

УДК 539.3

О. Р. Гачкевич\*, Є. М. Ірза\*, А. Козьярська\*\*

\*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України; м. Львів,

\*\*Політехніка Опольська, м. Ополь, Польща

## ВАРІАНТ МЕТОДИКИ ОПТИМІЗАЦІЇ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ТЕПЛОВИХ РЕЖИМІВ В СКЛЯНОМУ ВИРОБНИЦТВІ

Запропоновано методику оптимізації технологічних теплових режимів нагріву-охолодження термочутливих скляних тіл обертання (форма яких відмінна від канонічної) за врахування особливостей механічної поведінки скла в широкому діапазоні температур. Враховується залежність від температури обмежень на напруження.

*Ключові слова:* теплові технологічні режими, скляні тіла, оптимізація.

**Вступ.** Конструкції із скла в процесі їх виготовлення, технологічної обробки (обезгажуванні, відпалі, гартуванні і т.п.) піддаються певним тепловим процесам навантаження, пов'язаних з їх нагрівом-охолодженням. В результаті дії температурних полів в них виникають напруження (як тимчасові так і залишкові), які можуть перевищувати допустимі значення і приводити до руйнування конструкцій або погіршувати їх експлуатаційні властивості. Поряд з цими факторами, процеси нагріву-охолодження є енергозатратними.

Тому виникає практична потреба у розробці ефективних математичних методик по оптимальному керуванню тепловими режимами в процесах нагріву-охолодження скляних тіл.

Оптимальне керування тепловими режимами в процесах нагріву-охолодження скляних тіл полягає в тому, що система керування повинна забезпечити оптимум певного критерію оптимальності при обмеженнях на напружено-деформований стан тіла і технологічні умови процесу нагріву-охолодження.

Загальні підходи до розробки ефективних математичних методик по оптимальному керуванню тепловими режимами в процесах нагріву-охолодження скляних тіл достатньо повно висвітлені в літературі. У переважній більшості прикладних робіт, присвячених кількісному опису термомеханічних процесів в скляних тілах при різного роду теплових навантаженнях, властивості скла приймаються постійними (незалежними від температури), або опис термомеханічної поведінки здійснюється загальними рівняннями для всього діапазону температур, в якому перебуває тіло під час процесу теплового навантаження. Форма тіла обертання як правило канонічна. При побудові оптимального керування тепловими режимами в процесах нагріву-охолодження скляних тіл використовується здебільшого один критерій оптимальності. В порівнянні з існуючими в літературі дослідженнями в цьому напрямі, в роботі запропоновано математичну методику оптимального керування тепловими режимами в процесах нагріву-охолодження для термочутливих скляних тіл обертання (форма яких відмінна від канонічної) з врахуванням особливостей механічної поведінки скла в широкому діапазоні температур. Пропонується поетапний підхід при побудові математичної моделі термомеханічної поведінки термочутливих скляних тіл обертання довільної форми в залежності від діапазону температур в якому перебуває тіло або його частина з різними критеріями оптимальності. Обмеження на напружений стан беруться залежними від температури.

Методика оптимізації технологічних теплових режимів в процесах нагріву-охолодження скляних тіл передбачає:

- математичну постановку задачі оптимізації;
- розробку числового алгоритму пошуку оптимального розв'язку;
- програмну реалізацію числового алгоритму.

Математична постановка задач оптимізації технологічних теплових режимів нагріву-охолодження скляних тіл включає такі етапи: вибір параметрів стану, формулювання математичних залежностей, які описують поведінку тіл за даних умов процесу теплового навантаження (розробку математичної моделі); вибір критерію оптимальності; вибір функцій керування, за допомогою яких досягається екстремум функціоналу оптимізації; формування обмежень на параметри стану і функції керування.

В роботі виділяються три діапазони температур з характерними для них властивостями скла: діапазон температур, які є меншими нижньої температури відпалу  $t_v^H$  (в якому скляні тіла ведуть себе як пружні); діапазон температур від нижньої температури відпалу  $t_v^H$  до температури склування  $t_g$  (в якому скляні тіла ведуть себе як в'язкопружні); діапазон температур, які є вищими за температуру склування  $t_g$  (в якому скло веде себе як в'язка рідина).

