УДК 519.872

І.О. Дьогтєва
Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, Вінниця, Україна

λ-РОЗПОДІЛ. ВЛАСТИВОСТІ ТА ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ λ-РОЗПОДІЛУ

В даній статті за допомогою методу стохастичного склеювання побудовано клас розподілів (λ-розподіли) $\bar{F}(t,\lambda)=(1+\lambda^2t^2)e^{-\lambda^2t^2}$. Досліджено властивості λ-розподілу, які слугуватимуть орієнтиром для побудови відповідних статистик, що, таким чином, можуть бути покладені в основу критерія згоди. Знайдено основні числові характеристики λ-розподілу.

λ-розподіл може слугувати характеристикою надійності елементів системи або деяких систем у цілому.

Ключові слова: інтенсивність відмов, надійність, λ-розподіл, функція розподілу.

Вступ. При побудові математичних моделей надійності систем (елементів) одним з найефективніших прийомів є ототожнення певної властивості системи з відповідною кількісною характеристикою. Зокрема, математичною моделлю кількісного описання відмов є закон розподілу часу безвідмовної роботи системи, тобто ймовірносний закон, який управляє відмовами елементів системи з врахуванням їх технічного стану, виконання системою різноманітних операцій і зовнішніх навантажень [4].

Апріорний аналіз надійності системи проводиться за наперед прийнятою моделлю відмов, що, зокрема, вимагає наявності певного запасу таких моделей з відомими властивостями, з яких можна було б обрати модель, яка найбільш адекватно відображає фізику відмов.

Головним джерелом інформації про закон розподілу реальної системи є статистика за результатами випробувань на надійність. Однак обмеженість статистичного матеріалу і ряд інших причин призводять до використання законів розподілів, які ненайкращим чином відображають конкретний фізичний механізм появи відмов. Зрозуміло, що цього можна уникнути, якщо знову-таки в наявності буде солідний запас функцій розподілу.

Звичайно теорія ймовірностей має певний запас базисних функцій розподілу, які успішно використовуються у теорії надійності.

Особливо популярний у цьому плані показниковий розподіл [7], на якому грунтуються і широко використовуються в практиці аналітичні та асимтотичні методи розрахунків і оцінки надійності. Однак більш дбайлива обробка вихідної статистичної інформації, як правило, приводить до розподілів, відмінних від показникового. Використовуються також такі розподіли: з монотонною інтенсивністю відмов [5], розподіл Вейбулла–Гнєденко, гама–розподіл, урізаний нормальний, з немонотонною інтенсивністю відмов (дифузійні розподіли, що відповідають немонотонному марковському процесу) і ряд інших.

При виборі функції розподілу в якості моделі відмов її характеристичні властивості і числові характеристики відіграють лише допоміжну роль. В основі такого вибору є або минулий досвід, або знання конкретного механізму появи відмов. Останнє вимагає вміння встановлювати взаємозв'язок між деякими фізичними станами і конкретними розподілами.

Враховуючи той факт, що мірою надійності системи (обладнання) є "інтенсивність відмов" [4] була введена спеціальна характеристика. А саме, нехай $F(\mathrm{t})$ - абсолютно неперервна функція розподілу, а $f(\mathrm{t})=F'(\mathrm{t})$ щільність розподілу ймовірностей. Тоді функція

$$\lambda(\mathrm{t}):=\frac{f(\mathrm{t})}{1-F(\mathrm{t})},$$

яку називають по різному (небезпека відмови [4], функція інтенсивності [5], інтенсивність відмов [7]), якраз і є кількісна оцінка інтенсивності відмов. Якраз через дану функцію можна використовувати інформацію про механізм відмов при побудові моделей відмов.

Таким чином, як моделі відмов можна використовувати:

а) стандартні розподіли, які є в неявності в теорії ймовірностей [8], [10], або які можна отримати із стандартних при роз'язуванні задач власне теорії ймовірностей і математичної статистики;

б) розподіли, які отримуються при моделюванні типових технічних систем;

в) розподіли, які отримуються при конкретизації моделей високого рівня абстрактності.

