,3-триметил-3-N-индолия / П.П. Киш, Я.Р. Базель, В.Ю. Тарций и др. // Журнал аналитической химии.– 1988. – Т. 43, № 9. – С. 1636-1642.
18. Воскресенская Н.Т. Экстракционно-атомно-абсорбционное определение таллия в осадочных породах / Н.Т. Воскресенская, Н.Ф. Пчелинцева, Т.И. Цехоня // Журнал аналитической химии. – 1981. – Т. 36, № 4. – С. 667-671.
19. Целик Е.И. Экстракционно-фотометрическое определение таллия в природных водах / Е.И. Целик, В.П. Антонович, С.В. Бельтюкова // Химия и технология воды. – 1991. – Т. 13, № 4. – С. 319-321.
20. Фотометрическое и флуориметрическое определение таллия в поверхностных и питьевых водах / А.Т. Пилипенко, А.В. Терлецкая, Е.Я. Матвеева, Т.Л. Шевченко // Химия и технология воды. – 1991. – Т. 13, № 8. – С. 689-693.
21. Руденко Е.В. Определение таллия(I) и таллия(III) в эктодермальных тканях / Е.В. Руденко, И.А. Шевчук, Н.П. Дмитрук // Вісник студентського наукового товариства Донецького національного університету. – Донецьк: ДонНУ, 2008. – С. 217-221.
22. Пат. на корисну модель 41187 Україна, МПК G 01N 21/74. Спосіб електротермічного атомно-абсорбційного визначення талію(I) та талію(III) в біологічних матеріалах / Дмитрук Н.П., Шевчук І.О.; заявник та патентовласник Донецьк, ДонНУ. – № 200814092; заявл. 08.12.08; опубл. 12.05.09, Бюл. № 9. – 2 с.
23. Волынский А.Б. Химические модификаторы в современной электротермической атомно-абсорбционной спектрометрии / А.Б. Волынский // Журнал аналитической химии. – 2003. – Т. 58, № 10. – С. 1015-1032.

Надійшло до редакції 20.03.2013 р.

АНТИОКСИДАНТНЫЕ СВОЙСТВА ДЕРЕВОРАЗРУШАЮЩИХ МАКРОМИЦЕТОВ

А.В. Ковалева, О.В. Кузьминых, Е.Ю. Лащенко, К.Г. Древаль, Л.В. Каниболоцкая, М.И. Бойко, А.Н. Шендрик

Исследована антирадикальная активность этанольных экстрактов дереворазрушающих макромицетов в реакции в радикаломДФПГ и катион-радикалом АВТС⁺. Установлено, что антирадикальная емкость и восстанавливающая способность большинства этанольных экстрактов макромицетов выше, чем у водорастворимого аналога витамина Е – тролокса.

Ключевые слова: дереворазрушающие макромицеты, антиоксиданты, фенолы, антирадикальная активность.

Введение. Дереворазрушающие макромицеты являются ценным источником биологически активных и лекарственных веществ [1 – 5]. Компоненты лигнолитического комплекса макромицетов участвуют в деградации большого количества органических и неорганических поллютантов [6, 7], разрушают практически все компоненты древесины с образованием, в том числе соединений фенольной природы [8]. Последние могут выступать эффективными биоантиоксидантами. Антиоксидантные свойства макромицетов интенсивно исследуются [9 – 12]. Известно, что некоторые съедобные макромицеты обладают антирадикальной активностью, проявляют антиоксидантные свойства при окислении органических субстратов [13]. В связи с высоким потенциалом дереворазрушающих макромицетов в медицине, пищевой и фармацевтической промышленности становится актуальным исследование их антиоксидантной активности.

Цель данной работы – исследование антиоксидантных свойств спиртовых экстрактов лигнинразрушающих макромицетов.

Объекты и методы исследования. Объектами исследования были этанольные экстракты плодовых тел высших базидиальных грибов *Irpex lacteus* (Ирпекс молочно-белый), *Trametes versicolor* (Траметес разноцветный), *Fomes fomentarius* (Трутовик настоящий), *Chondrostereum purpureum* (Хондростереум пурпурный), *Pleurotus ostreatus* (Вешенка обыкновенная), *Phellinus tuberculosis* (Трутовик сливовый), *Ganoderma applanatum* (Трутовик плоский), *Laetiporus sulphureus* (Трутовик серно-желтый), *Leccinum aurantiacum* (Подосиновик красный), собранных на территории Украины в Славяногорских лесных массивах. Плодовые тела макромицетов собирали в августе – сентябре 2009 г. и 2010 г. После сбора плодовые тела сушили при комнатной температуре до постоянной массы и хранили в сухой стерильной емкости для исключения контаминации сырья. Видовую принадлежность макромицетов определяли в соответствии с [14, 15].

Экстракция. Высушенное сырье мололи на электрической мельнице до порошкообразного состояния. Экстракцию проводили в проточном перколяторе, снабженном рубашкой для подогрева, при температуре 50 ± 0.1 °С в 96% этаноле [16]. 0.25 г сырья загружали в перколятор, заливали 25 мл этанола и проводили экстракцию в течение 3 часов. При этом гидромодуль (соотношение растворитель-сырье) составлял 1:100. Для оптимизации экстракции экстрагировали 1.5 г сырья в 25 мл этанола при различных значениях температуры, а также времени. Экстракцию проводили как из дереворазрушающих макромицетов, так и из *L. aurantiacum*.

Реакция с АВТС⁺. Катион-радикал АВТС⁺ получали окислением $7 \cdot 10^{-3}$ М водного раствора 2,2'-азинобис(3-этилбензотиазолин)-6-сульфоновой кислоты (АВТС) (Aldrich, UK) $2.45 \cdot 10^{-3}$ М раствором персульфата калия ($K_2S_2O_8$) [17]. Смесь оставляли в темном месте при комнатной температуре на 12 часов. Раствор АВТС⁺ разбавляли фосфатным буфером (рН = 7.4) до оптической плотности 0.70 ± 0.02 при 734 нм ($\epsilon_{АВТС^+} = (1.6 \pm 0.1) \cdot 10^4$ л/моль·см). К этому раствору прибавляли 0.2 мл спиртового раствора макромицета и записывали кинетические кривые расходования АВТС⁺ при различном разведении экстракта при температуре T = 293 К. Антирадикальную активность спиртовых экстрактов макромицетов характеризовали величиной ТАЕС_{АВТС⁺} (*Trolox equivalent antioxidant capacity*), численно равной общему числу радикалов, которые погибают на одной молекуле антиоксидантов [18]. Для вычисления ТАЕС из кинетических кривых расходования катион-радикала в реакции с тролоксом определили концентрацию прореагировавшего за 500 с АВТС⁺ и построили зависимость этой концентрации от исходной концентрации тролокса. Получили линейную зависимость, тангенс угла наклона которой служит мерой антирадикальной активности. Такую же зависимость получили для спиртовых экстрактов каждого макромицета. ТАЕС определили как отношение тангенса угла наклона зависимости для спиртового экстракта макромицета к тангенсу угла наклона зависимости для тролокса.

Реакция с ДФПГ. Рабочие растворы дифенилпикрилгидразила (ДФПГ, Koch-Light) готовили в 96% этаноле [19]. Концентрацию ДФПГ подбирали таким образом, чтобы исходная оптическая плотность раствора была 0.70 ± 0.02 при 517 нм ($C_0 = (5.25 \pm 0.01) \cdot 10^{-5}$ моль/л) ($\epsilon = (1.33 \pm 0.04) \cdot 10^4$ л/моль·см). Антирадикальную активность экстрактов макромицетов характеризовали величиной ТАЕС_{ДФПГ}, определенной аналогично выше для АВТС⁺.

Определение содержания фенольных соединений ($C_{\text{ФС}}$) по Фолину-Чикольте [20]. К 1 мл исследуемого образца приливали 5 мл разбавленного 1:10 реактива Фолина-Чикольте (Sigma, USA) в дистиллированной воде. Смесь перемешивали и оставляли на 5 мин. После чего, добавляли 4 мл 7.5% раствора Na_2CO_3 и оставляли на 2 часа при комнатной температуре в темном месте. По истечении времени измеряли оптическую плотность исследуемого образца при 740 нм против растворителя. Концентрацию фенольных соединений экстрактов оценивали в пересчете на концентрацию галловой кислоты (Aldrich, UK), для которой $\epsilon = (1.51 \pm 0.04) \cdot 10^3$ л/моль·см.

Определение восстанавливающей способности. 2.5 мл исследуемого образца в фосфатном буфере (2.5 мл, 0.2М, pH>6.6) добавляли к 2.5 мл 1% раствора феррицианида калия ($\text{K}_3\text{Fe}(\text{CN})_6$) и смесь термостатировали при 50°C в течении 20 минут [21]. К реакционной смеси добавляли 2.5 мл 10% трихлоруксусной кислоты. Затем центрифугировали 10 мин. После этого отбирали 5 мл супернатанта и смешивали с 5 мл дистиллированной воды, добавляли 1 мл 0.1% раствора хлорида железа (FeCl_3). Смесь оставляли на 10 мин, а затем измеряли оптическую плотность раствора при 700 нм. Восстанавливающую способность (ВС) оценивали по тангенсу угла наклона линейной зависимости оптической плотности от концентрации фенольных веществ в этанольном экстракте.

Массу сухого остатка (m_{CO}) определяли после выпаривания 1 мл экстракта и высушивания остатка в вакуумном шкафу до постоянной массы.

Результаты и их обсуждение. Фенольные соединения выступают основными ловушками различных радикальных интермедиатов [22], что предопределяет необходимость оптимизации экстрагирования их из растительного сырья. В [16] приведена методика экстракции различных соединений из лиственной губки. Принимая во внимание предложенные условия, проведена оптимизация экстрагирования фенольных соединений в исследованном ряду макромицетов. Типичные зависимости концентрации фенольных соединений от температуры экстракции для макромицетов *F. fomentarius* (кривая 1) и *L. aurantiacum* (кривая 2) приведены на рис. 1, и аналогично от времени экстракции при $T = 323$ К для *L. aurantiacum* – рис. 2.

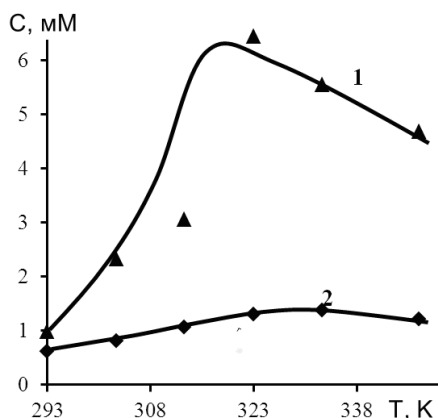


Рис. 1. Зависимость концентрации фенольных соединений этанольных экстрактов макромицетов от температуры экстракции: 1 – *F. fomentarius*, 2 – *L. aurantiacum*

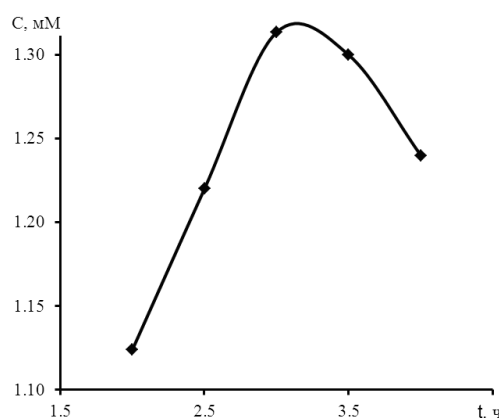


Рис. 2. Зависимость концентрации фенольных соединений этанольных экстрактов *L. aurantiacum* от времени экстракции. $T = 323$ К

Оптимальными условиями для экстракции фенолов из макромицетов являются температура – 50 °С, время экстракции – 3 ч.

UV-VIS-спектры полученных экстрактов приведены на рис. 3. Как видно из рис. 3 основные полосы поглощения растворов находятся в области 270-340 нм.

Общее количество фенольных соединений в экстрактах макромицетов, определенное по методу Фолина-Чикольте, приведено в таблице. Содержание фенолов в этанольных экстрактах исследованных макромицетов изменяется в пределах $(0.42 - 13.04) \cdot 10^{-4}$ М (таблица). Наибольшее количество фенолов содержится в экстракте *F. fomentarius*.

Антирадикальная активность экстрактов в реакции с радикалом ДФПГ практически для всех макромицетов превышает АРА тролокса.

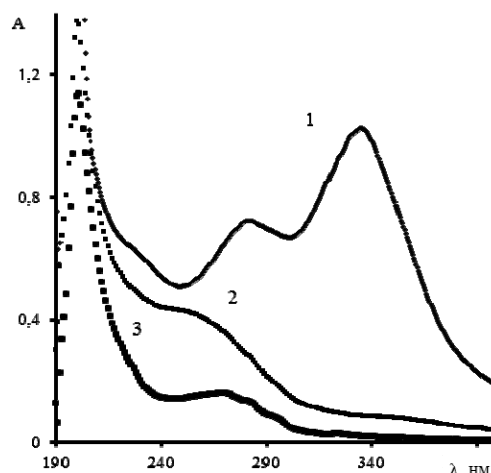


Рис. 3. Зависимость оптической плотности от длины волны этанольных экстрактов исследованных макромицетов 1 – *F. fomentarius* ($1.72 \cdot 10^{-5}$ М), 2 – *G. applanatum* ($1.65 \cdot 10^{-5}$ М), 3 – *L. sulphureus* ($0.82 \cdot 10^{-5}$ М). $T=323$ К

Высокая АРА отмечена у *H. purpureum*. В реакции с катион-радикалом высокую антирадикальную активность проявили экстракты *Ph. tuberculosis*, *G. applanatum*, *L. sulphurous*. Наибольшая восстанавливающая способность характерна для *Irp. lacteus*. Данные приведены в таблице.

Таблица

Антиоксидантная активность макромицетов

№	Название макромицета (лат)	$m_{co} \cdot 10^3, \text{г}$	$C_{\text{ФС}} \cdot 10^4, \text{М}$	$\text{ТАЕ}_{\text{АБТС}^+}$	$\text{ТАЕ}_{\text{ДФПГ}}$	BC	
1	<i>F. fomentarius</i>	2.30 ± 0.04	13.0 ± 0.1	0.17 ± 0.02	0.27 ± 0.02	2.03 ± 0.05	
2	<i>Irp. lacteus</i>	IL-9	3.20 ± 0.09	2.8 ± 0.1	0.55 ± 0.05	1.22 ± 0.05	2.45 ± 0.05
		(J-IL-2)	3.20 ± 0.09	3.9 ± 0.1	0.64 ± 0.04	0.78 ± 0.05	–
3	<i>H. purpureum</i>	0.80 ± 0.02	0.42 ± 0.04	1.08 ± 0.02	2.3 ± 0.1	1.84 ± 0.05	
4	<i>Tr. versicolor</i>	1.76 ± 0.05	0.67 ± 0.05	0.68 ± 0.04	1.7 ± 0.1	2.63 ± 0.05	
5	<i>Pl. ostreatus</i>	0.19 ± 0.05	1.6 ± 0.1	2.4 ± 0.1	1.1 ± 0.1	–	
6	<i>Ph. tuberculosis</i>	–	1.2 ± 0.1	4.7 ± 0.1	1.24 ± 0.05	–	
7	<i>G. applanatum</i>	0.54 ± 0.05	1.65 ± 0.05	5.0 ± 0.1	1.7 ± 0.1	–	
8	<i>L. sulphureus</i>	0.66 ± 0.04	0.82 ± 0.02	3.6 ± 0.1	1.9 ± 0.1	–	

Для оценки корреляционной зависимости между величинами ТАЕС, восстанавливающей способностью и количеством фенольных соединений в экстракте было проведено их сопоставление. Между антирадикальной емкостью экстракта в реакции с ДФПГ, АБТС⁺ и содержанием фенольных соединений имеется хорошая корреляция ($R^2 = 0.9789$, $R^2 = 0.7806$), что свидетельствует о том, что АРА спиртовых экстрактов макромицетов в реакции с этими радикалами обусловлена присутствующими фенолами. Между восстанавливающей способностью макромицетов в реакции восстановления железа и концентрацией фенольных соединений в экстрактах макромицетов нет корреляции ($R^2 = 0.1576$).

Обнаружена корреляционная связь между величинами тролоксовых эквивалентов (антирадикальной емкостью) в реакциях с радикалами ($R^2 = 0.7026$) (рис. 4). То есть можно говорить о том, что механизм реакции этих двух радикалов с молекулами антиоксидантов экстрактов похожий.

Между массой сухого остатка и концентрацией фенольных соединений имеется слабая корреляционная зависимость ($R^2 = 0.6544$) (рис. 5).

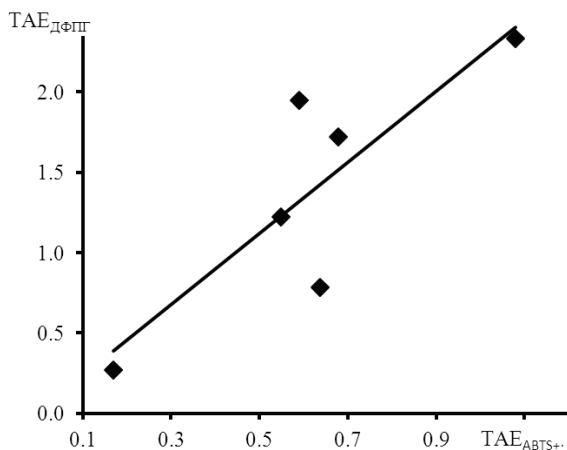


Рис. 4. Зависимость величины тролоксового эквивалента экстрактов макромицетов в реакции с ДФПГ от тролоксового эквивалента в реакции с АБТС⁺. T = 323 К

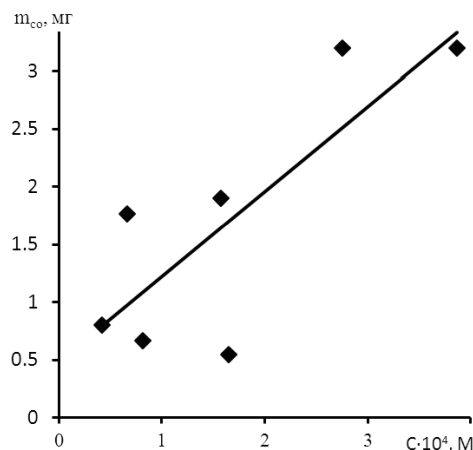


Рис. 5. Зависимость массы сухого остатка экстрактов макромицетов от концентрации фенольных соединений. T = 323 К

Выводы. Исследования этанольных экстрактов дереворазрушающих макромицетов показали, что данные объекты обладают антирадикальной активностью в реакции с ДФПГ и катион-радикалом АБТС⁺. Антирадикальная емкость и восстанавливающая способность большинства этанольных экстрактов макромицетов выше, чем у водорастворимого аналога витамина Е – тролокса.

РЕЗЮМЕ

Досліджено антирадикальну активність етанольних екстрактів дереворуйнівних макромицетів у реакції з радикалом ДФПГ і катион-радикалом АБТС⁺. Встановлено, що антирадикальна ємність і відновлювальна здатність більшості етанольних екстрактів макромицетів вище, ніж у водорозчинного аналогу вітаміну Е – тролоксу.

Ключові слова: дереворуйнівні макромицети, антиоксиданти, феноли, антирадикальна активність.

SUMMARY

The antiradical activity of lignin-degradating mushrooms ethanolic extracts in reactions with DPPH radical and ABTS⁺ cation-radical was investigated. It was established that antiradical capacity and reducing ability of the most of examined mushrooms extracts was higher, than equal value for watersoluble analogue of vitamin E – trolox.

Keywords: lignin-degradating mushrooms, antioxidants, phenols, antiradical activity.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Nutrients in edible mushroom: an interspecies comparative study / P. Manzi, L. Gambelli, S. Marconi, // Food Chemistry. – 1999. – Vol. 65. – P. 477-482.
2. Asfors K.E. Sulfated polysaccharides in inflammation / K.E.Asfors, K. Ley // Journal of Laboratory Clinical Medicine. – 1993. – Vol. 121. – P. 201-202.
3. Wasser S.P. Review of medicinal mushroom advances. Good news from old allies / S.P.Wasser // Herbal Gram. – 2002. – Vol. 56. – P. 2833.
4. Coyle J.T. Oxidative stress, glutamate, and neurodegenerative disorders/ J.T. Coyle, P. Putfarcken // Science. – 1993. – Vol. 262. – P. 689-695.
5. Kaul N. Toxicology of human environment / N. Kaul, H.J. Forman. – London: Rhodes, C.J., Ed.; Taylor&Francis Ltd., 2000. – P. 311.
6. Pointing S.B. Feasibility of bioremediation by white-rot fungi / S.B.Pointing // Applied Microbiology and Biotechnology. – 2001. – Vol. 57. – P. 20-33.
7. Tortella G.R. Fungal diversity and use in decomposition of environmental pollutants / G.R. Tortella, M.C. Diez, N. Durian // Critical Review Microbiology. – 2005. – Vol. 31. – P. 197-212.
8. Cullen D. Enzymology and molecular biology of lignin degradation / D. Cullen, P.J. Kersten // The Mycota. III. Biochemistry and molecular biology. – 2004. – P. 249-312..
9. Chirinang P. Amino acids and antioxidant properties of the oyster mushrooms, *Pleurotus ostreatus* and *Pleurotus sajor-caju* / P. Chirinang, K.-O. Intarapichet // Science Asia. – 2009. – Vol. 35. – P. 326-331.
10. Lo K.M. Antioxidant activity of extracts from the fruiting bodies of *Agrocybe aegerita* var *Alba* / K.M. Lo, P.C.K. Cheung // Food Chemistry. – 2005. – Vol. 89. – P. 533-539.
11. Li L. Antioxidant activity with content of phenolics in extracts from the culinary-medicinal abalone mushroom *Pleurotus abalones*, Chen et Chang / L. Li, T.B. Ng, I. Zhao // International Journal of Medicine Mushrooms. – 2005. – Vol. 28. – P. 237-242.
12. Chirinang P. Amino acids and antioxidant properties of the oyster mushrooms, *Pleurotus ostreatus* and *Pleurotus sajor-caju* // P. Chirinang, K.-O. Intarapichet // Science Asia. – 2009. – Vol. 35. – P. 326-331.
13. Бадалян С. М. Исследование антиоксидантной активности некоторых базидиальных макромицетов / С.М. Бадалян, А. В. Гаспорян, Н. Г. Гарибян // Микология и фитопатология. – 2003. – Вып. 5. – С. 63-68.
14. Вассер С.П. Высшие базидиомицеты степной зоны Украины / С.П. Вассер. – К.: Наук. думка, 1977. – 356 с.
15. Бондарцев А. С. Трутовые грибы Европейской части СССР и Кавказа / А.С. Бондарцев. – М.,Л.: изд-во АН СССР, 1953. – 1106 с.
16. Ооржак У.С. Исследование влияния технологических факторов на процесс извлечения экстрактивных веществ из лиственной губки / У.С. Ооржак, В.М. Ушанова, С.М.Репях // Химия растительного сырья. – 2003. – № 1. – С. 69-72.
17. Antioxidant activity applying an improved ABTS radical cation decolorization assoug / R. Re, N. Pellegrini, A. Proteggente, St. Pannala // Free Radical Biology and Medicine. – 1999. – Vol. 26, No 9/10/ – P. 1231-1237.
18. Walker R.B. Comparative reaction rates of various antioxidants with ABTS radical cation / R.B. Walker, J.D. Everette // Journal of Agriculture and Food Chemistry. – 2009. – Vol. 57, No 4. – P. 1156-1161.
19. Molyneux P. The use of the stable free radical diphenilpicrylhydrazyl (DPPH) for estimating antioxidant activity / P. Molyneux // Songklanakarin Journal of Science and Technology. – 2004. – Vol. 26, No 2. – P.211-219.
20. Singleton V.L. Analysis of total phenols and other oxidation substrates and antioxidants by means of Folin-Ciocalteu reagent / V.L. Singleton, R. Orthofer, R.M. Lamuela-Raventos // Methods in Enzymology. – 1999. – Vol. 299. – P. 152–157.
21. Antioxidant properties of selected *Boletus* mushrooms / S.S. Vidovic, I.O. Mujic, Z.P. Zekovic et al. // Food Biophysics. – 2010. – Vol. 5 – P. 49-58.
22. Liu Z.-Q. Chemical methods to evaluate antioxidant ability / Z.-Q. Liu // Chemical Reviews.– 2010. – Vol. 110. – P. 5675-5691.

