

УДК 539.3:534.1

Д. С. Вуколов, В. И. Сторожев

ДИФРАКЦИОННОЕ РАССЕЯНИЕ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН СДВИГА НА ТУННЕЛЬНОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВКЛЮЧЕНИИ В УПРУГОМ СЛОЕ С ЗАКРЕПЛЕННЫМИ ГРАНЯМИ

С использованием метода изображений получено численно-аналитическое решение двумерной краевой задачи о дифракционном рассеянии бегущих симметричных нормальных волн продольного сдвига на круговом цилиндрическом изотропном упругом включении в плоскопараллельном деформируемом слое. Рассмотрен случай нормального падения волны из произвольной моды дисперсионного спектра на включение с осью, лежащей в срединной плоскости слоя с закрепленными плоскими гранями. Решение задачи сведено к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов представлений волновых полей в областях сечения слоя и включения рядами по соответствующим базисным частным решениям волновых уравнений в цилиндрических функциях. Представлены результаты численных исследований, характеризующие ряд ведущих закономерностей в распределениях волновых перемещений в ближнем и дальнем дифракционном поле при варьировании относительного радиуса включения, относительной длины падающей волны из низшей моды дисперсионного спектра, а также соотношения модулей сдвига для материалов слоя и включения.

Ключевые слова: закрепленный изотропный упругий слой, центрально расположенное внутреннее цилиндрическое включение, дифракционное рассеяние нормальных волн сдвига, численно-аналитическое исследование, метод изображений, ряды по базисным решениям волновых уравнений, варьирование геометрических и механических параметров, закономерности распределений волновых перемещений.

Введение. Проблемы теоретического анализа двумерных дифракционных полей, формирующихся в результате рассеяния стационарных волн механических деформаций на неоднородностях в виде полостей и включений в упругих средах, несмотря на длительный период исследования, имеют ряд открытых, актуальных в фундаментальном и прикладном отношении аспектов. Как свидетельствует анализ результатов, представленных в монографиях [1–3], а также в обзорных разделах ряда недавних публикаций [4–8], это заключение в значительной мере касается и задач описания двумерных дифракционных полей, формирующихся в упругом слое при рассеянии нормальных волн продольного сдвига на внутренних туннельных цилиндрических полостях и деформируемых включениях с параллельными плоскими гранями.

В частности, в работе [9] без примеров численной реализации описан метод получения дисперсионных соотношений для волн сдвига, распространяющихся вдоль изотропного слоя с периодическим рядом перпендикулярных направлению распространения и параллельных граням внутренних туннельных цилиндрических полостей. Метод базируется на использовании рядов по базисным решениям волнового уравнения в цилиндрических функциях.

В работах [10, 11] рассмотрены задачи о полях сдвиговых магнитоупругих волн в приграничном градиентно-неоднородном слое изотропного полупространства с внутренней туннельной цилиндрической полостью. Метод интегральных преобразований совместно с приемом интегрирования волновых уравнений в цилиндрических функциях в пространстве изображений применялся в работе [12] для исследования эффектов рассеяния упругих продольно-сдвиговых волн на круговом отверстии в изотропной полосе со свободными от напряжений границами.

Вместе с тем можно отметить, что описываемый в [2] численно-аналитический подход к решению задач дифракции волн сдвига на внутренних туннельных цилиндрических полостях в упругом слое, базирующийся на концепции зеркального отражения (методе изображений [13]), также не был численно реализован, и не распространен на задачи о дифракционном рассеянии нормальных волн на деформируемых туннельных цилиндрических включениях.

В свете изложенного, целью данной работы является построение решения задачи о рассеянии распространяющихся вдоль слоя с закрепленными гранями симметричных сдвиговых волн при нормальном падении на параллельные граням центрально расположенное туннельное упругое цилиндрическое включение. Используется концепция представления дифракционных волновых полей разложениями по базисным системам решений волновых уравнений во вспомогательных локальных координатных системах с полюсами, зеркально расположенными относительно границ слоя.

Постановка задачи. Рассматривается изотропный упругий слой (рис. 1) толщины $2h$, занимающий в прямоугольных координатах $Ox_1x_2x_3$, область $V_L = \{-\infty < x_1, x_3 < \infty, |x_2| \leq h\}$. Грани слоя $x_2 = \pm h$ жестко закреплены, а внутри слоя расположено цилиндрическое упругое включение, занимающее область $V_I = \{x_1^2 + x_2^2 \leq R^2, -\infty < x_3 < \infty\}$. Материалы слоя и включения соответственно характеризуются пара-

метрами щільності ρ_1, ρ_2 і модулями сдвига μ_1, μ_2 . Полагається, що в шарі вздовж позитивного координатного напрямку Ox_1 розповсюджується нормальна симетрична по координаті x_2 поляризована вздовж Ox_3 хвиля продольного сдвига з круговою частотою ω із произвольної моди дисперсійного спектра, характеризується функцією еластичних хвилювань $U_3^{(\text{пад})}(x_1, x_2, t)$.

