МЕХАНІКА

УДК 531.36, 532.595

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ НА СТРУННОМ ПОДВЕСЕ ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА С ДВУХСЛОЙНОЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Н.В. Антоньева, Ю.Н. Кононов

Рассмотрена задача об устойчивости равномерного вращения на струнном подвесе волчка Лагранжа с цилиндрической полостью, полностью заполненной двухслойной идеальной жидкостью разной плотности. В предположении, что внутренняя поверхность раздела двухслойной жидкости при достаточно большой величине угловой скорости вращения близка к цилиндрической, выведено частотное уравнение. Получены и исследованы необходимые условия устойчивости равномерного вращения на струне массивного твердого тела с малым количеством жидкости.

Ключевые слова: струна, вращающиеся твердое тело и двухслойная идеальная жидкость, цилиндрическая полость, устойчивость.

Введение.Необходимые условия устойчивость равномерного вращения на струне волчка Лагранжа с произвольной осесимметричной полостью, целиком заполненной идеальной жидкостью, были исследованы в [1]. Наличие у жидкости свободной поверхности (случай частичного заполнения полости) существенно усложняет задачу. Способы учета свободной поверхности задаче о вращении волчка с цилиндрической полостью были разработаны в известной работе [2]. В статье [3] с учетом функции состояния Соболева С.Л. получила дальнейшее развитие задача, рассмотренная в [2]. Работа [4] посвящена обобщению [2] на случай струнного подвеса, а [5] – на случай двухслойной жидкости. В статье [5] внутренняя поверхность жидкостей в режиме вращения принимается цилиндрической, как и в [2, 4] свободная поверхность, что можно считать вполне справедливым при достаточно большой величине угловой скорости вращения твердого тела.

Настоящая статья посвящена обобщению результатов работы [5] на случай струнного подвеса. Спектр собственных частот малых колебаний механической системы описывается при дополнительном предположении о малости массы жидкости.

Постановка задачи. Рассмотрим тяжелый осесимметричное твердое тело с полостью в виде цилиндра высотой $2c$ и диаметром основания $2a$ ось которого совпадает с осью симметрии тела, закрепленного на нерастяжимой струне длины l в точке O оси симметрии твердого тела. Другой конец струны закреплен в точке O_1 и равномерно вращается с угловой скоростью Ω вокруг вертикали. Цилиндрическая полость, полностью заполненной двумя идеальными несмешивающимися жидкостями плотности ρ_1 и ρ_2 ($\rho_1 \le \rho_2$). В невозмущенном движении твердое тело и жидкости вращаются как одно целое с угловой скоростью Ω и с границей раздела жидкостей (внутренней поверхностью) радиуса b. Исследуем устойчивость этого равномерного вращения механической системы.

Линеаризованные уравнения возмущённого движения твердого тела около тривиального вращения на струне имеют вид [4]

$$ml^2\ddot{\lambda} + m l l_1\ddot{\lambda} = -mgl\lambda + l\left(F_x^0\sin\varphi + F_y^0\cos\varphi - F_z^0\alpha\right) + lF_z^0\lambda,$$

$$ml^2\ddot{\mu} + m l l_1\ddot{\beta} = -mgl\mu + l\left(-F_x^0\cos\varphi + F_y^0\sin\varphi - F_z^0\beta\right) + lF_z^0\mu,$$

$$\left(A + ml_1^2\right)\ddot{\alpha} + m l l_1\ddot{\lambda} + C\dot{\varphi}\dot{\alpha} = -mgl_1\alpha + M_X^0\cos\varphi - M_Y^0\sin\varphi, \tag{1}$$

$$\left(A + ml_1^2\right)\ddot{\beta} + m l l_1\ddot{\mu} - C\dot{\varphi}\dot{\beta} = -mgl_1\beta + M_X^0\sin\varphi + M_Y^0\cos\varphi, \quad C\ddot{\varphi} = 0.$$