**Вихідні положення та припущення.** Розглядається скляне тіло обертання, яке займає область  $\Omega$  евклідового простору  $R^3$  і обмежене неперервною за Ліпшицем поверхнею  $\Gamma$ . Тіло віднесене до криволінійної системи координат  $Ox^1x^2x^3$ . На частині  $\Gamma_u$  поверхні  $\Gamma$  тіла задані переміщення  $\vec{u} = \vec{u}_0$ , а на частині  $\Gamma_\sigma$  – силове навантаження, яке характеризується вектором  $\vec{p}$ ,  $\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \Gamma$ .

Тіло піддається технологічному осесиметричному нагріванню, яке здійснюється зовнішнім середовищем з температурою  $t_c(\vec{r}, \tau)$  через частину поверхні  $\Gamma_t$  ( $\vec{r} \in \Gamma_t$ ), тепловим потоком  $q(\vec{r}, \tau)$  через частину поверхні  $\Gamma_q$  ( $\vec{r} \in \Gamma_q$ ), ( $\Gamma_t \cup \Gamma_q = \Gamma$ ), а також розподіленими джерелами тепла потужності  $Q(\vec{r}, \tau)$ , ( $\vec{r} \in \Omega$ ).

Вважаємо, що при розглядуваних теплових навантаженнях напружений стан тіла не впливає на його температуру, тобто пряму задачу про визначення напружено-деформованого стану в тілі формулюємо в квазістатичній постановці (в переміщеннях). При цьому температурне поле в тілі описується рівнянням теплопровідності [1]

$$\bar{\nabla}(k\bar{\nabla}t) + Q - \rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = 0 \text{ на } \Omega \quad (1)$$

за початкової

$$t(\vec{r}, 0) = t_0(\vec{r}) \text{ на } \Omega \quad (2)$$

і крайових

$$k\bar{\nabla}t \cdot \vec{n} + \alpha(t - t_c) = 0 \text{ на } \Gamma_t, \quad k\bar{\nabla}t \cdot \vec{n} + q = 0 \text{ на } \Gamma_q \quad (3)$$

умов. Тут  $\bar{\nabla}$  – оператор Гамільтона,  $k(t)$  – коефіцієнт теплопровідності,  $\rho(t)$  – густина,  $c(t)$  – питома теплоємність,  $\tau$  – біжучий час,  $\vec{r}$  – радіус-вектор точки,  $\vec{n}$  – зовнішня нормаль до поверхні,  $\alpha$  – коефіцієнт тепловіддачі.

Зв'язок між компонентами  $\{\sigma\}$  тензора напружень і компонентами  $\{\varepsilon\}$  тензора деформацій відповідає типу теплових навантажень і інтервалам температур, в яких знаходиться тіло [2].

Деформації в термопружному тілі описуємо наступними залежностями [1]:

- для  $t \leq t_v^H$ :

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^e\} + \{\varepsilon^t\}; \quad (4)$$

- для  $t_v^H < t \leq t_g$ :

$$d\{\varepsilon\} = d\{\varepsilon^e\} + d\{\varepsilon^c\} + d\{\varepsilon^t\}; \quad (5)$$

- для  $t > t_g$ :

$$d\{\varepsilon\} = d\{\varepsilon^c\} + d\{\varepsilon^t\}. \quad (6)$$

Тут  $\{\varepsilon^e\} = [D]^{-1}\{\sigma\}$  – пружні деформації;  $\{\varepsilon^t\} = \{\delta\} \int_{t_0}^t \alpha_t(\zeta) d\zeta$  – температурні деформації;

$d\{\varepsilon^c\} = \frac{1}{2\eta}\{\tilde{\sigma}\}d\tau$  – в'язкі деформації ( $\sigma_0 = 3K_0(\varepsilon_0 - \varepsilon^t)$  – термопружні об'ємні деформації);  $[D]$  – матриця пружних характеристик;  $\{\delta\}$  – компоненти одиничного тензора Кронекера;  $\alpha_t$  – коефіцієнт лінійного температурного розширення;  $\{\tilde{\sigma}\}$ ,  $\{\tilde{\varepsilon}\}$  – компоненти девіатора напружень і деформацій відповідно,  $\sigma_0$ ,  $\varepsilon_0$  – середнє нормальне напруження і середнє відносне видовження відповідно,  $\eta(t)$  – динамічна в'язкість,  $K_0(t)$  – модуль об'ємного стиску.