Поступила в редакцию 21.02.2013 г.

УДК 633.358:631.53.027:631.8

**ЭФФЕКТИВНОСТЬ ГУМИНОВЫХ ПРЕПАРАТОВ НА ЗЕРНОБОБОВЫХ КУЛЬТУРАХ
В УСЛОВИЯХ СТЕПИ УКРАИНЫ**

О.В. Бочевар*, А.В. Бутюгин, А.В. Ильенко*

*ГУ Институт сельского хозяйства степной зоны НААН Украины, г. Днепрпетровск

Приведены результаты исследований по изучению эффективности буроугольных гуминовых препаратов в технологии выращивания гороха, сои и чечевицы. Исследования выполнены в условиях полевых опытов. Установлено позитивное влияние предпосевной обработки семян и внекорневой обработки растений гороха, сои и чечевицы гуминовыми препаратами на прорастание, укоренение, выживаемость растений и урожайность. Показано, что буроугольные гуминовые препараты повышают урожайность зернобобовых культур на 7–53%.

Ключевые слова: горох, соя, чечевица, гуматы аммония, гуминовые препараты, бактериализация семян, урожайность зерна.

Введение. Современные технологии эффективного выращивания сельскохозяйственных культур, особенно в зонах рискованного земледелия, к которым относятся степные зоны Днепрпетровской и Донецкой областей, просто немыслимы без применения стимуляторов-адаптогенов растений. Наиболее экологичными стимуляторами-адаптогенами растений являются препараты на основе природных гуминовых веществ [1 – 8]. В настоящее время разработаны и производятся разнообразные гуминовые препараты на основе гуматов натрия и калия, которые испытываются и применяются на различных культурах [6 – 9]. Гуминовые препараты имеют широкий спектр механизмов воздействия на растения, а через растения и на микроорганизмы почв [1 – 3, 10 – 12]. Новые гуминовые препараты на основе буроугольных гуматов аммония также показали свою эффективность на различных сельскохозяйственных растениях [12 – 22], но на зернобобовых культурах данные препараты ранее не испытывали. На зернобобовых культурах в основном испытывают и применяют комплексные микробиологические препараты с высокой биологической активностью, основой которых является ассоциативные или симбиотические азотфиксаторы [23 – 26].

Цель работы – сравнительное изучение эффективности буроугольных гуминовых препаратов, бактериальных препаратов и промышленных удобрений при выращивании гороха и сои в условиях степи.

Постановка задачи. Буроугольные гуматы аммония содержат больше азота (3,14%), чем гуматы калия или натрия (0,9%). В бурых углях содержатся необходимые для жизнедеятельности микроэлементы. При извлечении гуматов угля аммиаком в раствор переходит примерно в 1,5 раза больше микроэлементов, чем при извлечении гидроксидом калия или натрия [27, 28]. Имеется информация, что ион калия и четвертичный азот, содержащийся, например, в мочеvine, ионах аммония и присутствующий в гуматах аммония, являются своеобразным «ключом», который открывает устьица листьев растений и способствует проникновению гуминовых и иных веществ в растения [29, 30]. Но наличие азота в гуматах аммония должно обеспечить большую их эффективность по сравнению с гуматами калия и натрия. Гуматы аммония и препараты на их основе, разработанные в Донецком национальном университете, проявили адаптогенные и антистрессовые свойства [9, 12, 18]. Поэтому изучение эффективности применения буроугольных гуминовых препаратов на зернобобовых культурах в условиях степных зон Днепрпетровской и Донецкой областей является актуальным.

Объекты и методы исследований. В качестве объектов исследований были использованы:

- 1) безлисточковый среднеспелый полукарликовый сорт гороха «Царевич» селекции Института растениеводства им. В.Я.Юрьева НААН (г. Харьков);
- 2) среднеспелые сорта сои «Скеля» селекции Института растениеводства им. В. Я. Юрьева НААН (г. Харьков); «Ника» селекции Всероссийского научно-исследовательского института масличных культур имени В.С. Пустовойта (г. Краснодар); «Аметист» селекции ГУ Институт сельского хозяйства степной зоны НААН (г. Днепрпетровск); «Луир-9» зарубежной селекции;
- 3) чечевица сортов «Днепровская 3» и «Красноградская 49» селекции ГУ Институт сельского хозяйства степной зоны НААН;
- 4) буроугольный гумат аммония (ГК-А), микроэлементные препараты (ГАМ, ГК-А-5М и ГК-А-7М) и удобрение на его основе (ГК-А-мрк-1-ВМо) – разработка Донецкого национального университета;
- 5) многофункциональный биопрепарат ризогумин – разработка Института сельскохозяйственной микробиологии НААН (г. Чернигов);
- 6) биогумат (УГХТУ, Днепрпетровск) – продукт переработки растительных отходов культурой красного калифорнийского червя.

Исследования на горохе проводили на Эрастовской опытной станции (ГУ Институт сельского хозяйства степной зоны НААН, Днепропетровская область) на протяжении 2008-2009 гг. Почва опытного участка – чернозем обычный малогумусный тяжелосуглинистый. Содержание гумуса в пахотном слое почвы (0-30 см) – 4,0–4,5%; общего азота – 0,23–0,26%; фосфора – 0,11–0,16%; калия – 2,0–2,5%; pH водной вытяжки – 6,5–7,0.

Полевые опыты закладывали после озимой пшеницы по черному пару на фоне без удобрений. Размещение вариантов в полевом опыте систематическое, повторность трехкратная, учетная площадь участков 25 м².

Погодные условия во время проведения исследований были разными. В 2009 г. условия для прорастания и развития растений гороха в течение 40 дней после сева усложнились из-за отсутствия осадков и снижения среднесуточных показателей температуры воздуха на 0,5–1,4°C. Цветение гороха и вторая половина вегетации культуры проходили в резко засушливых условиях. Максимальная температура воздуха в дневные часы составляла 29,5–33°C (почвы – 50,5–60,9°C); минимальная относительная влажность воздуха колебалась от 45 до 25%. Повышенный температурный режим воздуха и практически полное отсутствие атмосферных осадков обусловили сокращение периода цветения растений гороха, активизировали процессы стремительного подсыхания нижних непродуктивных узлов, что существенно снизило продуктивность растений. Условия вегетации гороха в 2008 г., напротив, были благоприятными для формирования высокого урожая зерна.

Выращивание сои и чечевицы проводили в полевых опытах в условиях различных районов Донецкой области. Опыты закладывали в 3-х кратной повторности рендомизированными блоками. Площади учетных делянок составляли 1–2 м². Почва – чернозем обычный, малогумусный (4,0–4,5%), среднесуглинистый.

Результаты и их обсуждение. Исследования по определению влияния препаратов гуминовой природы на процессы прорастания семян гороха показали, что при их использовании полевая всхожесть повышалась относительно контроля на 3,1–4,2% (табл. 1).

Таблица 1
Влияние гуминовых препаратов на полевую всхожесть семян и выживаемость растений гороха (2008 г.)

Вариант	Полевая всхожесть семян		Выживаемость растений	
	%	± к контролю	%	± к контролю
Контроль	88,6	–	85,4	–
Ризогумин	92,4	+3,8	87,8	+2,4
Биогумат	92,8	+4,2	87,0	+1,6
ГК-А	91,7	+3,1	90,2	+4,8
ГАМ	92,6	+4,0	89,9	+4,5

Из таблицы видно, что полевая всхожесть семян гороха при обработке его биогуматом и препаратом гумата аммония ГАМ, сравнительно с бактериализацией ризогумином, повышалась на 0,2–0,4%, при использовании ГК-А – уменьшалась на 0,7%.

Предпосевная обработка семян препаратами, которые исследовались, неодинаково влияла на выживаемость растений гороха в течение вегетации. Наибольшее количество растений гороха перед уборкой урожая наблюдалось в вариантах с обработкой семян гуматами аммония – ГК-А и ГАМ. Применение этих препаратов способствовало усилению общей выживаемости растений на 4,5–4,8%. Менее эффективным оказалось использование биогумата – относительно контроля выживаемость растений повышалась лишь на 1,6%.

По результатам наших опытов установлено, что позитивное влияние исследуемых препаратов на рост и развитие растений гороха продолжалось и после прорастания семян. Анализ биометрических показателей растений гороха в фазе 5–6 листьев показал, что обработка семян перед посевом бактериальными и гуминовыми препаратами способствовала усилению развития корневой системы и стеблеобразованию растений, к тому же, отмечалось увеличение общего количества азотфиксирующих клубеньков в ризосфере корней (табл. 2).

Таблица 2
Влияние обработки семян гуматмикроэлементными препаратами на рост и развитие растений гороха в фазе 5-6 листьев (2008 г.)

Вариант	Высота растений, см	Количество листьев, шт./растение	Длина корней, см	Количество клубеньков, шт./растение
Контроль	13,5	5,9	9,6	18,0
Ризогумин	14,6	6,2	10,3	21,9
Биогумат	14,9	6,1	10,9	27,1
ГК-А	14,5	6,1	11,4	24,1
ГАМ	14,9	5,9	12,4	25,4

По отношению к контролю наиболее развитыми растения гороха были в вариантах с обработкой семян гуматами аммония, особенно при сравнении размеров и степени разветвления корневой системы.

Длина корешков лучших растений превысила контрольные показатели на 18,8–29,2%, а относительно варианта-эталона с биопрепаратом ризогумин – на 10,7–20,4%.

Опытами также установлено, что в вариантах с бактеризацией семян ризогумином и обработкой биогуматом и гуматами аммония высота растений превышала контрольные показатели на 1,0–1,4 см. Отмечена также тенденция к увеличению количества зеленых листьев на растениях при обработке семян этими препаратами, по сравнению с контролем.

Одним из важнейших показателей фиксации атмосферного азота бобовыми культурами является количество клубеньков на корнях растений. Подсчет их количества в фазе 5-6 листьев показал, что больше всего клубеньки образовывались в ризосфере корневой системы растений при предпосевной обработке семян биогуматом – 27,1 шт./растение, что на 9,1 шт. больше относительно контроля. В вариантах с инокуляцией семян ризогумином и предпосевной обработкой гуматами аммония количество клубеньков на корнях растений гороха изменялось от 21,9 до 25,4 шт./растение и превышало контроль на 3,9–7,4 шт. Результаты наблюдений за ростом и развитием растений гороха в 2009 г. подтвердили выявленную тенденцию.

Анализ элементов структуры урожая гороха в опыте показал, что неодинаковые погодные условия в течение вегетации гороха в 2008–2009 гг. обусловили разный уровень формирования вегетативной массы растениями и, соответственно, общего потенциала органических соединений для создания генеративных органов.

Известно, что наиболее изменчивым показателем структуры урожая гороха является количество бобов на растении. Высокая температура воздуха во время цветения гороха в 2009 г. привела к потере большинства цветов на верхних ярусах растений, что повлекло к существенному уменьшению общего количества бобов. Установлено, что за время проведения исследований формирование максимального количества бобов наблюдалось в 2008 г. – 6,4–6,5 шт./растение, в то время как в условиях засушливого 2009 г. – лишь 2,3–2,7 шт./растение (табл. 3). Обработка семян гороха ризогумином и препаратами гуминовой природы способствовала увеличению этого показателя при недостаточном количестве осадков и высокой температуре воздуха на 4,3–17,4%, а в благоприятных условиях вегетации – на 12,5–16,1% в сравнении с контрольными вариантами. Количество семян в бобе в 2008 г. по вариантам изменялось незначительно, а в 2009 г. наибольшая озерненность бобов гороха отмечалась при обработке семян препаратом ГК-А.

Таблица 3

Формирование показателей структуры урожая гороха в опыте (2008-2009 гг.)

Вариант	Количество бобов на растении, шт.		Количество семян в бобе, шт.		Масса 1000семян, г	
	2008 г.	2009 г.	2008 г.	2009 г.	2008 г.	2009 г.
Контроль	5,6	2,3	3,3	2,6	208,8	222,6
Ризогумин	6,5	2,6	3,5	2,9	214,4	219,4
Биогумат	6,3	2,4	3,4	2,6	219,2	221,2
ГК-А	6,5	2,7	3,4	3,1	223,6	224,4
ГАМ	6,4	2,5	3,5	2,7	222,4	222,0

В 2008 г. при использовании ризогумина и гуматмикроэлементных препаратов наблюдалась тенденция к повышению массы 1000 семян гороха – на 5,6–14,8 г. При менее благоприятных погодных условиях позитивного влияния предпосевной обработки семян гороха на формирование выполненности зерна не наблюдалось.

Основным критерием, который дает возможность комплексно оценить эффективность технологических мероприятий выращивания сельскохозяйственных культур, является урожайность зерна. Максимальная урожайность зерна была получена при достаточном влагообеспечении, умеренной температуре воздуха и обработке препаратами, величины варьировались в пределах оптимума для растений и зональных многолетних данных. При благоприятных погодных условиях урожайность зерна гороха сорта Царевич формировалась на уровне 2,99–3,37 т/га, тогда как в 2009 г. она уменьшалась почти в два раза и не превышала 1,53–1,73 т/га (табл. 4).

Таблица 4

Урожайность зерна гороха сорта Царевич в зависимости от обработки семян гуматмикроэлементными и биологическими препаратами (2008-2009 гг.)

Вариант	Норма расхода препарата	Урожайность зерна по годам, т/га			Прирост урожайности	
		2008 г.	2009 г.	среднее	т/га	%
Контроль	–	2,99	1,53	2,26	–	–
Ризогумин	200 г/га н.в.	3,31	1,68	2,50	+ 2,4	10,6
Биогумат	100 мл/т	3,24	1,61	2,43	+ 1,7	7,5
ГК-А	100 мл/т	3,39	1,73	2,56	+ 3,0	13,3
ГАМ	100 мл/т	3,37	1,62	2,50	+ 2,4	10,6
НСР ₀₅ , т/га		0,14	0,12	–	–	–

Следовательно, можно сделать вывод, что предпосевная обработка семян гороха сорта «Царевич» ризогумином и гуматмикроэлементными препаратами положительно влияла на формирование урожайности зерна как в засушливом 2009 г., так и в среднем по увлажнению в 2008 г. Высший уровень урожайности зерна гороха в среднем за два года обеспечил вариант с применением препарата ГК-А. Гуматмикроэлементные препараты на основе гумата аммония не уступали по эффективности биопрепарату ризогумин.

В табл. 5 представлены результаты опытов по изучению влияние предпосевной обработки (замачивание) гуминовым препаратом семян сои двух сортов на урожайность. Исследованный гуминовый препарат – гумат аммония с добавками 5 микроэлементов (бора, меди, молибдена, кобальта и цинка).

Таблица 5
Влияние замачивания семян в гуминовом препарате на урожайность сои посевной (2003 г.)

Сорт сои	Урожайность, ц/га		Прибавка к контролю	
	Контроль	ГК-А-5М	ц/га	%
Ника	14,23	21,77	+ 7,54	+ 52,9
Луир-9	17,91	21,85	+ 3,94	+ 21,9

Из данных таблицы видно, что на обоих сортах сои обработка гуминовым препаратом показала высокую эффективность – урожайность выросла по сравнению с контролем на 22–53%. Разница в приросте урожайности по сортам связана с сортовой и концентрационной чувствительностью к гуматам и микроэлементам.

В табл. 6 представлены результаты опыта по изучению влияния обработки семян сои и 2-х кратной обработки вегетирующих растений гуминовым препаратом (в фазу 1-го тройчатого листа и в фазу бутонизации). Исследованный гуминовый препарат – гумат аммония с добавкой микроэлемента меди.

Таблица 6
Влияние замачивания семян и внекорневой обработки гуминовым препаратом на урожайность сои посевной сорта «Аметист» (2003 г.)

Вид обработки	Урожайность расчетная, ц/га		Прибавка к контролю	
	Контроль – вода	ГК-А-Си	ц/га	%
Замачивание семян	16,25	21,96	+ 5,71	+ 35,1
Внекорневая обработка	16,47	24,42	+ 7,95	+ 48,3

Как видно из данных таблицы, обработка семян и внекорневая обработка гуминовыми препаратами повышает урожайность сои. Внекорневая обработка гуминовым препаратом в фазах 1-го тройчатого листа и бутонизации дает больший эффект, чем обработка семян.

В табл. 7 приведены результаты 2-х летних опытов по изучению влияния внекорневой 2-х кратной обработки гуминовыми удобрениями в фазу 3-4 настоящих листьев и фазу бутонизации. Гуминовое удобрение – аналог промышленного удобрения «Мочевин К-1» с добавкой гумата аммония.

Таблица 7
Влияние гуминового удобрения на урожайность сои сорта «Скеля» (2010-2011 гг.)

Вариант обработки	Год	Урожайность, ц/га	± к контролю	
			ц/га	%
Контроль- вода	2010	13,47	–	–
	2011	33,12	–	–
Мочевин К-1	2010	12,60	– 0,87	– 6,4
	2011	33,86	+ 0,74	+ 2,2
ГК-А-мрк-1-ВМо	2010	15,73	+ 2,27	+ 16,8
	2011	38,90	+ 5,78	+ 17,5
НСР ₀₅		2010	1,63	11,7
		2011	3,35	9,5

Из данных таблицы видно, что гуминовое удобрение на основе гумата аммония показало практически одинаковую достаточно высокую эффективность в 2010 и 2011 гг. в отличие от Мочевин К-1 и контроля.

В табл. 8 приведены результаты опытов по изучению влияния гуминовых препаратов на основе гумата аммония на урожайность 2-х сортов чечевицы. Исследуемый гуминовый препарат – гумат аммония с добавками 7 микроэлементов (бора, германия, меди, молибдена, марганца, кобальта, цинка).

Таблица 8
Влияние обработки семян гуминовыми препаратами на урожайность растений чечевицы (2003 г)

Сорт чечевицы	Урожайность, ц/га		Прибавка к контролю	
	Контроль	ГК-А-7М	ц/га	%
Днепровская 3	8,51	10,11	+ 1,60	+ 18,8
Красноградская 49	10,22	10,93	+ 0,71	+ 6,9

Из данных таблицы видно, что гуминовый препарат оказал различный положительный эффект на разные сорта чечевицы. Это явление связано с сортовой и концентрационной чувствительностью чечевицы к гуматам и микроэлементам.

Таким образом, выращивание сои и чечевицы в полевых опытах в Донецкой области показало достаточно высокую эффективность гуминовых препаратов на основе бурогоугольных гуматов аммония.

Выводы. На основании всех проведенных полевых опытов установлена достаточно высокая эффективность бурогоугольных гуминовых препаратов при применении на зернобобовых культурах условий степной зоны Украины, что отражается в улучшении роста и развития растений, а также в повышении урожайности.

РЕЗЮМЕ

Приведено результати досліджень по вивченню ефективності буровугільних гумінових препаратів в технології вирощування гороху, сої та сочевиці. Дослідження виконані в умовах польових дослідів. Встановлено позитивний вплив допосівної обробки насіння та позакореневої обробки рослин гороху, сої і сочевиці гуміновими препаратами на проростання, укорінення ті виживаність рослин та урожайність. Показано, що буровугільні гумінові препарати підвищують урожайність зернобобових культур на 7–53%.

Ключові слова: горох, соя, сочевиця, гумати амонію, гумінові препарати, бактеризація насіння, урожайність зерна.

SUMMARY

The results of researches on efficiency studying of humic preparations from brown coal in technology of cultivation of peas, a soya and lentil are given. Researches are executed by means of field experiences. Positive influence of presowing treatment of seeds and spreyc treatments of plants of peas, a soya and lentil by humic preparations on germination, rooting, survival rate of plants and productivity is established. It is shown, that humic preparations from brown coal raise productivity of leguminous cultures on 7–53 %.

