УДК 531.38

А. В. Зыза

НОВЫЙ СЛУЧАЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УРАВНЕНИЙ КИРХГОФА-ПУАССОНА

В работе исследуются условия существования специального класса полиномиальных решений задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Построено одно новое частное решение уравнений рассматриваемого движения, зависящее от двух независимых параметров. Новое решение выражается в виде функций, полученных обращением эллиптических интегралов Лежандра третьего рода.

Ключевые слова: полиномиальные решения, уравнения Кирхгофа-Пуассона, гиростат, потенциальные и гироскопические силы, эллиптические функции времени, инвариантное соотношение.

Введение. Движение многих объектов недеформируемых конструкций современной техники, начиная с гироскопических систем и заканчивая устройствами, имитирующими живые организмы, моделируется как движение системы твердых тел типа гиростата в различных силовых полях.

Математическая сложность модели и практическая важность разработок в этой области определяют ряд научных направлений. Одним из них является направление, в котором изучается классическая задача о движении твердого тела и различные ее обобщения. Среди этих задач особое место занимает задача о движении гиростата в поле потенциальных и гироскопических сил, дифференциальные уравнения которой допускают только три первых интеграла [1].

Интегрирование уравнений динамики тяжелого твердого тела в случае, когда применение теории Якоби невозможно в силу отсутствия четвертого дополнительного интеграла, проводится с помощью других методов [2, 3]. В классической задаче для уравнений движения получено большое количество новых частных решений различной структуры, в частности, полиномиальной. Однако для нее в теории полиномиальных решений в основном появляются для действительных решений только теоремы несуществования новых решений. Это в определенной мере исчерпывает проблему построения полиномиальных решений в классической задаче.

Принципиальной сложностью исследования полиномиальных решений уравнений Кирхгофа-Пуассона является невозможность получения уравнений типа Н. Ковалевского и П. В. Харламова [2, 3] на функции – квадраты второй и третьей компонент вектора угловой скорости гиростата – в силу нелинейности правых частей дифференциальных уравнений по компонентам вектора, характеризующего направление оси симметрии силовых полей. Тем не менее, большое количество параметров уравнений Кирхгофа-Пуассона и более общая структура по отношениям к уравнениям Эйлера-Пуассона позволила построить новые решения различных полиномиальных классов [4–8].

В данной статье начато изучение условий существования в задаче о движении гиростата в поле потенциальных и гироскопических сил полиномиальных решений специального класса. Структура этого класса решений такова, что одна из основных переменных задачи содержит дробно-линейную функцию от первой компоненты вектора угловой скорости гиростата. В статье получен новый случай интегрируемости уравнений движения гиростата.

Постановка задачи. Преобразование дифференциальных уравнений движения гиростата. Рассмотрим движение заряженного и намагниченного гиростата с неподвижной точкой под действием потенциальных и гироскопических сил. Потенциальные силы возникают при взаимодействии магнитов с постоянным магнитным полем, электрических зарядов с электрическим полем и ньютоновском притяжении масс. Центры ньютоновского и кулоновского притяжений лежат на оси, проходящей через неподвижную точку и параллельной вектору, характеризующему направление постоянного магниткого поля. Гироскопические силы определяются лоренцевым воздействием магнитного поля на движущиеся в пространстве электрические заряды и циклическим движением роторов в теле-носителе. Уравнения движения рассматриваемого гиростата относится к уравнениям класса Кирхгофа [9] и в векторной форме [1] таковы

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = \left(A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}\right) \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times B\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times \left(C\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{s}\right), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{1}$$

Эти уравнения допускают три первых интеграла

$$A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - 2\left(\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{\nu}\right) + \left(C\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}\right) = 2E, \quad 2\left(A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}\right) \cdot \boldsymbol{\nu} - \left(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}\right) = 2k, \quad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1. \tag{2}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega} = \left(\omega_1, \omega_2, \omega_3\right)$ – угловая скорость гиростата; $\boldsymbol{\nu} = \left(\nu_1, \nu_2, \nu_3\right)$ – единичный вектор, характеризующий направление оси симметрии силовых полей; $\boldsymbol{\lambda} = \left(\lambda_1, \lambda_2, 0\right)$ – гиростатический момент;

$\boldsymbol{s}=(s_1, s_2, 0)$ – вектор обобщенного центра масс; A – тензор инерции гиростата построенный в неподвижной точке; B и C – симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными обозначает относительную производную; E и k – постоянные интегралов.