Уравнения движения жидкости запишутся так

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - 2\Omega v_i = -\frac{\partial P_i}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial t} + 2\Omega u_i = -\frac{\partial P_i}{\partial y}, \quad \frac{\partial w_i}{\partial t} = -\frac{\partial p_i}{\partial z}, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} + \frac{\partial w_i}{\partial z} = 0, \tag{2}$$

Уравнениям (2) соответствуют граничные условия

$$w_i = -\left(\dot{l}x + \dot{m}y\right) \text{ при } z = d \pm c, \ \left(i = 1,2\right);$$

$$u_2x + v_2y = z\left(\dot{l}x + \dot{m}y\right) \text{ при } x^2 + y^2 = a^2;$$

$$\rho_1\left[\dot{P}_1+\Omega^2\left(u_1x+v_1y\right)-gw_1\right]-\rho_2\left[\dot{P}_2+\Omega^2\left(u_2x+v_2y\right)-gw_2\right]-\left(\rho_1+\rho_2\right)\left(\dot{W}_x^0x+\dot{W}_y^0y\right)=0,$$

$$\bar{u}_1\cdot\bar{v}=\bar{u}_2\cdot\bar{v}\ \text{ при }\ x^2+y^2=b^2, \tag{3}$$

Здесь A, C – главные моменты инерции твердого тела относительно главных центральных осей инерции; m – масса твердого тела; m_0 – масса жидкости в полости тела; α, β, φ – углы Эйлера-Крылова; d – расстояние от точки крепления струны до центра масс твердого тела; $OX^0Y^0Z^0$ – система координат, жестко связанная с твердым телом; OZ^0 – ось симметрии твердого тела и полости; F_x^0, F_y^0, F_z^0, M_x^0, M_y^0 – проекции на оси координат сил и моментов, действующих на твердое тело со стороны жидкости, находящейся в полости; l, m, n – направляющие косинусы оси симметрии полости и твердого тела по отношению к осям $Oxyz$; $\bar{v}_i=(u_i,v_i,w_i)$; l_1 – расстояние от точки крепления струны до центра масс тела; $\bar{n}$ – нормаль к внутренней поверхности раздела жидкостей; $P_i=\rho_i[p_i+(x^2+y^2)\,\Omega^2/2-$ $-gz-xW_x^0-yW_y^0-zW_z^0]$; p_i – давление в i-той жидкости, $(i=1,2)$; $x^2+y^2=b^2$ – внутренняя поверхность раздела жидкостей.

Построение решения задачи. Для изучения устойчивости невозмущенного движения волчка Лагранжа предполагаем, что все функции времени можно представить в виде $u(x,y,z,t)=u_s(x,y,z,s)\mathrm{e}^{st}$. После перехода к новым функциям $Q_{is}=P_{is}-s^2(l_sx+m_sy)z$ и цилиндрическим координатам z,r,θ $\left(x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta\right)$ получаем краевую задачу для определения Q_{is}

$$\frac{\partial^2Q_{is}}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2Q_{is}}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial Q_{is}}{\partial r}=\alpha^2\frac{\partial Q_{is}}{\partial z^2},\quad \frac{\partial Q_{1s}}{\partial r}=0,\ z=d\pm c\ \ \left(i=1,2\right) \tag{4}$$

$$sa\frac{\partial Q_{2s}}{\partial r}+2\Omega\frac{Q_{2s}}{\partial\theta}=2azs\left[\Omega^2s\left(l_s\sin\theta-m_s\cos\theta\right)-\left(s^2+2\Omega^2\right)\left(l_s\cos\theta+m_s\sin\theta\right)\right],\ \ r=a,$$