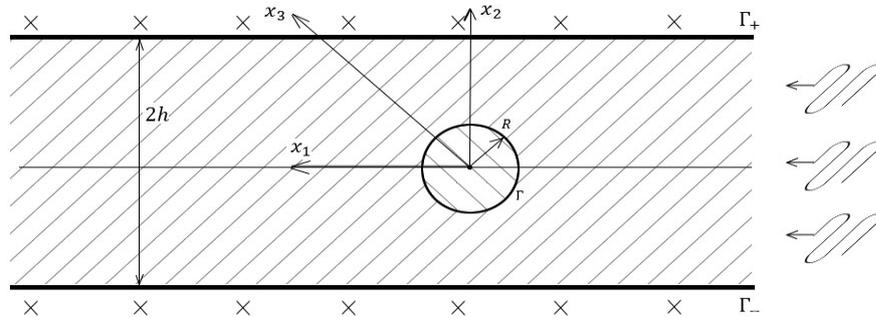


Рис. 1. Сечення шару з тунельним циліндричним включенням

Шукані комплексні амплітудні функції для хвилювань $U_3^{(\text{отр})}(x_1, x_2, t)$ в відражених хвилях і хвилювань $U_3^{(\text{прел})}(x_1, x_2, t)$ в заломлених до включення хвилях підлягають визначенню із крайової задачі для рівнянь стаціонарних сдвигових еластичних коливань матеріалів шару і включення, які після віднесення всіх характеристик до лінійної розмірності до нормуючого параметру h приймають вигляд

$$(\nabla^2 + \Omega_j^2)U_3^{(j)} = 0 \quad (j = 1, 2), \quad (1)$$

$$\Omega = \Omega_1 = \left(\rho_1 \omega^2 / \mu_*\right)^{1/2}, \quad \Omega_2^2 = \Omega_1^2 (\mu_1 \rho_2 / \mu_2 \rho_1),$$

де

$$U_3^{(1)} = U_3^{(\text{пад})} + U_3^{(\text{отр})}, \quad U_3^{(2)} = U_3^{(\text{прел})} \quad (2)$$

Крайові умови розглядаваної задачі мають вигляд

$$(U_3^{(1)})_{x_2=\pm h} = 0, \quad (U_3^{(1)})_\Gamma = (U_3^{(2)})_\Gamma, \quad (\sigma_{r3}^{(1)})_\Gamma = (\sigma_{r3}^{(2)})_\Gamma, \quad (3)$$

де Γ – циліндрична межа контакту матеріалів шару і включення; $(\sigma_{r3}^{(j)})_\Gamma$ – віднесені до нормуючого параметру $\mu_* = \mu_1$ амплітудні характеристики касательних напружень на поверхні Γ в матеріалах шару і включення.

Побудова численно-аналитического рішення задачі. На вихідному етапі побудови рішення для функції хвилювань еластичних переміщень в падаючій нормальній еластичній SH-хвилі вводиться вихідне представлення

$$\tilde{U}_3^{(\text{пад})}(x_1, x_2, t) = U_{30} \cos(\alpha_n x_2) e^{-i(\omega t - k_n x_1)}, \quad (4)$$

в якому $\alpha_n = (2n + 1)\pi / 2h$, $k_n = (\Omega_1^2 - \alpha_n^2)^{1/2}$, n – номер моди нормальних бегущих симетричних SH-хвиль в закріпленому на плоских гранях шарі. Представлення (4) априорно задовольняє першому з крайових умов (3).

Для заломлених до включення хвиль вводиться представлення виду

$$U_3^{(\text{прел})} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n J_n(\Omega_2 r) \cos(n\theta), \quad (5)$$

в якому B_n – підлягають визначенню коефіцієнти в розкладі поля заломлених до включення хвиль рядом по базисним циліндричним стоячим хвилям; $J_n(\Omega_2 r)$ – циліндричні функції Бесселя першого роду індекса n ; (r, θ) – полярні координати з полюсом в центрі сечення включення.