Запишем уравнения (1) и интегралы (2) в скалярном виде, полагая $A=\mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3)$, $B=\mathrm{diag}(B_1, B_2, B_3)$, $C=\mathrm{diag}(C_1, C_2, C_3)$:

$$A_1\dot{\omega}_1=(A_2-A_3)\omega_2\omega_3+B_3\omega_2\nu_3-B_3\omega_3\nu_2+(C_3-C_2)\nu_2\nu_3+\lambda_2\omega_3+s_2\nu_3,$$
$$A_2\dot{\omega}_2=(A_3-A_1)\omega_1\omega_3+B_1\omega_3\nu_1-B_3\omega_1\nu_3+(C_1-C_3)\nu_1\nu_3-\lambda_1\omega_3-s_1\nu_3,$$
$$A_3\dot{\omega}_3=(A_1-A_2)\omega_1\omega_2-B_1\omega_2\nu_1+B_2\omega_1\nu_2+(C_2-C_1)\nu_1\nu_2+\lambda_1\omega_2-\lambda_2\omega_1+s_1\nu_2-s_2\nu_1; \tag{3}$$
$$\dot{\nu}_1=\omega_3\nu_2-\omega_2\nu_3,\quad \dot{\nu}_2=\omega_1\nu_3-\omega_3\nu_1,\quad \dot{\nu}_3=\omega_2\nu_1-\omega_1\nu_2; \tag{4}$$
$$A_1\omega_1^2+A_2\omega_2^2+A_3\omega_3^2-2(s_1\nu_1+s_2\nu_2)+C_1\nu_1^2+C_2\nu_2^2+C_3\nu_3^2=2E,$$
$$2(A_1\omega_1+\lambda_1)\nu_1+2(A_2\omega_2+\lambda_2)\nu_2+2A_3\omega_3\nu_3-B_1\nu_1^2-B_2\nu_2^2-B_3\nu_3^2=2k,\quad \nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2=1. \tag{5}$$

Следуя [5, 7], поставим задачу об исследовании условий существования у уравнений (3), (4) решений вида

$$\omega_1=p,\quad \omega_2=Q(p)=\sum_{i=0}^{n} b_i p^i,\quad \omega_3^2=R(p)=\sum_{j=0}^{m} c_j p^j,$$
$$\nu_1=\varphi(p)=\sum_{i=0}^{l} a_i p^i,\quad \nu_2=\psi(p)=\sum_{j=0}^{n_1} g_j p^j,\quad \nu_3=\frac{æ(p)}{p}\omega_3,\quad æ(p)=\sum_{i=0}^{m_1} f_i p^i, \tag{6}$$

где n, m, l, n_1, m_1 – натуральные числа, коэффициенты b_i, c_j, a_i, g_j, f_i – параметры, подлежащие определению.

Подставим выражения (6) в уравнения (3), (4) и геометрический интеграл из (5):