Keywords: pea, soya, lentil, humates of ammonium, humic preparations, bacterization of seeds, grain productivity.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гуминовые удобрения. Теория и практика их применения. – Ч.1. / Под ред. Л.А. Христовой. – Харьков: ХГУ, 1957. – 236 с.
2. Гуминовые удобрения. Теория и практика их применения. Ч. 2 / Под ред. Л.А. Христовой. – Киев: Урожай, 1962. – 631 с.
3. Гуминовые удобрения. Теория и практика их применения. Ч. 3 / Под ред. Л.А. Христовой. – Киев: Урожай, 1968. – 387 с.
4. Гуминовые вещества в биосфере: Труды 2 Международной конференции (г. Москва, 3-6 февраля 2003 г.) / Под ред. С.Я. Трофимова. – М.: Изд-во Московского университета, 2004. – 313 с.
5. Ермаков Е.И. Некорневая обработка растений гуминовыми веществами, как экологически гармоничная корректировка продуктивности и устойчивости агроэкосистем / Е.И. Ермаков, А.И. Попов // Вестник РАСХН. – 2003. – № 4. – С. 7-11.
6. Гуминовые вещества в биосфере: Труды 4 Всероссийской конференции (г. Москва, 19-21 декабря 2007 г.) / Под ред. С.Н. Чукова. – СПб.: СПбГУ, 2007. – 668 с.
7. Досягнення та перспективи застосування гумінових речовин у сільському господарстві: Матеріали Між-нар.науково-практ.конф., присвяченої 100-річчю від дня народження проф. Л.А. Христової / Відп. ред. А.С. Кобець. – Дніпропетровськ: ДДАУ, 2008. – 328 с.
8. Гуминовые вещества в биосфере: Труды 5 Всероссийской конференции (г. С.-Петербург, 1-4 марта 2010 г.) / Под ред. Б.Ф. Апарина. – СПб.: СПбГУ, 2010. – 616 с.
9. Крупский А.Е. Эффект гуматов / А.Е. Крупский // Зерно: всеукраинский журнал современного агропромышленника. – 2010. – № 2. – С. 76-77.
10. Смирнова Ю.В. Механизмы действия и функции гуминовых препаратов / Ю.В. Смирнова, В.С. Виноградова // Агротехнический вестник. – 2004. – № 1. – С. 22-23.
11. Попов А.И. Гуминовые вещества: свойства, строение, образование / Под ред. Е. И. Ермакова. – Санкт-Петербург: Изд-во С.-Петербурга. ун-та, 2004. – 246 с.
12. Природные гуминовые вещества: взаимосвязь природы, способов выделения, физико-химических и биоактивных свойств / Ю. М. Зубкова, А. В. Бутюгин, А. Л. Антонова и др. – Донецк : Центр. інф. комп. технологій ДонНУ, 2010. – 206 с.
13. Рыктор И.А. Использование гумата аммония на овощных культурах / И.А. Рыктор, А.Л. Антонова, Ю.Н. Зубкова // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2003. – Вып. 1. – С. 298-303.
14. Бутюгин А.В. Комплексные гуматмикроэлементные препараты на ячмене / А.В. Бутюгин, О.Г. Рубан // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2006. – Вып. 1. – С. 309-311.
15. Использование гумата аммония на зеленных культурах в условиях защищенного грунта / Ю.Н. Зубкова, Р.Д. Зеленина, В.А. Булли и др. // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2006. – Вып. 1. – С. 356-361.
16. Изучение влияния гуматов аммония на люцерну и рис / А.В. Бутюгин, Н.В. Байрак, Р.А. Вожегова и др. // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2007. – Вып. 1. – С. 273-276.
17. Влияние органоминеральных препаратов из бурых углей на ростовые показатели проростков TRITICUM AESTIVUM / Ю.Н. Зубкова, И.А. Рыктор, Л.Г. Шаранина и др. // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2007. – Вып. 1. – С. 474-476.

18. Гуминовые ванадийсодержащие препараты как стимуляторы роста растений / Ю.Н. Зубкова, Н.Б. Узденников, А.В. Бутюгин и др. // Вісн. Донець. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2007. – Вып. 2. – С. 321-327.
19. Новые гуминовые препараты: свойства и применение / Ю.Н. Зубкова, А.В. Бутюгин, И.А. Рыктор и др. // Материалы 4-й Международной конференции «Гуминовые вещества в биосфере» (г.Москва, 19-21 декабря 2007 г.). – Москва, 2007. – С. 440-447.
20. Бутюгин А.В. Влияние гуминовых препаратов на *LINUM USITATISSIMUM* L. и *LINUM GRANDIFLORUM* DESF. Сообщение 1. Влияние гуминовых препаратов на биометрические показатели / А.В. Бутюгин, Л.В. Попова, А.Л. Антонова // Вісн. Донецьк. нац. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2008. – Вып. 2. – С. 420-424.
21. Бутюгин А.В. Влияние гуматов аммония на всхожесть семян овощных культур и на урожай зеленой массы ячменя / А.В. Бутюгин, М.В. Гнеденко // Вісн. Донецьк. нац. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2009. – Вып. 2. – С. 354-358.
22. Рыктор И.А. Влияние буроугольных гуминовых удобрений на снижение стрессовой реакции у растений *Festuca pratensis* Huds / И.А. Рыктор, Ю.Н. Зубкова, А.В. Бутюгин // Вісн. Донецьк. нац. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2011. – Вып. 1. – С. 115-122.
23. Литвинцев П.А. Эффективность применения ризоторфина на сое / П.А. Литвинцев, П.Р. Шотт // Аграрная наука – сельскому хозяйству: Междунар. науч.-практ. конф. (Барнаул, 22-23 марта 2006 г.). – Кн. 1. – Барнаул, 2006. – С. 136-139.
24. Даниленко Н.Л. Влияние бактериальных препаратов на продуктивность овса, пшеницы, люпина в чистых и смешанных посевах агрофитоценозов в зависимости от уровня азотного питания / Н.Л. Даниленко // Аграрная наука – сельскому хозяйству: III Междунар. науч.-практ. конф. (Барнаул, 18-23 августа, 2008 г.). – Кн. 1. – Барнаул, 2008. – С. 248-250.
25. Тихонович И.А. Микробно-растительные системы в кормопроизводстве / И.А. Тихонович // Сельскохозяйственные вести. – 2008. – № 2. – С. 21-22.
26. Дідович С.В. Вплив штамів бульбочкових бактерій на продуктивність рослин і якість насіння бобів кормових в умовах Лісостепу України / С.В. Дідович, С.І. Колісник, С.Я. Кобак // Міжвідом. тематич. наук. збірник «Корми і кормовиробництво» – Вінниця, 2010. – Вип. 66. – С. 109-114.
27. Покуль Т.В. Сырьевые источники Иркутской области для производства углегуминовых удобрений и стимуляторов роста растений / Т.В. Пикуль, В.А. Ларина // Химия и переработка твердого топлива. – Иркутск: ИГУ, 1973 – С. 3-13.
28. Бутюгин А.В. Микроэлементный состав гуматов бурого угля / А.В. Бутюгин, В.Л. Басенкова, Ю.Н. Зубкова // Биоконверсия органических отходов и охрана окружающей среды: Тез. докл. 5 Междунар. Конгресса (г. Ивано-Франковск, 21-24 мая 1999 г.). – Ивано-Франковск, 1999. – С. 93-94.
29. Марченко В.П. Ефективність застосування сурфактантів під час хімічної обробки посівів / В.П. Марченко // Пропозиція. – 2005. – № 5. – С. 110-111.
30. Якушкина Н.И. Физиология растений / Н.И. Якушкина. – М.: Владос, 2004. – 464 с.

Поступила в редакцию 24.10.2012 г.

УДК 612.014.4

ПОКАЗАТЕЛИ ГЕМОДИНАМИКИ В ДИНАМИКЕ МЕНСТРУАЛЬНОГО ЦИКЛА

И.Г. Герасимов

НИИ медицинских проблем семьи Донецкого национального медицинского университета, г. Донецк

У 25 здоровых женщин (возраст 22 – 28 лет) в менструальном цикле исследовали центральную и периферическую гемодинамику. Величины объемной и максимальной скоростей кровотока коррелируют между собой ($r = 0,93$, $p < 0,05$) и их значения увеличиваются в период овуляции примерно на 10 %, также как и время оттока крови. Изменения показателей гемодинамики в менструальном цикле женщин обусловлены закономерностями нейрогуморальной регуляции и направлены на обеспечение веществом и энергией, необходимых для роста и созревания яйцеклетки.

Ключевые слова: гемодинамика, менструальный цикл.

Введение. Менструальный цикл женщин (МЦ) – сложный физиологический процесс, характеризующийся динамическими изменениями на разных уровнях функционирования организма и связанный с созреванием фолликула, овуляцией и утилизацией яйцеклетки [1]. Средняя продолжительность МЦ составляет 28 дней. Первые 14 дней МЦ выделяют как его фолликулиновую фазу (ФФ), последующие 14 дней – как лютеиновую фазу (ЛФ).

С фазами МЦ связывают особенности функционального состояния организма женщин, в частности, сердечно-сосудистой системы. Так минимум ЧСС отмечается в начале ФФ, а максимум – в конце ЛФ [1, 2]. В менструальный период (с 1 по 5 день МЦ) по сравнению с предменструальным и постменструальными периодами цикла минутный объем сердца меньше [3], а МОК и сердечный индекс (СИ) больше. При этом возрастание МОК, СИ происходит, в основном, за счет увеличения силы сердечных сокращений [2]. В ЛФ цикла наибольший (МОК), а минутный объем сердца (МОС) и СИ незначительно снижаются по сравнению ФФ [3]. Кровоток в плече не зависит от фазы МЦ [4]. В ФФ усиливается влияние парасимпатической нервной системы, на что указывает урежение дыхания, ЧСС, расширение сосудов [1], тогда как в ЛФ преобладает тонус симпатической нервной системы [2, 5, 6].

Из приведенных данных можно заключить, что информация о состоянии кровообращения на протяжении МЦ довольно противоречива: в одних работах отмечают достоверные изменения [1, 3, 5, 6], в других таковых не находят [7, 8].

Выбор метода исследования обусловлен абсолютной безвредностью, необходимостью многократных повторных исследований, большим практическим интересом, возможностью записи сразу с четырех участков тела [9, 10]. Целью работы явилось уточнение закономерностей изменения показателей гемодинамики, как центральной, так и периферической в течение МЦ на основании анализа реографических данных.

Методика исследования. Обследовали 25 женщин добровольцев (22 – 28 лет) продолжительностью МЦ (28 ± 3) дня. Показатели кровообращения определяли у всех обследуемых на 4, 11, 18, 26 дни менструального цикла методом тетраполярной реографии в следующих регионах: голова, грудь, предплечье бедро, с помощью реографа РГ4-02. Рассчитывали (ЧСС, уд/мин), определяли продолжительности сердечного цикла (T , мин), анакроты – время притока крови (T_1 , мин) и катакроты – время оттока крови (T_2 , мин) по методикам [9 – 11]. Рассчитывали ударный (УО, л) и минутный объемы крови (МОК, л), реографический индекс (РИ), амплитудно-частотный показатель (АЧП), и во всех исследованных регионах – объемную (ОСК, л/мин) и максимальную скорости кровотока (МСК, л/мин) по методикам [9 – 11]. Индивидуальную продолжительность МЦ и значения показателей гемодинамики учитывали, нормируя экспериментальные данные, согласно [12]. Среднее и его доверительный интервал ($P = 0,95$) находили с помощью пакета программ "STATISTICA".

Результаты исследования и их обсуждение. Значения показателей центральной и периферической гемодинамики на протяжении МЦ находятся в пределах физиологических величин [2, 6]. При этом одни из них не изменяются, другие – имеют тенденцию к изменению, третьи – изменяются значимо. В течение МЦ не изменяются интегральные показатели сердечно-сосудистой системы: ЧСС, УО, МОК, РИ, АЧП (таблица). Их значения хорошо коррелируют между собой ($r > 0,87$, $p < 0,05$) и определяются состоянием сократительной функции миокарда, скоростью кровенаполнения крупных ветвей артерий, тонусом и эластичностью крупных и средних артерий, уровнем артериального давления АД и массой циркулирующей крови [13]. В то же время значимо изменяется на всех участках ОСК во второй половине МЦ, особенно ОСК δ с $(80 \pm 26) \cdot 10^{-3}$ л/сек на 4 день до $(130 \pm 30) \cdot 10^{-3}$ л/сек на 25 день.

Таблица
Некоторые стабильные показатели гемодинамики в течение МЦ

Показатель	День МЦ			
	4	11	16	25
ЧСС, уд/мин	70 ± 1,8	74 ± 2,0	71 ± 1,5	74 ± 1,8
УО*10 ⁻³ , л	70 ± 22	80 ± 29	75 ± 25	90 ± 31
МОК*10 ⁻³ , л	5 ± 1,5	6 ± 1,8	6 ± 1,6	7 ± 2,0
РИ	13 ± 3,3	14 ± 2,9	14 ± 3,1	15 ± 3,0
АЧП	15 ± 2,3	16 ± 2,4	15 ± 2,5	18 ± 2,8

Хорошая корреляция наблюдается между ОСК с одной стороны, и РИ ($r > 0,77, p < 0,5$) или ЧСС ($r > 0,97, p < 0,05$) с другой. В то же время отмечен низкий уровень корреляции между продолжительностью реоцикла Т, с одной стороны, и ЧСС, УО, РИ, с другой, ($r < 0,3, p > 0,5$). Высокая корреляция найдена между значениями ОСК мозгового кровотока, ОСК на предплечье и ОСК бедре ($r > 0,93, p < 0,5$) и между соответствующими показателями МСК ($r > 0,97, p < 0,5$). При этом МСК не связана с величиной ЧСС и УО в такой степени как ОСК, о чем свидетельствует малозначимая корреляция между максимальной скоростью кровотока и УО ($p > 0,5$), т.к. ОСК, определяется расчетным методом, а МСК зависит от скорости изменения кровотока в исследуемой области и регистрируется непосредственно. С учетом результатов корреляционного анализа далее обсуждаются значимо изменяющиеся в течение МЦ показатели, на примере церебральной ОСК (ОСК_ц), T₂, МСК в бедре (МСК_б). На рис. 1 приведены показатели гемодинамики в зависимости от дня МЦ: T₂ (1), МСК_б (2), ОСК_ц (3). Показатель МСК_б интересен также и потому, что кровотоки в этой области, по данным [12], хорошо коррелирует с кровотоком в органах малого таза. Как видно из рисунка, T₂ увеличивается ($p < 0,05$) в первой половине МЦ, затем снижается ко второй половине ЛФ и на этом уровне остается до конца МЦ. МСК_б уменьшается от начала МЦ примерно до его середины, после чего наблюдается увеличение показателя с максимумом ($p < 0,05$) в первой половине ЛФ и последующее снижение во второй ее половине (рис. 1). На рисунке знаком (*) отмечены точки, отличающиеся от наибольших значений ($p < 0,05$). Вертикальными линиями у точек показаны границы доверительных интервалов ($P = 0,95$). Значения ОСК_ц увеличиваются ($p < 0,05$) от начала ФФ до ЛФ, после чего уменьшаются ($p < 0,05$) к концу цикла (рис. 1).

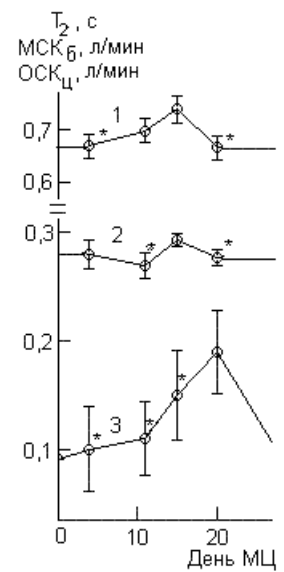


Рис. 1

Полученные результаты, в частности, указывают на изменение капиллярного кровотока в динамике МЦ [15]. Однако более существенно, что максимальные скорости кровотока (ОСК и МСК) наблюдаются в середине МЦ, когда происходит рост фолликула. Очевидно, наблюдаемое увеличение скорости кровотока, как и времени оттока, не случайно и происходит по необходимости обеспечения, созревающей яйцеклетки веществом и энергией.

Дальнейшие изменения гемодинамики (уменьшение ОСК и МСК при увеличении времени оттока крови) в МЦ, вероятно, возникают после выхода яйцеклетки, в связи с формированием желтого тела и последующим ростом его секреторной активности, а при отсутствии оплодотворения, его регрессом и подготовкой к следующему циклу.

Существенно, что наблюдаемые изменения гемодинамики происходят как на периферии, непосредственно примыкающей к репродуктивным органам, так и в центральных зонах, охватывая весь организм. Это еще раз подтверждает, что регуляция кровообращения в динамике МЦ включает центральные и периферические звенья, работающие по принципу обратной связи, постоянной оценки конечного результата направленного на воспроизводство [1, 14].

Заключение. Таким образом, значения показателей центральной и периферической гемодинамики на протяжении менструального цикла изменяются в соответствии с потребностями организма, направленными на обеспечение роста и созревания фолликула, выход из него яйцеклетки. В начале фолликулиновой фазы происходит замедление оттока крови, обеспечивающее накопление метаболитов, необходимых для регенерации эндометрия и дифференцировки фолликулярного аппарата. В конце фолликулиновой фазы, непосредственно перед овуляцией, растет объемная и максимальная скорости кровотока и продолжает увеличиваться время оттока, что обеспечивает транкапиллярный обмен и активный транспорт метаболитов. В результате достигается адекватное происходящим физиологическим процессам

снабжение клеток и тканей энергией, кислородом, и пластическими материалами, необходимыми для созревания яйцеклетки. В лютеиновую фазу продолжают расти объемная и максимальная скорости кровотока при дальнейшем увеличении времени оттока, что, вероятно, необходимо для, выхода яйцеклетки из фолликула и образования желтого тела. В конце лютеиновой фазы время оттока сокращается, снижается максимальная скорость, но продолжает расти объемная скорость кровотока, что делает возможным завершение текущего менструального цикла и подготавливает организм к следующему.

РЕЗЮМЕ

У 25 здорових жінок (вік 22 – 28 років) в менструальному циклі дослідили центральну та периферичну гемодинаміку. Величини об'ємної та максимальної швидкостей кровообігу корелюють між собою ($r = 0,93$, $p < 0,05$) і їх значення збільшуються в період овуляції приблизно на 10 %, також як і час відтоку крові. Змінення показників гемодинаміки в менструальному циклі жінок обумовлені закономірностями нейрогуморальної регуляції та направлені на забезпечення речовиною та енергією, які необхідні для росту та дозрівання яйцеклітини.

Ключові слова: гемодинаміка, менструальний цикл.

SUMMARY

At 25 healthy women (age of 22 – 28 years) in the menstrual cycle investigated central and peripheral hemodynamic. Value of volume and maximum speeds of blood-groove are correlate among themselves ($r = 0,93$, $p < 0,05$), and their values increase during the period of ovulation approximately by 10 %, also as well as time of outflow blood. The changes indicators of hemodynamic in menstrual cycle of women are caused by laws neuro-humoral's regulation, and directed on maintenance with substance and the energy, with necessary for growth and maturing ovule.

Keywords: hemodynamic, menstrual cycle.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бондарь П. Н. Эндокринология / П. Н. Бондарь. – Винница: Новая книга, 2008. – 585 с.
2. Бражникова В. Н. Фазовые изменения основных показателей работы сердца в динамике менструального цикла у здоровых девушек / В. Н. Бражникова // Некоторые особенности течения беременности и материнскоплодовых взаимоотношений в условиях нормы и патологии: Сб. научн. трудов. – Фрунзе, 1978. – 536 с.
3. Левинсон В. Б. О состоянии сосудистого тонуса при нормальном менструальном цикле / В. Б. Левинсон // Акушерство и гинекология – 1966. – № 8. – С. 70-72.
4. Sopolak V. M. Regulation of the ovarian-menstrual cycle / V. M. Sopolak // Clinical reproductive medicine. – Philadelphia - N. Y.: Lippincott-Raven Publishers, 1997. – P. 61-68.
5. Assessment of variability of renal blood flow Doppler parameters during the menstrual cycle in women / J. Krejza, A. Ustymowicz, A. Szyrak et al. // Ultrasound Obstetric Gynecology. – 2005. – Vol. 25, No 1. – P. 60-69.
6. Гайтон А. Физиология кровообращения. Минутный объем сердца / А. Гайтон – М.: Медицина, 1969. – 472 с.
7. Evidence against a role for ovarian hormones in the regulation of blood flow / B. C. Cooper, C. K. Sites, P. A. Fairhurst, M. J. Toth // Fertility and Sterility. – 2006. – Vol. 86, No 2. – P. 440-447.
8. Seebauer M. Changes of respiratory sinus arrhythmia during the menstrual cycle depend on average heart rate / M. Seebauer, M. Fruhwirth, M. Moser // European of Journal. Apply Physiology. – 2002. – Vol. 87, No 4-5. – P. 309.
9. Старшов А. М. Реография для профессионалов. Методы исследования сосудистой системы / А. М. Старшов, И. В. Смирнов. – М.: Познавательная книга, Пресс, 2003. – 80 с.
10. Смирнов И. В. Функциональная диагностика. ЭКГ. Реография. Спирография / И. В. Смирнов, А. М. Старшов. – М.: Эксмо, 2008. – 224 с.
11. Ронкин М. А. Реография в клинической практике / М. А. Ронкин, А. Б. Иванов. – М.: Медицина, 1997 – 228 с.
12. Герасимов И. Г. Индивидуальные реакции сердечно-сосудистой системы в ответ на физическое воздействие / И. Г. Герасимов, И. А. Зайцев, Т. А. Тедеева // Физиология человека. – 1997. – Т. 23, № 3. – С. 53-57.
13. Елисеевский Ю. М. Реография органов мочеполовой системы / Ю. М. Елисеевский. – М.: МЕДпресс-информ, 2004. – 248 с.
14. Биохимические показатели крови в динамике менструального цикла женщин / И. Г. Герасимов, Е. Н. Приходько, О. А. Калущкая, Б. В. Ентин // Физиология человека. – 1994. – Т. 20, № 5. – С. 165-168.
15. Assessment of variability of renal bloodflow Doppler parameters during the men strual cycle in women / J. Krejza, A. Ustymowicz, A. Szyrak et al. // Ultrasound Obstetric Gynecology. – 2004. – Vol. 25, № 1. – P. 60-69.

Поступила в редакцию 12.03.2013 г.

УДК 57.033:57.043

РЕГУЛЯЦІЯ СТРУКТУРНОГО СТАНУ БІЛКІВ ЦИТОСКЕЛЕТУ ЕРИТРОЦИТІВ ПРИ ДІЇ НА НИХ НИЗЬКОЧАСТОТНОЇ ВІБРАЦІЇ

О.І. Доценко, Н.Р. Конюхова, Я.О. Троцинська

Досліджено активність мембранолокалізованих ферментів (Na^+ , K^+ -АТФази і 5'- нуклеотидази) та вміст метаболітів (АТФ, 2,3-ДФГ і P_n) в еритроцитах, що піддавалися дії низькочастотної вібрації в інтервалі частот 8– 32 Гц, з кроком 4 Гц, амплітудою $0,5 \pm 0,04$ мм, продовж 3-х годин, в режимі виснаження по глюкозі. Виявлена загальна тенденція до зниження активності Na^+ , K^+ -АТФази та росту активності 5'- нуклеотидази, незважаючи на немонотонний характер змін. Показано, що структурно-функціональна перебудова мембрани еритроцитів при дії вібрації частотного діапазону 20– 32 Гц приводить до росту вмісту досліджуваних метаболітів в еритроцитах.

Ключові слова: низькочастотна вібрація, еритроцити, Na^+ , K^+ -АТФаза, 5'- нуклеотидаза, АТФ, 2,3-ДФГ, взаємодія білок – цитоскелет.