В даній статті з допомогою методу стохастичного склеювання, запропонованого в [11] і ефективно використаного в [12], побудовано клас розподілів (λ-розподіли), досліджено властивості, які можуть слугувати орієнтиром при виборі його як моделі відмов, знайдено основні числові характеристики λ-розподілу.

Побудова розподілу. Нехай

$$\begin{aligned} \bar{F}_1(t) &= e^{-\alpha t},\ де\ \alpha > 0, \\ \bar{F}_2(t) &= e^{-\lambda^2 t^2},\ де\ \lambda > 0, \end{aligned} \quad . \tag{1}$$

тобто перший розподіл – це показниковий розподіл з параметром α, а другий – розподіл Вейбулла з параметрами λ^2 і 2. Очевидно, що функції інтенсивності розподілів (1) мають вигляд

$$\lambda_1(t) = \alpha,$$
$$\lambda_2(t) = 2\lambda^2 t,$$

Нехай u – довільне додатне число, і нехай

$$\lambda(t,u) = \begin{cases} \alpha,\ якщо\ 0 \le t \le u, \\ 2\lambda^2 t,\ якщо\ u \ge t. \end{cases} . \tag{2}$$

Будемо вважати, що (2) є функцією інтенсивності деякої випадкової величини. Скориставшись формулами методу стохастичного склеювання, отримаємо:

$$\bar{F}(t,u) = \exp\left\{-\int_0^t \lambda_1(\tau)d\tau\right\} = \exp\left\{-\int_0^t \alpha d\tau\right\} = e^{-\alpha t},\ якщо\ t < u,$$

$$\bar{F}_2(t,u) = \exp\left\{-\int_0^u \alpha d\tau - \int_u^t 2\lambda^2 \tau d\tau\right\} = e^{-\alpha u - \lambda^2(t^2 - u^2)},\ якщо\ t \ge u,$$

тобто маємо такий закон розподілу

$$\bar{F}(t,u) = \begin{cases} e^{-\alpha t},\ якщо\ 0 \le t \le u, \\ e^{-\alpha u - \lambda^2(t^2-u^2)},\ якщо\ u \le t. \end{cases}$$

Будемо вважати, що параметр u є значенням випадкової величини, причому дана випадкова величина має розподіл Вейбулла з параметрами λ^2 і 2, тобто u значення випадкової величини U, щільність розподілу ймовірностей якої має вигляд

$$f(u) = 2\lambda^2 u e^{-\lambda^2 u^2}.$$

Тоді математичне сподівання випадкової величини $\bar{F}(t,U)$ буде мати вигляд

$$M\left(\bar{F}(t,U)\right) = \frac{2\lambda^2}{\alpha^2} e^{-\lambda^2 t^2} + e^{-\alpha t - \lambda^2 t^2}\left(1 - 2\lambda^2\left(\frac{t}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\right)\right).$$

Введемо позначення $\bar{F}(t,\alpha,\lambda) := M\left(\bar{F}(t,U)\right)$.

Таким чином, маємо розподіл:

$$\bar{F}(t,\alpha,\lambda) = \frac{2\lambda^2}{\alpha^2} e^{-\lambda^2 t^2} + e^{-\alpha t - \lambda^2 t^2}\left(1 - 2\lambda^2\left(\frac{t}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\right)\right). \tag{3}$$

Математичне сподівання випадкової величини ξ, яка має розподіл (3):

$$M(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}\lambda}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} + \left(1 - \frac{\lambda^2}{\alpha^2}\right)\frac{\sqrt{\pi}}{\lambda} e^{\frac{a^2}{4\lambda^2}}\left(1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{2\lambda}\right)\right),$$

де $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt.$

Другим етапом при побудові основного розподілу буде перехід до границі при $\alpha \to 0$. Функцію e^{-at} розкладемо в ряд, взявши перших три члени розкладу

$$e^{-\alpha t} = 1 - \alpha t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} + 0(\alpha^2 t^2).$$

Тоді

$$\lim_{a \to 0} \bar{F}(t, \alpha, \lambda) = e^{-\lambda^2 t^2} + \lambda^2 t^2 e^{-\lambda^2 t^2}.$$