$$\dot{p}=\big(p\psi(p)-Q(p)æ(p)\big)\big(p\varphi'(p)\big)^{-1}\sqrt{R(p)}; \tag{7}$$
$$\psi'(p)\big(p\psi(p)-Q(p)æ(p)\big)=\varphi'(p)\Omega(p)p,\quad \Omega(p)=æ(p)-\varphi(p),$$
$$\Big(R(p)æ^2(p)p^{-2}\Big)'\Omega(p)p=2\psi'(p)æ(p)\big(Q(p)\varphi(p)-p\psi(p)\big); \tag{8}$$
$$A_1\Omega(p)p=\psi'(p)\Big\{\big((C_3-C_2)\psi(p)+B_3Q(p)+s_2\big)æ(p)+\big((A_2-A_3)Q(p)-B_2\psi(p)+\lambda_2\big)p\Big\}; \tag{9}$$
$$A_2Q'(p)\Omega(p)p=\psi'(p)\Big\{\big((C_1-C_3)\varphi(p)-B_3p-s_1\big)æ(p)+\big(B_1\varphi(p)+(A_3-A_1)p-\lambda_1\big)p\Big\},$$
$$A_3R'(p)\Omega(p)=2\psi'(p)\Big\{\big((C_2-C_1)\psi(p)-B_1Q(p)-s_2\big)\varphi(p)+$$
$$+\big(B_2\psi(p)+(A_1-A_2)Q(p)-\lambda_2\big)p+s_1\psi(p)+\lambda_1Q(p)\Big\}; \tag{10}$$
$$\Big(\varphi^2(p)+\psi^2(p)-1\Big)p^2+R(p)æ^2(p)=0. \tag{11}$$

В уравнениях (7)–(10) штрихом обозначено дифференцирование по переменной p. Если функции $Q(p)$, $R(p)$, $\varphi(p)$, $\psi(p)$, $æ(p)$ определены, то зависимость $p=p(t)$ от времени устанавливается из дифференциального уравнения (7).

Новое частное решение. Рассмотрим случай, когда полиномы из (6) имеют вид

$$Q(p)=b_3p^3+b_2p^2+b_1p+b_0,\quad R(p)=c_6p^6+c_5p^5+c_4p^4+c_3p^3+c_2p^2+c_1p+c_0,$$
$$\varphi(p)=a_3p^3+a_2p^2+a_1p+a_0,\quad \psi(p)=g_3p^3+g_2p^2+g_1p+g_0,\quad æ(p)=f_1p+f_0. \tag{12}$$

В решении (6), (12) $f_0\neq 0$. Если же $f_0=0$, то указанный класс решений (6) будет относиться к классу Докшевича [10], а само решение (6), (12) можно охарактеризовать как решение с тремя линейными инвариантными соотношениями $\omega_1+\alpha_1\nu_1+\alpha_2\nu_2+\alpha_0=0$, $\omega_2+\beta_1\nu_1+\beta_2\nu_2+\beta_0=0$, $\omega_3+\delta\nu_3=0$. Производная в силу уравнений (3), (4) на этих соотношениях тождественно равна нулю, следовательно решение (6), (12) будет частным случаем решения [11].

Подставим полиномы из (12) в динамическое уравнение (9). Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях многочленов, стоящих в левых и правых частях этого уравнения и обозначая $\alpha = C_3 - C_2$, заключаем, что уравнение (9) при $g_1 \neq 0$, $g_2 \neq 0$ может быть тождеством по p только при выполнении условий

$$(\alpha g_3 + B_3 b_3) f_1 + (A_2 - A_3) b_3 - B_2 g_3 = 0,$$
$$(\alpha g_2 + B_3 b_2) f_1 + (\alpha g_3 + B_3 b_3) f_0 + (A_2 - A_3) b_2 - B_2 g_2 = 0. \quad (13)$$

Тогда в силу (13) динамическое уравнение (9) упрощается

$$\Omega(p) = \psi'(p)\left(d_2 p^2 + d_1 p + d_0\right)(A_1 p)^{-1}. \quad (14)$$

Здесь

$$d_2 = (\alpha g_1 + B_3 b_1) f_1 + (\alpha g_2 + B_3 b_2) f_0 + (A_2 - A_3) b_1 - B_2 g_1,$$
$$d_1 = (\alpha g_0 + B_3 b_0 + s_2) f_1 + (\alpha g_1 + B_3 b_1) f_0 + (A_2 - A_3) b_0 - B_2 g_0 + \lambda_2,$$
$$d_0 = (\alpha g_0 + B_3 b_0 + s_2) f_0. \quad (15)$$