Вступ. Працями школи Насонова було відкрито і досліджено фундаментальне явище – неспецифічна реакція клітини на зовнішні впливи [1], а праці Лінга та його послідовників [2, 3] дозволяють зрозуміти механізми цього явища. Суть його полягає в тому, що різноманітні фізичні і хімічні чинники викликають у клітині один і той же комплекс структурних змін: збільшення каламутності та макроскопічної в'язкості цитоплазми, збільшення адсорбції гідрофобних речовин цитоплазматичними білками. Було показано, що в ці процеси залучаються проміжні стани різних білків, що не мають жорсткої нативної структури і здатні адаптуватися до різних умов в клітині.

В роботах [4, 5] показано, що важливу роль у механізмах захисту клітин до дії зовнішніх чинників відіграє модифікація структурно-функціональних властивостей плазматичної мембрани, яка першою реагує на зміну фізико-хімічних параметрів середовища. Внаслідок перебудов може бути змінена міцність взаємодій білок-білок, що охоплюють як горизонтальні контакти між білками в межах цитоскелету, так і вертикальні контакти цитоскелету з інтегральними білками мембрани. Разом з тим, детальні клітинні механізми участі компонентів мембрани і білків цитоскелету в процесах, що регулюють структурно-функціональний стан цілісної клітини, багато в чому залишаються не з'ясованими.

До теперішнього часу мало досліджені проблеми фізико-хімічних основ дії низькочастотної вібрації на клітині. З літературних даних відомо про негативний вплив низькочастотної вібрації на організм і біологічні системи. Однак дія вібрації на ізольовані клітини і тканини дотепер ще не є предметом спеціальних досліджень, хоча зрозуміло, що механізм біологічної дії вібрації, як і інших видів механічних коливань, не може бути розгаданий до того часу, доки не буде вивчено її дію на клітині [6]. Залишаються нез'ясованими механізми, за допомогою яких клітини здатні зберігати свої біологічні властивості при дії цього фактора.

Виходячи зі сказаного вище, вібрація, як і будь-який інший фізичний фактор, повинна викликати комплекс структурних змін в мембрані і цитоплазмі, який би сприяв адаптації клітини до зовнішнього впливу. Для дослідження цих питань найбільш зручним об'єктом є еритроцити, стан плазматичної мембрани яких найбільш об'єктивно відображає стан усього організму [7]. В якості маркерів, які відбивали б структурні перебудови мембрани і цитоскелету були обрані інтегральні ферменти Na^+ , K^+ -АТФаза і 5'-нуклеотидаза (АМР-аза). Ці ферменти ліпідзалежні, а їхня активність в значній мірі визначається мікрооточенням і залежить від фазового стану ліпідного матриксу. Так як зміна активності названих вище ферментів приводить до зміни вмісту основних метаболітів, зокрема АТФ, що є маркером функціональної активності і цілісності клітини, вивчали також зміну внутрішньоклітинного рівня АТФ, 2,3-ДФГ і неорганічного фосфату (P_n) в процесі дії вібрації.

Таким чином, метою дослідження було вивчення особливостей змінення метаболізму еритроцитів у процесі дії на них низькочастотної вібрації, а також виявленні адаптаційних перебудов білків цитоскелету і ліпідного бішару.

Матеріали і методи дослідження. В експериментах використовували свіжу кров донорів, приблизно однієї вікової групи і однієї статі. Еритроцити осаджували центрифугуванням. Далі еритроцити відмивали від плазми Трис-НСІ (0,05 М, рН 7,4), що містив 0,15 моль NaCl (буферний розчин 1). Після центрифугування видаляли надосадову рідину і білий опалесцюючий шар лейкоцитів, розташований над осадом еритроцитів. Отримана паста еритроцитів використовувалася для приготування суспензії, зі вмістом гемоглобіну $0,5 \pm 0,07$ мг/мл. В якості середовища інкубування використовували буферний розчин 1. Суспензію еритроцитів піддавали дії низькочастотної вібрації в інтервалі частот 8 – 32 Гц, з кроком 4 Гц та амплітудою $0,5 \pm 0,04$ мм протягом 3-х годин. Вібрацію здійснювали за допомогою вібростенду, який складався з генератора низькочастотних сигналів синусоїдальної форми, підсилювача і вібратора, що

здійснює коливання у вертикальній площині з заданою частотою і амплітудою. Експериментальну кювету, заповнену суспензією еритроцитів, вертикально і щільно закріплювали на рухомій частині вібратора (у цьому випадку механічні коливання передаються в експериментальну кювету з незначними втратами потужності).

Вміст основних метаболітів (АТФ, 2,3-ДФГ, P_n) і активність ферментів (Na^+, K^+ -АТФази та 5'-нуклеотидази) досліджували в гемолізатах еритроцитів до початку експерименту, а потім кожні 20 хвилин в процесі вібраційного впливу. Окремо вивчали вплив середовища інкубування на активність ферментів. Для визначення активності мембранозв'язаної 5'-нуклеотидази використовували тині еритроцитів.

В експериментах досліджували вміст метаболітів та активностей ферментів при інкубуванні еритроцитів без глюкози (вимкнено виробництво АТФ в процесі гліколізу). В цьому випадку кінетика аденилатів визначається реакціями гідролізу АТФ [7].

Для дослідження активності Na^+, K^+ -АТФази (загальної активності 5'-нуклеотидази) гемолізат вносили в середовище, що містив АТФ (АМФ). Склад середовища для визначення 5'-нуклеотидази: 1,0 мМ $MgCl_2$, 4 мМ АМФ, 50 мМ трис-НСІ, рН 7,0. Склад середовища для визначення Na^+, K^+ -АТФази: 5 мМ $MgCl_2$, 120 мМ $NaCl$, 20 мМ KCl , 5 мМ АТФ, 50 мМ трис-НСІ, рН 7,0 [8].

Для визначення кількості P_n , що утворився при неферментативному гідролізі, в середовище відповідного складу замість гемолізату вносили буферний розчин 1. Проби піддавали термостатичній обробці протягом 30 хвилин (1 години) при 37°C. Реакцію зупиняли додаванням холодної трихлороцтової кислоти. Осад білка відокремлювали центрифугуванням. У супернатанті визначали кількість АТФ (АМФ), що утворився при ферментативному та неферментативному гідролізі.

Для визначення вмісту P_n використовували кольорову реакцію з амонієм молібденовокислим. Оптичну щільність розчинів реєстрували спектрофотометрично при довжині хвилі 590 нм в кюветах товщиною 1 см. Вміст P_n визначали за допомогою калібрувального графіку, побудованого для стандартного розчину KH_2PO_4 точної концентрації. Активність маркерних ферментів виражали в нМ P_n , що утворюється протягом 1 хвилини, віднесеного до кількості білка (Hb) в пробі (нМ /хв·г Hb).

Вміст АТФ, 2,3-ДФГ і P_n знаходили використовуючи метод одночасного визначення, запропонованого Віноградовою із співавторами [9]. Вміст АТФ, 2,3-ДФГ і P_n виражали в мкмоль/мг Hb в пробі. Вміст гемоглобіну в еритроцитарній пасті визначали гемоглобінціанідним уніфікованим методом за стандартними наборами.

При побудові залежностей, наведених у роботі, використовували усереднені дані. Статистичний аналіз отриманих результатів проводили в програмі Statistica.

Результати експерименту та їх обговорення. При інкубуванні еритроцитів в середовищі, що не містить глюкози, спостерігалася тенденція виснаження клітини по АТФ, що привело до перебудови метаболічних процесів в еритроцитах. Так, через 60 хвилин інкубування спостерігали підвищення концентрації АТФ за рахунок ресинтезу і подальше зниження вмісту метаболіту (рис. 1, залежність 1). Зниження концентрації АТФ у клітині через 3 години інкубування склало 28 – 30% від початкового рівня. На момент початку виснаження еритроцитів за глюкозою та АТФ вказувало наростання концентрації неорганічного фосфату (рис. 1, залежність 2) в 3–3,2 рази відносно початкового рівня і зниження концентрації 2,3-ДФГ (рис. 1, залежність 3). Зниження концентрації 2,3-ДФГ відносно початкового рівня через 120 хвилин склало більш ніж $30,0 \pm 13,8$ %. Наприкінці 3-ї години спостерігали ресинтез 2,3-ДФГ за рахунок додаткової витрати АТФ.

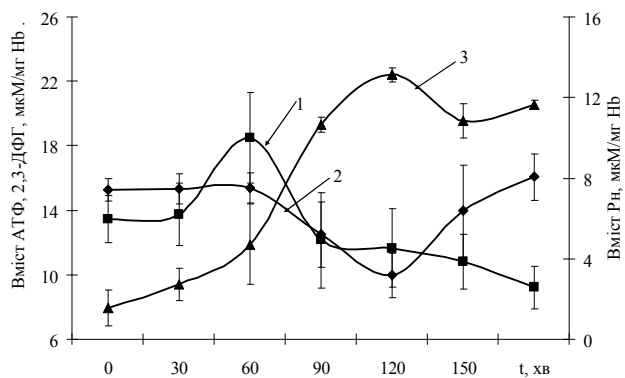


Рис. 1

Активність Na^+, K^+ -АТФази змінювалася немонотонно, і її активність корелювала зі вмістом внутрішньоклітинного АТФ. Через 100 хвилин спостерігався підйом активності ферменту відносно початкового рівня, що йшов вслід за фазою ресинтезу АТФ. Збільшення часу інкубування призвело до зниження активності ферменту на 35 – 40 % відносно початкового рівня (рис. 2, а).

Активність 5'-нуклеотидази знижувалася з часом інкубування. Через 100 хвилин експерименту активність ферменту зменшилася на $68,52 \pm 14,91$ %. Через 3 години інкубування еритроцитів у буферному середовищі активність ферменту дещо збільшилась, але залишилась на $51,8 \pm 10,5$ % нижче початкового рівня (рис. 2, б). Таким чином, при виснаженні клітини по АТФ кінетика аденилатів в контрольній серії експериментів визначалась реакціями гідролізу АТФ, контроль за якими здійснює Na^+, K^+ -АТФаза.

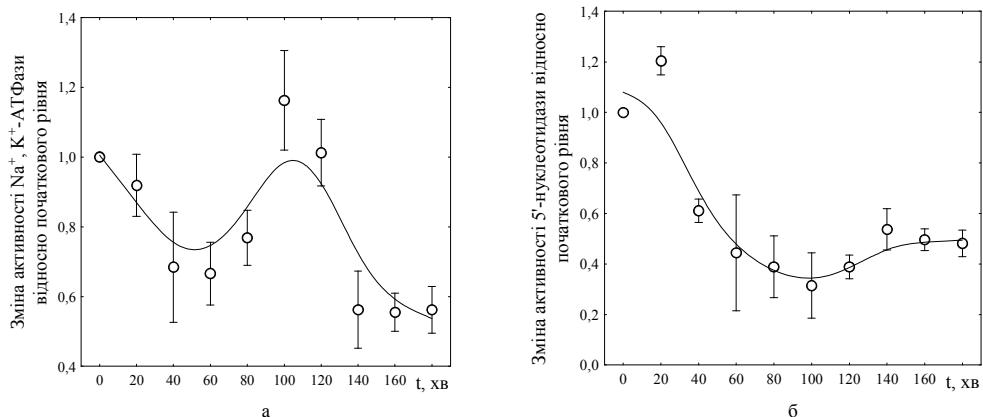


Рис. 2

АТФ, 2,3-ДФГ и Р_n є своєрідними маркерами дії зовнішніх чинників на клітину. На рис. 3, 4 показані зміни цих метаболітів в еритроцитах, що піддавалися вібраційному впливу. З отриманих експериментальних даних видно, що зміна концентрації АТФ істотно залежала від частоти вібрації. Так, вібрація з частотами 8 – 16 Гц приводила до поступового виснаження клітини по АТФ (рис. 3, а), як і в експериментах без вібрації. Однак ми не спостерігали наявність фази ресинтезу АТФ. Зниження концентрації АТФ в еритроцитах після 3-х годин вібраційного впливу з частотою 8 Гц склало 65,0±15,8% (залежність 1), 12 Гц – 20,0±8,9% (залежність 2), а 16 Гц – 12,0±3,7% (залежність 3) відносно початкового рівня.

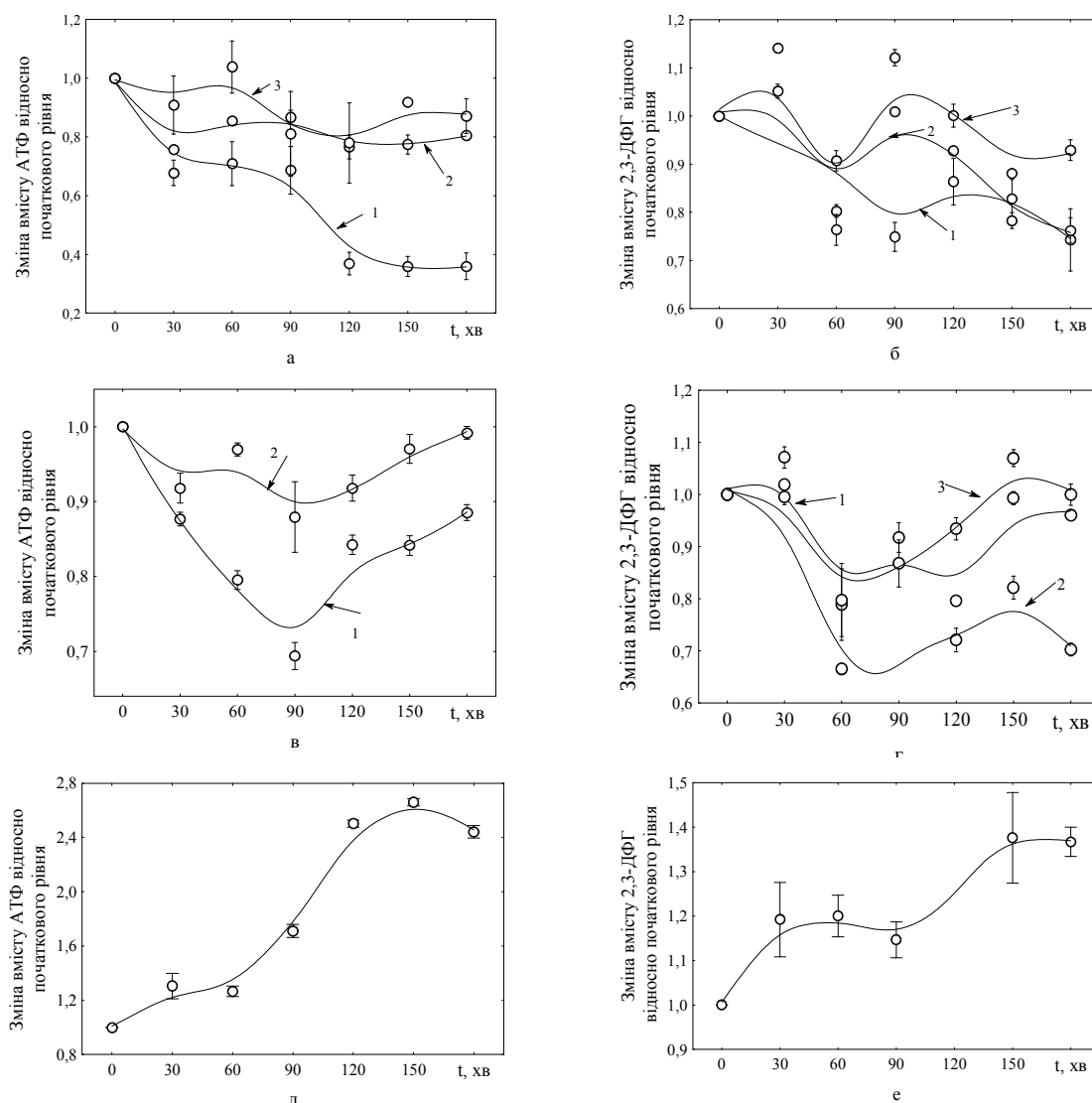


Рис. 3

При впливі вібрації інтервалу частот 20 – 28 Гц (рис. 3, в) спостерігали двофазний характер зміни вмісту АТФ. Так, вібрація з частотою 20 Гц приводила до зниження вмісту АТФ на 75,0±19,8 % через 90 хвилин експерименту, після чого концентрація АТФ збільшувалася і досягла рівня на 13,1±3,2 % нижче за початковий (залежність 1). При вібрації з частотою 24 Гц зменшення вмісту АТФ через 90 хвилин склало 10,0±2,4 % від початкового рівня. В кінці експерименту вміст АТФ зростав і досягав контрольного рівня (рис. 3, в, залежність 2). Вплив вібрації з частотою 32 Гц приводив до зростання концентрації АТФ в 2 – 2,5 рази відносно початкового рівня (рис. 3, д).

В усіх випадках вміст 2,3-ДФГ корелював з концентрацією АТФ у клітині. Так, при вібрації діапазону частот 8 – 16 Гц, незважаючи на немонотонний характер змінення, спостерігалась загальна тенденція до зниження концентрації 2,3-ДФГ (рис. 3, б). Зниження концентрації 2,3-ДФГ в еритроцитах після 3-х годин вібраційного впливу з частотою 8 Гц склало 25,7±14,8 % (залежність 1), 12 Гц – 22,9±10,9% (залежність 2), 16 Гц – 10,0±1,3% (залежність 3) від початкового рівня. При вібраційному впливі діапазону частот 20 – 28 Гц спостерігався двофазний характер змінення 2,3-ДФГ, як і у випадку АТФ. (рис. 3, г). Через 60-90 хвилин вібраційного впливу вміст концентрації 2,3-ДФГ знижувався на 20 – 35 %. Подальший вплив вібрацією з частотами 20 та 28 Гц приводив до зростання концентрації цього метаболіту у клітині до рівня контролю (залежності 1 та 3 відповідно). Після 3-х часового вібраційного впливу з частотою 24 Гц рівень 2,3-ДФГ лишався нижче початкового рівня на 22,2±10,2% (рис. 3, б, залежність 2). При дії вібрації з частотою 32 Гц спостерігали монотонне зростання концентрації 2,3-ДФГ, яке наприкінці експерименту склало 60,0±11,7 % (рис. 3, е).

В еритроцитах, що піддавалися вібрації з частотою 8 Гц, протягом 2-годинного впливу концентрація P_n підтримувалася на рівні контролю. Подальший вплив приводив до зростання P_n на 20% відносно початкового рівня (рис. 4). На частотах 12, 16 і 20 Гц вміст P_n підтримувався на рівні контролю протягом перших 30 хвилин експерименту, після чого реєстрували зростання концентрації цього метаболіту. Вміст P_n наприкінці експерименту збільшувався в 1,8 – 2 рази. При дії вібрації з частотами 24, 28 і 32 Гц концентрація P_n в клітинах зростала з перших хвилин експерименту і досягала максимальних значень, які в 2 – 2,5 рази перевищували початковий рівень (рис. 4).

Зміна активності Na^+, K^+ -АТФази в експериментах з вібрацією показана на рис. 5, а.

При впливі вібрації з частотами 8 – 16 Гц, як і в контрольній серії експериментів, зміна АТФазної активності узгоджувалася зі змінами вмісту субстрату в клітині. Виснаження еритроцитів по АТФ корелювало зі зниженням активності ферменту. При дії вібрації з частотою 8 Гц продовж 40 хвилин експерименту активність ферменту підвищувалася в 2,3 рази, але подальша вібрація приводила до поступового падіння активності на 49,9±15,1 % від початкового рівня. Вібрація з частотою 12 Гц викликала зростання активності Na^+, K^+ -АТФази в 1,8 рази на початку експерименту, але потім активність ферменту знижувалася і утримувалася на рівні контролю. При вібрації с частотою 16 Гц спостерігали немонотонний характер змінення активності Na^+, K^+ -АТФази. Через 80 хвилин експерименту фіксували зниження активності ферменту відносно контрольного рівня, але подальша вібрація приводила до росту активності Na^+, K^+ -АТФази. В кінці 3-ої години експерименту також спостерігали падіння активності ферменту на 20,0±12,7 %. Таким чином, робота Na^+, K^+ -АТФази в досліджуваному інтервалі частот може приводити до вичерпання АТФ у клітині.

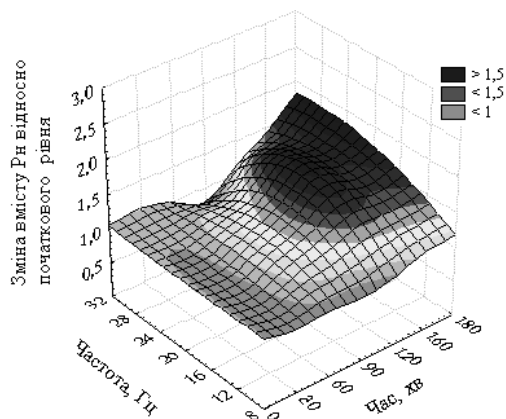


Рис. 4

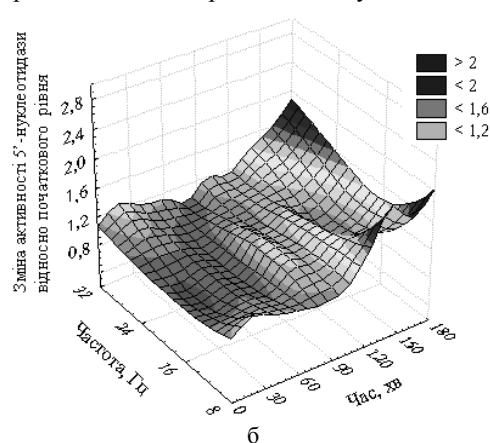
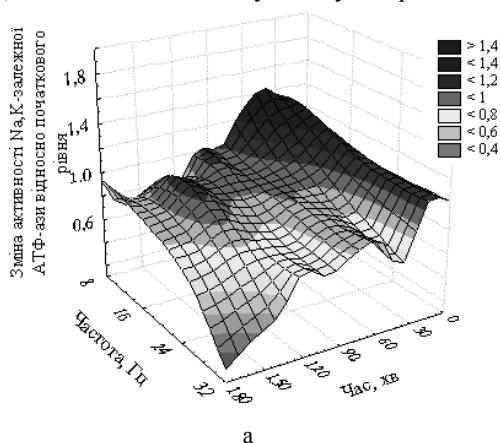


Рис. 5

При вібрації з частотами 20 – 28 Гц падіння активності ферменту (рис. 5, а) відбувалося на фоні зростання вмісту внутрішньоклітинного АТФ (рис. 3, в). Так, при дії вібрації з частотою 20 Гц активність ферменту зменшувалася на $21,0 \pm 13,5$ % від початкового рівня в кінці 3-ої години експерименту, 28 Гц – на $33,0 \pm 14,5$ %. Вплив вібрації з частотою 24 Гц приводив до зниження активності Na^+, K^+ -АТФази на $62,1 \pm 15,1$ % через 80 хвилин експерименту і далі активність ферменту не змінювалася. Найбільшому падінню активності Na^+, K^+ -АТФази сприяла вібрація з частотою 32 Гц. Інактивація ферменту склала $87,5 \pm 5,9$ % в кінці 3-ої години експерименту. В експериментах з вібрацією характер зміни активності 5'-нуклеотидази носив кардинально протилежний характер, у порівнянні з експериментом без дії вібрації (рис. 5, б). На всьому досліджуваному частотному діапазоні спостерігали зростання активності ферменту відносно початкового рівня до кінця експерименту. Вібрація діапазону частот 8 – 12 Гц приводила до зростання активності ферменту в 1,4 – 2,7 рази, але суттєве підвищення активності фіксували тільки продовж третього часу експерименту. При вібраційному впливі з частотою 20 Гц активність 5'-нуклеотидази поступово зростала протягом експерименту. При дії вібрації з частотами 24 та 28 Гц зростання активності 5'-нуклеотидази спостерігалось також тільки через 100 хвилин вібраційного впливу, і в кінці експерименту вона перевищувала початковий рівень в 1,9 – 2 рази. При вібраційному впливі з частотою 30 Гц активність ферменту поступово зростала протягом часу, і в кінці експерименту вона перевищувала контрольний рівень в 2,5 рази (рис. 5, б).