Отже,

$$\lim_{a \to 0} F(t, \alpha, \lambda) = \begin{cases} 0, \ \text{якщо}\, t < 0, \\ 1 - \left(1 + \lambda^2 t^2\right) e^{-\lambda^2 t^2}, \ \text{якщо}\, t \geq 0. \end{cases}$$

Висновок. В результаті усереднення функції розподілу $F(t, \alpha\lambda, u)$ за параметром u, який вважається випадковою величиною, що має розподіл Вейбулла з параметрами λ^2 і 2, дістали однопараметричну сім'ю розподілів ймовірностей невід'ємних випадкових величин:

$$F(t, \alpha, \lambda) = 1 - e^{-\alpha t - \lambda^2 t^2} - 2\lambda^2 e - \lambda^2 t^2 \frac{1}{\alpha^2}\left(1 - (\alpha t + 1) e^{-\alpha t}\right),$$

яка при переході до границі при $\alpha \to 0$ набуває вигляду

$$F(t, \lambda) = \begin{cases} 0, \ \text{якщо}\, t < 0, \\ 1 - \left(1 + \lambda^2 t^2\right) e^{-\lambda^2 t^2}, \ \text{якщо}\, t \geq 0. \end{cases} \quad (4)$$

називатимемо такі розподіли ***λ-розподілами.***

Основні числові характеристики λ-розподілу. Щільність побудованого λ-розподілу (4)

$$f(t, \lambda) = \begin{cases} 0, \ \text{якщо}\, t < 0, \\ 2\lambda^4 t^3 e^{-\lambda^2 t^2}, \ \text{якщо}\, t \geq 0. \end{cases} \quad (5)$$

Початкові моменти непарного порядку v_{2n+1}, де $n = 0, 1, 2, \ldots$, мають вигляд:

$$v_{2n+1} = 2\lambda^4 \frac{(2n+3)!!}{2(2\lambda^2)^{n+2}} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda^2}} = \frac{(2n+3)!!\sqrt{\pi}}{2^{n+2}\lambda^{2n+1}}.$$

Зокрема, математичне сподівання випадкової величини ξ, яка має розподіл (4), дістанемо з останньої формули при $n = 0$:

$$v_1 = m_\lambda = M(\xi) = \int_0^{+\infty} t f(t, \lambda) dt = \frac{3\sqrt{\pi}}{4\lambda}$$

Початкові моменти парного порядку v_{2n}, де $n = 1, 2, \ldots$, мають вигляд:

$$v_{2n} = \int_0^{+\infty} t^{2n} f(t, \lambda) dt = 2\lambda^4 \int_0^{+\infty} t^{2n+3} e^{-\lambda^2 t^2} dt = \frac{(n+1)!}{\lambda^{2n}}.$$

А скориставшись, зв'язком між центральними та початковими моментами [8]

$$\mu_n = M(\xi - M(\xi))^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-M(\xi))^{n-k} v_k = \sum_{k=2}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k v_k v_1^{n-k} + (-1)^{n-1}(n-1)(v_1)^n,$$

можна знайти і центральні моменти.

Зокрема, дисперсія випадкової величини, яка має λ-розподіл, подається так

$$D(\xi) = M(\xi - M(\xi))^2 = v_2 - v_1^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{9\pi}{16\lambda^2} = \frac{32 - 9\pi}{16\lambda^2}$$

Оскільки

$$f'(t, \lambda) = 2\lambda^4 (3t^2 - 2\lambda^2 t^4) e^{-\lambda t^2},$$

то у точці $t_0 = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{3}{2}}$ $f(t,\lambda)$ досягає максимуму, тобто λ-розподіл є унімодальним і його модою є точка $M_0 = \frac{\sqrt{1,5}}{\lambda}$.

З рівняння $F(t,\lambda) = \frac{1}{2}$ або $(1+\lambda^2 t^2)e^{-\lambda^2 t^2} = \frac{1}{2}$ можна знайти медіану.