Соотношение (14) позволит упростить другие уравнения исследуемой системы (8)–(10). Исключим функцию $\Omega(p)$ из уравнений (8), (10). Затем подставим в упрощенные уравнения, геометрический интеграл (11), а также в уравнение (14) полиномы (12). Требование того, чтобы полученные равенства были тождествами по p приводит к системе алгебраических уравнений на параметры задачи и коэффициенты полиномов решения (6), (12):

$$A_1 a_3 + 3 g_3 d_2 = 0, \quad A_1 a_2 + 2 g_2 d_2 + 3 g_3 d_1 = 0, \quad A_1 (a_1 - f_1) + g_1 d_2 + 2 g_2 d_1 + 3 g_3 d_0 = 0, \quad g_1 d_0 = 0,$$
$$A_1 (a_0 - f_0) + g_1 d_1 + 2 g_2 d_0 = 0, \quad A_1 (g_3 - b_3 f_1) - 3 a_3 d_2 = 0,$$
$$A_1 (b_2 f_1 + b_3 f_0 - g_2) + 2 a_2 d_2 + 3 a_3 d_1 = 0, \quad A_1 (b_1 f_1 + b_2 f_0 - g_1) + a_1 d_2 + 2 a_2 d_1 + 3 a_3 d_0 = 0,$$
$$A_1 (b_0 f_1 + b_1 f_0 - g_0) + a_1 d_1 + 2 a_2 d_0 = 0, \quad A_1 b_0 f_0 + a_1 d_0 = 0, \quad \gamma_4 d_2 - 2 A_1 b_3 a_3 = 0,$$
$$\gamma_4 d_1 + \gamma_3 d_2 - 2 A_1 (b_3 a_2 + b_2 a_3) = 0, \quad \gamma_4 d_0 + \gamma_3 d_1 + \gamma_2 d_2 - 2 A_1 (b_3 a_1 + b_2 a_2 + b_1 a_3 - g_3) = 0,$$
$$\gamma_3 d_0 + \gamma_2 d_1 + \gamma_1 d_2 - 2 A_1 (b_3 a_0 + b_2 a_1 + b_1 a_2 + b_0 a_3 - g_2) = 0,$$
$$\gamma_2 d_0 + \gamma_1 d_1 + \gamma_0 d_2 - 2 A_1 (b_2 a_0 + b_1 a_1 + b_0 a_2 - g_1) = 0,$$
$$\gamma_1 d_0 + \gamma_0 d_1 - 2 A_1 (b_1 a_0 + b_0 a_1 - g_0) = 0, \quad \gamma_0 d_0 - 2 A_1 b_0 a_0 = 0, \; 3 A_2 b_3 d_2 - A_1 (\beta f_1 + B_1) a_3 = 0,$$
$$A_2 (2 b_2 d_2 + 3 b_3 d_1) - A_1 ((\beta f_1 + B_1) a_2 + \beta a_3 f_0) = 0, \quad A_2 b_1 d_0 - A_1 (\beta a_0 - s_1) f_0 = 0,$$
$$A_2 (b_1 d_2 + 2 b_2 d_1 + 3 b_3 d_0) - A_1 ((\beta a_1 - B_3) f_1 + B_1 a_1 + \beta a_2 f_0 + A_3 - A_1) = 0, \quad c_0 = 0, \quad c_1 = 0,$$
$$A_2 (b_1 d_1 + 2 b_2 d_0) - A_1 ((\beta a_0 - s_1) f_1 + (\beta a_1 - B_3) f_0 + B_1 a_0 - \lambda_1) = 0, \quad 3 c_6 A_3 d_2 - A_1 \delta_3 a_3 = 0,$$
$$A_3 (6 c_6 d_1 + 5 c_5 d_2) - 2 A_1 (\delta_3 a_2 + \delta_2 a_3) = 0,$$
$$A_3 (6 c_4 d_0 + 5 c_5 d_1 + 4 c_4 d_2) - 2 A_1 (\delta_3 a_1 + \delta_2 a_2 + \delta_1 a_3 + B_2 g_3 + (A_1 - A_2) b_3) = 0,$$
$$A_3 (5 c_5 d_0 + 4 c_4 d_1 + 3 c_3 d_2) - 2 A_1 (\delta_3 a_0 + \delta_2 a_1 + \delta_1 a_2 + \delta_0 a_3 + B_2 g_2 + (A_1 - A_2) b_2 + s_1 g_3 + \lambda_1 b_3) = 0;$$
$$A_3 (4 c_4 d_0 + 3 c_3 d_1 + 2 c_2 d_2) - 2 A_1 (\delta_2 a_0 + \delta_1 a_1 + \delta_0 a_2 + B_2 g_1 + (A_1 - A_2) b_1 + s_1 g_2 + \lambda_1 b_2) = 0,$$
$$A_3 (3 c_3 d_0 + 2 c_2 d_1) - 2 A_1 (\delta_1 a_0 + \delta_0 a_1 + B_2 g_0 + (A_1 - A_2) b_0 - \lambda_2 + s_1 g_1 + \lambda_1 b_1) = 0,$$
$$c_2 A_3 d_0 - A_1 (\delta_0 a_0 + s_1 g_0 + \lambda_1 b_0) = 0, \quad a_0^2 + g_0^2 + c_2 f_0^2 - 1 = 0. \quad (16)$$