Для запису поля хвиль, відражених від включення і задовольняючих крайовому умову на закріп-

ленних гранях слоя, согласно концепции метода изображений вводится счетное множество вспомогательных локальных прямоугольных и полярных координатных систем с полюсами O_k , имеющими в Ox_1x_2 координаты $x_{1,k} = 0$, $x_{2,k} = 2kh$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$). Соответственно записывается представление

$$U_3^{(\text{отр})} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n(\Omega_1 r_0) \cos(n\theta_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_n (-1)^k (H_n(\Omega_1 r_k) \cos(n\theta_k) + H_n(\Omega_1 r_{-k}) \cos(n\theta_{-k})). \quad (6)$$

После применения теорем сложения цилиндрических функций оно преобразуется к виду

$$U_3^{(\text{отр})} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n H_n^{(1)}(\Omega R) + \delta_n^0 \sum_{p=0}^{\infty} A_p (i^{p-n} + i^{-p+n}) J_n(\Omega R) \times \right. \\ \left. \times \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[H_{p-n}^{(1)}(2 \cdot \Omega \cdot h \cdot k) + H_{n+p}^{(1)}(2 \cdot \Omega \cdot h \cdot k) \right] \right] \cos(n\theta), \quad (7)$$

и при использовании обозначения $S_{p,n} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k H_{p-n}^{(1)}(2 \cdot \Omega \cdot h \cdot k)$ приобретает окончательную форму записи в полярных координатах, связанных с центром включения

$$U_3^{(\text{отр})} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n H_n^{(1)}(\Omega R) + \delta_n^0 \sum_{p=0}^{\infty} A_p (i^{p-n} + i^{-p+n}) J_n(\Omega R) (S_{p,n} + S_{p,-n}) \right] \cos(n\theta). \quad (8)$$

Контурное представление на Γ для комплексной амплитудной составляющей функции перемещений в падающей волне записывается с использованием формулы обобщенного разложения Якоби

$$\left(e^{v_1 x_1 + v_2 x_2} \right)_{\tilde{\Gamma}} = \sum_{(p)} Q_p e^{ip\theta}, \quad Q_p = J_p \left(-iR(v_1^2 + v_2^2)^{1/2} \right) \left(\frac{(iv_1 + v_2)}{(v_1^2 + v_2^2)^{1/2}} \right)^p, \quad (9)$$

и после ряда преобразований принимает вид

$$\tilde{U}_3^{(\text{пад})} = U_{30} \sum_{p=0}^{\infty} \delta_p^0 J_p \left(R\sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right) i^p \left(\left(\frac{k_n + i\alpha_n}{k_n - i\alpha_n} \right)^{p/2} + \left(\frac{k_n - i\alpha_n}{k_n + i\alpha_n} \right)^{p/2} \right) \cos(p\theta), \quad (10)$$

$$\delta_p^0 = \begin{cases} 1/2, & p = 0; \\ 1, & p \neq 0. \end{cases}$$

При использовании представлений (8) и (10) для записи функциональных уравнений, следующих краевых условий (3) на контактной поверхности Γ , и их последующей алгебраизации с применением метода ортогональных рядов, для неизвестных коэффициентов в указанных представлениях получена бесконечная система из двух групп линейных алгебраических уравнений:

$$B_n J_n(\Omega_2 r) - A_n H_n^{(1)}(\Omega_1 R) - \delta_n^0 \sum_{p=0}^{\infty} A_p (i^{p-n} + i^{-p+n}) J_n(\Omega_1 R) \times \\ \times \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[H_{p-n}^{(1)}(2 \cdot \Omega_1 \cdot h \cdot k) + H_{n+p}^{(1)}(2 \cdot \Omega_1 \cdot h \cdot k) \right] = \\ = U_{30} \delta_n^0 J_n \left(R\sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right) i^n \left(\left(\frac{k_n + i\alpha_n}{k_n - i\alpha_n} \right)^{n/2} + \left(\frac{k_n - i\alpha_n}{k_n + i\alpha_n} \right)^{n/2} \right),$$

$$\begin{aligned}
 & B_n \frac{\mu_2}{\mu_1} \left(\frac{n}{R} J_n(\Omega_2 R) - \Omega_2 J_{n+1}(\Omega_2 R) \right) - A_n \left(\frac{n}{R} H_n^{(1)}(\Omega_1 R) - \Omega_1 H_{n+1}^{(1)}(\Omega_1 R) \right) - \quad (11) \\
 & - \delta_n^0 \sum_{p=0}^{\infty} A_p \left(i^{p-n} + i^{-p+n} \right) \left(\frac{n}{R} J_n(\Omega_1 R) - \Omega_1 J_{n+1}(\Omega_1 R) \right) \times \\
 & \times \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[H_{p-n}^{(1)}(2 \cdot \Omega_1 \cdot h \cdot k) + H_{n+p}^{(1)}(2 \cdot \Omega_1 \cdot h \cdot k) \right] = \\
 & = U_{30} \delta_n^0 \left(\frac{n}{R} J_n \left(R \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right) - \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} J_{n+1} \left(R \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right) \right) i^n \left(\left(\frac{k_n + i\alpha_n}{k_n - i\alpha_n} \right)^{n/2} + \left(\frac{k_n - i\alpha_n}{k_n + i\alpha_n} \right)^{n/2} \right).
 \end{aligned}$$