А оскільки, функція

$$\varphi(t,\lambda) = (1+\lambda^2 t^2)e^{-\lambda^2 t^2}$$

у точці $t = \frac{3\sqrt{\pi}}{4\lambda}$ набуває значення

$$\varphi\left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4\lambda}, \lambda\right) = \left(1 + \frac{9\pi}{16}\right)e^{\frac{9\pi}{16}} \approx 0,4726,$$

а у точці $t = \frac{\sqrt{1,5}}{\lambda}$ значення

$$\varphi\left(\frac{\sqrt{1,5}}{\lambda}, \lambda\right) = 2,5e^{-1,5} \approx 0,5578,$$

то має місце нерівність

$$F(M_0,\lambda) < F(M_e,\lambda) < F(M_\lambda,\lambda),$$

і тому

$$M_0 = \frac{\sqrt{1,5}}{\lambda} \approx \frac{1,2247}{\lambda} < M_e < \frac{1,3293}{\lambda} \approx \frac{3\sqrt{\pi}}{4\lambda} = m_\lambda .$$

Середнє квадратичне відхилення такої випадкової величини

$$\sigma = \frac{\sqrt{32-9\pi}}{4\lambda} \approx \frac{0,4825}{\lambda}.$$

Знайдемо

$$P(m_\lambda - 2\sigma < \xi < m_\lambda + 2\sigma)$$

«правило двох σ». Маємо:

$$P(m_\lambda - 2\sigma < \xi < m_\lambda + 2\sigma) = F(m_\lambda + 2\sigma) - F(m_\lambda - 2\sigma) =$$

$$= F\left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4\lambda} + \frac{\sqrt{32-9\pi}}{2\lambda}\right) - F\left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4\lambda} - \frac{\sqrt{32-9\pi}}{2\lambda}\right) = (1+A^2)e^{-A^2} - (1+B^2)e^{-B^2},$$

де

$$A = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} - \frac{\sqrt{32-9\pi}}{2},$$

$$B = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} + \frac{\sqrt{32-9\pi}}{2}.$$

Отже,

$$P(m_\lambda - 2\sigma < \xi < m_\lambda + 2\sigma) \approx 0,9596.$$

Очевидно, що щільність розподілу (5) асиметрична стосовно середнього. Будь-який центральний момент, нерівний нулю, можна розглядати, як характеристику асиметрії даного розподілу. Як правило, для оцінки асиметрії розподілу використовують третій центральний момент, який виражається як куб одиниці вимірювання самої випадкової величини. Щоб отримати безрозмірну характеристику, за міру асиметрії розподілу приймають відношення

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3},$$

яке називають *коефіцієнтом асиметрії*.

В нашому випадку

$$\mu_3 = -C_3^2 v_2 v_1 + C_3^3 v_3 + 2(v_1)^3 .$$

Врахувавши, що

$$v_1 = \frac{3\sqrt{\pi}}{4\lambda}, \; v_2 = \frac{2}{\lambda^2}, \; v_3 = \frac{5!!\sqrt{\pi}}{8\lambda^3} \tag{6}$$

дістанемо

$$\mu_3 = \frac{5\cdot 3\sqrt{\pi}}{8\lambda^3} - \frac{6}{\lambda^2}\cdot\frac{3\sqrt{\pi}}{4\lambda} + 2\left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4\lambda}\right)^3 = \frac{3\sqrt{\pi}(9\pi - 28)}{32\lambda^3}$$

Отже, коефіцієнт асиметрії не залежить від параметра λ, тобто є характеристикою класу розподілів (4), а тому близькість відповідного статистичного момента до числа

$$\gamma_1 \approx 0,4057$$

може слугувати одним із факторів, які допоможуть підібрати теоретичний розподіл.

Оскільки $\gamma > 0$, то розподіл (5) володіє додатною асиметрією. Центральний момент четвертого порядку при заданій дисперсії може слугувати характеристикою питомої ваги великих відхилень від математичного сподівання, а це у свою чергу визначає характер максимуму у точці v_1 симетричного розподілу – «гостровершинність» чи «плосковершинність» кривої розподілу.

Число

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3$$

характеризує поведінку кривої розподілу поблизу точки v_1.
Його називають *ексцесом розподілу* випадкової величини.