Здесь

$$\beta = C_1 - C_3, \quad \gamma_0 = 2 c_2 f_1 + c_3 f_0, \quad \gamma_1 = 3 c_3 f_1 + 2 c_4 f_0, \quad \gamma_2 = 4 c_4 f_1 + 3 c_5 f_0,$$
$$\gamma_3 = 5 c_5 f_1 + 4 c_6 f_0, \quad \gamma_4 = 6 c_6 f_1, \quad \delta_0 = -(\alpha + \beta) g_0 - B_1 b_0 - s_2,$$
$$\delta_1 = -(\alpha + \beta) g_1 - B_1 b_1, \quad \delta_2 = -(\alpha + \beta) g_2 - B_1 b_2, \quad \delta_3 = -(\alpha + \beta) g_3 - B_1 b_3$$

Система уравнений (13), (15), (16) разрешима относительно ненулевых параметров A_1 и f_1, например, при $d_0 = 0$, $d_1 = 0$. Запишем ее решение так

$$A_2 = \frac{(1+\mu_2)\mu_3 A_1}{3h^2(3\mu_2+2)\mu_4}, \quad A_3 = \frac{(1+\mu_2)\mu_3 A_1}{3h^2(2\mu_2+3)\mu_4}, \quad B_1 = -\frac{5(\mu_2+1)\mu_2\mu_3 A_1}{9h^2(2\mu_2+3)(3\mu_2+2)\mu_4 f_1},$$

$$B_2 = -\frac{\mu_2\mu_3 A_1}{9(2\mu_2+3)(3\mu_2+2)\mu_4 f_1}, \quad B_3 = -B_2, \quad \alpha = \frac{2(\mu_2+1)\mu_2\mu_3 A_1}{9(2\mu_2+3)(3\mu_2+2)\mu_4 f_1^2},$$

$$\beta = -\frac{2(\mu_2+1)\mu_2\mu_3 A_1}{9h^2(2\mu_2+3)\mu_4 f_1^2}, \quad s_1 = \frac{4(\mu_2+1)^2\mu_2\mu_3^2 A_1}{9h^2(2\mu_2+3)\mu_1\mu_4 f_1^2}, \quad s_2 = \frac{2(\mu_2+1)\mu_2\mu_3\mu_5 A_1}{9h(2\mu_2+3)(3\mu_2+2)\mu_1\mu_4 f_1^2},$$

$$\lambda_1 = \frac{2(\mu_2+1)\mu_2\mu_3\left(72h^8+493h^6+1045h^4+672h^2+36\right)A_1}{9h^2(2\mu_2+3)\mu_1\mu_4 f_1},$$