Обмежуємося випадком малих деформацій. При цьому зв'язок між компонентами  $\{\varepsilon\}$  тензора деформацій і компонентами  $\{u\}$  вектора переміщень є

$$\{\varepsilon\} = [Z]\{u\}, \quad (7)$$

де  $[Z]$  – матриця диференціального оператора геометричних співвідношень теорії пружності.

В області  $\bar{\Omega}$ , яку займає тіло, повинні виконуватися рівняння рівноваги

$$\bar{\nabla} \bar{\sigma}^i + X^i = 0 \quad (8)$$

при граничних умовах

$$\bar{n} \cdot \bar{\sigma}^i = p^i \text{ на } \Gamma_\sigma, \quad \bar{u} = \bar{u}^0 \text{ на } \Gamma_u, \quad i = \overline{1,3}. \quad (9)$$

Тут  $X^i$  – контраваріантні компоненти вектора об'ємних сил в криволінійних координатах.

Залежності (1) – (9) складають повну систему співвідношень для визначення температурного поля, компонент вектора переміщень, компонент тензорів деформацій і напружень при заданих температурі навколишнього середовища  $t_c$ , потужності внутрішніх джерел тепла  $Q$ , тепловому потоці  $q$ , об'ємних силах  $\bar{X}$  і зовнішньому силовому навантаженні  $\bar{p}$  і залежностях, які пов'язують прирости деформацій з напруженнями і температурою.

Вибір критерію і відповідного функціоналу, який реалізує цей критерій оптимізації, здійснюється виходячи з основних призначень процесу термообробки.

За функціонал оптимізації вибирається функціонал

$$J = \max_{\Omega, \tau} |\sigma_i - \sigma_d|, \quad i = \overline{1,3}, \quad (10)$$

при розгляді оптимального за напруженнями керування тепловими режимами або функціонал

$$J = \tau_k, \quad (11)$$

при розгляді оптимального за швидкодією керування. Тут  $\sigma_i$  – головні значення компонент тензора напружень,  $\sigma_d(t)$  – значення допустимих напружень, які змінюється в залежності від температури,  $\tau_k$  – тривалість процесу термообробки.

Функцією керування в розглядуваних процесах можуть бути як температура зовнішнього середовища  $t_c(\bar{r}, \tau)$  (зокрема температура на поверхні) чи коефіцієнт тепловіддачі  $\alpha(t)$ , так і густина теплового потоку  $q(\bar{r}, \tau)$  (залежно від технологічних умов процесу нагріву-охолодження). Потужність джерел тепла  $Q$  вважаємо заданою [1].

Типовими обмеженнями в даних задачах є обмеження на рівень виникаючих напружень в тілі

$$\max_{\Omega, \tau} |\sigma_i(\bar{r}, \tau)| \leq \sigma_d(t), \quad i = \overline{1,3}. \quad (12)$$

До таких типових обмежень можна віднести обмеження на температуру тіла під час процесу термообробки

$$t_1 \leq t(\bar{r}, \tau) \leq t_2, \quad (13)$$

обмеження на функцію керування  $h(\tau)$

$$h_1 \leq h(\tau) \leq h_2, \quad (14)$$

а також обмеження на швидкість зміни функції керування

$$v_1 \leq \frac{dh(\tau)}{d\tau} \leq v_2. \quad (15)$$

Кількість додаткових умов чи обмежень на параметри розглядуваних полів і функції керування в процесі термообробки в прийнятій схемі оптимізації є неістотною.

В даній постановці задача оптимізації технологічних теплових режимів нагріву-охолодження в процесах термообробки скляних тіл обертання полягає в мінімізації функціоналу (10) або (11) при в'язях (1) – (9) і обмеженнях (13) – (15).

**Алгоритм розв'язування.** Важливим елементом в схемі оптимізації є побудова розв'язків прямих задач які описують температурне і механічне поля (сформульованих в рамках використовуваної термомеханічної моделі).

Алгоритм розв'язування прямих задач базується на числових методах зважених залишків (МЗЗ) в поєднанні з методом скінчених елементів (МСЕ), які дають можливість отримати ефективні наближені розв'язки сформульованих вище задач [3].

