МАТЕМАТИКА

УДК 517.3

ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА ХАНКЕЛЯ

Е.В. Величко[1], И.Г. Ткаченко[2]
[1]Таврический государственный агротехнологический университет, г. Мелитополь
[2]Государственное высшее учебное заведение «Запорожский национальный университет», г. Запорожье

В статье приведен способ вычисления интегралов типа Ханкеля от функций, определяемых интегральным соотношением. Получено тождество, позволяющее сводить их к собственным интегралам, которые не содержат функцию Бесселя. В некоторых случаях рассматриваемые интегралы удается вычислить аналитически.
Ключевые слова: функция Бесселя, интеграл Ханкеля, тождество, несобственный интеграл.

Введение. Среди математиков и инженеров большое применение имеют справочники, в которых приведены таблицы интегралов. Их использование позволяет значительно упростить математические выкладки. Наиболее известными являются справочники [1–4]. На практике оказывается, что одни и те же интегралы получаются при решении различных конкретных задач, поэтому пополнение этих справочников является актуальной задачей. Многочисленные приложения преобразования Ханкеля описаны в книге [5]. Также преобразование Ханкеля встречается при вычислении кратных преобразования Фурье [6]. Поэтому получение тождества для несобственных интегралов, содержащих функцию Бесселя, является достаточно актуальной задачей.

В данной статье получено новое тождество, которое в некоторых случаях позволяет несобственный интеграл типа Ханкеля записать через элементарные функции, а в некоторых – через более простые собственные интегралы от элементарных функций.

Частный случай. Рассмотрим несобственный интеграл Ханкеля второго рода

$$I(a;r)=\int_0^{\infty}\frac{(\sin pa - p\,a\cos pa)}{p^2}J_0(pr)\,dp\,. \tag{1}$$

Заметим, что данный интеграл сходится, поскольку при $p=0$ подынтегральная функция имеет устранимый разрыв, а при $p\to\infty$ модуль подынтегральной функции мажорируется функцией $Cp^{-3/2}$. Интегралов типа (1) нет в указанных выше фундаментальных справочниках. В данной статье вычислим точное его значение. Ограничимся рассмотрением случая $a>0, r>0$.

Воспользуемся тождеством, которое можно проверить непосредственно:

$$\int_0^a \xi\sin p\xi\, d\xi=\frac{1}{p^2}(\sin pa - pa\cos pa). \tag{2}$$

Подставим интегральное представление (2) в исходный интеграл

$$I(a;r)=\int_0^{\infty}\frac{(\sin pa - p\,a\cos pa)}{p^2}J_0(pr)\,dp=\int_0^{\infty}\left(\int_0^a \xi\sin(p\xi)\,d\xi\right)J_0(pr)\,dp\,.$$

Формально поменяем порядок интегрирования и получим

$$I(a;r)=\int_0^a \xi\left(\int_0^{\infty}\sin p\xi\cdot J_0(pr)\,dp\right)d\xi=\int_0^a \xi\, R(\xi;r)\,d\xi\,.$$

Функция $R(\xi;r)$ может быть записана через элементарные функции [4]:

$$R(\xi;r)=\int_0^{\infty}\sin p\xi\, J_0(pr)\,dp=\begin{cases}0,\ 0<\xi<r,\\ \dfrac{1}{\sqrt{\xi^2-r^2}},\ 0<r<\xi.\end{cases} \tag{3}$$

© Величко Е.В., Ткаченко И.Г.

Замечание. Поскольку несобственный интеграл в формуле (3) сходится, но неравномерно относительно $\xi \in (0; a]$, то доказать законность изменения порядка интегрирования, опираясь на достаточное условие, нельзя.

Рассмотрим два случая. Если $a > r$, то

$$I(a;r) = \int_0^r \xi R(\xi; r) d\xi + \int_r^a \xi R(\xi; r) d\xi = \int_r^a \xi R(\xi; r) d\xi = \int_r^a \frac{\xi \cdot d\xi}{\sqrt{\xi^2 - r^2}} = \sqrt{a^2 - r^2}.$$

Если $a \le r$, то

$$I(a;r) = \int_0^a \xi \cdot 0 \cdot d\xi = 0.$$

Запишем полученный результат одной формулой

$$\int_0^\infty \frac{(\sin pa - p\,a \cos pa)}{p^2} J_0(pr)\,dp = \begin{cases} 0, \ 0 < a < r, \\ \sqrt{a^2 - r^2}, \ 0 < r < a. \end{cases}$$