$$\lambda_2 = \frac{2\mu_2\mu_3\left(78h^{10}+770h^8+3071h^6+6111h^4+5976h^2+2268\right)A_1}{9h(2\mu_2+3)(3\mu_2+2)\mu_1\mu_4 f_1}; \qquad (17)$$

$$a_3 = hg_3, \quad a_2 = \frac{6h^2(\mu_2+2)(2\mu_2+3)\mu_1 f_1^2}{(\mu_2+1)\mu_3^2}, \quad a_1 = \frac{9\mu_2 f_1\left(8h^4+23h^2+6\right)}{2\mu_3}, \quad a_0 = -\frac{2(\mu_2+1)\mu_3}{\mu_1},$$

$$f_0 = a_0, \quad b_3 = \frac{h^3(\mu_2+2)(2\mu_2+3)^2\mu_1^2 f_1^2}{2(\mu_2+1)^3\mu_3^3}; \quad b_2 = \frac{2h(\mu_2+2)(2\mu_2+3)\mu_1 f_1\left(3h^4+11h^2+9\right)}{(\mu_2+1)^2\mu_3^2},$$

$$b_1 = \frac{\mu_5}{2h(\mu_2+1)\mu_3}, \quad b_0 = 0, \quad g_3 = \frac{h^3(\mu_2+2)(2\mu_2+3)^2\mu_1^2 f_1^3}{2(\mu_2+1)^3\mu_2\mu_3^3},$$

$$g_2 = \frac{9h(\mu_2+2)(2\mu_2+3)\mu_1 f_1^2}{(\mu_2+1)\mu_3^2}, \quad g_1 = \frac{3f_1\left(2h^6+53h^4+165h^2+126\right)}{2h\mu_3}, \quad g_0 = -\frac{\mu_5}{h\mu_1},$$

$$c_6 = -\frac{h^6(\mu_2+2)^2(2\mu_2+3)^4\mu_1^4 f_1^4}{4(\mu_2+1)^6\mu_2\mu_3^6}, \quad c_5 = -\frac{2h^4(\mu_2+2)^2(2\mu_2+3)^3(4\mu_2+5)\mu_1^3 f_1^3}{(\mu_2+1)^5\mu_3^5},$$

$$c_4 = -\frac{3h^2(\mu_2+2)(2\mu_2+3)^2\mu_1^2 f_1^2\left(88h^8+653h^6+1783h^4+2112h^2+900\right)}{2(\mu_2+1)^4\mu_3^4},$$

$$c_3 = -\frac{2(\mu_2+2)(2\mu_2+3)\mu_1 f_1\left(538h^{12}+5144h^{10}+20119h^8+41280h^6+46917h^4+27972h^2+6804\right)}{(\mu_2+1)^3\mu_3^3}$$

$$c_2 = -\frac{1}{4h^2(\mu_2+1)^2\mu_3^2}\left(14080h^{18}+201444h^{16}+1261149h^{14}+4550815h^{12}+10468239h^{10}+\right.$$

$$\left.+15950673h^8+16072128h^6+10254600h^4+3713040h^2+571536\right), \quad c_1 = 0, \quad c_0 = 0. \qquad (18)$$

Здесь

$$\mu_1 = \left(5184h^{18}+75348h^{16}+470269h^{14}+1647759h^{12}+3555231h^{10}+\right.$$

$$\left.+4869169h^8+4197360h^6+2166696h^4+594000h^2+63504\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\mu_2 = h^2+1, \quad \mu_3 = 35h^6+113h^4+48h^2-36,$$

$$\mu_4 = 9h^4+32h^2+24, \quad \mu_5 = 72h^{10}+587h^8+1916h^6+3117h^4+2484h^2+756. \qquad (19)$$

В соотношениях (17)–(19) h – действительный положительный корень уравнения

$$90h^{12}+644h^{10}+1595h^8+1425h^6-153h^4-864h^2-324=0,$$

то есть $0{,}8385827025 < h < 0{,}8385827026$.