$$\begin{gathered}s\left(\rho_2Q_{2s}-\rho_1Q_{1s}\right)+\Omega^2b\left[\left(\rho_2u_{2s}-\rho_1u_{1s}\right)\cos\theta+\left(\rho_2v_{2s}-\rho_1v_{1s}\right)\sin\theta\right]+\\ +g\left(\rho_2\mathrm{w}_{2s}-\rho_1\mathrm{w}_{1s}\right)=\Delta\rho_2s^3zb\left(l_s\cos\theta+m_s\sin\theta\right)+\\ +bls\left(s^2+4\Omega^2\right)\left[\left(s^2-\Omega^2\right)\left(\xi_s\cos\theta+\eta_s\sin\theta\right)+2s\Omega\left(\xi_s\sin\theta-\eta_s\cos\theta\right)\right],\quad r=b,\\ u_{1s}\cos\theta+v_{1s}\sin\theta=u_{2s}\cos\theta+v_{2s}\sin\theta,\quad r=b.\end{gathered} \tag{5}$$

Здесь

$$\alpha^2=-\left(s^2+4\Omega^2\right)/s^2,\ \ \Delta\rho=\rho_2-\rho_1.$$

Разложим функции Q_{is} и z в ряд Фурье по косинусам на отрезке $d-c\le z\le d+c$

$$Q_{is}=\sum_{j=0}^{\infty}C_j\left[A_{ij}(r)\cos\theta+B_{ij}(r)\sin\theta\right]\cos k_j\left(z-c+d\right), \tag{6}$$

$$z=d-\frac{8c}{\pi^2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\left(2j+1\right)^2}\cos k_j\left(z-c+d\right)=\sum_{j=0}^{\infty}C_j\cos k_j\left(z-c+d\right), \tag{7}$$

где

$$C_0=d,\quad C_j=-2\big/(ck_j^2),\quad k_j=\pi(2j+1)\big/(2c)\quad (j=0,1,2,...);$$

$$A_{ij}+i\,B_{ij}=\left(l_s+im_s\right)T_{1i}(\alpha k_jz),\quad A_{10}+i\,B_{10}=\left(l_s+i\,m_s\right)X_{10}r+\left(\xi_s+i\eta_s\right)X_{01}r$$

$$A_{20}+i\,B_{20}=\left(l_s+i\,m_s\right)\left(X_{20}r+Z_{20}/r\right)+\left(\xi_s+i\,\eta_s\right)\left(X_{02}r+Z_{02}/r\right),$$

$$T_{1i}(\alpha k_jz)=X_{ij}J_1(\alpha k_jz)+Z_{ij}Y_1(\alpha k_jz),\quad T_{0i}(\alpha k_jz)=X_{ij}J_0(\alpha k_jz)+Z_{ij}Y_0(\alpha k_jz),$$

$J_1(\alpha k_jz)$, $Y_1(\alpha k_jz)$ – функции Бесселя первого и второго рода первого порядка, X_{i0}, Z_{i0}, X_{0i}, Z_{0i}, X_{ij}, Z_{ij} – величины, не зависящие от r, определяемые из граничных условий (5). В виду удобства записи следует отличать нижний индекс суммирования от мнимой единицы.

Подставляя (6) и (7) в граничные условия (5), получим

$$\left(sa\frac{d}{dr}-2i\Omega\right)\left(A_{2j}+iB_{2j}\right)=-2as\left(s+i\Omega\right)\left(s-2i\Omega\right)\left(l_s+im_s\right),\quad r=a,$$

$$\begin{gathered}\left[\Omega^2\left(sb\frac{d}{dr}-2i\Omega\right)-s\left(s^2+4\Omega^2\right)\right]\left[\rho_2\left(A_{2j}+iB_{2j}\right)-\rho_1\left(A_{1j}+iB_{1j}\right)\right]= \\ =\Delta\rho\left[s^2b\left(s-2i\Omega\right)\left(s+i\Omega\right)^2\left(l_s+im_s\right)-bls\left(s+i\Omega\right)^2\left(s^2+4\Omega^2\right)\left(\xi_s+i\eta_s\right)\right],\quad r=b,\end{gathered} \tag{8}$$

$$\left(sb\frac{d}{dr}-2i\Omega\right)\left(A_{1j}+iB_{1j}\right)=\left(sb\frac{d}{dr}-2i\Omega\right)\left(A_{2j}+iB_{2j}\right),\quad r=b.$$