После исключения в указанных группах коэффициента B_n система (11) преобразуется к следующему, используемому при редукции и численных исследованиях виду

$$\begin{aligned}
 & A_n \left(\frac{\mu_1}{R} \frac{n H_n^{(1)}(\Omega_1 R) - \Omega_1 H_{n+1}^{(1)}(\Omega_1 R)}{J_n(\Omega_2 R)} - \frac{H_n^{(1)}(\Omega_1 R)}{J_n(\Omega_2 R)} \right) + \delta_n^0 \left(\frac{\mu_1}{R} \frac{n J_n(\Omega_1 R) - \Omega_1 J_{n+1}(\Omega_1 R)}{J_n(\Omega_2 R)} - \frac{J_n(\Omega_1 R)}{J_n(\Omega_2 R)} \right) \times \\
 & \times \sum_{p=0}^{\infty} A_p \left(i^{p-n} + i^{-p+n} \right) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[H_{p-n}^{(1)}(2 \cdot \Omega_1 \cdot h \cdot k) + H_{n+p}^{(1)}(2 \cdot \Omega_1 \cdot h \cdot k) \right] = \\
 & = U_{30} \delta_n^0 \left(\frac{J_n \left(R \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right)}{J_n(\Omega_2 R)} - \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{n J_n \left(R \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right) - \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} J_{n+1} \left(R \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right)}{R J_n(\Omega_2 R) - \Omega_2 J_{n+1}(\Omega_2 R)} \right) \times \\
 & \times i^n \left(\left(\frac{k_n + i\alpha_n}{k_n - i\alpha_n} \right)^{n/2} + \left(\frac{k_n - i\alpha_n}{k_n + i\alpha_n} \right)^{n/2} \right).
 \end{aligned}$$

В результате определения из приведенной алгебраической системы искомым коэффициентов может быть реализована фаза численного анализа основных закономерностей, свойственных полям рассеиваемых и преломляющихся во включении волн.

Результаты численных исследований. Анализ ряда эффектов в распределениях волновых перемещений выполнен на основе расчета дифракционных полей для случаев падения симметричных нормальных волн сдвига с варьируемой относительной длиной $\lambda = (2\pi/k_n)h^{-1}$ из низшей моды $n = 0$ дисперсионного спектра на включения с различными относительными радиусами. Полагается, что материал включения имеет большую, либо меньшую по сравнению с материалом слоя сдвиговую жесткость, а плотности указанных материалов равны.

На рис. 2, 3 представлены результаты расчетов контурных распределений амплитуд волновых упругих перемещений на границе контакта слоя и включения по угловой координате $\tilde{\theta} \in [0; \pi]$, отсчитываемой от отрицательного до положительного направления оси Ox_1 , для различных значений относительной длины падающей волны. Распределения на рис. 2 относятся к случаю задания нормированных сдвиговых жесткостей $\mu_1 = \mu_*$, $\mu_2 = 4\mu_*$ и относительного радиуса включения $R = h/2$. Их анализ позволяет заключить, что при относительно коротких падающих волнах ($\lambda = 0,25$) амплитудные величины волновых перемещений имеют ряд сопоставимых по величине локальных максимумов вдоль контура, однако максимальный уровень амплитуды перемещений достигается во фронтальной точке взаимодействия волны с включением $\tilde{\theta} = 0$. При увеличении относительной длины падающей волны λ до значений $\lambda = 0,5$; $\lambda = 0,6$ наблюдается эффект смещения максимумов амплитуд перемещений к «боковой» точке контура включения $\tilde{\theta} \approx \pi/2$, причем для случая $\lambda = 0,6$ характерно также интенсивное возрастание указанных максимумов. При изменении λ в диапазоне $\lambda \in [1; 2]$ наблюдается качественная транс-

формація аналізуемого розподілення, при якій в випадку $\lambda = 2$ спостерігається виражений ефект «затенення», створюваного «відносно жорстким» включенням.