Решение (6), (12) при условиях (17), (18) будет действительным, например, при

$$A_1 = a\,, \quad f_1 = -\frac{1}{20f}\,, \quad p \in \left[10f, 13f\right], \quad \left(a > 0,\ f > 0\right). \tag{20}$$

Тогда зависимость p от времени t найдем из дифференциального уравнения

$$\dot{p} = -\frac{h}{3} p^2 \sqrt{c_6 p^4 + c_5 p^3 + c_4 p^2 + c_3 p + c_2}\,.$$

Это позволит получить зависимость от времени всех переменных решения (6), (12), (17), (18), (20).

Выводы. Таким образом, в статье построено одно новое частное решение полиномиального вида задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Полученное решение зависит от двух параметров и выражается в виде эллиптических функций времени. Найденное решение имеет аналог в задаче о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горр Г. В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку / Г. В. Горр, А. В. Мазнев. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.
2. Харламов П. В. Лекции по динамике твердого тела / П. В. Харламов. – Новосибирск: Изд-во Новосибир. ун-та, 1965. – 221 с.
3. Гашененко И. Н. Классические задачи динамики твердого тела / И. Н. Гашененко, Г. В. Горр, А. М. Ковалев. – Киев: Изд-во Наук. думка, 2012. – 401 с.
4. Горр Г. В. Полиномиальные решения в одной задаче о движении гиростата с неподвижной точкою / Г. В. Горр, А. В. Зыза // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 6. – С. 12–21.
5. Зыза А. В. Об одном классе полиномиальных решений уравнений Кирхгофа / А. В. Зыза // Вісник Донецьк. ун-ту. Сер.А: Природн. науки. – 2006. – № 1. – С. 40–41.
6. Зыза А. В. Один случай полиномиальных решений уравнений Кирхгофа-Пуассона / А. В. Зыза // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 103–109.
7. Зыза А. В. Новое решение уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил / А. В. Зыза // Труды Ин-та прикладной математики и механики НАН Украины. – 2012. – Т. 25. – С. 92–99.
8. Зыза А. В. О полиномиальных решениях с квадратичным инвариантным соотношением уравнений движения гиростата / А. В. Зыза // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43. – С. 33–42.
9. Харламов П. В. О различных представленях уравнений Кирхгофа / П. В. Харламов, Г. В. Мозалевская, М. Е. Лесина // Механика твердого тела. – 2001. – Вып. 31. – С. 3–17.
10. Докшевич А. И. Новое частное решение уравнений движения гиростата, имеющего неподвижную точку / А. И. Докшевич // Механика твердого тела. – 1970. – Вып. 2. – С. 12–15.
11. Харламов П. В. О решениях уравнений динамики твердого тела / П. В. Харламов // Прикл. математика и механика. – 1965. – Т. 29, вып. 3. – С. 567–572.

Поступила в редакцию 14.03.2014 г.

РЕЗЮМЕ

У роботі досліджуються умови існування спеціального класа поліноміальних розв’язків задачі про рух гіростата під дією потенціальних і гіроскопічних сил. Отримано один новий частковий розв’язок рівнянь руху, який залежить від двох незалежних параметрів. Новий розв’язок виражається у вигляді функцій, отриманих оберненням еліптичних інтегралів Лежандра третього роду.

Ключові слова: поліноміальні розв’язки, рівняння Кірхгофа-Пуассона, гіростат, потенціальні і гіроскопічні сили, еліптичні функції часу, інваріантні співвідношення.

SUMMARY

In the paper conditions of existence of special class of polynomial solutions of the task about the gyrostat movement under the influence of potential and gyroscopic forces are studied. One particular solution of this problem depending two independent parameters is constructed. This solution is representаl in a form functions obtained by the inversion of elliptic Legandre integrals of the thir kind.

Keywords: polunomial solutions, Kirhhoff-Poisson equations, gyrostat, potential and gyroscopic forcos, elliptic function of time, invariant correlation.