Из граничных условий (8) получим систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных X_{ij}, Z_{ij} $(j\neq 0)$ и неизвестных X_{10}, X_{20}, X_{01}, X_{02} и Z_{20}, Z_{02}. Так, например, для последних неизвестных будем иметь следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}&\left(s-2i\Omega\right)X_{20}-\left(s+2i\Omega\right)Z_{20}/a^2=-2s\ \left(s+i\Omega\right)\left(s-2i\Omega\right),\\ &\left(s-2i\Omega\right)X_{02}-\left(s+2i\Omega\right)Z_{02}/a^2=0,\\ &\left(s-2i\Omega\right)\left(s+i\Omega\right)^2\left(\rho_1X_{10}-\rho_2X_{20}\right)-\rho_2\left(s+2i\Omega\right)\ \left(s^2-2i\Omega s+\Omega^2\right)\ Z_{20}/b^2=\\ &\qquad=\Delta\rho s^2\left(s-2i\Omega\right)\ \left(s+i\Omega\right)^2,\\ &\left(s-2i\Omega\right)\left(s+i\Omega\right)^2\left(\rho_1X_{01}-\rho_2X_{02}\right)-\rho_2Z_{02}\left(s+2i\Omega\right)\ \left(s^2-2i\Omega s+\Omega^2\right)/b^2=\\ &\qquad=-\Delta\rho l\,s\left(s^2+4\Omega^2\right)\left(s+i\Omega\right)^2,\\ &\left(s-2i\Omega\right)\left(X_{10}-X_{20}\right)+Z_{20}\left(s+2i\Omega\right)/b^2=0,\\ &\left(s-2i\Omega\right)\left(X_{01}-X_{02}\right)+Z_{02}\left(s+2i\Omega\right)/b^2=0.\end{aligned} \tag{9}$$

Далее рассмотрим общий случай, когда $j\neq 0$. Тогда из выражений (6) следует

$$\begin{gathered}A_{ij}+iB_{ij}=\left(l_s+im_s\right)T_{ij}(\alpha k_jr),\\ T_{1i}(\alpha k_jr)=X_{ij}J_1(\alpha k_jr)+Z_{ij}Y_1(\alpha k_jr),\\ T_{0i}(\alpha k_jr)=X_{ij}J_0(\alpha k_jr)+Z_{ij}Y_0(\alpha k_jr).\end{gathered} \tag{10}$$

Из граничных условий (8) с учетом (10) получим систему уравнений относительно неизвестных X_{1j}, X_{2j}, Z_{2j}

$$J_aX_{2j}+Y_aZ_{2j}=\tilde b_1,\quad \tilde J_bX_{1j}+J_{1b}X_{2j}+Y_{1b}Z_{2j}=\tilde b_2,\quad J_bX_{1j}-J_bX_{2j}-Y_bZ_{2j}=0. \tag{11}$$