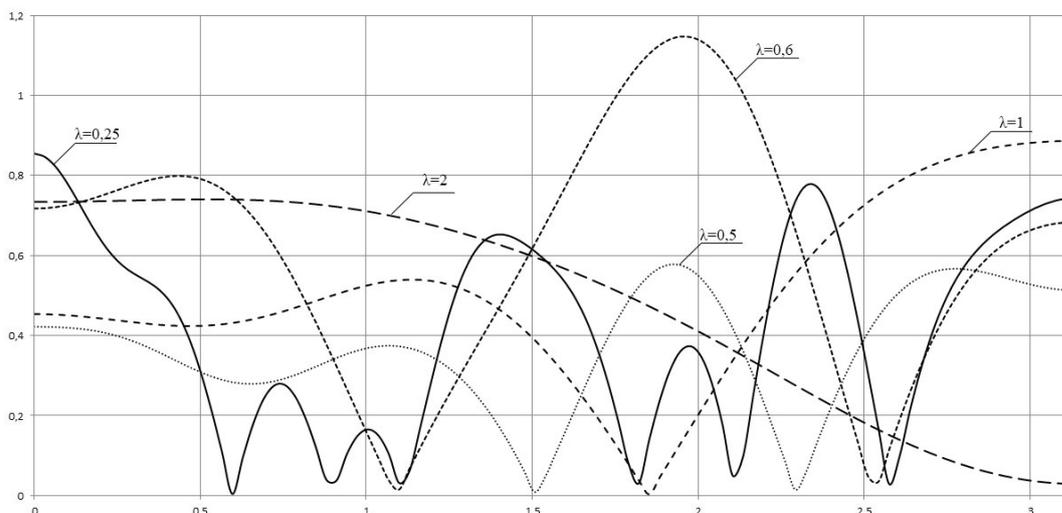


Рис. 2. Контурні розподілення амплітуд хвильових переміщень для «відносно жорсткого» включення

Аналогічні описаним вище результати досліджень для випадку задання нормованих сдвигових жорсткостей $\mu_1 = 4\mu^*$, $\mu_2 = \mu^*$ представлені на рис 3. В якості специфічних ефектів при падінні відносно коротких хвиль можна відзначити появу локалізованих областей підвищеної інтенсивності амплітуд контурних хвильових переміщень як в фронтальній, так і в теневій зонах Γ . В випадку ж $\lambda = 2$ для розглянутого «відносно м'якого» включення локальні максимуми амплітуд спостерігаються при $\tilde{\theta} = 0$ і $\tilde{\theta} \approx 2$, що принципово відрізняється від картини, спостережимої для «відносно жорсткого» включення.

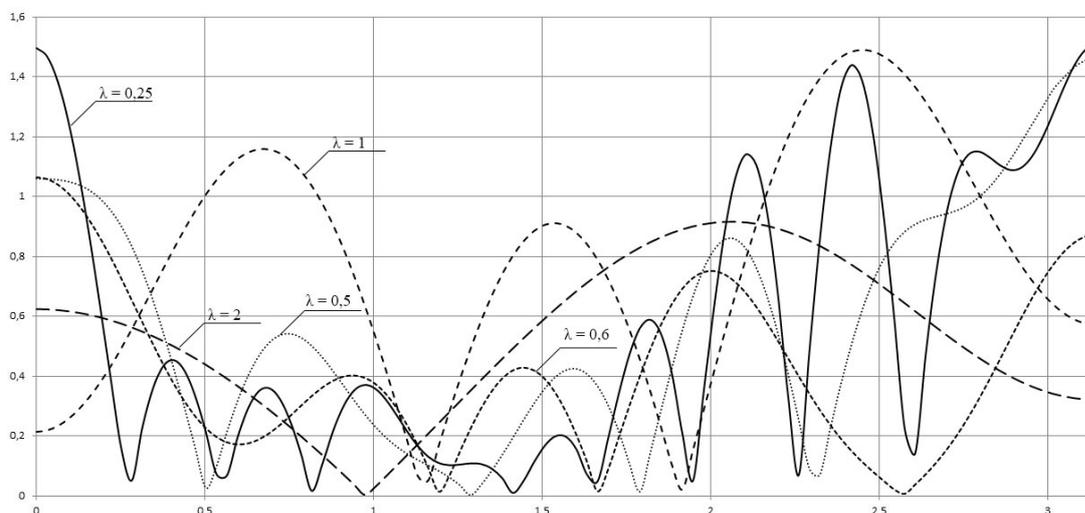


Рис 3. Контурні розподілення амплітуд хвильових переміщень для «відносно м'якого» включення

На рис. 4–10 в формі тонування зображень, на яких перехід від світлих тонів до темним відповідає наростанню інтенсивності характеризуємих величин, представлені картини розподілення рівней хвильових переміщень всередині включень різних діаметрів і в підобласті шара $x_1 \in [-h; h]$, $x_2 \in [-4h; 8h]$ поза включенням для моментів часу, відповідних початку періодів хвильових коливань. Варіюємими параметрами є також співвідношення модулів зсуву для матеріалів шара і включення і відносна довжина падаючої хвилі. В якості висновків, наступних із аналізу даних розподілень, можна вказати на наступні ефекти.

При відносно великих розмірах включення $R = 0,75h$ і відносно великій довжині падаючих хвиль $\lambda = 0,5h$ генеруються достатньо малоінтенсивні, відбиваються в фронтальну

область волны, и, вместе с тем, наблюдается значительное влияние включения на картину поля огибающих волн во всей рассматриваемой области за ним. При этом относительно мягкое включение играет роль «концентратора» волновых перемещений (рис. 4), а относительно жесткое – роль «рассеивателя» волн, о чем свидетельствуют формы волновых фронтов в области включений и всплеск интенсивности перемещений в приконтурной теневой области за мягким включением (рис. 5). Приведенные распределения подтверждают априорные свойства сопоставительного уменьшения длины преломляющихся волн в мягком включении и увеличения длины этих волн в относительно жестком включении. Более контрастно изменяющимся является поле в тыльной зоне жесткого включения.