Алгоритм їх розв'язання включає:

- розбиття області, яку займає тіло, на елементи;
- апроксимацію невідомих функцій на елементі розбиття;
- отримання за допомогою методу зважених залишків в поєднанні з методом скінчених елементів системи алгебраїчних рівнянь відносно значень невідомих функцій у вузлах елементів;
- алгоритм розв'язання цієї системи.

Згідно МСЕ розбиваємо область  $\Omega$  на скінчену кількість  $n_e$  елементів  $\Omega^{(e)}$ , щоб виконувались умови:

$$\forall e, m: e = \overline{1, n_e}, m = \overline{1, n_e}, \Omega^{(e)} \cap \Omega^{(m)} = \emptyset, e \neq m; \Omega = \bigcup_{e=1}^{n_e} \Omega^{(e)}.$$

Скалярну величину  $t$  (температуру) на елементі розбиття представляємо за допомогою функцій форми у вигляді

$$t^{(e)} = [N_t^{(e)}] \{T^{(e)}\}, \quad (16)$$

де  $[N_t^{(e)}]$  – матриця функцій форми елемента розбиття (для скалярної величини),  $\{T^{(e)}\}$  – вектор значень температури у вузлах елемента.

Компоненти  $\{u\}$  вектора (переміщення  $\vec{u}$ ) на елементі розбиття записуємо за допомогою функцій форми елемента розбиття у вигляді:

$$\{u^{(e)}\} = [N_u^{(e)}] \{U^{(e)}\}, \quad (17)$$

де  $[N_u^{(e)}]$  – матриця функцій форми елемента розбиття (для векторної величини),  $\{U^{(e)}\}$  – значення компонент  $\{u^{(e)}\}$  вектора переміщення  $\vec{u}$  у вузлах елемента.

Задача теплопровідності (1) – (3) з використанням методу зважених залишків (зокрема методу Гальоркіна) в поєднанні з методом скінчених елементів зведена до вигляду:

$$[C_t] \frac{d\{T\}}{d\tau} + [K_t] \{T\} = \{f_t\}. \quad (18)$$

Тут  $[C_t]$ ,  $[K_t]$ ,  $\{f_t\}$  – відповідні температурні матриці жорсткості і вектор навантаження, які мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} [C_t] &= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} \rho c [N_t^{(e)}]^T [N_t^{(e)}] d\Omega, \\ [K_t] &= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} k [B_t^{(e)}]^T [B_t^{(e)}] d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{e1}} \int_{\Gamma_t^{(e)}} \alpha [N_t^{(e)}]^T [N_t^{(e)}] d\Gamma, \\ \{f_t\} &= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} [N_t^{(e)}]^T Q d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{e1}} \int_{\Gamma_t^{(e)}} \alpha [N_t^{(e)}]^T t_c d\Gamma - \sum_{e=1}^{n_{e2}} \int_{\Gamma_q^{(e)}} [N_t^{(e)}]^T q d\Gamma, \\ [B_t^{(e)}]^T [B_t^{(e)}] &= \vec{\nabla} [N_t^{(e)}]^T \vec{\nabla} [N_t^{(e)}]. \end{aligned}$$

Використавши метод скінчених різниць (поділивши проміжок  $[0, \tau_k]$  на дискретну множину точок  $\tau_0, \tau_1 \dots$  з кроком  $\Delta\tau_n$ ), з (18) отримаємо систему нелінійних алгебраїчних рівнянь

$$([C_t] + \theta \Delta\tau_n [K_t]) \{T\}_{n+1} = ([C_t] - (1-\theta) \Delta\tau_n [K_t]) \{T\}_n + (1-\theta) \{f_t\}_n \Delta\tau_n + \theta \{f_t\}_{n+1} \Delta\tau_n. \quad (19)$$

Тут індексами  $n, n+\theta, n+1$  позначено значення величин в момент часу  $\tau_n, \tau_{n+\theta}, \tau_{n+1}$  відповідно. При цьому  $\theta \in [0, 1]$ .