Здесь

$$\begin{gathered}J_a=\alpha sk_jaJ_0(\alpha k_ja)-\left(s+2i\Omega\right)J_1(\alpha k_ja),\quad J_b=\alpha sk_jbJ_0(\alpha k_jb)-\left(s+2i\Omega\right)J_1(\alpha k_jb),\\ Y_a=\alpha sk_jaY_0(\alpha k_ja)-\left(s+2i\Omega\right)Y_1(\alpha k_ja),\quad Y_b=\alpha sk_jbY_0(\alpha k_jb)-\left(s+2i\Omega\right)Y_1(\alpha k_jb),\\ J_{1b}=-\rho_2s^*J_1(\alpha k_jb),\quad Y_{1b}=-\rho_2s^*Y_1(\alpha k_jb),\quad \tilde J_b=\Delta\rho\Omega^2J_b+s^*\rho_1J_1(\alpha k_jb),\\ \tilde Y_b=\Delta\rho\Omega^2Y_b+s^*\rho_1Y_1(\alpha k_jb),\quad s^*=s\left(s^2+4\Omega^2\right),\quad \tilde b_1=-2as\left(s+i\Omega\right)\left(s-2i\Omega\right),\\ \tilde b_2=\Delta\rho s^2b\left(s+i\Omega\right)^2\left(s-2i\Omega\right).\end{gathered}$$

Следует отметить, что корни определителя системы (11) совпадают с собственными частотами колебаний равномерно вращающейся двухслойной жидкости [6].

По формулам

$$\begin{gathered}F_x=\sum_{i=1}^{2}\int_{\sigma_i}p_i\cos Xv\,d\sigma,\quad F_y=\sum_{i=1}^{2}\int_{\sigma_i}p_i\cos Yv\,d\sigma,\quad F_z=\sum_{i=1}^{2}\int_{\sigma_i}p_i\cos Zv\,d\sigma,\\ M_x=\sum_{i=1}^{2}\int_{\sigma_i}p_i\left(y\cos Zv-z\cos Yv\right)d\sigma,\quad M_y=\sum_{i=1}^{2}\int_{\sigma_i}p_i\left(z\cos Xv-x\cos Zv\right)d\sigma,\end{gathered} \tag{12}$$

в которых Σ_i – поверхность контакта i-ой жидкости с твердым телом; $\cos(x\nu)$, $\cos(y\nu)$, $\cos(z\nu)$ – косинусы внешней нормали ν к поверхности σ_i, вычисляются силы и моменты, действующие со стороны двухслойной жидкости на твердое тело.

Как и в работе [2], с точностью до малых первого порядка получим

$$F_x^s = -m'g, \quad M_X^s + iM_Y^s = M_x^s + iM_y^s, \quad F_x^s + iF_y^s = \Lambda_0\left[d\left(l_s + im_s\right) + l\left(\xi_s + i\eta_s\right)\right],$$

$$\frac{M_x^s + iM_y^s}{\left(l_s + im_s\right)} = -2\pi icd\left(s + i\Omega\right)^2\left[d + l\frac{\xi_s + i\eta_s}{l_s + im_s}\right]\Lambda_1 -$$

$$-i\left\{\pi c\left[2d^2 a\rho_2\left(X_{20}a + \frac{Z_{20}}{a}\right) + \left(\Omega^2 + s^2\right)\left[\frac{2}{3}a^2\left(3d^2 + c^2\right)\rho_2 - \frac{1}{2}\left(\rho_1\tilde{b}_{01} + \rho_2\tilde{b}_{02}\right)\right] + \right.\right. \tag{13}$$

$$\left.\left. + \sum_{j=0}^{\infty} C_k^2\left(\tilde{J}_{1j}X_{1j} + \tilde{Y}_{1j}Z_{1j} + \tilde{J}_{2j}X_{2j} + \tilde{Y}_{2j}Z_{2j}\right)\right]\right\},$$

где

$$\Lambda_0 = 2\pi c\left(s + i\Omega\right)^2\Lambda_1, \quad \Lambda_1 = \left[\rho_1 b^2 + \frac{\rho_2 a^2\left(a^2 - b^2\right)}{b^2\left(s + i\Omega\right)^2 / \left(s^2 + \Omega^2 - 2i\Omega s\right) + a^2}\right],$$

$$\beta = 4mgdA / \left(C^2\Omega^2\right), \quad s = i(\tau - 1)\Omega, \quad \tilde{J}_{1j} = \rho_1\tilde{s}J_{1j}, \quad \tilde{s} = s^2 / \left(s^2 + 4\Omega^2\right),$$

