МАТЕМАТИКА

512.552.13

В.В. Бохонко, Б.В. Забавський
Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна

ПРИВЕДЕННЯ МАТРИЦЬ ДО КАНОНІЧНОГО ДІАГОНАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ ОБОРОТНИМИ ТЕПЛЕЦЕВИМИ МАТРИЦЯМИ

У цій роботі показано, що над комутативними кільцями елементарних дільників квадратного стабільного рангу 1, довільна матриця другого порядку приводиться до канонічного діагонального вигляду оборотними теплецевими матрицями. Також встановлено властивості оборотних теплецевих матриць.

Ключові слова: теплецева матриця, одиничний квадратний стабільний ранг 1, квадратний стабільний ранг 1.

Вступ. Після досліджень Баса [1] властивостей стабільності функтора K_1, поняття стабільного рангу привернуло багато уваги різних математиків. Відзначимо набуті на дану тему роботи [2-5]. Особливої уваги заслуговує поняття стабільного рангу 1, можливо через те, що воно є Моріта інваріантною властивістю і має різноманітні застосування у проблемах скорочення і заміни модулів [1-5].

Особливий інтерес викликають дослідження, які пов'язують стабільний ранг кілець з можливістю діагональної редукції матриць [6].

Ще в 1969 році Капланський відзначив, що комутативне кільце Безу стабільного рангу 1 є кільцем елементарних дільників [6]. Хенріксен показав, що регулярне кільце стабільного рангу 1 є кільцем, над яким діагоналізуються матриці [6]. А робота [7] показує, що древня алгебраїчна проблема кілець елементарних дільників є $K -$ алгебраїчною проблемою і має хороше описання мовою стабільного рангу кілець.

Ціллю даної роботи є вивчення відомого алгебраїчного узагальнення поняття стабільного рангу 1. А саме, розглядаючи проблему факторизації матриці $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ в добуток двох теплецевих матриць, Хуран, Лам та Шоу ввели поняття квадратного стабільного рангу 1 [8].

Основні результати.

Означення 1. *Кільце R має (правий) квадратний стабільний ранг 1 (у позначеннях $ssr(R)=1$), якщо для довільних $a,b \in R$ таких, що $aR+bR=R$ випливає, що a^2+bx є оборотним елементом кільця R для деякого елемента x.*

Квадратний стабільний ранг має багато властивостей характерних для стабільного рангу 1 (властивостей фактор-кілець і кілець степеневих рядів). Кільце R називається кільцем стабільного рангу 1 (в позначеннях $sr(R)=1$), якщо для будь-яких $a,b \in R$ таких, що $aR+bR=R$ існує такий оборотний елемент $u \in R$ такий, що $a+bt=u$ для деякого $t \in R$. У випадку комутативних кілець, має місце наступний результат.

Твердження 1. [8] *Якщо $R -$ кільце стабільного рангу 1, тоді R є кільцем квадратного стабільного рангу 1.*

У той же час не всяке кільце квадратного стабільного рангу 1 є кільцем стабільного рангу 1.

Прикладами кілець квадратного стабільного рангу 1 слугують кільця дійснозначних функцій на топологічному просторі, а також дійсне кільце гомоморфності в формально дійсному полі [8]. Багато нових прикладів отримано в роботі [8] пов'язаних з Артін-Шраєр властивістю, тобто з кільцями R де з $\sum_i a_i R = R$ випливає, що $\sum_i a_i^2$ $-$ оборотний елемент R.

Введемо всі необхідні факти і поняття. Під кільцем розуміємо асоціативне кільце R з 1 і $1 \neq 0$ Кільце R називається правим (лівим) квазі-дуо-кільцем, якщо довільний правий (лівий) ідеал кільця є двобічним. Під правим (лівим) кільцем Безу розуміємо кільце, в якому довільний скінченнопороджений правий (лівий) ідеал є головним. Кільце Безу − це кільце, яке є правим і лівим кільцем Безу одночасно. Кільце R назвемо правим (лівим) дистрибутивним, якщо гратка правих (лівих) ідеалів кільця є дистрибутивною. Дистрибутивне кільце – це кільце, яке є правим і лівим дистрибутивним кільцем одночасно. У випадку дистрибутивних кілець Безу має місце наступний результат.