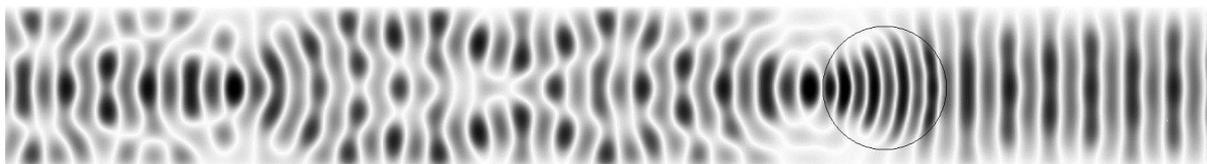


Рис. 4. Картина распределения волновых перемещений для случая $R = 0,75h$; $\lambda = 0,5h$; $\mu_1 = 2\mu_*$; $\mu_2 = \mu_*$

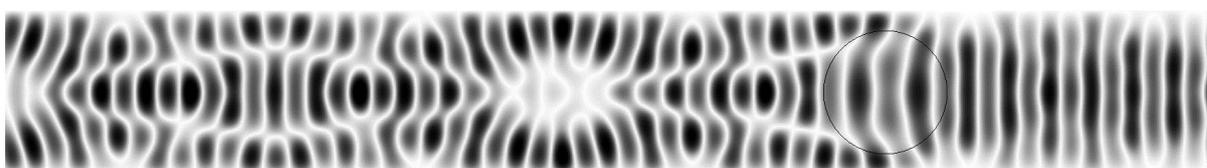


Рис. 5. Картина распределения волновых перемещений для случая $R = 0,75h$; $\lambda = 0,5h$; $\mu_1 = \mu_*$; $\mu_2 = 2\mu_*$

Рис. 6 и рис. 7 иллюстрируют тенденции изменений в картинах распределений дифракционных полей в случае «относительно мягких» включений при последовательном уменьшении относительной длины падающей волны. Можно отметить, что при сохранении эффекта концентрирования волновых перемещений в тыльной приконтурной зоне и усложнения картины рассеянного поля во всей рассматриваемой области за включением, при уменьшении λ усиливается влияние отраженных волн во фронтальной области перед включением.

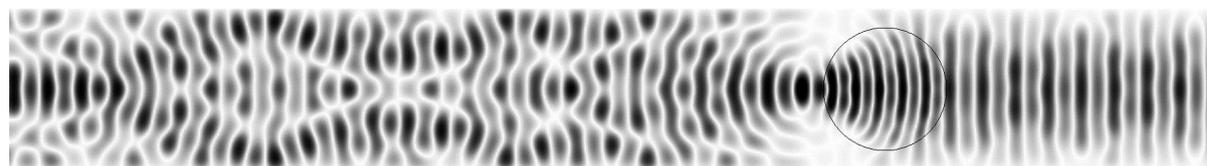


Рис. 6. Картина распределения волновых перемещений для $R = 0,75h$; $\lambda = 0,4h$; $\mu_1 = 2\mu_*$; $\mu_2 = \mu_*$

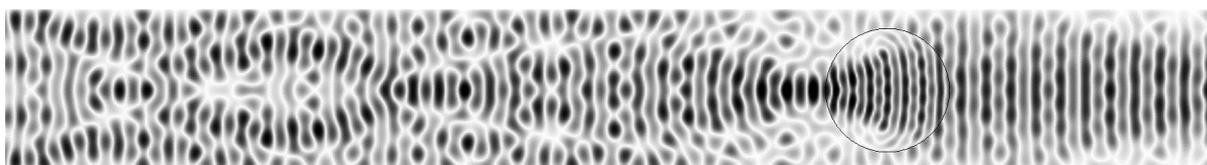


Рис. 7. Картина распределения волновых перемещений для случая $R = 0,75h$; $\lambda = 0,3h$; $\mu_1 = 2\mu_*$; $\mu_2 = \mu_*$

В случае падения еще более коротких волн включения $\lambda = 0,3h$ и $\lambda = 0,2h$ на жесткое включение с $R = 0,75h$ степень влияния отраженных волн во фронтальной зоне также начинает возрастать по сравнению со случаем $\lambda = 0,5h$, однако за включением формируются еще более сложная по структуре картина (рис. 8, рис. 9) распределения волновых перемещений с элементами квазипериодичности.