За рахунок вибору точки колокації  $\theta$  співвідношення (19) перетворюється в одну із наступних відомих скінчено-різницевоїх схем для рівняння (18), а саме: при  $\theta = 0$  – схему Ейлера (схема з різницею вперед),  $\theta = 0.5$  – схему Кранка-Нікольсона (схема з центральною різницею),  $\theta = 0.66667$  – метод Гальоркіна,  $\theta = 1$  – схему з різницею назад.

Нелінійна система алгебраїчних рівнянь (19) розв'язується за допомогою ітераційного методу.

Системи рівнянь (4), (7) – (9), які описують модель термопружного тіла, з використанням також методу зважених залишків в поєднанні з методом скінчених елементів зводимо до вигляду:

$$[K_u] \{U\} = \{F_u\}. \quad (20)$$

Тут  $[K_u]$ ,  $\{F_u\}$  – відповідно матриця жорсткості і вектор навантаження, які мають наступний вигляд:

$$[K_u] = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} [B_u^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B_u^{(e)}] d\Omega,$$

$$\{F_u\} = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} [B_u^{(e)}]^T [D^{(e)}] \{\varepsilon_t^{(e)}\} d\Omega + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} [N_u^{(e)}]^T \{X^{(e)}\} d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{e1}} \int_{\Gamma_\sigma^{(e)}} [N_u^{(e)}]^T \{P^{(e)}\} d\Gamma,$$

$$[B_u^{(j)}] = [Z] [N_u^{(j)}].$$

Нелінійна система алгебраїчних рівнянь (20) розв'язується також за допомогою ітераційного методу.

Системи рівнянь (5), (7) – (9), які описують модель термов'язкопружного тіла, з використанням також методу зважених залишків в поєднанні з методом скінчених елементів зводимо до вигляду (інтегрального рівняння Вольтера другого роду):

$$[K]\{U(\tau)\} = \{F_0(\tau)\} + \int_0^\tau [F_1(\tau, \xi)] \{U(\xi)\} d\xi. \quad (21)$$

Тут  $[K]$ ,  $[F_1]$ ,  $\{F_0\}$ , – відповідно матриці жорсткості і вектор навантаження, які мають наступний вигляд:

$$[K] = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} [B_u^{(e)}]^T [D_0^{(e)}] [B_u^{(e)}] d\Omega;$$

$$\{F_0\} = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} [B_u^{(e)}]^T [D_0^{(e)}] \{\varepsilon_t^{(e)}\} d\Omega + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} [N_u^{(e)}]^T \{X^{(e)}\} d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{e1}} \int_{\Gamma_\sigma^{(e)}} [N_u^{(e)}]^T \{P^{(e)}\} d\Gamma;$$

$$[F_1] = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} [B_u^{(e)}]^T [D_1^{(e)}] [B_u^{(e)}] d\Omega.$$

Систему інтегральних рівнянь (21) розв'язуємо методом послідовних наближень.

Системи рівнянь (6), (7) – (9), які описують модель термов'язкого тіла, з використанням також методу зважених залишків в поєднанні з методом скінчених елементів зводимо до вигляду:

$$[C] \frac{d\{U\}}{d\tau} + [K]\{U\} = \{F\}. \quad (22)$$

Тут  $[C]$ ,  $[K]$ ,  $\{F\}$  – відповідно матриці жорсткості і вектор навантаження, які мають наступний вигляд:

$$[C] = \sum_{j=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(j)}} [B_u^{(j)}]^T [D_2^{(j)}] [B_u^{(j)}] d\Omega;$$

$$[K] = \sum_{j=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(j)}} [B_u^{(j)}]^T [D_1^{(j)}] [B_u^{(j)}] d\Omega;$$

$$\{F\} = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} [B_u^{(e)}]^T [D_1^{(e)}] \{\varepsilon_t^{(e)}\} d\Omega + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} [N_u^{(e)}]^T \{X^{(e)}\} d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{e1}} \int_{\Gamma_\sigma^{(e)}} [N_u^{(e)}]^T \{P^{(e)}\} d\Gamma.$$

Використавши метод скінчених різниць, систему (22) зводимо, як і у випадку температурної задачі, до вигляду:

$$([C] + \theta \Delta \tau_n [K])\{U\}_{n+1} = ([C] - (1 - \theta) \Delta \tau_n [K])\{U\}_n + (1 - \theta)\{F\}_i \Delta \tau_n + \theta\{F\}_{n+1} \Delta \tau_n. \quad (23)$$