В нашому випадку

$$\mu_4 = C_4^2 v_2 v_1{}^2 - C_4^3 v_3 v_1 + C_4^4 v_4 - 3(v_1)^4 .$$

Врахувавши, що (6) і те, що

$$v_4 = \frac{3!}{\lambda^4} = \frac{6}{\lambda^4}$$

маємо

$$\mu_4 = 6\cdot\frac{2}{\lambda^2}\cdot\left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4\lambda}\right)^2 - 4\cdot\frac{5\cdot 3\sqrt{\pi}}{8\lambda^3}\cdot\frac{3\sqrt{\pi}}{4\lambda} + \frac{6}{\lambda^4} - 3\cdot\frac{81\pi^2}{256} = \frac{288\pi + 1536 - 243\pi^2}{256\lambda^4} .$$

Отже,

$$\gamma_2 \approx 0,0593$$

за своєю поведінкою поблизу точки v_1 крива розподілу (5) майже не відрізняється від нормального, однак має ряд переваг проти нормального. Найперше з них полягає у тому, що розподіл (4) однопараметричний.

Основні властивості λ-розподілу. Нехай випадкова величина ξ має розподіл Вейбулла з параметрами λ^2 і 2, тобто це додатна випадкова величина, для якої

$$P(\xi > 1) = e^{-\lambda^2 t^2} . \tag{7}$$

Будемо позначати через η_u, випадкову величину $\xi_2 - u$ за умови, що $\xi_2 > u$, а через η_{ξ_1} – випадкову величину $\xi_2 - \xi_1$ за умови, що $\xi_2 > \xi_1$. Очевидно, що випадкові величини ξ_1 і η_{ξ_1} істотно залежні.

Теорема 1. Якщо ξ_1 і ξ_2 незалежні однаково розподілені випадкові величини, кожна з яких має розподіл (7), то

$$P(\xi_1 + \eta_{\xi_1} > t) = (1 + \lambda^2 t^2) e^{-\lambda^2 t^2} . \tag{8}$$

Доведення. Скориставшись формулою повної ймовірності, маємо:

$$P(\xi_1+\eta_{\xi_1}>t)=P(\xi_1>t)+\int_0^t f_{\xi_1}(u)P(u+\eta_u>t)du\ ,$$

де

$$f_{\xi_1}(u)=2\lambda^2 ue^{-\lambda^2u^2}\ .$$

Оскільки

$$P(\xi_1>t)=e^{-\lambda^2t^2}\ ,$$

а

$$P(u+\eta_u>t)=P(u+\xi_2-u>t\,|\,\xi_2>u)=P(\xi_2>t\,|\,\xi_2>u)=$$

$$=\frac{P(\xi_2>t\,|\,\xi_2>u)}{P(\xi_2>u)}=\frac{P(\xi_2>t)}{P(\xi_2>u)}=\frac{e^{-\lambda^2t^2}}{e^{-\lambda^2u^2}}\ ,$$

то

$$P(\xi_1+\eta_{\xi_1}>t)=e^{-\lambda^2t^2}+\int_0^t 2\lambda^2ue^{-\lambda^2u^2}\cdot\frac{e^{-\lambda^2t^2}}{e^{-\lambda^2u^2}}du=e^{-\lambda^2t^2}+2\lambda e^{-\lambda^2t^2}\int_0^t udu=(1+\lambda^2t^2)e^{-\lambda^2t^2}\ .$$

Теорема доведена.

Висновок. Для розподілу, побудованого на основі певної моделі зміни інтенсивності відмов з подальшим граничним переходом, знайдено випадкову величину з таким розподілом, причому така випадкова величина подається спеціальним чином через випадкові величини з вейбуловським розподілом.

Теорема 2. Розподіл (8) є унімодальним розподілом з монотонно зростаючою інтенсивністю відмов.

Доведення. Оскільки $\bar{F}(t,\lambda)=(1+\lambda^2t^2)e^{-\lambda^2t^2}$ для $t>0$, то

$$f(t,\lambda)=-\left(\bar{F}(t,\lambda)\right)'=-(2\lambda^2t-2\lambda^2t-2\lambda^4t^3)e^{-\lambda^2t^2}=2\lambda^4t^3e^{-\lambda^2t^2}\ ,\ \text{для } t>0.$$

Тоді

$$f'(t,\lambda)=2\lambda^4(3t^2-2\lambda^2t^4)e^{-\lambda^2t^2}\ .$$

Дана функція обертається в нуль (на додатній півосі) у точці

$$t_0=\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\lambda}=\frac{\sqrt{1,5}}{\lambda}\ ,$$

причому $f''(t,\lambda)$ у точці t_0 від'ємна, а тому точка t_0 є точкою максимуму і вона єдина. Отож, справді λ-розподіл унімодальний.