Твердження 2. [9] *Наступні властивості для кілець Безу R є еквівалентними*

1) R − праве (ліве) дистрибутивне кільце;

2) R − праве (ліве) квазі-дуо-кільце.

Кільця (правого) квадратного стабільного рангу 1 є правими квазі-дуо-кільцями, тобто ми маємо наступний результат.

Теорема 3. [8] *Нехай R кільце правого квадратного стабільного рангу 1 тоді R − праве квазі-дуо-кільце.*

Скажімо, кільце R називається дуо-кільцем, якщо довільний однобічний ідеал є двобічним, і, скажімо, дві матриці A і B над кільцем R є еквівалентними, якщо існують оборотні матриці P і Q відповідних розмірів над R, що $PAQ=B$. Скажімо, що матриця A над кільцем R володіє канонічною діагональною редукцією, якщо A еквівалентна матриці

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \varepsilon_r & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

де $\varepsilon_i R \supseteq \varepsilon_{i+1} R$.

Назвемо кільце R кільцем елементарних дільників, якщо довільна матриця над R еквівалентна канонічній діагональній матриці. Відзначимо відомий результат, щодо правих квазі-дуо-кілець елементарних дільників.

Теорема 4. [7] *Праве квазі-дуо-кільце елементарних дільників є дуо-кільцем.*

Звідси, як наслідок теорем 3 і 4 отримаємо такий результат.

Теорема 5. [8] *Кільце елементарних дільників квадратного стабільного рангу 1 є дуо-кільцем.*

Враховуючи даний результат, надалі ми будемо лише розглядати комутативні кільця квадратного стабільного рангу 1.

Якщо 1×2 (2×1) матриці над R еквівалентні канонічній діагональній матриці, тоді R називається праве (ліве) кільце Ерміта. Кільце Ерміта − це кільце, яке є лівим і правим кільцем Ерміта.

Розглянемо матрицю A другого порядку над комутативними кільцем R. Матриця A називається теплецевою, якщо вона має вигляд

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix},$$

де $a,b,c \in R$. Відповідно якщо A − оборотна теплецева матриця, то A^{-1} теж оборотна теплецева.

Означення 2. *Нехай R − комутативне кільце Безу назвемо теплецевим, якщо для будь-яких $a,b \in R$ існує T − оборотна теплецева матриця така, що виконується* $(\mathrm{a},\mathrm{b})T=(d,0)$.

Твердження 6. *Нехай $R-$ комутативне кільце та $ssr(R)=1$, якщо для деяких $a,b \in R$ таких, що $aR+bR=R$ існує T − оборотна теплецева матриця, то виконується* $(a,b)\mathrm{T}=(1,0)$.

Доведення. Нехай $R-$ комутативне кільце квадратного стабільного рангу 1, тоді $aR+bR=R$ звідси випливає, що $a^2+bt=u$, де u − оборотний елемент.

Введемо позначення $S=\begin{pmatrix} a & -b \\ t & a \end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix} u^{-1} & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}$ і виконаємо наступне:

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ t & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^{-1} & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді $(a,b)SK = (1,0)$. Відзначимо, що матриця $\mathrm{T} = \mathrm{SK}$ є теплецева.

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ t & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^{-1} & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au^{-1} & -bu^{-1} \\ tu^{-1} & au^{-1} \end{pmatrix}$$

Отже, $(a,b)\mathrm{T} = (1,0)$, що потрібно було доказати.

Твердження 7. *Нехай* R *− комутативне кільце і* $ssr(R) = 1$. *Тоді будь-який унімодулярний рядок довжини* 2 *можна доповнити до оборотної теплецевої матриці.*

Доведення. Нехай $aR + bR = R$, тоді (a, b) − унімодулярний рядок. Тоді згідно з твердженням 6, ми маємо існування оборотної теплецевої матриці T, що

$$(a,b)\mathrm{T} = (1,0).$$

Звідси $(a,b) = (1,0)\mathrm{T}^{-1}$. Зауважимо, що обернена матриця до теплецевої матриці 2-го порядку теж теплецева. Нехай

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} t & t_{12} \\ t_{21} & t \end{pmatrix}.$$

Тоді з рівності $(a,b) = (1,0)T^{-1}$ отримаємо, що $a = t$, $b = t_{12}$. Звідси

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ t_{21} & a \end{pmatrix},$$

що і потрібно було довести.