Учитывая, что функция $I(a;r)$ является четной по переменной r и нечетной по переменной a, можно записать явный вид функции $I(a;r)$ при всех значениях параметров:

$$I(a;r) = \int_0^\infty \frac{(\sin pa - pa \cos pa)}{p^2} J_0(pr)\,dp = \begin{cases} 0, \ |a| \le |r|, \\ \operatorname{sign}(a) \cdot \sqrt{a^2 - r^2}, \ |r| < |a|. \end{cases} \tag{4}$$

Формула (4) представляет собой преобразование Ханкеля функции $(\sin xa - xa \cos xa)/x^3$. Поэтому, обращая это преобразование, получим, что

$$\int_0^a p\sqrt{a^2 - p^2} J_0(px)\,dp = \frac{\sin xa - xa \cos xa}{x^3}.$$

Это известное соотношение, которое получается, в частности, из формул 2.12.4.8 [4], если перейти от функции Бесселя полуцелого порядка к тригонометрическим функциям. Аналогичные рассуждения по поводу обращения преобразования имеют место и в общем случае при условии сходимости интегралов.

Общий случай. Пусть $a > 0, r > 0$. Возьмем произвольную, непрерывную на отрезке $[0; a]$ функцию $f(\xi)$ и введем обозначение

$$F(a;p) = \int_0^a f(\xi) \sin p\xi d\xi. \tag{5}$$

Рассмотрим интеграл

$$G(a;r) = \int_0^\infty F(a;p) J_0(pr)\,dp. \tag{6}$$

Если интеграл (6) сходится, то из соотношений (3), (5), (6) следует

$$G(a;r) = \int_0^\infty F(a;p) J_0(pr)\,dp = \begin{cases} 0, \ 0 \le a \le r, \\ \displaystyle\int_r^a \frac{f(\xi) d\xi}{\sqrt{\xi^2 - r^2}}, \ 0 < r < a. \end{cases} \tag{7}$$

На основании тождества (7) можно вычислять интегралы Ханкеля. Рассмотрим несколько случаев функции $f(\xi)$.

1. $f(\xi) = 1$. В этом случае на основании (5) получим

$$F(a;p) = \int_0^a \sin p\xi d\xi = \frac{1 - \cos pa}{p},$$

а функция $G(a;r)$ (6) принимает вид

$$G(a;r)=\int_0^\infty \frac{1-\cos pa}{p} J_0(pr)dp .$$

Найдем значение данного интеграла, используя тождество (7):

$$G(a;r)=\begin{cases} 0,\ 0\le a\le r, \\ \displaystyle\int_r^a \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2-r^2}} = \ln\left|\xi+\sqrt{\xi^2-r^2}\right|\Big|_r^a = \ln\frac{a+\sqrt{a^2-r^2}}{r},\ 0<r<a. \end{cases}$$

Заметим, что значение интеграла $\int_0^\infty \frac{1-\cos pa}{p} J_0(pr)dp$ приведено в [3]. Оно с точностью до обозначений совпадает с полученным.

2. $f(\xi)=\xi^2$. В этом случае

$$F(a;p)=\int_0^a \xi^2 \sin p\xi d\xi = \frac{2pa\sin pa+2\cos pa-2-p^2a^2\cos pa}{p^3},$$

$$G(a;r)=\int_0^\infty \frac{2pa\sin pa+2\cos pa-2-p^2a^2\cos pa}{p^3} J_0(pr)dp = \begin{cases} 0,\ 0\le a\le r, \\ \displaystyle\int_r^a \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\xi^2-r^2}}, 0<r<a \end{cases} =$$

$$=\begin{cases} 0,\ 0\le a\le r, \\ \dfrac{a\sqrt{a^2-r^2}-r^2\ln|r|}{2}+\dfrac{r^2}{2}\ln\left|a+\sqrt{a^2-r^2}\right|,\ 0<r<a. \end{cases} \tag{8}$$

3. $f(\xi)=\sin b\xi$. Тогда

$$F(a;p)=\int_0^a \sin b\xi \sin p\xi d\xi = \frac{b\sin pa\cos ba - p\sin ba\cos pa}{p^2-b^2},$$

$$G(a;r)=\int_0^\infty \frac{b\sin pa\cos ba - p\sin ba\cos pa}{p^2-b^2} J_0(pr)dp = \begin{cases} 0,\ 0\le a\le r, \\ \displaystyle\int_r^a \frac{\sin b\xi d\xi}{\sqrt{\xi^2-r^2}}, 0<r<a. \end{cases} \tag{9}$$