Очевидно також, що

$$\max_{t\in R} f(t,\lambda)=3\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda e^{-1,5}=3\sqrt{1,5}\lambda e^{-1,5}\ .$$

З означення інтенсивності відмов маємо:

$$h(t,\lambda)=\frac{f(t,\lambda)}{\bar{F}(t,\lambda)}=\frac{2\lambda^4t^3e^{-\lambda^2t^2}}{(1+\lambda^2t^2)e^{-\lambda^2t^2}}=\frac{2\lambda^4t^3}{1+\lambda^2t^2}\ .$$

Очевидно, що $h(0,\lambda)=0$ і $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t,\lambda)=+\infty$.

Оскільки

$$h'(t,\lambda)=\frac{2\lambda^4t^2(3+\lambda^2t^2)}{(1+\lambda^2t^2)}>0$$

для $t>0$, то $h(t,\lambda)$ зростає.

Теорема доведена.

Теорема 3. Якщо випадкова величина ξ має λ-розподіл, то ξ^2 має розподіл суми двох незалежних, показниково розподілених випадкових величин з параметром λ^2.

Доведення. Оскільки випадкова величина ξ має λ-розподіл, то

$$P(\xi^2 > t) = P(\xi > \sqrt{t}) = (1+\lambda^2 t)e^{-\lambda^2 t}. \tag{9}$$

З іншого боку, якщо випадкові величини ξ_1 і ξ_2 незалежні і кожна з них має показниковий розподіл з параметром λ^2, то

$$P(\xi_1+\xi_2 < t) = \iint\limits_{u+\vartheta<t} \lambda^2 e^{-\lambda^2 u}\lambda^2 e^{-\lambda^2 \vartheta}dud\vartheta = \int_0^t\int_0^{t-u} \lambda^2 e^{-\lambda^2 u}\lambda^2 e^{-\lambda^2 \vartheta}d\vartheta du =$$

$$= \int_0^t \lambda^2 e^{-\lambda^2 u}\left(-e^{-\lambda^2\vartheta}\Big|_0^{t-u}\right)du = \int_0^t \lambda^2 e^{-\lambda^2 u}\left(1-e^{-\lambda^2(t-u)}\right)du =$$

$$= \int_0^t \lambda^2 e^{-\lambda^2 u}du - \lambda^2 e^{-\lambda^2 t}\int_0^t du = 1-e^{-\lambda^2 t}-\lambda^2 t e^{-\lambda^2 t}.$$

Звідси

$$P(\xi_1+\xi_2 > t) = (1+\lambda^2 t)e^{-\lambda^2 t},$$

що збігається з (9).

Теорема доведена.

Зауваження. Випадкову величину ξ^2 можна замінити сумою двох незалежних показниково розподілених випадкових величин.

Наслідок. Якщо $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ – незалежні, однаково розподілені випадкові величини, кожна з яких має λ-розподіл, то випадкова величина

$$\eta = \xi_1^2 + \xi_2^2 + ... + \xi_n^2,$$

має розподіл Ерланга порядку $2n$, тобто щільність розподілу ймовірностей випадкової величини η має вигляд

$$f_\eta(t) = \frac{(\lambda^2 t)^{2n-1}\lambda^2}{(2n-1)!}e^{-\lambda^2 t}. \tag{10}$$

Доведення. Згідно з доведеною теоремою

$$\eta_n = \xi_1^{(1)} + \xi_2^{(1)} + \xi_1^{(2)} + \xi_2^{(2)} + ... + \xi_1^{(n)} + \xi_2^{(n)},$$