Теорема 8. Нехай R − *комутативне кільце Ерміта та* $ssr(R) = 1$. *Тоді* R − *теплецеве кільце.*

Доведення. Нехай $a, b \in R$ і $aR + bR = dR$. Тоді $a = a_0 d$, $b = b_0 d$ і $a_0 R + b_0 R = R$ [1]. Згідно з твердженням 6 маємо

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 & -b_0 \\ t & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix},$$

тобто $a_0{}^2 + b_0 t = u$ − оборотний елемент. Звідси $aa_0 + bt = du$, а значить

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 & -b_0 \\ t & a_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^{-1} & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 \end{pmatrix}$$

Тобто R − теплецеве кільце. Теорема доведена.

Теорема 9. *Нехай* R − *комутативне кільце елементарних дільників і* $ssr(R) = 1$. *Тоді для довільної матриці* A *порядку* 2 *існують оборотні теплецеві матриці* P_1, P_2, Q_1, Q_2 *такі, що* $P_1 P_2 A Q_1 Q_2$ − *канонічна діагональна матриця.*

Доведення. Спочатку зауважимо, що в силу теореми 1, для доведення нашого результату слід обмежитися матрицями вигляду

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

де $aR + bR + cR = R$. Так як R є кільцем елементарних дільників, тоді згідно з [9] існують такі елементи $p, q \in R$, що $paR + (pb + qc)R = R$, тобто

$$par + (pb + qc)\mathrm{s} = 1, \tag{1}$$

для деяких елементів $r, s \in R$. Зауважимо, що $pR + qR = R$, $rR + sR = R$. Рівність (1) можна матрично записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = 1 \tag{2}$$

Оскільки $pR + qR = R$, $rR + sR = R$, в силу твердження 2 існують оборотні теплецеві матриці вигляду

$$P_1 = \begin{pmatrix} p & q \\ * & * \end{pmatrix},$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} r & * \\ s & * \end{pmatrix}.$$

Із рівності (2) отримаємо

$$P_1 A Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix} = A_1 .$$

Шляхом трансквенції рядків і стовпців матриця A_1 приводиться до канонічного діагонального вигляду. Оскільки кожній такого роду трансквенції відповідає домноження матриці A_1 справа та зліва на оборотну теплецеву матрицю вигляду

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -y & 1 \end{pmatrix}, Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то ми отримаємо

$$P_2 P_1 A Q_1 Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ac \end{pmatrix},$$

де P_1, P_2, Q_1, Q_2 – оборотні теплецеві матриці.

Теорема 10. *Нехай R – комутативне кільце елементарних дільників і $ssr(R) = 1$. Тоді будь-яка оборотна матриця 2-го порядку є добутком оборотних теплецевих матриць.*

Доведення. Нехай A – оборотна матриця 2-го порядку над R. Згідно теореми 9 і того факту, що A – оборотна, існують матриці оборотні теплецеві та оборотні P і Q другого порядку, що

$$PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Звідси $A = P^{-1} Q^{-1}$. Оскільки обернена матриця до теплецевої є теплецевою, то наша теорема доведена.

Означення 3. *Кільце R називається кільцем одиничного квадратного стабільного рангу 1, якщо з умови $aR + bR = R$ випливає, що існує оборотний елемент t такий, що $a^2 + bt$ – оборотний елемент кільця R.*

Теорема 11. *Нехай R –комутативне кільце Ерміта одиничного квадратного стабільного рангу 1. Тоді будь-яка матриця 2-го порядку над R діагоналізується оборотними теплецевими матрицями.*

Доведення. Згідно з обмеженням накладеним на R маємо, що для будь-яких елементів $a, b \in R$ де $aR + bR = dR$, і $a = da_0$, $b = db_0$ маємо, що $a_0 R + b_0 R = R$. Так, як $ssr(R) = 1$, то $a_0{}^2 + b_0 t = u$, u, t – оборотні елементи і $aa_0 + bt = ud$.

Доведемо, що R – кільце елементарних дільників. Для цього досить довести, що довільна матриця $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, де $aR + bR + cR = R$ володіє канонічно діагональною редукцією.