Відомо, що 5'-нуклеотидаза в еритроцитах представлена цитоплазматичною і мембранозв'язаною фракціями [10]. Остання закорена на сфінголіпідах і ця взаємодія суттєво впливає на активність ферменту. Ми припустили, що структурна перебудова цитоскелету і ліпідного бішару, яка можливо відбувається при вібраційному впливі може порушувати зв'язування ферменту з ліпідним бішаром, наслідком чого може стати зниження активності мембранозв'язаної 5'-нуклеотидази. Активність же цитоплазматичної 5'-нуклеотидази в клітині може зростати, внаслідок підвищення її вмісту. Для підтвердження цього припущення ми проаналізували зміну активностей ферменту в тінях еритроцитів і в цитоплазмі (рис. 6).

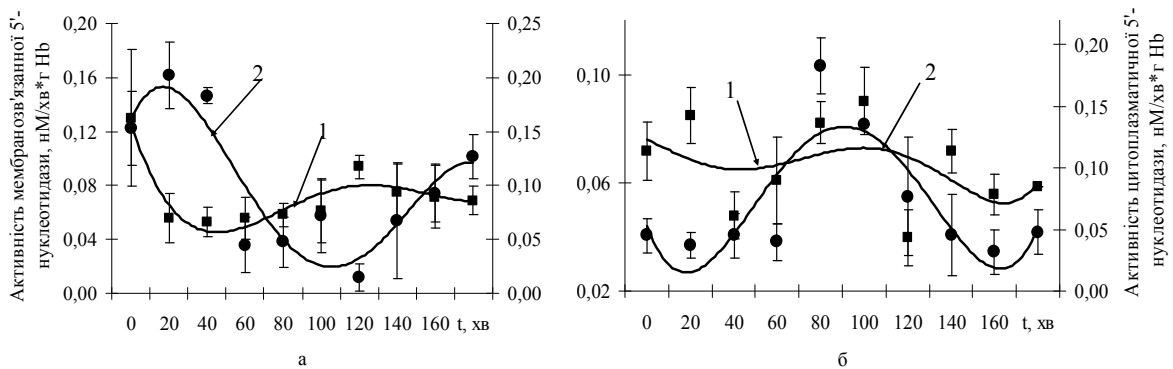


Рис. 6

Так, в експериментах без дії вібрації активність мембранозв'язаної форми ферменту зменшувалася через 40 хвилин на $59,2 \pm 8,2$ % відносно початкового рівня і утримувалася на цьому рівні до кінця експерименту (рис. 6, а, залежність 1). Активність цитоплазматичної форми 5'-нуклеотидази у цьому випадку також знижувалася на $69,3 \pm 15,2$ % відносно початкового рівня в часовому інтервалі 80-140 хвилин, але в кінці експерименту спостерігалось поступове збільшення активності цитоплазматичної форми ферменту, яка залишилася на рівні нижче за вихідний (рис. 6, а, залежність 2). При дії вібрації з частотою 16 Гц коливання активності мембранозв'язаної форми ферменту були невеликими. Так, її активність збільшувалася в 1,2 рази відносно початкового рівня через 100 хвилин експерименту і потім зменшувалася в кінці 3-ої години інкубування на $18,0 \pm 4,3$ % (рис. 6, б, залежність 1). Активність цитоплазматичної форми ферменту збільшувалася в 3,7 рази через 80-100 хвилин експерименту, після чого спостерігалось падіння активності ферменту до початкового рівня (рис. 6, б, залежність 2).

Вібрація з частотою 24 Гц приводила до зменшення активності мембранозв'язаного ферменту відносно початкового рівня (рис. 7, залежність 1), тоді як активність цитоплазматичної 5'-нуклеотидази – зростала (рис. 7, залежність 2). Після 3-х годинного вібраційного впливу падіння активності мембранозв'язаної форми 5'-нуклеотидази склало $68,76,0 \pm 13,5$ %, тоді як цитоплазматична форма 5'-нуклеотидази підвищила активність на $34,25 \pm 12,81$ %.

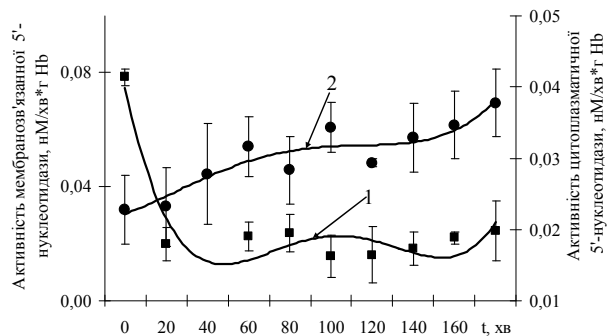


Рис. 7

Як відомо [4], при сприйнятті різних зовнішніх сигналів плазматичною мембраною клітини відбувається включення трьох основних систем регуляції: іонтранспортуючих систем, системи метаболізму фосфатиділінозитів, аденілатциклазної системи, що змінюють вміст вторинних месенджерів у клітині. Прямо або побічно активовані зовнішнім сигналом регуляторні системи впливають на стан білків цитоскелету. Відомо також, що клітинні мембрани є носіями електричного заряду. Багата білками клітинна поверхня еритроциту несе на собі "негативний" заряд і має помірну гідратацію на полярних ділянках. Зниження заряду або полярності мембрани змінює гідрофобність і збільшує проникність мембрани. Зростання негативного заряду або дегідратація чинить протилежну дію [5]. Разом з природними денатуруючими чинниками, такими як знижене рН, виникнення теплових, сольових стресів, негативно заряджена мембранна поверхня може служити помірно денатуруючим агентом в клітині, завдяки посиленню електростатичних взаємодій на межі розділу водної і неполярної фаз [11]. В результаті цього мембрана переходить у стан відмінний від нативного, який дозволяє клітині функціонувати в іншому фізіологічному режимі. Оскільки при цьому змінюється робота іонтранспортуючих систем, має місце включення вторинних месенджерів (особливо кальцій – опосередкованого механізму регуляції), спрямованих на перебудову структурно-функціонального стану клітини в цілому.

Раніше було показано [12], що низькочастотна вібрація розчинів ферментів приводить до денатураційних змін в області їх активного центру, наслідком чого є утворення різних олігомерних інтермедіатів, серед яких є стабілізовані частково денатуровані, так і дисоційовані форми ферменту. Ці перебудови стану ферментів приводили до зниження їхньої активності. Ми вважаємо, що в умовах дії низькочастотної вібрації на клітини можуть мати місце подібні процеси: зміна заряду мембранної поверхні може викликати часткову денатурацію мембранозв'язаних ферментів або дисоціацію на субодиниці, в результаті чого може знижуватися їхня активність.

Відомо, що еритроцити не можуть синтезувати АТФ *de novo*. Вони мають систему ресинтезу, за допомогою якої нуклеозиди і нуклеотиди можуть бути перероблені в АТФ. АТФ, що утворюється в процесі анаеробного гліколізу, витрачається повністю на метаболічні потреби клітини. В експериментах з використанням режиму виснаження по глюкозі, блокується шлях Ембдена-Мейергофа, і при нормальному функціонуванні АТФ-споживаючих систем клітина буде виснажуватися по АТФ. Адаптаційні можливості еритроцитів в умовах, що змінилися, визначатимуться балансом між АТФ – споживаючими і АТФ – ресинтезуючими системами. Стабілізація концентрації АТФ потрібна для стійкості метаболічної системи клітини. В умовах виснаження по глюкозі витрата аденилатів визначається гідролізом АТФ, що здійснюється Na^+, K^+ -АТФ-азою. Процеси ресинтезу будуть залежати від активності 5'-нуклеотидази.

В ряді робіт [13, 14] показано, що навіть незначні коливання вмісту АТФ можуть значно впливати на активність АТФаз. Крім того, при гідролізі АТФ фермент здатний об'єднуватися в олігомерні ансамблі, які складаються з декількох протомерів. Таким чином, АТФ може виконувати в клітині додаткову регулюючу роль, яка полягає в об'єднанні окремих протомерів Na^+, K^+ -АТФ-ази в олігомерний ансамбль [13]. При інкубуванні еритроцитів в середовищі без глюкози, клітина може отримати додаткову кількість АТФ тільки за рахунок процесів ресинтезу. Проте активність 5'- нуклеотидази, і цитоплазматичної і мембранозв'язаної фракції знижується. Оскільки швидкість роботи АТФази залежить від концентрації АТФ, то при її падінні нижче певного рівня АТФ-залежні процеси в клітині не можуть йти з необхідними для підтримки гомеостазу швидкостями. В наслідок цього активність Na^+, K^+ -АТФази також знижується.

При дії вібрації з частотами 8-16 Гц еритроцити, поміщені в середовище, що не містить глюкози, також виснажуються по АТФ. Проте міра виснаження нижча, ніж в експериментах без вібрації за рахунок зростання активності 5'- нуклеотидази. При дії вібрації в інтервалі частот 20 – 32 Гц відбувається інактивація Na^+, K^+ -АТФази і зростання активності 5'- нуклеотидази. Нами було показано, що в цьому частотному інтервалі збільшується активність цитоплазматичної фракції 5'- нуклеотидази і знижується активність мембранозв'язаного ферменту. При цьому концентрація внутрішньоклітинного АТФ зростає.

Ми вважаємо, що отримані дані побічно підтверджують припущення про денатураційні зміни мембранозв'язаних ферментів, що посилюються під впливом вібрації. Дезорієнтація ліпідного мікрооточення в значному ступеню може впливати на порушення конфірмаційної стабільності Na^+, K^+ -АТФази та зниження активності ферменту. Ступінь активності 5'- нуклеотидази також визначається станом мембрани, характером зв'язку зі структурними елементами, зокрема фосфоліпідами. Крім того, 5'- нуклеотидаза – головна складова частина регуляторної системи метаболізму аденозину в клітині. Так як 5'- нуклеотидаза каталізує реакцію АМФ \rightarrow Аденозин, накопичення аденозину в клітині повертає потік в пентозофосфатний шлях і частково в шлях Ембдена-Мейергофа, що сприяє можливості синтезувати АТФ та 2,3 ДФГ [15, 16]. Зниження активності Na^+, K^+ -АТФази та підвищення 5'-нуклеотидази вказують на компенсаторні-приспосувальні процеси, що виникають в еритроциті при дії екстремальних факторів в умовах відсутності надходження глюкози та виснаження клітини по АТФ.

Таким чином, зміна активностей мембранозв'язаних ферментів при дії екстремальних факторів відбувається внаслідок структурно-функціональної перебудови мембрани еритроцитів.

Висновки. Інкубування еритроцитів у середовищі, що не містить глюкози, призвело до зниження вмісту АТФ в клітині на 28-30 %, зростання концентрації P_n – в 3-3,2 рази відносно початкового рівня. Активності Na , K -залежної АТФази та 5'- нуклеотидази в кінці часу інкубування зменшилися відносно початкового рівня на 38,8±9,1% та 51,8±10,5% відповідно.

Зниження концентрації АТФ в еритроцитах після 3-х годин вібраційного впливу з частотою 8 Гц склало 65,0±15,8 %, 12 Гц – 20,0±8,9 %, а 16 Гц – 12,0±3,7 % відносно початкового рівня. При впливі вібрації інтервалу частот 20 – 28 Гц спостерігали двофазний характер зміни вмісту АТФ, а при вібрації з частотою 32 Гц концентрація АТФ зростала в 2 – 2,5 рази відносно початкового рівня.

Концентрація 2,3-ДФГ еритроцитів, що піддавалися вібрації в інтервалі частот 8– 32 Гц корелювала зі змінами концентрації АТФ у клітині, а концентрація P_n перевищувала початковий рівень після 3-х годинного впливу вібрацією. При дії вібрації в частотному діапазоні 20-32 Гц відбувалося збільшення концентрації P_n в 2–2,5 раз від початкового рівня.

Зміна АТФазної активності при дії вібрації з частотами 8 – 16 Гц узгоджувалася зі зміною вмісту субстрату в клітині. Виснаження еритроцитів по АТФ корелювало зі зниженням активності ферменту. При вібрації з частотами 20 – 28 Гц падіння активності ферменту відбувалося на фоні зростання вмісту внутрішньоклітинного АТФ.

На всьому досліджуваному частотному діапазоні активність 5'-нуклеотидази зростала в 1,8-2,1 рази відносно початкового рівня. В експериментах без дії вібрації активність мембранозв'язаної та цитоплазматичної форм 5'-нуклеотидази зменшувалася на 59,2±8,2 % та 69,3±15,2 % відповідно. Встановлено, що вібраційний вплив приводив до зниження активності мембранозв'язаної форми ферменту і росту активності цитоплазматичної 5'-нуклеотидази, що вказує на структурно-функціональну перебудову мембрани еритроцитів.

РЕЗЮМЕ

Исследованы активности мембранолокализованных ферментов (Na^+ , K^+ -АТФаза и 5'- нуклеотидазы), содержание метаболитов (АТФ, 2,3-ДФГ и P_n) в эритроцитах, подвергавшихся действию низкочастотной вибрации в интервале частот 8– 32 Гц, с шагом 4 Гц, амплитудой 0,5±0,04 мм, в течение 3-х часов, в режиме истощения по глюкозе. Выявлена общая тенденция к снижению активности Na^+ , K^+ -АТФаза и росту активности 5'- нуклеотидазы, несмотря на немонотонный характер изменения. Показано, что структурно-функциональная перестройка мембраны эритроцитов при действии вибрации частотного диапазона 20 – 32 Гц приводит к росту содержания исследуемых метаболитов в эритроцитах.

Ключевые слова: низкочастотная вибрация, эритроциты, Na^+ , K^+ -АТФаза, 5'- нуклеотидаза, АТФ, 2,3-ДФГ, взаимодействия белок – цитоскелет.

SUMMARY

Activity of membrane's associated enzymes (Na^+ , K^+ -ATPase and 5'-nucleotidase) and the content of metabolites (ATP, 2,3-DPG and P_n) were investigated at low-frequency vibration action with the range of the frequencies of 8 – 32 Hz, step of 4 Hz, and with the amplitude of 0,5±0,04 mm on suspension of erythrocytes within 3 hours, in an exhaustion mode on glucose. The general tendency is decreasing activity of Na^+ , K^+ - ATPase and growth of 5'- nucleotidase activity, despite on nonmonotonic nature of changing. It was shown that erythrocytes membrane structurally functional reorganization at vibration action of the frequency range of 20 –32 Hz leads to growth of the content of studied metabolites in erythrocytes.

Keywords: low-frequency vibration, erythrocytes, Na^+ , K^+ - ATPase, 5'- nucleotidase, ATP, 2,3-DPG, interactions of proteins – cytoskeleton.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Matveev V.V. Native aggregation as a cause of origin of temporary cellular structures needed for all forms of cellular activity, signaling and transformations /V.V. Matveev // Theoretical biology and medical modeling. – 2010. – Vol 7, No 9. – P. 1 – 22.
2. Линг Г. Физическая теория живой клетки. Незамеченная революция / Г. Линг. – СПб.: Наука, 2008. – 376 с.
3. Pollack Gerald H. Cells, Gels and the Engines of Life. A New, Unifying Approach to Cell Function/ Gerald H. Pollack.– Ebner & Sons, Seattle, WA, USA, 2001. – 305 p.
4. Белоус А.М. Роль регуляторных систем, модулирующих состояние белков цитоскелета при температурно-осмотическом воздействии / А.М. Белоус // Проблемы криобиологии. – 1994.– С. 8-10.
5. Землянских Н.Г. Изменение белкового состава в мембрано-цитоскелетном комплексе эритроцитов, криоконсервированных под защитой ПЭО-1500 / Н.Г. Землянских, П.М. Зубов, Л.А. Бабийчук // Проблемы криобиологии. – 2007. – Т. 17, № 1. – С. 3-15.
6. Романов С.Н. Биологическое действие вибрации и звука. Парадоксы и проблемы XX века / С.Н. Романов. – Л.: Наука, 1991. – 190 с.
7. О роли 2,3-дифосфоглицератного шунта в регуляции энергетического метаболизма в эритроцитах человека / Б.И. Холоденко, А.В. Степанченкова, Л.И. Эрлих и др. // Серия Биологическая. – 1985. – № 2. – С. 196-205.
8. Рожковский Я.В. Активность маркерных ферментов и состояние липидного матрикса мембран эритроцитов при стрессе и его медикаментозной коррекции / Я.В. Рожковский, В.И. Кресюн // Укр. биохим. журн. – 1991. – Т. 63, № 4. – С. 74-80.

9. Виноградова И.Л. Метод одновременного определения 2,3-ДФГ и АТФ в эритроцитах / И.Л. Виноградова, С.Ю. Багренева, Г.В. Дервиз // Лаб. дело. – 1980. – № 7. – С. 424-426.
10. Данилова В.М. Каталітичні властивості 5'-нуклеотидази у складі мембранних рафтів клітин гладеньких м'язів / В.М. Данилова, О.В. Андрухова, В.С. Бабійчук // Укр. біохім. журн. – 2003. – Т. 75, № 3. – С. 71-76.
11. Басова Л.Б. Влияние модельных фосфолипидных мембран на структуру холамиоглобина: конформационные изменения при pH 6.2 / Л.Б. Басова, Е.И. Тиктопуло, В.Е. Бычкова // Мол. биол. – 2005. – Т. 39. – С. 120-128.
12. Тарадина Г.В. Олигомерные интермедиаты каталазы в растворе при действии низкочастотной вибрации / Г.В. Тарадина, О.И. Доценко // Проблеми екології та охорони природи техногенного регіону. – 2011. – №1 (11). – С.323-329.
13. Болдырев А.А. Роль Na/K – насоса в возбудимых тканях (обзор) / А.А. Болдырев // J. of Siberian Federal University. Biology 3. – 2008. – № 1. – С. 206-225.
14. Xie Z. Na⁺ / K⁺-ATPase as a signal transducer / Z. Xie, A. Askari // Eur. J. Biochem. – 2002. – V.269. – P. 2434 – 2439.
15. Метаболизм пуринов в эритроцитах человека / В. Дудиньска, А.Й. Хлынчак, Е. Скотницка, М. Суска // Биохимия. – 2006. – Т.71, вып. 5. – С. 581-591.
16. Schuster S. Adenine and adenosine salvage pathways in erythrocytes and the role of S-adenosylhomocysteine hydrolase. A theoretical study using elementary flux modes / S. Schuster, D. Kenanov // FEBS J. – 2005. – Vol. 272. – P. 5278-5290.

Надійшло до редакції 22.01.2013 р.

УДК 519.681

**ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМОВ СОРТИРОВКИ СРЕДСТВАМИ АЛГЕБРЫ
АЛГОРИТМОВ С ДАННЫМИ**

В.Г. Акуловский

Академия таможенной службы Украины, г. Днепропетровск

В работе приведены элементы алгебры алгоритмов с данными и продемонстрирована возможность описания различных вариантов алгоритмов сортировки средствами этого формального аппарата. Кроме того, продемонстрирована возможность “бесшовного” перехода от полученных таким образом описаний алгоритмов к программам на требуемом языке программирования.

Ключевые слова: алгебра алгоритмов, описание алгоритмов, алгоритмы сортировки.

Введение. Исходя из важности роли, которую данные играют в программировании [1, 2], автором, в результате модификации известной модели ЭВМ Глушкова, предложена алгебра алгоритмов с данными (система алгоритмических алгебр – САА\Д) [3]. Сигнатура предложенного алгебраического аппарата включает все операции известные из алгебры Глушкова. Кроме того, доказано наличие некоторых дополнительных возможностей [4, 5]. В частности, практически неограниченная возможность строить производные операции алгебры [4] и возможность детализации описания алгоритма до уровня целевого языка программирования [5], то есть возможность “бесшовного” перехода от алгоритмов к программам.

Принципиальное отличие предложенного формального аппарата от алгебры алгоритмов Глушкова состоит в использовании операторов вида $(D)O(D')$, на входе и выходе которых специфицированы обрабатываемые данные и которые, в связи с этим, получили название Д-операторы. Это отличие обеспечило возможность описания управляющие структуры и структуры обрабатываемых данных в процессе проектирования алгоритмов.

Данная работа посвящена демонстрации возможностей алгебраического аппарата на примере алгоритмов сортировки. Отметим, что такое использование этих алгоритмов стало фактически традиционным в результате их активного использования в работах Г.Е. Цейтлина.

Основные (используемые) элементы алгебры алгоритмов приведены в следующем разделе.

Элементы алгебры алгоритмов с данными. САА\Д – это трехосновная алгоритмическая система – $\langle O; L; S \rangle$, где O – множество Д-операторов, L – множество логических условий, S – сигнатура операций, состоящая из операций S_1 , принимающих значения на множестве Д-операторов U и логических операций S_2 , принимающих значения на множестве логических условий L .

В данном случае используются двузначные логические условия, на множестве которых L определены известные булевы операции (конъюнкция – “ \wedge ”, дизъюнкция – “ \vee ”, отрицание – “ $\bar{}$ ”). Заметим, что множество логических условий L включает подмножество фиксирующих логических условий Φ (в дальнейшем фиксирующих условий), которые будут определены ниже (см. определение 1).

Теперь рассмотрим некоторые виды хранимых данных, которые введем с помощью следующих определений.