Розв'язок сформульованої екстремальної задачі будемо на основі принципу поетапної параметричної оптимізації [4]. В рамках запропонованого підходу проводиться дискретизація по часу з кроком

$\Delta\tau_n$  тривалості процесу термообробки. Оптимальний розв’язок функції керування на проміжку часу  $[\tau_n, \tau_{n+1}]$  шукаємо на множині кусково-лінійних або кусково-постійних функцій. Значення  $h_{n+1}$  функції керування  $h$  в момент часу  $\tau_{n+1}$  знаходимо за формулою

$$h_{n+1} = h_n + a_n \Delta\tau_n \quad \text{або} \quad h_{n+1} = b_n, \quad (24)$$

де  $a_n, b_n$  – шукані параметри, які змінюються в заданих границях.

Таким чином мінімізація функціоналів (10), (11) на проміжку часу  $[\tau_n, \tau_{n+1}]$  зводиться до задачі нелінійного програмування пошуку мінімуму відповідної функції однієї змінної  $J_k = J_k(a_n)$  або  $J_k = J_k(b_n)$  (аргументом якої є параметр  $a_n$  або  $b_n$ ). Параметр  $a_n$  або  $b_n$  шукається шляхом перебору з множини значень його зміни на основі інформації про величину критерію оптимізації (яка отримується із розв’язку прямої задачі на проміжку часу  $[\tau_n, \tau_{n+1}]$ ) при виконанні заданих обмежень (замість задачі знаходження траєкторії зміни функції керування, яка належить множині потужності континуум, ми встановлюємо лому, яка належить кінцевій множині ломаних, що проходять через вузли сітки).

**Приклад.** Запропоновану методику побудови оптимального режиму нагріву-охолодження скляних тіл обертання проілюструємо на прикладі режиму знегажування пустотілого скляного тіла обертання.

Тіло віднесене до циліндричної системи координат  $Or\varphi z$ . Розбиття області (осьового перерізу в силу осесиметричності тіла), на біквдратичні елементи представлено на рис. 1. Тіло виготовлене із скла С-93.

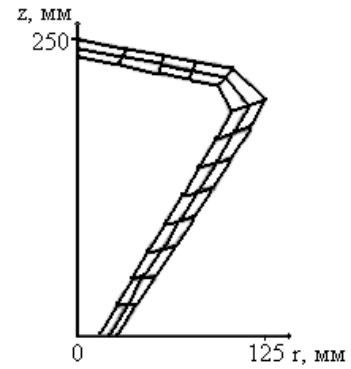


Рис. 1. Розбиття осьового перерізу тіла обертання

Ставиться задача нагріву тіла від початкової температури  $t(\bar{r}, 0) = 20^\circ\text{C}$  до максимальної  $t_{\max} = 380^\circ\text{C}$  з послідовним охолодженням до натуральної за мінімальний час при обмеженнях на допустимі напруження і швидкість зміни функції керування.

Термомеханічна поведінка тіла описується системою рівнянь (1)–(5), (7)–(9), яка зведена до системи алгебраїчних рівнянь (19)–(21).

За функціонал оптимальності прийнято час термообробки (11), а критерій оптимальності – його мінімум. Внутрішня поверхня тіла теплоізольована, а на зовнішній задана температура  $t_c$ , яка є функцією керування.

Температуру  $t_c$  на зовнішній поверхні шукаємо по приведеній вище методиці. Значення функції керування (температури  $t_c$  на зовнішній поверхні) в момент часу  $\tau_{i+1}$  визначаємо за формулою

$$t_{c,i+1} = a_i (\tau_{i+1} - \tau_i) + t_{c,i}, \quad (25)$$

де  $t_{c,i+1}, t_{c,i}$  – значення цієї функції в моменти часу  $\tau_{i+1}$  і  $\tau_i$  відповідно (рис.2).