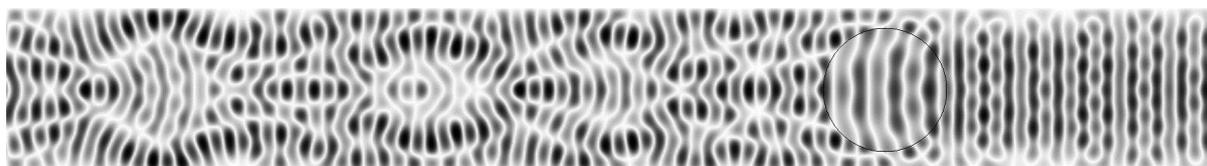
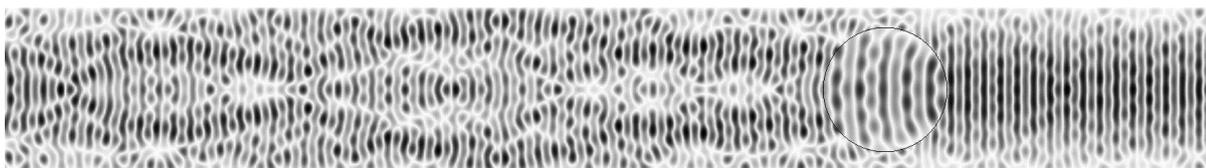
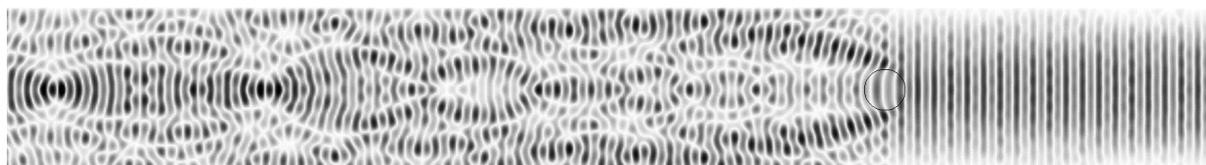


Рис. 8. Картина распределения волновых перемещений для случая $R = 0,75h$; $\lambda = 0,3h$; $\mu_1 = \mu_*$; $\mu_2 = 2\mu_*$

Рис. 9. Картина распределения волновых перемещений для случая $R = 0,75h$; $\lambda = 0,2h$; $\mu_1 = \mu_*$; $\mu_2 = 2\mu_*$

Наконец, на рис. 10 представлена картина дифракционного поля для случая, когда на относительно жесткое включение малого радиуса $R = 0,25h$ падает относительно короткая волна, длина которой $\lambda = 0,2h$ сопоставима с радиусом включения. В этом случае в рассеянном поле выделяются явно выраженные интенсивные огибающие потоки и наблюдается специфический эффект возникновения зон фокусировки волн в теневой области на очень больших расстояниях от включения.

Рис. 10. Картина распределения волновых перемещений для случая $R = 0,25h$, $\lambda = 0,2h$, $\mu_1 = \mu_*$, $\mu_2 = 2\mu_*$

Выводы. В итоге проведенных теоретических исследований с использованием метода изображений получено численно-аналитическое решение двумерной краевой задачи о дифракционном рассеянии бегущих симметричных нормальных волн продольного сдвига на круговом цилиндрическом изотропном упругом включении в плоскопараллельном деформируемом слое. Рассмотрен случай нормального падения волны из произвольной моды дисперсионного спектра на включение с осью, лежащей в срединной плоскости слоя с закрепленными плоскими гранями. Решение задачи сведено к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов представлений волновых полей в областях сечения слоя и включения рядами по базисным частным решениям соответствующих волновых уравнений в цилиндрических функциях. Представлены результаты численных исследований для случая падения волны нижней моды дисперсионного спектра. В результате этих исследований установлен ряд ведущих закономерностей в распределениях волновых перемещений в ближнем и дальнем дифракционном поле при варьировании относительного радиуса включения, относительной длины падающей волны, а также соотношения модулей сдвига для материалов слоя и включения. В частности, описаны фокусирующая либо рассеивающая функция включения для преломляющихся в нем волн в зависимости от соотношения жесткости материалов включения и слоя; эффекты усложнения картины распределения волновых перемещений в протяженной теневой зоне за включением и малости искажений, вносимых в поле падающих волн отраженными от включения волнами во фронтальной области взаимодействия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pao Y.-H. Diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations / Y.-H. Pao, C. C. Mow. – New York: Crane Russak, 1973 – 308 p.
2. Гузь А. Н. Дифракция упругих волн в многосвязных телах / А. Н. Гузь, В. Т. Головчан. – К.: Наукова думка, 1972. – 254 с.
3. Гузь А. Н. Дифракция упругих волн / А. Н. Гузь., В. Д. Кубенко, М. А. Черевко. – К.: Наукова думка, 1978. – 308 с.
4. Fang X.-Q. Multiple scattering of electro-elastic waves from a buried cavity in a functionally graded piezoelectric material layer / X.-Q. Fang // Int. J. Solids Struct. – 2008. – Vol. 45. – P. 5716–5729.
5. Dynamic stress from a cylindrical inclusion buried in a functionally graded piezoelectric material layer under electro-elastic waves / X.-Q. Fang, J.-X. Liu, X.-H. Wang, et al. // Compos. Sci. Technol. – 2009. – Vol. 69 – P. 1115–1123.
6. Dynamic stress around two holes in a functionally graded piezoelectric material layer under electro-elastic waves / X.-Q. Fang, J.-X. Liu, X.-H. Wang, L.-L. Zhang // Phil. Mag. Lett. – 2010. – Vol. 90. – P. 361–380.
7. Dynamic stress from a subsurface cylindrical inclusion in a functionally graded material layer under anti-plane shear waves / X.-Q. Fang, J.-X. Liu, L.-L. Zhang, Y.-P. Kong // Mater. Struct. – 2011. – Vol. 44. – P. 67–75.
8. Yang Y.-H. Non-destructive detection of a circular cavity in a finite functionally graded material layer using anti-plane shear waves / Y.-H. Yang, L.-Z. Wu, X.-Q. Fang // J. Nondestructive Eval. – 2010. – Vol. 29. – P. 233–240.
9. Golovchan V. T. Shear-wave propagation in an elastic layer perforated by a series of cylindrical cavities / V. T. Golovchan, A. N. Guz // Soviet Applied Mechanics. – 1976. – Vol. 12, Iss. 9. – P. 888–892.
10. Острик В. И. Динамические задачи магнитоупругости для слоя и полуслоя с туннельными полостями и трещинами продольного сдвига / В. И. Острик, Л. А. Фильштинский // Известия Национальной Академии Наук республики Армения. Механика. – 1991. – Т. 44, № 4. – С. 34–45.