Так, як $aR + bR = dR$, в силу доведеного вище маємо $aa_0 + bt = ud$, $a = da_0$, $b = db_0$, $a_0 R + b_0 R = R$ і u, t – оборотні елементи. Тоді

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & -b_0 \\ t & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} du & 0 \\ ct & ca_0 \end{pmatrix}$$

Оскільки $aR + bR = dR$ і $aR + bR + cR = R$, то $dR + cR = R$. А так, як t – оборотний елемент, то маємо, що $duR + ctR = R$. А це означає, що матриця володіє канонічною діагональною редукцію. Теорема доведена.

Теорема 12. *Нехай R – комутативне кільце Безу стабільного рангу 1. Тоді:*

1) довільний унімодулярний рядок (стовпець) довжини 2 над R доповняється до оборотної теплецевої матриці;

2) довільна матриця порядку 2 над R, шляхом домноження справа та зліва на оборотні теплецеві матриці приводиться до канонічного діагонального вигляду;

3) довільна оборотна матриця порядку 2 *над кільцем* R, *розкладається у добуток оборотних теплецевих матриць.*

Доведення. Оскільки кільце стабільного рангу 1 є кільцем квадратного стабільного рангу 1 [8] і з того факту, що кільце Безу стабільного рангу 1 є кільцем елементарних дільників., в силу попередніх результатів, отримаємо доведення даного результату. Теорема доведена.

Висновки. Отже, в цій роботі одним з основних результатів можемо відзначити результат, що над комутативним кільцем Ерміта одиничного квадратного стабільного рангу 1 будь-яка матриця 2-го порядку діагоналізується оборотними теплецевими матрицями.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Bass H. K-theory and stable algebra / H. Bass // Publ. Math. IHES. – 1964. – V. 22. – P. 5-60 p.
2. Ara P. Strongly π-regular rings have stable range 1 / P. Ara // Proc. Amer. Math. Soc. – 1996. – V. 124. – P. 3293-3298.
3. Camillo V. Stable Range 1 for rings with many idempotens / V. Camillo, H.-P. Yu // Trans. Amer. Math. Soc. – 1995. – V. 347. – P. 3141-3147.
4. Estes D. Stable range in commutative rings / D. Estes, J. Ohm // J. Algebra. – 1967. – V 7. – P. 343–362.
5. Vaserstein I. N. Bass`s first stable range condition / I.N. Vaserstein // J. Pure Appl. Algebra. – 1984. – V. 34. – P. 319-330.
6. Zabavsky B.V. Diagonal reduction of matrices over rings / B.V Zabavsky // Math. Studies. – Lviv, 2012. – V. 16. – 251 p.
7. Zabavsky B.V. Diagonal reduction of matrices over finite stable range rings / B.V. Zabavsky // Math. Studies Monograph Series. – 2014. – V. 41, № 1. – P. 101-108.
8. Khurana D. Rings of square stable rang one / D. Khurana, T.Y. Lam, Zhou Wang // J. Algebra. – 2011. – V. 338. – P. 122-143.
9. Zabavsky B. V. Distributive elementary divisor domains / Zabavsky B.V., Komarnytsry M.Y. // Ukr. Math. J. 1996. – V. 42, № 7. – P. 890-892.

ПРИВЕДЕНИЕ МАТРИЦ К КАНОНИЧЕСКОМУ ДИАГОНАЛЬНОМУ ВИДУ ОБРАТИМЫМИ ТЕПЛЕЦЕВЫМИ МАТРИЦАМИ

В.В. Бохонко, Б.В. Забавский

РЕЗЮМЕ

В этой работе доказано, что над коммутативными кольцами элементарных делителей квадратного стабильного ранга 1, произвольная матрица второго порядка приводится к каноническому диагональному виду обратимыми теплецевимы матрицами. Также, установлено свойства обратимых тепловых матриц.

Ключевые слова: теплицевая матрица, единичный квадратный стабильный ранг 1, квадратный стабильный ранг 1.

REDUCING THE MATRICES TO THE CANONICAL DIAGONAL FORM BY INVERTIBLE TOEPLITZ MATRICES

V.V. Bokhonko, B.V. Zabavsky

SUMMARY

This paper shows that commutative rings elementary divisors square stable range one, an arbitrary matrix of the second order is reduced to canonical diagonal form invertible Toeplitz matrices. Also we established the properties of Toeplitz matrices.

Keywords: Toeplitz matrix, unit square stable range one, square stable range one, properties of matrices.