4. $f(\xi)=\cos b\xi$. В этом случае имеем

$$F(a;p)=\int_0^a \cos b\xi \sin p\xi d\xi = \frac{p\cos ba\cos pa + b\sin ba\cos pa - p}{b^2-p^2},$$

$$G(a;r)=\int_0^\infty \frac{p\cos ba\cos pa + b\sin ba\cos pa - p}{b^2-p^2} J_0(pr)dp = \begin{cases} 0,\ 0\le a\le r, \\ \displaystyle\int_r^a \frac{\cos b\xi d\xi}{\sqrt{\xi^2-r^2}}, 0<r<a. \end{cases} \tag{10}$$

Соотношения (4), (8)–(10) отсутствуют в справочниках [1–4]. Очевидно, что выбирая различные функции $f(\xi)$, можно продолжить процесс получения подобных тождеств.

Достаточное условие равенства нулю интеграла $G(a;r)$, $r>a$. Получим достаточное условие того, что при $r>a$ сходящийся интеграл вида (6) будет равен нулю. Это будет иметь место, если можно по заданной функции $F(a;p)$ так подобрать функцию $f(\xi)$, чтобы выполнялось соотношение (5). Это интегральное условие сведем к дифференциальному. Тождество (5) продифференцируем по переменной a:

$$\frac{\partial F(a;p)}{\partial a} = f(a)\sin pa - f(0)\sin 0 = f(a)\sin pa .$$

Видно, что

$$f(a) = \frac{F_a'(a;p)}{\sin pa} . \tag{11}$$

Функция $f(a)$ будет определяться этим условием, если правая часть не зависит от p. Для чего необходимо и достаточно

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{F_a'(a;p)}{\sin pa}\right) = 0 . \tag{12}$$

Полагая в формуле (5) $a = 0$, получим

$$F(0;p) = 0 . \tag{13}$$

Таким образом, если функция $F(a;p)$ удовлетворяет условиям (12), (13), то функцию $F(a;p)$ можно представить в виде (5). При этом функция $f(\xi)$ определяется формулой (11). Можно убедиться непосредственной проверкой, что рассмотренные функции удовлетворяют полученному условию. Полученные рассуждения, по сути, являются доказательством следующей теоремы.

Теорема. Пусть задан интеграл $G(a;r) = \int_0^\infty F(a;p)J_0(pr)dp$, сходящийся при значениях параметров $a, r > 0$. Если функция $F(a;p)$ удовлетворяет условиям (12), (13), то при $r > a$ интеграл $G(a;r) \equiv 0$.

Заключение. В статье получены аналитические выражения для некоторых классов интегралов, содержащих функцию Бесселя, значения которых отсутствуют в доступных авторам справочниках. Несобственные интегралы, для которых не удалось получить аналитического выражения, сведены к более простым интегралам по конечной области интегрирования.

РЕЗЮМЕ

У статті наведено спосіб обчислення інтегралів типу Ханкеля від функцій, що визначаються інтегральнім співвідношенням. Отримано тотожність, яка дозволяє зводити їх до власних інтегралів, які не містять функцію Бесселя. У деяких випадках інтеграли, що розглядаються, вдалося обчислити аналітично.

Ключові слова: функція Бесселя, інтеграл Ханкеля, тотожність, невласний інтеграл.

SUMMARY

The technique of the evaluation of integrals of type Hankel of the function, which are determined by the integral expression, has been given. One can reduce these integrals to the improper integrals, which are free of Bessel functions, by means of the identity, obtained in this article. The considered integrals can be evaluated analytically in some cases.

Keywords: Bessel function, the integral Hankel, identity, improper integrals.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамовиц М. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / М. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
2. Бейтмен Г. Таблицы интегральных преобразований. Том 2 / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1970. – 328 с.
3. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г.Б. Двайт. – СПб.: Лань, 2005. – 232 с.
4. Прудников А.П. Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Марычев. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 664 с.
5. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я.С. Уфлянд. – М.: Наука, Ленинградское отд-ние, 1967. – 401 с.
6. Диткин В.А. Интегральные преобразования и операционное исчисление / В.А. Диткин, А.П. Прудников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 664 с.

Поступила в редакцию 20.05.2013 г.