$$\tilde{J}_{2j} = \rho_2\left[\alpha J_1(\alpha k_j a) + \tilde{s}J_{2j}\right], \quad J_{1j} = 2b_1 J_1(\alpha k_j b) - \alpha k_j b_1^2 J_0(\alpha k_j b),$$

$$Y_{1j} = 2b_1 Y_1(\alpha k_j b) - \alpha k_j b_1^2 Y_0(\alpha k_j b), \quad \tilde{Y}_{2j} = \rho_2\left[\alpha Y_1(\alpha k_j a) + \tilde{s}Y_{2j}\right], \quad \tilde{Y}_{1j} = \rho_1\tilde{s}Y_{1j},$$

$$J_{2j} = 2\left[a_1 J_1(\alpha k_j a) - b_1 J_1(\alpha k_j b)\right] - \alpha k_j\left[a_1^2 J_0(\alpha k_j a) - b_1^2 J_0(\alpha k_j b)\right],$$

$$Y_{2j} = 2\left[a_1 Y_1(\alpha k_j a) - b_1 Y_1(\alpha k_j b)\right] - \alpha k\left[a_1^2 Y_0(\alpha k_j a) - b_1^2 Y_0(\alpha k_j b)\right], \quad a_1 = \frac{a}{l_1}, \quad b_1 = \frac{b}{l_1}.$$

Тогда частотное уравнение с учетом (13) при $s = i(\tau - 1)\Omega$ запишется следующим образом:

$$A'\tau^2 - C\tau + \frac{C^2}{4A'}\beta = -\left(s + i\Omega\right)^2 mll_1\frac{2\pi c\left(s + i\Omega\right)^2\Lambda_1}{ml\left(s + i\Omega\right)^2 + \left(m + m_0\right)g} -$$

$$-2\pi icd\left(s + i\Omega\right)^2\Lambda_1\left(d - l\frac{\left(s + i\Omega\right)^2 md + 2d\pi c\left(s + i\Omega\right)^2\Lambda_1}{ml\left(s + i\Omega\right)^2 + \left(m + m_0\right)g - 2d\pi c\left(s + i\Omega\right)^2\Lambda_1}\right) +$$

$$+\pi c\left\{\tau(\tau - 2)\left[\frac{2}{3}\left(3d^2 + c^2\right)a^2\rho_2 - \frac{1}{2}\left(\rho_1\tilde{b}_{01} + \rho_2\tilde{b}_{02}\right)\right] - \frac{2d^2 a\rho_2}{\Omega^2}\left(X_{20}a + Z_{20}/a\right) - \right. \tag{14}$$

$$\left. -\frac{1}{\Omega^2}\sum_{j=0}^{\infty} C_k^2\left(\tilde{J}_{1j}X_{1j} + \tilde{Y}_{1j}Z_{1j} + \tilde{J}_{2j}X_{2j} + \tilde{Y}_{2j}Z_{2j}\right)\right\}, \qquad A' = A + ml_1^2.$$

Таким образом, получено частотное уравнение (14) малых колебаний равномерно вращающегося твердого тела на струне, содержащего двухслойную идеальную жидкость. Спектр частот малых колебаний описывается множеством действительных корней этого уравнения. Необходимое условие устойчивости равномерного вращения волчка состоит в требовании, чтобы все корни уравнение (14) были действительными. Следует отметить, это уравнение является довольно сложным для аналитического исследования. При $\rho_1 = 0$ уравнение (14) совпадают с [4].