Определение 1. Простыми данными d_p называется упорядоченная пара $d_p = \langle A_i, z \rangle$, где z – текущее значение данных d_p , расположенное по адресу $A_i \in A$, где A – множество адресов, по которым расположены данные. Данные $d_m = \langle A_j, z \rangle$ такие, что $z = A_i \in A$, то есть содержат адрес некоторых данных d_p , расположенных по адресу A_j , называются ссылкой. Данные $d_f = \langle A_m, z \rangle$ такие, что $z \in F \subseteq L$ называются фиксирующим условием.

Определение 2. Данные $D_m = \langle A_p, Z \rangle$, где $Z = \langle z_1, z_2, \dots, z_k \rangle$ кортеж последовательно расположенных в памяти значений, имеющих одинаковый формат (тип), будем называть массивом (одномерным массивом, вектором). Адрес A_p , являющийся адресом первого элемента кортежа значений, используется в качестве адреса массива.

Обработка введенных данных осуществляется Д-операторами первого типа $(D)O(D')$, на входе

которых специфицированы данные, подлежащие обработке, а на выходе данные, полученные в результате этой обработки.

Кроме вышерассмотренных, будем различать динамические (не хранимые) данные. Динамические данные D^d , продуцируемые Д-операторами второго типа $(D)O(D^d)$ не сохраняются, а используются в точке их возникновения, после чего полностью утрачиваются, в результате чего адреса не имеют.

Третий тип Д-операторов – предикат $(D^\pi)P(\alpha)$, который, проверяя выполнение заданного отношения (на графике отношения D^π), продуцирует логическое условие α , которое является динамическими данными и принимает истинное значение в случае, когда отношение выполняется, и ложное в противном случае. Предикаты используются в операциях алгебры, определенных на множестве Д-операторов U , и только в этих операциях.

Из множества операций алгебры приведем следующие.

Композиция Д-операторов

$$(D_1)O_1(D'_1) * (D_2)O_2(D'_2), \quad (1)$$

означает последовательное выполнение сначала Д-оператора $(D_1)O_1(D'_1)$ затем Д-оператора $(D_2)O_2(D'_2)$.

Операция последовательной фильтрацией (p -фильтр),

$$\langle (D^\pi)P(\alpha) \rangle | (D)O(D'), \quad (2)$$

соответствует оператору *if...then...* в языках программирования и приводит к выполнению Д-операторов $(D)O(D')$ при $\alpha = 1$.

Операция p -итерации

$$\langle (D^\pi)P(\alpha) \rangle \{ (D)O(D') \} \quad (3)$$

соответствует оператору *while...* и осуществляет циклическое выполнение Д-оператора $(D)O(D')$ (называемого телом цикла) до тех пор, пока логическое условие, продуцируемое предикатом, $\alpha = 1$, и завершается в противном случае.

Представление любого Д-оператора посредством операций алгебры и других Д-операторов называется регулярной схемой (РС) этого Д-оператора. Любой алгоритм может быть представлен в виде Д-оператора.

При реализации нисходящей стратегии проектирования, процесс разработки алгоритма состоит в последовательной (пошаговой) декомпозиции (представлении в виде РС) алгоритма и полученных в результате декомпозиции Д-операторов и детализации данных. При этом на каждом шаге разработки получаем совокупность РС, в рамках которых специфицированы те, и только те данные, которые необходимы на текущем уровне детализации алгоритма.

Описанные таким образом алгоритмы называются неинтерпретированными.

Построение интерпретаций ассоциируем с описанием данных интерпретацией отношений, определенных на этих даны, и Д-операторов, обрабатывающих эти данные.

Очевидно, что доступ к данным осуществляется посредством адресов, по которым эти данные размещены. Однако, для описания конкретных алгоритмов всем данным необходимо поставить в однозначное соответствие уникальные имена – идентификаторы. Будем полагать, что мы располагаем некоторым конечным множеством произвольных идентификаторов $I = \{I_1, \dots, I_n\}$, достаточным для описания любого алгоритма. При этом любой идентификатор I_i уникален и ставится в однозначное соответствие некоторому адресу данных A_j и только этому адресу. Заметим, что одному адресу может быть поставлено в соответствие несколько идентификаторов.

Данные, снабженные идентификатором, будем называть поименованными. Поименованные простые данные будем называть переменной, а поименованную ссылку – указателем. Переменные, значения которых не изменяются (не могут быть изменены), называются поименованными константами.

Константы (не путать с поименованными константами) так же не именуется (адреса не имеют), а записываются естественным образом (в числовом или символьном виде). В общем случае константы будем обозначать c .

Динамическим данным D^d и α , не имеющим адресов, идентификаторы в соответствие не ставятся.

При интерпретации Д-операторов будем их так же именовать, используя идентификатор I_o . В связи со спецификой именования, Д-операторы будем записывать следующим образом.

Д-операторы первого типа – в виде $(I_i)I_o(I_j)$, где I_i, I_j – идентификаторы обрабатываемых данных, I_o – идентификатор Д-оператора. В частных случаях – $(I_i)I_o(I_i)$, $(c)I_o(I_i)$.

Д-операторы второго типа – $(I_i)I_o$, так как динамические данные не именуется.

При інтерпретації предикатов, в случае поименованных простых данных, будем записывать их в виде $I_m \bullet I_r$, где “ \bullet ” отношение, которое будем обозначать традиционно: “ $<$ ”, “ \neq ”, “ \leq ” и т.п., а логическое условие будем опускать, учитывая его динамический характер. В общем случае предикаты будем записывать в виде $(I_p \bullet I_s) \circ \dots \circ (I_m \bullet I_n)$, где “ \circ ” – одна из приведенных выше логических операций.

Учитывая введенные обозначения, приведенные выше операции (1) – (3) будем записывать в виде:

$$(I_i)I_{o_1}(I_j) * (I_p)I_{o_2}(I_s); \left\langle I_m \bullet I_r \right\rangle | (I_i)I_o(I_j) |; \left\langle I_m \bullet I_r \right\rangle \left\{ (I_i)I_o(I_j) \right\}.$$

Интерпретированную РС будем называть схемой алгоритма (СА).

В качестве основного примера рассматривается простейший случай алгоритма сортировки – сортировка методом пузырька.

Описание алгоритмов сортировки. Алгоритм сортировки представим в виде Д-оператора, на входе и выходе которого специфицированы поименованные исходные и результирующие данные.

Известным принципиальным требованием к описанию алгоритма является обеспечение его читабельности. При этом в подавляющем большинстве случаев алгоритм на завершающей стадии записывается на некотором языке программирования. Исходя из этого и учитывая специфику решаемой задачи, для описания данных будем использовать идентификаторы, являющиеся общепринятыми в программировании. А для описания Д-операторов идентификаторы, отражающие их семантику.

Будем рассматривать два варианта массивов. Массиву ограниченному маркером \perp , сопоставим идентификатор $M[\perp]$, а массиву заданного размера – $M[c]$, где c – константа задающая размер массива. Приведенные идентификаторы $M[\perp]$ и $M[c]$ обеспечивают доступ ко всему массиву, то есть возможность его обработки Д-оператором, на входе которого он специфицирован. В случае поэлементной обработки доступ к элементам массива возможен посредством индексов и указателей (адресов).

Рассмотрение начнем с первого случая.

В этом случае доступ к элементам массива осуществляется с помощью переменных, которые будем в этом случае называть индексными. То есть идентификатор элемента массива записывается в виде $M[i]$, где M – идентификатор массива, i – индексная переменная. Такой идентификатор обеспечивает доступ к любому элементу массива, так как ему в соответствие ставится адрес массива, увеличенный (в рассматриваемом случае) на значение переменной i . В частных случаях вместо индексной переменной может использоваться константа или поименованная константа.

Рассмотрение начнем с первого варианта массива, а алгоритм его сортировки представим в виде Д-оператора вида $(M[\perp])\text{СОРТ}(M[\perp])$.

Введем следующие элементарные Д-операторы, которые в данной задаче будем использовать для работы с индексными переменными. Эти переменные обозначим i и j . Отметим, что элементарными в данном случае называются Д-операторы, реализуемые одним выражением на целевом языке программирования.

Д-операторы первого типа:

$$-(i) := (j) \tag{4}$$

устанавливает значение переменной j равной значению i . В частном случае $(c) := (j)$;

$$-(i, j) + (i) \tag{5}$$

складывает значения переменных i и j , результат операции становится значением переменной i . В частном случае этот Д-оператор записывается в виде $(i, c) + (i)$.

Д-оператор второго типа

$$(i, j) + \tag{6}$$

складывает значения переменных i и j , результатом являются динамические данные. В частном случае этот Д-оператор записывается в виде $(i, c) +$. С помощью этого Д-оператора могут вычисляться значения индексных переменных массива. В этом случае идентификатор элемента массива записывается в виде $M[(i, c) +]$, а ему в соответствие ставится адрес массива, увеличенный на значение, динамически полученное в результате выполнения Д-оператора $(i, c) +$.

Алгоритм сортировки методом пузырька запишем в виде следующей СА:

$$\begin{aligned} &(M[\perp])\text{СОРТ}(M[\perp]) = (0) := (i) * \langle M[i] \neq \perp \rangle \{ (0) := (j) * \\ &* \langle M[j] \neq \perp \rangle \{ \langle M[j] > M[(j, 1) +] \} | (M[j], M[(j, 1) +]) \text{ПЕРЕСТ}((M[j], M[(j, 1) +]) | * \\ &*(j, 1) + (j) \} * (i, 1) + (i) \}. \end{aligned} \tag{7}$$

Полученная запись алгоритма настолько близка к форме, традиционной для программы, что мало нуждается в пояснениях. Для первой реализации, однако, отметим, что алгоритм представляет собой две вложенные операции р-итерации (два вложенных цикла), и, что кроме данных специфицированных на входе алгоритма использованы вспомогательные данные – индексные переменные i и j . Исходные значения индексных переменных устанавливаются Д-оператором $(0) := (i)$ и $(0) := (j)$, на входе которых специфицированы константы, определяющие эти исходные значения. Индексные переменные изменяются с единичным шагом Д-операторами $(j,1) + (j)$ и $(i,1) + (i)$. В угловые скобки заключены проверяемые отношения, а Д-оператор ПЕРЕСТ меняет элементы массива местами в случае, если в последовательном фильтре логическое условие принимает истинное значение.

Заметим, что при сортировке всего массива индексы могут изменяться как от нуля, так и от единицы и с любого значения при сортировке его части.

Теперь обратимся к случаю, когда размер сортируемого массива задан. То есть необходимо разработать алгоритм сортировки вида $(M[c])СОРТ(M[c])$. Средства, которыми мы располагаем, позволяют реализовать такой алгоритм в виде следующей СА:

$$(M[c])СОРТ(M[c]) = (c) := (n) * (0) := (i) * \langle i < n \rangle \{ (0) := (j) * \langle j < n \rangle \{ \langle (M[j] > M[(j,1)+]) \rangle \{ (M[j], M[(j,1)+]) ПЕРЕСТ((M[j], M[(j,1)+]) \} * (j,1) + (j) \} * (i,1) + (i) \}.$$

Однако более адекватной для обработки такого массива является операция аналогичная оператору *for*, которая имеет место в большинстве языков программирования. Воспользуемся упомянутой выше возможностью и построим такую производную операцию (f-итерации). Очевидно, что она реализуема на основе операции р-итерации, что в данном случае запишем в виде:

$$(0) := (p) * \langle p < n \rangle \{ \text{тело цикла} * (p,1) + (p) \} \langle (0) := (p); p < n; (p,1) + (i) \rangle \{ \text{тело цикла} \}.$$

Воспользовавшись построенной операцией, реализуем алгоритм в виде следующей схемы:

$$(M[c])СОРТ(M[c]) = (c) := (n) * \langle (0) := (i); i < n; (i,1) + (i) \rangle \{ \langle (0) := (j), j < n, (j,1) + (j) \rangle \{ \langle (M[j] > M[(j,1)+]) \rangle \{ (M[j], M[(j,1)+]) ПЕРЕСТ(M[j], M[(j,1)+]) \} \} \} \quad (8)$$

Обратим внимание, что в связи с наглядностью записи алгоритма, он может быть легко преобразован в алгоритм челночной сортировки. Для этого введем элементарные Д-операторы вида $(j,1) - (j)$ и $(j,1) -$, аналогичные (5) и (6), и запишем алгоритм для случая левосторонней челночной сортировки в виде следующей СА, пронумеровав элементы массива с единицы:

$$(M[c])ЧЕЛНОК(M[c]) = (c) := (n) * \langle (2) := (i); i < n; (i,1) + \rangle \{ \langle (i) := (j); ((j,1) -) > (0) \wedge (M[j] > M[(j,1)-]; (j,1) - (j)) \rangle \{ (M[j], M[(j,1)-]) ПЕРЕСТ(M[j], M[(j,1)-]) \} \}.$$

Приведенные алгоритмы пузырьковой сортировки представляет самую простую его реализацию и, очевидно, могут быть улучшены. В частности, его выполнение может быть завершено после того, как массив будет отсортирован. Признаком наступления этого события служит факт отсутствия перестановок элементов массива после завершения любой из итераций вложенного цикла. Для реализации улучшенного алгоритма воспользуемся фиксирующим условием, в качестве которого будем использовать переменную с идентификатором *перест*. Поскольку *перест* переменная, то для неё выполняются операции (4). Но поскольку эта переменная – фиксирующее условие, она может использоваться в операции р- и f-итерации в качестве элемента анализируемого отношения.

С учетом нововведения СА (7) перепишем в следующем виде:

$$(M[\perp])СОРТ(M[\perp]) = (0) := (i) * (1) := (\text{перест}) * \langle M[i] \neq \perp \wedge \text{перест} \rangle \{ (0) := (j) * (0) := (\text{перест}) * \langle M[j] \neq \perp \rangle \{ \langle M[j] > M[(j,1)+] \rangle \{ (M[j], M[(j,1)+]) ПЕРЕСТ(M[j], M[(j,1)+]) * (1) := (\text{перест}) \} * (j,1) + (j) \} * (i,1) + (i) \}.$$

В случае СА (8) легко ввести еще одно улучшение алгоритма. А именно, организуем сокращение числа итераций вложенного цикла после каждой итерации внешнего. То есть исключим из анализа отсортированную часть массива.

С учетом такой новации получена следующая СА:

$$(M[c])СОРТ(M[c]) = (c) := (n) * (1) := (\text{перест}) * \langle (0) := (i); i < n \wedge \text{перест}; (i,1) + (i) \rangle \{$$

$$\begin{aligned} & \{(0) := (\text{перест}) * \langle (0) := (j); j < (n - i); (j, 1) + (j) \rangle \{ \\ & \langle (M[j] > M[(j, 1) +]) \rangle | (M[j], M[(j, 1) +]) \text{ПЕРЕСТ}(M[j], M[(j, 1) +]) \} * \\ & * (1) := (\text{перест}) \} \}. \end{aligned} \quad (10)$$

Выше упоминалось, что доступ к элементам массива возможен не только с помощью индексов, а и с помощью указателей, покажем возможность реализации рассматриваемого алгоритма с их помощью.

Для этого введем следующие элементарные Д-операторы.

Д-операторы первого типа:

$(i) \Downarrow (U)$, в результате выполнения которого, переменная U становится указателем на i ;

$(U) \Uparrow (j)$, в результате выполнения которого, переменная j получает значение переменной, на которую указывает указатель U .

Д-оператор второго типа $(U) \hat{\Uparrow}$, в результате выполнения которого получаем значение переменной, на которую указывает указатель U , в виде динамического значения. Поскольку указатели являются переменными, то для них определены элементарный Д-оператор (6), что позволяет использовать указатели для вычисления адресов. В этом случае Д-оператор записывается в виде $((U, c) +) \hat{\Uparrow}$. В частности, такой Д-оператор позволяет вычислять адреса элементов массива.

С помощью введенных элементарных Д-операторов алгоритм сортировки представим в виде следующей СА:

$$\begin{aligned} & (M[\perp]) \text{СОРТ}(M[\perp]) = (M[\perp]) \Downarrow (U1_M) * (1) := (\text{перест}) * \\ & * \langle (U1_M) \hat{\Uparrow} \neq \perp \rangle \wedge \text{перест} \} \{ M[\perp] \Downarrow (U2_M) * (0) := (\text{перест}) * \\ & * \langle (U2_M) \hat{\Uparrow} \neq \perp \rangle \{ \langle (U2_M) \hat{\Uparrow} > ((U2_M, 1) +) \hat{\Uparrow} \rangle | (U2_M) \text{ПЕРЕСТ}(M[\perp]) \} * \\ & * (U2_M, 1) + (U2_M) * (1) := (\text{перест}) \} * (U1_M, 1) + (U1_M) \}, \end{aligned}$$

в которой доступ к элементам массива осуществляется с помощью указателей. При этом указатели являются вспомогательными данными, неспецифицируемыми для исходного Д-оператора.

Показав возможность описания алгоритма сортировки в различных вариантах, остановимся на вопросе перехода от алгоритма к программе.

Продолжим процесс детализации алгоритма, для чего декомпозируем Д-оператор ПЕРЕСТ и запишем его в виде следующей СА:

$$\begin{aligned} & (M[j], M[(j, 1) +]) \text{ПЕРЕСТ}(M[j], M[(j, 1) +]) = \\ & = (M[j]) := (RAB) * (M[(j, 1) +]) := M[j] * (RAB) := (M[(j, 1) +]), \end{aligned}$$

где RAB – вспомогательная (рабочая) переменная.

Теперь, выполним свертку СА, подставив вместо Д-оператора

$$(M[j], M[(j, 1) +]) \text{ПЕРЕСТ}(M[j], M[(j, 1) +])$$

результат его декомпозиции.

В случае СА (9), получаем:

$$\begin{aligned} & (M[\perp]) \text{СОРТ}(M[\perp]) = \\ & = (0) := (i) * (1) := (\text{перест}) * \langle M[i] \neq \perp \wedge \text{перест} \rangle \{ (0) := (j) * \\ & * [M[j] \neq \perp] \{ \langle M[j] > M[(j, 1) +] \rangle | (M[j]) := (RAB) * (M[(j, 1) +]) := (M[j]) * \\ & * (RAB) = (M[(j, 1) +]) * (1) = (\text{перест}) \} * (i, 1) + (i) \}, \end{aligned}$$

а в случае СА (10) –

$$\begin{aligned} & (M[c]) \text{СОРТ}(M[c]) = (c) := (n) * (1) := (\text{перест}) * \\ & \langle (0) := (i), i < n \wedge \text{перест}, (i, 1) + (i) \rangle \{ (0) := (\text{перест}) * \\ & * \langle (0) := (j), j < (i, n) - \rangle, (j, 1) + (j) \} \{ \langle (M[j] > M[(j, 1) +]) \rangle | (M[j]) := (RAB) * \\ & * (M[(j, 1) +]) := M[j] * (RAB) := (M[(j, 1) +]) * (1) := (\text{перест}) \} \}. \end{aligned}$$

На данном этапе достигнут такой уровень детализации, когда имеют место только элементарные Д-операторы. Очевидно, такие алгоритмы могут быть записаны на целевом языке программирования, в частности, на некотором диалекте языка Си.

Для перехода от полученных алгоритмов к программам выполним следующие простейшие действия.

Во-первых. Обозначим элементарные Д-операторы, использованные в СА, в соответствии с синтаксисом языка Си следующим образом:

```

(c) := (n)      →    n = c
(0) := (i)      →    i = 0
(1) := (перест) →    перест = 1
(0) := (j)      →    j = 0
(i,1) + (i)     →    i ++
(j,1) + (j)     →    j ++
(i,1) +         →    i + 1
(j,1) +         →    j + 1
    
```

Операцию композиции (*) обозначим “;”. Операцию р-филтрации () запишем в виде *if* (условие) {Д – оператор;...}

Операцию р-итерации () – в виде

while (условие) {Д – оператор;...}.

Операцию f-итерации – в виде

for (Д – оператор; условие; Д – оператор) {Д – оператор;...}.

Логическую операцию \wedge обозначим &&.

В результате использования предложенных обозначений СА будут выглядеть следующим образом:

```

(M[⊥])COPT(M[⊥]) =
= i = 0; перест = 1; while(M[i] ≠ ⊥ && перест) {j = 0; перест = 0;
while(M[j] ≠ ⊥) {if (M[j] > M[j+1]) {RAB = M[j]; M[j] = M[j+1]};
*M[j+1] = RAB; перест = 1; j ++; i ++;},
    
```

и

```

(M[c])COPT(M[c]) =
= перест = 1; n = c; for (i = 0; i < n && перест; i++) {перест = 0;
for(j = 0; j < (n - i); j++) {if (M[j] > M[j+1]) {RAB = M[j]; (M[j] = M[j+1];
M[j+1] = RAB; перест = 1}}}.
    
```

При этом, следует отметить, что, не смотря на очевидное сходство полученных алгоритмов с программами, алгоритмы остаются “под юрисдикцией” формального аппарата, то есть могут подвергаться оптимизирующим преобразованиям [5].

Во-вторых. Учтывая то, что операция композиции (*) связывает Д-операторы, а “;” завершает операторы в программе, восполним “дефицит” последних.

В-третьих. Распределим глобальную и локальные переменные по соответствующим уровням.

В четвертых. Введем значение константы с, например, 100, значения элементов массива $M[\perp]$ (который обозначим $M[\]$), например, 1,2,3,4,5,6,7,8,9, '⊥', и типы переменных. Заметим, что типы переменных могут не вводиться, если их идентификаторы дополнить спецификаторами типа, например, `int i`.

В результате выполнения перечисленных действий получаем следующие фрагменты программ

```

int M[j]=1,2,3,4,5,6,7,8,9, '⊥';
{
int n,i,j; bool перест;
i=0; перест=1;
while (M[i] ≠ ⊥ && перест) {j=0; перест=0;
while (M[j] ≠ ⊥) {if (M[j]>M[j+1]) {int RAB; RAB=M[j]; M[j]=M[j+1];
M[j+1]=RAB; перест=1; j++;} i++;}
}
    
```

и

```

int M[100];
{
int i, j, n; bool перест;
перест=1; n=100;
for (i=0; i<n && перест; i++) {перест=0;
for (j=0; j<(n-i); j++) {if (M[j]>M[j+1]) {int RAB; RAB=M[j]; M[j]=M[j+1]; M[j+1]=RAB;
перест=1;}}
}
    
```

Представляется очевидным, что первый шаг, выполненный для одного алгоритма, может использоваться для все последующих. Второй и третий легко реализуемы в автоматическом режиме. Ручного

выполнения требует последний шаг, на котором выполняется настройка алгоритма на конкретные значения, определяемые спецификациями программ.