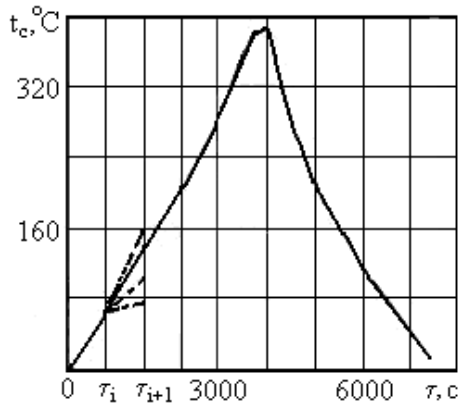


Рис. 2. Зміна в часі оптимальної температури на зовнішній поверхні тіла

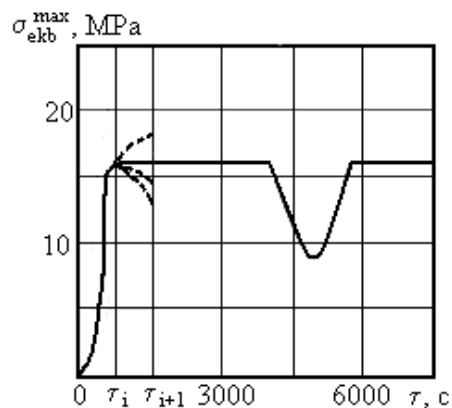


Рис. 3. Зміна в часі відповідних максимальних еквівалентних напружень

Параметр  $a_i$  (тангенс кута нахилу прямої, яка проходить через точки з координатами  $(\tau_i, t_{c,i})$  і  $(\tau_{i+1}, t_{c,i+1})$ ) визначаємо методом прямого пошуку (показані пунктирні лінії на рис. 2 відповідають різ-

ним наближеним значенням кута нахилу в вузлі  $\tau_i$ , а суцільна лінія відповідає заданому оптимальному куту нахилу ) на інтервалі  $[0, \pi/2]$  його зміни з кроком (який визначається необхідною точністю). На рис.3 відображена зміна відповідних еквівалентних максимальних напружень.

Аналізуючи побудову оптимального по швидкодії режиму знегажування можна зробити висновок, що мінімізація часу знегажування досягається за рахунок виходу на допустимі напруження або на обмеження по швидкості зміни функції керування.

**Висновки.** Розроблено методику дослідження температурного і термонапруженого станів в термочувливих скляних тілах обертання довільної форми, температура яких міняється в широкому діапазоні, при тепловому навантаженні і на цій основі побудоване оптимальне керування тепловими режимами в процесах нагріву-охолодження скляних тіл обертання при обмеженнях на напружено-деформований стан тіл і технологічні умови процесу. Запропонована методика може бути використана при оптимізації та автоматизації теплових процесів в скляному виробництві з метою підвищення продуктивності відповідних технологічних процесів. Отримані результати можуть застосовуватися як базові під час розв'язання більш складних задач, а також бути корисними при тестуванні результатів розрахунків, отриманих за допомогою інших методів. Вони можуть знайти застосування у скляному виробництві.

*Дослідження виконано за фінансової підтримки ДФФД (проект № Ф54.2/015).*

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гачкевич А. Р. Математические модели и методы термомеханики стеклянных тел вращения при тепловом нагружении / А. Р. Гачкевич, Е. М. Ирза, В. Я. Бойчук // Теоретическая и прикладная механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 8–19.
2. Коваленко А. Д. Избранные труды / А. Д. Коваленко. – К.: Наук. думка, 1976. – 307 с.
3. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. Finite Element Method: Vol 1. The Basis / O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor. – London: "Butterworth Heinemann", 2000. – 689 p.
4. Химмельбау Д. Прикладное нелинейное программирование / Д. Химмельбау. – М.: Мир, 1975. – 532 с.

*Надійшло до редакції 18.09.2013 р.*

#### РЕЗЮМЕ

В работе предложена методика оптимизации тепловых режимов при нагреве-охлаждении термочувствительных стеклянных тел вращения (форма которых отличается от канонической) при учете особенностей механического поведения стекла в широком диапазоне температур и зависимости от температуры значений допустимых напряжений.

*Ключевые слова:* тепловые технологические режимы, стеклянные тела, оптимизация.

#### SUMMARY

The optimization method of technological thermal modes in the process of heating-cooling of termosensitive glass bodies of rotation (the form of which is different from canonical) consideration features of mechanical behavior of glass in the wide range of temperatures. Is taken into account dependence on temperature stress limits.

*Keywords:* thermal technological modes, glass bodies, optimization.