Правую часть уравнения (14) обозначим через $R(\tau)$, а левую – через $\Phi(\tau)$. Функция $R(\tau)$ содержит систему полюсов $\{\tau_0 \in R\}$ [4]. Если

$$\Phi\left(\tau_0\right) \geq m'd\left(\tau_0\right) = D(\tau_0), \tag{15}$$

то корень уравнения (14) $\tau = \tau_0 + D/\Phi(\tau_0)$ действителен, так как действительно τ_0. Если (15) не выполняется, то, представляя $\Phi(\tau)$ в виде

$$\begin{gathered}\Phi'(\tau_1)(\tau-\tau_1)+o(1)=\Phi'(\tau_1)(\tau-\tau_1+o(1))=D(\tau_0)/(\tau-\tau_0),\\ \Phi(\tau_1)=0,\quad \Phi'(\tau_1)=d\Phi(\tau)/d\tau,\end{gathered},$$

найдем корни (14)

$$\tau=(\tau_1+\tau_0)/2\pm\sqrt{(\tau_1-\tau_0)^2/4+D(\tau_0)/\Phi'(\tau_1)}.$$

Корни будут действительными, если $(\tau_1-\tau_0)^2 \ge -4D(\tau_0)/\Phi'(\tau_1)$. При выполнении условия

$$(\tau_1-\tau_0)^2 < -4D(\tau_0)/\Phi'(\tau_1), \tag{16}$$

корни имеют ненулевую мнимую часть, а так как эти корни комплексно-сопряженные, то среди собственных значений задачи будет значение с положительной действительной частью и, следовательно, возмущенное движение системы не будет оставаться малым. В спектр собственных значений войдут также корни уравнения $\Phi(\tau)=0$, не близкие к $\{\tau_0\}$.

Неравенство (16) дает возможность строить алгоритм определения областей неустойчивости тривиального вращения системы. Некоторые зависимости областей неустойчивости от параметров задачи можно указать рассматривая предельный переход $\Omega \to \infty$. Уравнение $\Phi(\tau)=0$ имеет три корня

$$\tau_1^0 \approx C/A,\quad \tau_2^0 \approx 0,\quad \tau_3^0 \approx -\theta_1/C',\quad \left(\theta_1 = Kg/(l_1\Omega^2)\right).$$

Для $\tau_1^0 \approx C/A$ имеем $\Phi'(\tau_1^0)>0$, $D(\tau_0)$ может быть меньше нуля.

В качестве примера в табл. 1 для $\rho_{12}=0{,}01;\ 0{,}1;\ 0{,}5$ и $\tilde b^2=0{,}2$ ($\tilde b = b/a$, $\rho_{12}=\rho_1/\rho_2$, $0\le \tilde b \le 1$, $0 \le \rho_{12} \le 1$) приведены значения полюсов τ_0 и вычисленные три корня x_1, x_2, x_3 (через x обозначена величина $x = c/(a(2j+1))$), уравнения (14), для которых $D(\tau_0)<0$.

Таблица 1

τ_0	$\rho_{12}=0{,}01$			$\rho_{12}=0{,}1$			$\rho_{12}=0{,}5$		
	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3
0	0,912	0,505	0,437	0,924	0,501	0,423	0,966	0,494	0,368
0,02	0,933	0,517	0,449	0,946	0,513	0,434	0,988	0,506	0,377
0,04	0,955	0,528	0,460	0,968	0,525	0,445	1,011	0,519	0,387
0,06	0,978	0,540	0,472	0,991	0,537	0,456	1,035	0,532	0,397
0,08	1,001	0,553	0,485	1,014	0,550	0,468	1,060	0,546	0,407
0,1	1,025	0,566	0,498	1,039	0,564	0,480	1,085	0,560	0,417

Из данных табл. 1 следуют следующие интервалы неустойчивости:

$$(0{,}912;\ 1{,}25)\cup(0{,}505;\ 0{,}566)\cup(0{,}437;\ 0{,}498)\quad (\rho_{12}=0{,}01),$$

$$(0{,}924;\ 1{,}039)\cup(0{,}501;\ 0{,}564)\cup(0{,}423;\ 0{,}480)\quad (\rho_{12}=0{,}1),$$

$$(0{,}966;\ 1{,}085)\cup(0{,}494;\ 0{,}560)\cup(0{,}368;\ 0{,}417)\quad (\rho_{12}=0{,}5).$$

Следовательно, если $\tau_1 \to \tau_0$, то начиная с некоторого Ω^0 для любого $\Omega > \Omega^0$ условие неустойчивости (16) выполнено и уравнение (18) будет иметь пару комплексно-сопряженных корней.