Выводы. Показана возможность описывать в рамках алгебраического аппарата различные варианты реализации алгоритмов сортировки. Из полученных результатов легко увидеть, что предложенный формальный аппарат позволяет осуществлять описание достаточно широкого класса алгоритмов.

При этом, в процессе разработки может быть достигнут такой уровень детализации алгоритма, при котором переход от алгоритмов к программам на целевом языке программирования становится фактически бесшовным. Более того, очевидно, что процесс такого перехода может быть достаточно легко автоматизирован.

Расширение ареала применения формального аппарата, в частности, на класс алгоритмов систем управления является ближайшей перспективной дальнейших исследований.

РЕЗЮМЕ

У роботі приведені елементи алгебри алгоритмів з даними і продемонстрована можливість опису різних варіантів алгоритмів сортування засобами цього формального апарату. Крім того, продемонстрована можливість “безшовного” переходу від отриманих таким чином описів алгоритмів до програм на необхідній мові програмування.

Ключові слова: алгебра алгоритмів, опис алгоритмів, алгоритми сортування.

SUMMARY

The algebra of algorithms elements with data are in-process resulted and description possibilities of different algorithms' variants of sorting of this formal vehicle facilities is shown. In addition, possibility of “jointless” transition is shown from the descriptions of algorithms got thus to the programs in required programming language.

Keywords: algebra of algorithms, description of algorithms, algorithms of sorting.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Холл П. Вычислительные структуры: введение в нечисленное программирование / П. Холл. – М.: Мир, 1978. – 214 с.
2. Шнейдерман Б. Психология программирования: человеческие факторы в вычислительных и информационных системах / Б. Шнейдерман. – М.: Радио и связь, 1984. – 304 с.
3. Акуловский В. Г. Алгебра алгоритмов, базирующаяся на данных / В. Г. Акуловский // Кибернетика и системный анализ. – 2012. – № 2. – С. 151-166.
4. Дорошенко А. Е. Построение и преобразование операций и некоторых алгоритмических конструкций алгебры алгоритмов с данными / А. Е. Дорошенко, В. Г. Акуловский // Проблемы програмування. – 2011. – № 4. – С. 3-13.
5. Акуловский В. Г. Реализация формализованного перехода от алгоритма к программе средствами расширенной алгебры алгоритмов / В. Г. Акуловский // Проблемы програмування. – 2008. – № 1. – С. 51-59.

Поступила в редакцию 31.10.2012 г.

**ОПТИЧЕСКИЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
ПОСТРОЕНИЯ СИСТЕМ ФОРМИРОВАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ***У.Г. Богомаз, Т.В. Белик, В.В. Данилов*

В публикации предложено описание спектров оптических систем (по аналогии с электрическими системами) в комплексной форме, математическое описание передаточных функций (пространственная импульсная, пространственная переходная, оптическая или эквивалентная ей совокупность функции передачи информации и функции передачи фазы звеньев и систем), несущих информацию о передаточных свойствах двумерных звеньев.

Ключевые слова: передаточная функция, функция передачи информации, функция передачи фазы.

Введение. Системы формирования изображений представляют собой цепочку подсистем, оптических и электронных, определенного функционального назначения, обеспечивающих выполнение целевой функции системы в целом. Непрерывный рост сложности таких систем требует разработки оперативных методов оценки их качества, учитывающих систему и подсистемы с учетом влияния эксплуатационных факторов и помех.

Распознавание объекта по его оптическому изображению в значительной степени зависит от качества этого изображения. Под качеством изображения предлагается понимать его свойство, определяемое параметрами оптической системы, которое характеризует способность изображения нести информацию о геометрических и фотометрических характеристиках объектов. Качество изображения связано, с одной стороны, с чисто объективными характеристиками оптических систем, с другой – с психофизическими особенностями восприятия изображений, имеющими в значительной степени субъективный характер.

Современные методы оценки качества сложных систем, формирующих изображения, неотделимы от конкретных задач, решаемых тем или иным прибором. Одним из назначений аппаратуры, использованной в качестве примера для рассмотрения в данной работе, является получение мелкомасштабных изображений поверхностей в различных областях спектра излучений. При этом наибольшие трудности возникают при распознавании мелких малоконтрастных изображений.

Из общей теории обнаружения известно, что вероятностные характеристики процесса обнаружения и распознавания являются функциями отношения сигнал/шум на выходе системы [1]. Естественно, что критерии, основанные на использовании отношения сигнал/шум, должны лучше других критериев коррелировать с вероятностными характеристиками процесса распознавания.

Одним из простейших критериев, в некоторой степени учитывающих отношение сигнал/шум в системе, является разрешающая способность. Этот критерий до сих пор успешно применяется при решении многих практических задач. Однако возможности данного критерия оказываются ограниченными, особенно при сравнении систем, которые существенно различаются по уровню отношения сигнал/шум.

К разновидностям критерия отношения сигнал/шум относятся критерии, основанные на использовании информационных подходов. Эти критерии в явном виде учитывают отношения сигнал/шум на выходе системы, а также передаточные и пороговые характеристики получателя информации.

Целью настоящей работы является разработка физико-технических основ оптической информационной технологии построения систем формирования изображения (СФИ).

В частности, в настоящей работе предлагается математические описания: процесса распространения оптического сигнала и его пространственно-частотного спектра, передаточных характеристик СФИ, функции передачи информации (ФПИ) оптической системы и методика определения ФПИ (расчетная).

Оптические сигналы и их пространственно-частотные спектры. Окружающие нас объекты характеризуются различными оптическими параметрами: пространственным распределением яркости, спектральным составом излучения, коэффициентом отражения и т. д. Отраженный или излучаемый от объектов световой поток (оптический сигнал) с помощью оптической системы проецируется в плоскость изображения, где воспроизводятся контуры и детали наблюдаемых объектов с некоторыми изменениями масштаба, формы и распределения освещенности; т.е. системы, формирующие изображения реальных объектов, не воспроизводят полностью, без каких-либо искажений оптические сигналы от этих объектов.

Собственное (или отраженное) излучение объекта зависит как от размеров последнего, так и от характера изменения потока излучения по спектру, пространству и во времени, т. е. $B = B(x, y, \lambda, t)$, где $B(x, y, \lambda, t)$ – яркость объекта; x, y – текущие координаты объекта; λ – длина волны потока излучения; t – текущее время. Соответственно освещенность изображения объекта описывается функцией $E(x', y', \lambda, t)$, где E – освещенность изображения; x', y' – его текущие координаты.

Стереоскопическое изображение является функцией пяти аргументов $(x', y', \lambda, t, x_0)$, поскольку в этом случае необходимо учитывать координату x_0 середины зрачка объектива системы, формирующей изображение. Следовательно, светотехнические параметры объекта и его изображения описываются функциями многих переменных.

В большинстве случаев можно полагать, что временные изменения потока излучения объекта за промежутки исследования пренебрежимо малы. Если рассматривать поток от объекта в фиксированном диапазоне спектра, т. е. когда он не зависит от изменения длины волны, то функцию яркости можно представить в виде $B = B(x, y)$, а освещенность (яркость) изображения в виде $E(x', y')$.

Представление изображений в виде функций двух переменных (или пространственное представление) является обычным, так как общеприняты такие характеристики объектов, как их линейные размеры и площадь. Рассмотрение яркости в виде функции двух переменных необходимо, чтобы перейти к представлению о пространственно-частотных спектрах изображений.

Рассмотрим некоторые общие особенности оптических сигналов, под которыми, с точки зрения его функционального назначения для некогерентного света, понимается изменение потока излучения по пространственным координатам, несущее информацию о распределении излучательной или отражательной способности объектов реального мира.

В общем случае, по аналогии с электрическими сигналами, все оптические сигналы можно разделить на две группы: детерминированные и случайные [2]. Детерминированным оптический сигнал можно представить определенной двумерной функцией яркости (изображения конкретных объектов - дерево, строение и пр.). Случайные оптические сигналы можно представить случайными двумерными функциями, когда закон распределения яркости заранее неизвестен (например, изображения различных ландшафтов).

Детерминированные оптические сигналы, в свою очередь, подразделяются на периодические (например, изображение линейчатой миры большой протяженности) и непериодические (любое изображение одиночного объекта). Разделение оптических сигналов на периодические, непериодические и случайные связано с тем, что каждому из этих видов сигналов соответствуют свои математические методы пространственно-частотного анализа, а пространственно-частотный анализ оптических сигналов может быть построен подобно гармоническому спектральному анализу временных, электрических сигналов.

Спектральное представление электрических сигналов широко распространено в теории передачи сигналов и в теории автоматического регулирования ввиду того, что такое представление сигналов дает возможность достаточно точно оценивать степень искажения сигналов при их прохождении через линейные звенья, а также синтезировать суммарные характеристики сложных систем по характеристикам их отдельных звеньев.

Под пространственным гармоническим колебанием в оптике и инфракрасной (ИК) технике понимают распределение яркости объекта или его изображения на плоскости по гармоническому закону [3]. При этом под пространственной частотой понимается величина, обратная периоду гармоника, описывающей распределение яркости вдоль какого-либо направления. Пространственные частоты относят обычно к осям прямоугольной системы координат x и y , и для двумерной функции они соответственно равны $\vartheta_x = 1/l_x$, $\vartheta_y = 1/l_y$, где l_x и l_y – периоды пространственных гармоник по осям x и y .

Яркость может изменяться по гармоническому закону либо по одной из координатных осей двумерного пространства, либо по обоим осям. Соответственно вводятся понятия одномерной и двумерной пространственных гармоник. Рассмотрим понятие одномерной пространственной гармоники параллельно с известными понятиями электрической гармоники: $U(t) = U \cos 2\pi ft$; $B(x) = B \cos 2\pi \vartheta_x x$, где $U(t)$ – изменения электрического сигнала; $B(x)$ – изменение яркости объекта.

Размерность временной частоты с^{-1} , размерность пространственной частоты мм^{-1} . При гармоническом изменении яркости по обоим осям x и y образуется двумерная пространственная синусоида $B(x, y) = B \cos 2\pi \vartheta_x x \cos 2\pi \vartheta_y y$.

Под фазой пространственной синусоиды понимают стадию периодического процесса, причем для гармонического процесса практическое значение имеют начальная фаза и взаимный сдвиг фаз. Если для гармонического временного процесса начальная фаза $\varphi = 2\pi \Delta t / t$, то для пространственной частоты начальные фазы $\varphi_x = 2\pi \Delta l_x$, $\varphi_y = 2\pi \Delta l_y$, где Δl_x , Δl_y – расстояния между, начальной точкой колебания и точкой, в которой определяется фаза (по соответствующим осям).

Под пространственно-частотным анализом оптических сигналов, будем понимать представление сложных пространственных сигналов в виде соответствующих сумм пространственных гармоник или, в виде пространственно-частотных спектров. При этом спектры периодических оптических сигналов получают разложением их в ряд Фурье, а спектры непериодических сигналов – интегральным Фурье-преобразованием. Спектры случайных сигналов можно получить специальным Фурье-преобразованием

[1]. Тогда, в комплексной форме запись разложения двумерной периодической функции $f(x, y)$ в ряд Фурье будет иметь вид

$$f(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \dot{C}_{n,m} e^{2\pi i(n\vartheta_x x + m\vartheta_y y)},$$

где $\dot{C}_{n,m} = \vartheta_x \vartheta_y \int_{-l_x/2}^{l_x/2} \int_{-l_y/2}^{l_y/2} f(x, y) e^{-2\pi i(n\vartheta_x x + m\vartheta_y y)} dx dy$.

Спектры оптических сигналов непериодических функций (по аналогии с электрическими сигналами) определяют при помощи интеграла Фурье. Выражение для интеграла-Фурье получают предельным преобразованием ряда Фурье для случая, когда период преобразуемой функции устремляется к бесконечности. Выражение для интеграла Фурье двумерной непериодической функции $B(x, y)$ имеет вид:

$$B(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} b(i\vartheta_x, i\vartheta_y) e^{i2\pi(\vartheta_x x + \vartheta_y y)} dx dy, \tag{1}$$

где $b(i\vartheta_x, i\vartheta_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(x, y) e^{-i2\pi(\vartheta_x x + \vartheta_y y)} dx dy$ \tag{2}

– комплексный спектр, называемый также спектральной плотностью амплитуд (или спектром амплитуд). Операция нахождения спектра амплитуд $b(i\vartheta_x, i\vartheta_y)$ является прямым Фурье-преобразованием, а нахождение функции $B(x, y)$ по ее спектру является обратным Фурье-преобразованием.

Непериодическую функцию $B(x, y)$ можно представить суммой бесконечно большого числа бесконечно малых гармонических составляющих, бесконечно близких по частоте, поэтому спектр такой непериодической функции является сплошным и характеризуется спектральной плотностью амплитуд.

Комплексная спектральная плотность яркости (или освещенности) несет в себе полную информацию о процессе – как амплитудную, так и фазовую. Под спектром амплитуд функции $B(x, y)$ будем понимать модуль комплексного спектра $|b(i\vartheta_x, i\vartheta_y)| = b(\vartheta_x, \vartheta_y)$.

В реальных условиях одиночные объекты излучают на фоне не стационарных, а флуктуирующих полей, поскольку реальный фон в большинстве случаев состоит из различных природных образований и объектов, излучения которых распределены в пространстве случайным образом. Поэтому распределение яркости ландшафта (фона) в пространстве является случайной двумерной функцией координат x и y .

Наиболее употребляемыми характеристиками случайных функций являются: математическое ожидание, дисперсия и автокорреляционная функция. В практике часто используют приближенное представление сигналов потоком излучения фона в виде двумерных случайных функций, отвечающих условиям стационарности и эргодичности. При этом существенно упрощается математический аппарат, используемый для описания характеристик этих функций.

Свойство стационарности заключается в том, что характеристики не зависят от того, с какой точки начинается измерение фона, т. е. статистические характеристики стационарной случайной функции остаются постоянными при изменении набора реализаций, использованных для их получения. Случайная функция является эргодической, если любая ее реализация при достаточной длительности имеет одни и те же статистические характеристики, т. е. характеристики случайной функции могут быть получены по одной достаточно протяженной реализации без усреднения по различным реализациям.

Дисперсия характеризует степень разбросанности случайной функции относительно ее математического ожидания, т. е.

$$D = \sigma^2 = R(0) = \frac{1}{l_x l_y} \int_{-0,5l_x}^{0,5l_x} \int_{-0,5l_y}^{0,5l_y} [B(x, y)]^2 dx dy,$$

где D – дисперсия; σ – среднеквадратичное значение случайной функции; $R(0)$ – значение функции автокорреляции при $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$.

Математическое ожидание $m(x, y)$ случайной двумерной функции яркости $B(x, y)$ представляет собой среднюю функцию, вблизи которой различным образом изменяются конкретные реализации случайной функции:

$$m(x, y) = M[B\mu(x, y)], \mu = 1, 2, 3, \dots, n,$$

где M – символ усреднения; μ – номер реализации; n – количество реализаций.

Автокорреляционная функция показывает степень связи между собой соседних точек двумерной случайной функции (в данном случае – функции яркости $B(x, y)$), имеющих координаты x, y и $x + \Delta x, y + \Delta y$. Выражение автокорреляционной функции для стационарной эргодической случайной функции $B(x, y)$ может быть представлено в виде

$$R(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{l_x l_y} \int_{-0,5l_x}^{0,5l_x} \int_{-0,5l_y}^{0,5l_y} B(x, y) B(x + \Delta x, y + \Delta y) dx dy.$$

Пространственно-частотные свойства стационарных случайных процессов характеризуются так называемым спектром Винера-Хинчина или пространственно-частотным, спектром дисперсий, который выражает зависимость спектральной плотности дисперсии случайной функции от пространственной частоты [1]. Для стационарных эргодических случайных сигналов спектр Винера-Хинчина имеет вид [4],

$$S(\vartheta_x, \vartheta_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R(\Delta x, \Delta y) e^{-2\pi i(\vartheta_x \Delta x + \vartheta_y \Delta y)} dx dy. \quad (3)$$

Справедливо также и обратное преобразование для выражения (3):

$$R(\Delta x, \Delta y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(\vartheta_x, \vartheta_y) e^{2\pi i(\vartheta_x \Delta x + \vartheta_y \Delta y)} dx dy. \quad (4)$$

Связь спектра Винера-Хинчина $S(\vartheta_x, \vartheta_y)$ с амплитудным пространственно-частотным спектром $b(\vartheta_x, \vartheta_y)$ случайного эргодического процесса выражается соотношением вида:

$$S(\vartheta_x, \vartheta_y) = [b(\vartheta_x, \vartheta_y)]^2 / (l_x l_y),$$

где l_x, l_y – протяженность реализации по осям x и y .

Автокорреляционная функция и спектр лучистости Винера-Хинчина являются усредненными характеристиками и не несут информации о фазовых соотношениях между спектральными составляющими, которые определяются конкретным изображением фона.

Передаточные характеристики оптических систем. Тракт прохождения оптического сигнала представим состоящим из отдельных последовательно соединенных оптических звеньев. Введем понятие «передаточное звено», чтобы эквивалентно отобразить какое-то определенное физическое воздействие на оптический сигнал того или иного участка тракта. Общим для всех этих звеньев является то, что каждое из них оказывает свое влияние на сигнал независимо от влияния других элементов тракта.

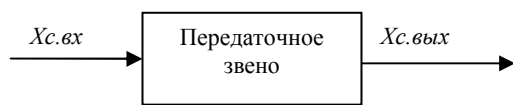


Рис. 1. Обобщенное представление передаточного звена

Представим каждое передаточное звено в виде прямоугольника (рис. 1) где $x_{с.вх}$ и $x_{с.вых}$ обозначены сигналы на входе и выходе звена. Для примера рассмотрим структурную схему прохождения информации в аэрофотосъемочной системе (рис. 2).

Звено 2 характеризует воздействие слоя атмосферы на оптический сигнал, 3 учитывает влияние специфических условий работы фоторегистратора (сдвиги и вибрации), 4 и 5 – характеризуют непосредственно фоторегистратор и фотопроцесс, звено 6 учитывает ограниченные возможности получателя информации при наблюдении изображений..

Такое разбиение системы на отдельные звенья условно и зависит от того, влияние каких факторов необходимо учесть. При этом учитывается лишь эквивалентное влияние на сигнал того или иного фактора, независимо от его физического содержания. Передаточные свойства звена оцениваются сравнением сигналов на выходе и входе.

К информационным сигналам, добавляются посторонние (мешающие) – помехи. Сигналы помех поступают на вход или выход соответствующего звена, где они суммируются с полезным сигналом.



Рис. 2

Примером пространственного двухполюсника без источников помех является простейшая оптическая система в виде линзы (рис. 3).

Оптическая система преобразует распределение яркости в плоскости объекта $B(x, y)$ в распределение освещенности в плоскости изображения $E(x', y')$, физическая же природа информации при этом не меняется. Координаты в плоскости изображения x' и y' связаны с координатами в плоскости объекта x и y соотношением $x = x'l/L$, $y = y'l/L$, где l – расстояние от главной плоскости объектива до плоскости изображения; L – расстояние от объекта до главной плоскости объектива.

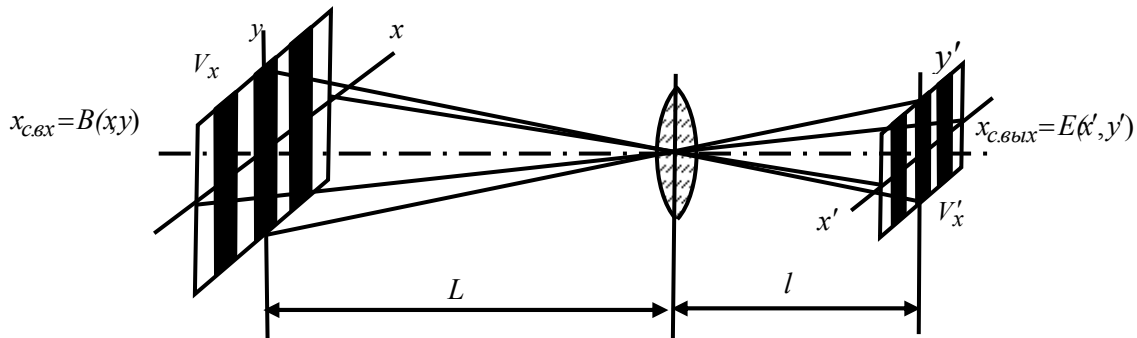


Рис. 3. Простейшая оптическая система и преобразование ею координат

Примером пространственного двухполюсника с источником помех и преобразованием физической природы информации может служить фоторегистрирующий носитель информации (например, фото-пленка). Распределение яркости сигнала на носителе преобразуется в соответствующее распределение плотности изображения, при этом к полезному сигналу добавляется мешающая структура, обусловленная зернистым строением носителя.

Одной из характеристик передаточного звена является амплитудная характеристика. Амплитудную характеристику вида: $x_{c.вых} = ax_{c.вх}$, где a – постоянный коэффициент, назовем по аналогии с электронными цепями, линейной. Откуда, утверждается, что и система линейна, если к ней применим принцип суперпозиции (наложения) [5].

В теории регулирования и теории связи существует несколько методов описания передаточных характеристик линейных звеньев и систем, основанных на отклике (реакция) звена или системы на воздействие специального вида сигнала. Наиболее распространенными передаточными характеристиками являются: импульсная функция или функция веса – реакция на единичный импульс (δ -функцию), переходная функция – реакция системы на единичный скачок, частотная передаточная функция – зависимость амплитуды и фазы синусоидального сигнала на выходе системы от его частоты (при неизменной амплитуде и фазе на его входе). При анализе оптических систем этим характеристикам, по всей видимости, должны соответствовать: функция рассеяния точки и линии, переходная функция системы (или пограничная кривая) и комплексная оптическая передаточная функция (ОПФ).

Рассмотрим эти характеристики на примере простейшей оптической системы (рис. 3), и распространим их на общий случай пространственного передаточного звена. Оптическая система преобразует распределение яркости в плоскости объектов в распределение освещенности в плоскости изображения. При этом происходят соответствующие изменения масштаба в распределении освещенности.

Функция рассеяния точки или импульсная функция характеризует реакцию оптической системы на импульс излучения, т. е. на пространственную δ - функцию (или на точечный источник). Реакцией оптической системы на излучение точечного источника является распределение освещенности, создаваемое ею в плоскости изображения этого источника. Таким образом, функция рассеяния точки описывает распределение освещенности в изображении точки, создаваемом оптической системой. Функцию рассеяния точки определим как отношение освещенности в плоскости изображения к силе, излучения I точечного источника, поступающего на вход оптической системы, $h(x, y) = E_{\delta}(x, y)/I$, где $E_{\delta}(x, y)$ – распределение освещенности в изображении точечного источника.