11. Ostriuk V. I. The interaction of a magnetoelastic shear wave with longitudinal cavities in a conducting layer / V. I. Ostriuk, L. A. Filshinskii // Journal of Mathematical Sciences. – 1996. – Vol. 79, Iss. 6. – P. 1450–1454.
12. Itou S. Diffraction of a stress wave by a cylindrical cavity in an infinite elastic strip / S. Itou // Lett. Appl. Engng. Sci. – 1984. – Vol. 22, No. 4. – P. 475–490.
13. Taraldsen G. The complex image method / G. Taraldsen // Wave Motion. – 2005. – Vol. 43. – P. 91–97.

Поступила в редакцію 25.04.2014 г.

РЕЗЮМЕ

З використанням методу зображень отримано чисельно – аналітичний розв'язок двовимірної крайової задачі про дифракційне розсіяння біжучих симетричних нормальних хвиль поздовжнього зсуву на круговому циліндричному ізотропному пружному включенні в плоско-паралельному деформівному шарі. Розглянуто випадок нормально-го падіння хвилі з довільної моди дисперсійного спектру на включення з віссю, що лежить в серединній площині шару з закріпленими плоскими гранями. Рішення задачі зведено до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів представлень хвильових полів в областях перерізу шару і включення рядами за відповідним базисним частинними розв'язками хвильових рівнянь у циліндричних функціях. Представлені результати числових досліджень, що характеризують ряд провідних закономірностей в розподілах хвильових переміщень в ближньому і далекому дифракційному полі при варіюванні відносного радіуса включення, відносної довжини падаючої хвилі з нижчої моди дисперсійного спектра, а також співвідношення модулів зсуву для матеріалів шару і включення.

Ключові слова: закріплений ізотропний пружний шар, центрально розташоване внутрішнє циліндричне включення, дифракційне розсіювання нормальних хвиль зсуву, чисельно-аналітичне дослідження, метод зображень, ряди за базисним розв'язками хвильових рівнянь, варіювання геометричних і механічних параметрів, закономірності розподілів хвильових переміщень.

SUMMARY

Using the method of images by numerical-analytical solution of two-dimensional boundary problem of diffraction scattering running symmetric normal shear waves by a circular cylindrical isotropic elastic inclusion in plane-parallel deformable layer are obtained. Normal incidence the waves on inclusion with the axis lying in the median plane of the layer with fixed faces are investigated. Solution of the problem is reduced to an infinite system of linear algebraic equations for the coefficients of representations of wave fields in the areas of cross-section layer and inclusion in rows by the basic particular solutions of wave equations in cylindrical functions. The results of numerical investigation of characterizing a number of leading effects in the distribution of the wave motion in the near- and far- field diffraction by varying the relative radius of inclusions, the relative length of the incident wave on the lowest mode of dispersion spectrum, and the ratio of the shear modulus for the material layer and inclusion are presented.

Keywords: fixed isotropic elastic layer with centrally located inner cylindrical inclusion, diffractive scattering of normal shear waves, numerical-analytical study, the method of images, the series of basic solutions of wave equations, variation of geometrical and mechanical parameters, effects of distribution of wave motion fields.