Выводы. Получено частотное уравнение возмущенного движения волчка Лагранжа на струне с цилиндрической полостью, полностью заполненной двухслойной идеальной жидкостью. Проведено исследование собственных частот колебаний вращающейся двухслойной идеальной жидкости. Показано, что стратификация приводит к уменьшению собственных частот колебаний жидкости и появлению предельных частот. В предположении малости массы жидкости по сравнению с твердым телом разработан алгоритм исследования влияния стратификации жидкости на необходимое условие устойчивости равномерного вращения твердого тела. Показано, что влиянием стратификации на устойчивость вращения твердого тела можно пренебрегать при $\rho_{12} < 0{,}1$ и $\tilde b < 0{,}05$.

РЕЗЮМЕ

Розглянуто задачу про стійкість рівномірного обертання на струні дзиґи Лагранжа з циліндричною порожниною, повністю заповненої двошарової ідеальною рідиною різної щільності. У припущенні, що внутрішня поверхня розділу двошаровою рідини при досить великій величині кутової швидкості обертання близька до циліндричної, виведено частотне рівняння. Отримано і досліджено необхідні умови стійкості рівномірного обертання на струнному підвісі для масивного твердого тіла і малої кількості рідини.

Ключові слова: струна, обертове тверде тіло та двошарова ідеальна рідина, циліндрична порожнина, стійкість.

SUMMARY

The problem of the stability of the uniform rotation of the Lagrange top on a string with a cylindrical cavity is completely filled with two layers of different density perfect fluid. Assuming that the inner surface of the two-layer liquid at a sufficiently high angular velocity value is close to the cylinder, the frequency equation is derived. Obtained and investigated the necessary conditions for the stability of the uniform rotation on a string suspension for a massive solid and a small amount of liquid.

Keywords: string, rotating rigid body and two-layer ideal fluid, cylindrical cavity, stability.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горбачук М.Л. Об устойчивости движения подвешенного на струне твердого тела с жидким наполнением / М.Л. Горбачук, Г.П. Слепцова, М.Е. Темченко // Украинский математический журнал. – 1968. – Т. 20, № 5.– С. 586-602.
2. Stewartson R. On the stability of a spinning top containing liquid / R. Stewartson // J. Fluid Mechanics. – 1959. – Vol. 5, pt. 4. – P. 577-592.
3. Дяченко М.П. Про коливання гіроскопу з порожниною, частково заповненою нев’язкою нестисливою рідиною / М.П. Дяченко // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1971. – Вип. 10. – С. 915-919.
4. Куликов В.П. О малых колебаниях около тривиального вращения на струне твердого тела с полостью, частично заполненной жидкостью / В.П. Куликов, В.А. Самсонов // Механика твердого тела. – 1985. – № 4. – С. 33-37.
5. Кононов Ю.Н. Об устойчивости равномерного вращения волчка Лагранжа с коаксиальной цилиндрической полостью, заполненной двухслойной идеальной жидкостью / Ю.Н. Кононов, Н.В. Антоньева // Вестн. Донецкого нац. ун-та. Сер. А. Естественные науки. – 2012. – № 2. – С. 46-50.
6. Kononov Y.N. Free oscillations of a rotating ideal stratified liquids / Y.N. Kononov, Chen Men-shi // Journal of Sichuan University. Engineering Science Edition. – 2001. –Vol. 33, No 5. – P. 112-115.

Поступила в редакцию 18.10.2013 г.