Поскольку функцию рассеяния точки можно определить для любой точки плоскости изображения, то эту функцию представим в новой системе координат $h(\xi, \eta)$, где ξ и η координатные оси, соответственно параллельные осям x и y . Однако центр системы координат ξ и η всегда может быть совмещен с центром рассеяния в изображении точки, которое может быть расположено в любой точке плоскости. Если функция рассеяния точки сама по себе симметрична, то она будет симметричной относительно начала осей координат η , ξ и ее можно охарактеризовать одномерным разрезом.

При изменении яркости объекта по двум координатам, освещенность, создаваемая оптической системой в изображении такого объекта, определяется выражением:

$$E(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(x - \xi, y - \eta) h(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (5)$$

Для того чтобы пользоваться выражением (5), необходимо пересчитать яркость из системы координат (x, y) плоскости объектов в освещенность в системе координат (x', y') плоскости изображения по формулам $x' = xf' / L$, $y' = yf' / L$, где f' – фокусное, расстояние объектива; L – расстояние от объекта до главной плоскости объектива.

При рассмотрении одномерной картины распределения освещенности в изображении можно вместо функции рассеяния точки можно пользоваться функцией рассеяния линии. Функция рассеяния линии $A(\xi)$ связана с функцией рассеяния точки $h(\xi, \eta)$ соотношением:

$$A(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi, \eta) d\eta. \quad (6)$$

Если система построения изображения линейна, то изображение любого объекта можно получить соответствующим сложением функций рассеяния всех точек и всех линий, совместно образующих объект.

Построим переходную функцию (пограничную кривую) суммированием элементарных функций рассеяния линии $A(\xi)$, как это показано на рис. 4.

Нормированное распределение освещенности в каждой точке изображения полуплоскости можно описать выражением

$$H(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi) d\xi, \quad (7)$$

где $H(x)$ – переходная функция (пограничная кривая) оптической системы. Из выражения (7) следует, что функция рассеяния линии является производной от переходной функции системы, т. е. $A(\xi) = dH(x) / dx$ (ξ – текущее значение аргумента в системе координат, где ось ξ совпадает с осью координат x).

Переходная функция (пограничная кривая) так же, как и функция рассеяния точки или линии, полностью описывает передаточные свойства двумерных звеньев. Рассмотренные передаточные функции представляют собой реакцию двумерных звеньев на специальные пространственные сигналы и характеризуют передаточные свойства этих звеньев в естественной системе координат плоскости x, y . Если сигналы представлены в виде их пространственно-частотных спектров, то передаточные свойства двумерных звеньев характеризуются их оптическими передаточными функциями (ОПФ).

Оптическая передаточная функция $W(i\vartheta_x, i\vartheta_y)$ может быть определена как отношение комплексного амплитудного спектра сигнала на выходе звена к комплексному амплитудному спектру сигнала на его входе:

$$W(i\vartheta_x, i\vartheta_y) = b_{c.вых_y}(i\vartheta_x, i\vartheta_y) / b_{c.вх_y}(i\vartheta_x, i\vartheta_y). \quad (8)$$

В общем случае, комплексные спектры сигналов можно в записать в виде:

$$b_c(i\vartheta_x, i\vartheta_y) = |b_c(\vartheta_x, \vartheta_y)| e^{i\varphi_c(\vartheta_x, \vartheta_y)} \quad (9)$$

где $|b_c(\vartheta_x, \vartheta_y)|$ – модуль комплексного спектра или амплитудный спектр сигнала; $\varphi_c(\vartheta_x, \vartheta_y)$ – фазовый спектр сигнала.

Тогда по аналогии с формулой (9) выражение (8) можно представить в виде $W(i\vartheta_x, i\vartheta_y) = W(\vartheta_x, \vartheta_y) e^{i\varphi_c(\vartheta_x, \vartheta_y)}$, где $W(\vartheta_x, \vartheta_y)$ – модуль оптической передаточной функции, который является пространственной амплитудно-частотной характеристикой, определяющей зависимость изменения амплитуды сигнала на выходе передаточного звена от пространственной частоты. Одной из

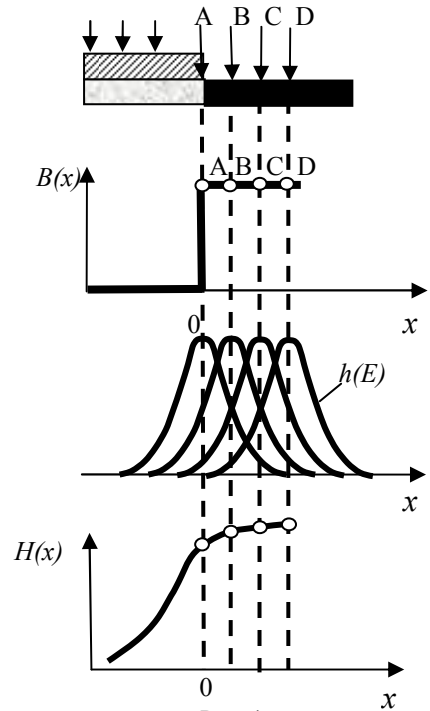


Рис. 4

характеристик процесса передачи оптической системой пространственных частот, является коэффициент изменения амплитуды пространственной синусоиды $W(\vartheta) = k_u / k_0$, где k_u и k_0 – контрасты в плоскости изображения и плоскости объектов соответственно. Эти контрасты могут быть определены в виде:

$$k = \frac{(B_{\max} - B_{\min})}{(B_{\max} + B_{\min})}. \quad (10)$$

Из приведенных выражений следует, что амплитудно-частотная характеристика показывает зависимость коэффициента передачи информации от пространственной частоты. Для этой характеристики предлагается термин «функция передачи информации» (ФПИ).

Поскольку распределение освещенности в изображении описывается интегралом свертки, между оптической передаточной функцией и функцией рассеяния точки $h(x, y)$ существует однозначная связь (оптическая передаточная функция и функция рассеяния точки получаются друг из друга прямым и обратным Фурье-преобразованием):

$$W(i\vartheta_x, i\vartheta_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) e^{i2\pi(\vartheta_x x + \vartheta_y y)} dx dy; \quad (11)$$

$$h(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(i\vartheta_x + i\vartheta_y) e^{i2\pi(\vartheta_x x + \vartheta_y y)} dx dy. \quad (12)$$

Если функции $h(x, y)$ и $W(i\vartheta_x + i\vartheta_y)$ имеют круговую симметрию относительно, нулевой точки, то можно воспользоваться одномерным вариантом формул (11) и (12):

$$W(i\vartheta_x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(x) e^{-i2\pi\vartheta_x x} dx; \quad (13)$$

$$A(x) = \int_{-\infty}^{\infty} W(i\vartheta_x) e^{i2\pi\vartheta_x x} dx. \quad (14)$$

Использование функции $A(x)$ вместо $h(x, y)$ в формулах (13) и (14) предпочтительней, так как методика измерения $A(x)$ обеспечивает более высокую точность, чем измерение $h(x, y)$.

Рассмотрим связь между функцией рассеяния линии $A(x)$ и функцией передачи информации $W(\vartheta_x)$ для одномерного случая. Для этого представим оптическую передаточную функцию, как любую комплексную величину, в виде суммы вещественной и мнимой частей:

$$W(i, \vartheta_x) = W \cos(\vartheta_x) + iW \sin(\vartheta_x). \quad (15)$$

Разложив $e^{-i2\pi\vartheta_x x}$ в выражении (13) по формуле Эйлера, получим

$$W(i, \vartheta_x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(x) \cos 2\pi\vartheta_x x dx + i \int_{-\infty}^{\infty} A(x) \sin 2\pi\vartheta_x x dx, \quad (16)$$

Тогда ФПИ как модуль функции $W(i\vartheta_x)$ определим по формуле

$$W(\vartheta_x) = \sqrt{W^2 \cos^2(\vartheta_x) + W^2 \sin^2(\vartheta_x)}. \quad (17)$$

Соотношения (15) – (17) показывают связь между ФПИ и функцией рассеяния линии. По-видимому, выражение для определения одномерной ФПИ может быть представлено в виде:

$$\varphi(\vartheta_x) = \arctg \frac{W \sin(\vartheta_x)}{W \cos(\vartheta_x)} \quad (18)$$

Функция передачи фазы (ФПФ) показывает зависимость фазового сдвига пространственных синусоидальных составляющих от частот этих составляющих. ФПФ характеризует способность двумерного передаточного звена сохранять координаты отдельных точек в изображении относительно координат этих точек в объекте.

Таким образом, ФПИ и ФПФ полностью определяют оптическую передаточную функцию, т. е. передаточные свойства звена.

Влияния ФПФ двумерных линейных звеньев на построение изображений необходимо учитывать, так как неискаженному воспроизведению изображений соответствует область пространственных частот, в пределах которой ФПФ тождественно равна нулю.

В таком случае под отсутствием искажений понимается точное соответствие первоначальных координат объектов в различных точках изображения. Если же перед системой не ставится задача точной передачи координат объектов, то при расчете ее передаточных свойств ФПФ можно не учитывать.

Отношение k_u/k_0 характеризует уменьшение контраста в изображении по сравнению с контрастом в объекте по мере роста пространственных частот.

Таким образом, с помощью оптической передаточной функции спектр освещенности изображения $b_{из}(i\vartheta_x, i\vartheta_y)$ находится как произведение спектра яркости объекта $b_{об}(i\vartheta_x, i\vartheta_y)$ и оптической передаточной функции $W_{о.с}(i\vartheta_x, i\vartheta_y)$:

$$b_{из}(i\vartheta_x, i\vartheta_y) = b_{об}(\vartheta_x, \vartheta_y) \cdot W(i\vartheta_x, i\vartheta_y). \quad (20)$$

Формула (20) справедлива для случая, когда все пространственные частоты рассматриваются в одной плоскости.

При последовательном соединении нескольких передаточных звеньев сигнал на их выходе определяется соотношением

$$b_{с.в.ых}(i\vartheta_x, i\vartheta_y) = b_{с.в.х}(i\vartheta_x, i\vartheta_y) \prod_{n=1}^{n=m} W_n(i\vartheta_x, i\vartheta_y), \quad (21)$$

где m – количество последовательно соединенных звеньев.

Все рассмотренные выражения применимы к двумерным системам построения изображений для случая, когда эти системы линейны, т.е. интенсивность освещенности в каждой точке изображения можно получить сложением освещенностей от различных независимых источников. Последнее справедливо, если лучистый поток, несущий информацию об изображении, создается источником некогерентного излучения. Для случая когерентных источников излучения суммировать следует не освещенности в изображении (т.е. квадратичные функции амплитуды электромагнитного колебания), а комплексные амплитуды вектора электромагнитного поля [5]. В этом случае вместо функций, характеризующих яркость и освещенность, используются комплексные выражения для амплитуды волны, исходящей от точечного источника, и комплексный коэффициент передачи этой амплитуды.

Определение функции передачи информации объектива. При некогерентном освещении ФПИ объектива линейна относительно энергии излучения и объектив можно считать линейной системой. При использовании принципа суперпозиции подразумевается, что передаточные свойства объектива инвариантны относительно перемещения рассматриваемой точки в плоскости изображения. Для реальных объективов это условие не соблюдается, поскольку их передаточные свойства изменяются при движении точки из параксиальной области к периферии поля зрения, в связи с чем объективу свойственна некоторая пространственная нелинейность.

Идеально сфокусированный безабберационный объектив при его освещении некогерентным светом представляет собой низкочастотный фильтр, передаточные свойства которого определяются только длиной волны λ и относительным отверстием объектива D/f . Если принять, что вследствие расфокусировки безабберационный объектив изображает светящуюся геометрическую точку в виде круглого диска с радиусом окружности r , в котором освещенность распределена равномерно, то функция рассеяния линии для этого случая определяется выражением $A(\xi) = 2\sqrt{r^2 - \xi^2} / (\pi r^2)$, где $0 \leq \xi \leq r$. Множитель $2 / (\pi r^2)$ в это выражение введен для того, чтобы выполнялось условие нормировки

$\int_{-\infty}^{\infty} A(\xi) d\xi = 1$. ФПИ для рассматриваемого случая определяется выражением

$$|W(\vartheta_x)| = \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi) \cos 2\pi\vartheta_x \xi d\xi = \frac{2I(\pi\vartheta_x 2r)}{\pi\vartheta_x 2r}.$$

Эмпирическое выражение для определения ФПИ современных объективов с учетом суммарного влияния aberrаций для конкретных значений f , β и F имеет вид [6]:

$$W_{аб}(\vartheta) = \exp(-0,0035 ftg^2 \beta \vartheta / F^2), \quad (22)$$

где 2β – угол поля зрения; $F = f/D$.

Для нахождения полной ФПИ объектива (с учетом дифракции и aberrаций) необходимо перемножить эти выражения.

ФПИ последовательно расположенных объектов, входящих в состав сложных оптических систем, не всегда можно перемножать. В этих случаях лучше всего вновь измерить ФПИ всей системы. Трудности, возникающие при синтезе сложных оптических систем с последовательно расположенными объективами, объясняются тем, что aberrации, которые учитывают ФПИ, могут иметь положительный или

отрицательный знак. Если знаки аберраций отдельных объективов, входящих в состав сложной системы, одинаковы – можно перемножить их ФПИ, если же знаки разные, перемножать нельзя.

ФПИ сложной оптической системы можно найти методом перемножения ФПИ отдельных элементов (объективов), если в фокальной плоскости каждого объектива установлена идеально рассеивающая поверхность [7].

Для измерения ФПИ объектива разработан ряд методов и приборов. Принцип действия этих приборов основан на использовании методов непосредственного сканирования синусоидального тест-объекта и преобразования функции рассеяния точки, интерференционного метода и др. [8]. Недостатком всех методов фотометрического сканирования изображения является то, что при их использовании необходима исчерпывающая информация о тест-объекте (контраст, форма, размер) и его освещенности.

Использование синусоидальной миры позволяет применять простые математические преобразования, но такую миру сложно изготовить, и, наоборот, применение физически простых мир требует сложной математической обработки.

Выводы. Установлено, что спектры оптических сигналов (ОС), по аналогии с электрическими сигналами, можно описывать в комплексной форме, математическое описание их может быть получено с помощью известных двумерных ряда и интеграла Фурье, учитывающих пространственно-частотное распределение ОС.

Показано, что низкочастотные составляющие пространственно-частотных спектров ОС несут основную информацию о больших распределениях яркости, крупных деталях и равномерных участках в изображении; среднечастотные составляющие спектров сигналов несут информацию о правильности тоновоспроизведения, а высокочастотные составляющие играют основную роль при воспроизведении мелких деталей, резких переходов и контуров изображений. Пространственные сигналы, верхние частоты которых воспроизводятся без искажений, а среднечастотные составляющие ослаблены, будут создавать изображения с уменьшенным количеством градаций; если низкие и средние частоты сигналов воспроизводятся без искажений, а ослаблены высокочастотные составляющие, то в полученных изображениях будут плохо переданы мелкие детали и резкие границы, что эквивалентно изображениям с низкой разрешающей способностью.

Предложено математическое описание передаточных функций (пространственная импульсная, пространственная переходная, оптическая или эквивалентная ей совокупность ФПИ и ФПФ звеньев и систем) несущих информацию о передаточных свойствах двумерных звеньев. Целесообразность выбора той или иной функции для оценки передаточных свойств звена зависит от условий конкретной задачи.

РЕЗЮМЕ

У публікації запропоновано опис спектрів оптичних систем (за аналогією з електричними системами) в комплексній формі, математичний опис передавальних функцій (просторова імпульсна, просторова перехідна, оптична або еквівалентна їй сукупність функцій передачі інформації і функцій передачі фази ланок і систем), що несуть інформацію про передавальні властивості двовимірних ланок.

Ключові слова: передавальна функція, функція передачі інформації, функція передачі фази.

SUMMARY

The article offered the description of the spectra of optical systems (similar to the electrical systems) in the complex form, a mathematical description of the transfer functions (spatial impulse, spatial transition, optical or an equivalent set of functions of communication and the phase transfer function units and systems), which carry information about the transmission properties of two-dimensional units.

Keywords: transfer function, the function of information transfer, the transfer function phase.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Шестов Н.С. Выделение оптических сигналов на фоне случайных помех / Н.С.Шестов. – М.: Сов. Радио, 1967. – 348с.
2. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов / Сергиенко А.Б. – С.Пб.: Питер, 2003. – 604с.
3. Ллойд Дж. Системы тепловидения / Ллойд Дж. Пер. с англ. И.В. Васильченко. Под ред. И.В. Горячева. – М.: Мир, 1978. – 416с.
4. Гуров И.П. Основы теории информации и передачи сигналов / Гуров И.П. – С.Пб.: БХВ-Петербург, 2000. – 97 с.
5. Демехин В.В. Распознавание зрительных образов на основе топологической обработки информации / В.В. Демехин, В.В. Данилов // Технология и конструирование в электронной аппаратуре. – 2007. – № 3. – С. 24-29.
6. Авраменко Ю.Ф. Схемотехника CD проигрывателей / Ю.Ф. Авраменко – С.Пб.: Наука и Техника, 2006. – 352 с.
7. Данилов В.В. Физические основы построения акустооптических устройств селекции оптических сигналов / В.В. Данилов // Радиотехника. – Харьков, 2001. – № 117. – С. 65-70.
8. Данилов В.В. Преобразование информации при акустооптическом взаимодействии / В.В. Данилов // Радиоп физика и электроника: Сб. научн. тр. ИРЭ НАН Украины. – 2002. – Т. 7, № 2. – С. 365-378.

Поступила в редакцию 23.11.2012 г.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

1. Для публікації у «Віснику Донецького університету. Сер. А: Природничі науки» приймаються не опубліковані раніше наукові роботи.

2. Рукопис подається в 2-х примірниках (українською, російською або англійською мовами), надрукованих з одного боку аркуша паперу формату А4 (другий примірник підписується авторами). Обсяг рукопису, як правило, не повинен перевищувати 8 сторінок, включаючи малюнки, таблиці, список літератури. Разом із рукописом подається CD-диск з повним текстом статті й окремими додатковими електронними файлами зазначеними нижче (в форматі WORD for WINDOWS 6.0-7.0 Rus / Office 97-2003). Основний текст статті – шрифт Times New Roman, розмір 10 пт., з вирівнюванням по ширині; резюме, список літератури, таблиці, підписуночі підписи – шрифт Times New Roman, розмір 9. Формули, їх компоненти і усі змінні в тексті та окремо в рядках набираються лише за допомогою редактора формул Microsoft Equation 3.0 або MathType 5.0; текст та змінна – курсивом, матриця і вектор – полужирним курсивом; розмір: 11 пт., 9 пт., 8 пт., 18 пт., 12 пт. (звичайний, крупний індекс, дрібний індекс, крупний символ, дрібний символ – відповідно); поля дзеркальні: верхнє – 25 мм, нижнє – 25 мм, зсередини – 30 мм, зовні – 20 мм. Міжрядковий інтервал – одинарний. Абзацний відступ – 1 см.

3. Рукопис починається з індексу УДК у верхньому лівому кутку сторінки. Текст рукопису повинен відповідати структурній схемі: **назва** – жирний, посередині (прописними літерами без перенесення слів); *ініціали та прізвище авторів*, курсив, по лівому краю (для тих, хто не є співробітником університету, наводиться повна назва організації, яку представляє автор); **резюме** обсягом до 100 слів, має коротко відображати предмет статті, застосовані методи досліджень та основні результати, отримані авторами, та закінчуватися *ключовими словами*; **вступ** (постановка проблеми у загальному вигляді та зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями, аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор, виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується означена стаття, формулювання цілей статті); **основний розділ** (можливі підрозділи, де викладаються основні матеріали дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів); **висновки** з даного дослідження (стисло і чітко підсумовуються основні результати, отримані авторами і перспективи подальших розвідкувань у даному напрямку). Прізвища та ініціали авторів, назва статті, текст резюме і ключові слова українською, російською і англійською мовами додається до рукопису на окремому аркуші та у вигляді окремого файлу. Для авторів – не громадян України надання україномовного перекладу резюме необов'язкове. Сторінки рукопису повинні бути послідовно пронумеровані. Всі значення фізичних величин виражаються в системі СІ. Для текстового матеріалу використовується теперішній час (за виключенням звернення до попередніх статей).

4. Рисунок і таблиці оформляються відповідно ДСТУ 3008-95 та розташовуються по тексту строго в межах друкованого поля книжкової орієнтації сторінок. Уся текстова інформація на рисунках повинна бути чіткою та розбірливою і не мати зайвих деталей (наприклад на графіках не допускаються „вторинні” відмітки на координатних осях та ін.). Необхідно слідкувати за тим, щоб після можливого зменшення до розміру 80 мм висота літер та цифр на рисунку залишалась не меншою 2 мм. Кожний рисунок має підпис (не поєднаний з малюнком), а таблиця – заголовок (вирівнювання по центру). Всі рисунки і таблиці повинні бути послідовно пронумеровані арабськими цифрами. Бажано додавати ілюстративний матеріал в графічному форматі JPG, TIFF, BMP та ін. (графіки – чорно-білі, 300 dpi; фотографії – у відтінках сірого, 300 dpi) у вигляді окремих файлів з назвами *gis1, gif2, ...* Формули мають наскрізну нумерацію з правого поля.

5. Перелік літературних джерел (список літератури) подається загальним списком в кінці рукопису в порядку посилань у тексті (а не в алфавітному порядку) на мові оригіналу відповідно вимог викладених у Бюлетені ВАК України (2008, №3, с. 9-13). Посилання на джерело дається в квадратних дужках. Необхідне включення у список якомога більш свіжих першоджерел з досліджуваного питання (не більш, як трьох - чотирьохрічної давності). Не слід обмежуватись цитуванням робіт, які належать тільки одному колективу авторів чи дослідницькій групі. Дуже бажаним є посилання на сучасні закордонні публікації. Статті, що не містять посилань на роботи, які вийшли протягом останнього десятиріччя, як правило, автоматично вважаються такими, що не відповідають редакційним вимогам.

6. Стаття супроводжується листом-заявою від організації, відомостями про авторів (ПІБ, місце роботи, посада, поштова адреса, телефон, E-mail).

7. Рукописи що не відповідають редакційним вимогам, та статті, що не відповідають тематиці журналу, до розгляду не приймаються.

8. Редакція залишає за собою право проводити редакційну правку рукописів. У разі відмови в публікації статей редколегія не повертає автору рукопис статті. Коректура статей авторам не надсилається.

Матеріали надсилаються за адресою: 83001, м. Донецьк-1, вул. Університетська, 24.
Контактні тел. (062) 302-92-23, 302-92-93
E-mail: res.pro-rector@donnu.edu.ua