де у правій частині стоять незалежні однаково розподілені випадкові величини, кожна з яких має показникоий розподіл з параметром λ^2, тобто для $k = \overline{1, n}$

$$P(\xi_1^{(k)} > t) = P(\xi_2^{(k)} > t) = e^{-\lambda^2 t}.$$

Тоді перетворення Лапласа цього розподілу має вигляд

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt}\lambda^2 e^{-\lambda^2 t}dt = \frac{\lambda^2}{z+\lambda^2}.$$

А оскільки перетворення Лапласа суми незалежних випадкових величин дорівнює добутку перетворень Лапласа доданків, то

$$M(e^{-z\eta_n}) = \left(\frac{\lambda^2}{z+\lambda^2}\right)^{2n}.$$

З другого боку, застосувавши перетворення Лапласа до (10), дістанемо

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt}(\lambda)^{2u}\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}e^{-\lambda^2 t}dt = \frac{(\lambda^2)^{2n}}{(2n-1)!}\int_0^{+\infty} t^{2n-1}e^{-(z+\lambda^2)t}dt =$$

$$= \frac{(\lambda^2)^{2n}}{(2n-1)!} \frac{\Gamma(2n)}{(z+\lambda^2)^{2n}} = \left(\frac{\lambda^2}{z+\lambda^2} \right)^{2n} .$$

тобто справді η_n має щільність розподілу ймовірностей (10).

Твердження доведено.

λ-розподіл може слугувати вихідним матеріалом для побудови нового розподілу методом, за допомогою якого отримали λ-розподіл з розподілу Вейбулла.

Нехай ξ_1 і ξ_2 незалежні випадкові величини, кожна з яких має λ-розподіл, і нехай випадкова величина η_{ξ_1} означена точно у такий самий спосіб, як це було зроблено на частини про опис властивостей λ-розподіл.

Побудуємо розподіл випадкової величини $\xi_1 + \eta_{\xi_1}$.

Теорема 4. Якщо ξ_1 і ξ_2 – незалежні випадкові величини, кожна з яких має λ -розподіл, то

$$P(\xi_1 + \eta_{\xi_1} > t) = (1+\lambda^2 t^2)(1+\lambda^2 t^2 - \ln(1+\lambda^2 t^2))e^{-\lambda^2 t^2} . \quad (11)$$

<u>Доведення.</u> Скориставшись формулою повної ймовірності, маємо:

$$P(\xi_1 + \eta_{\xi_1} > t) = P(\xi_1 > t) + \int_0^t f_{\xi_1}(u) P(u + \eta_u > t) du ,$$

де

$$f_{\xi_1}(u) = 2\lambda^4 t^3 e^{-\lambda^2 t^2} .$$

Оскільки

$$P(\xi_1 > t) = (1+\lambda^2 t^2) e^{-\lambda^2 t^2} ,$$

а

$$P(u+\eta_u > t) = P(u + \xi_2 - u > t \,|\, \xi_2 > u) = P(\xi_2 > t \,|\, \xi_2 > u) = \frac{P(\xi_2 > t, \xi_2 > u)}{P(\xi_2 > u)} = \frac{P(\xi_2 > t)}{P(\xi_2 > u)} =$$

$$= \frac{(1+\lambda^2 t^2) e^{-\lambda^2 t^2}}{(1+\lambda^2 u^2) e^{-\lambda^2 u^2}} ,$$

то

$$P(\xi_1 + \eta_{\xi_1} > t) = (1+\lambda^2 t^2) e^{-\lambda^2 t^2} + \int_0^t 2\lambda^4 u^3 e^{-\lambda^2 t^2} \cdot \frac{(1+\lambda^2 t^2) e^{-\lambda^2 t^2}}{(1+\lambda^2 u^2) e^{-\lambda^2 u^2}} du =$$

$$= (1+\lambda^2 t^2) e^{-\lambda^2 t^2} \left(1 + \int_0^t \frac{2\lambda^4 u^3}{1+\lambda^2 u^2} du \right).$$

А оскільки

$$\int_0^t \frac{2\lambda^4 u^3}{1+\lambda^2 u^2} du = 2\lambda^2 \int_0^t \frac{\lambda^2 u^3 + u - u}{1+\lambda^2 u^2} du = 2\lambda^2 \int_0^t u du - 2\lambda^2 \int_0^t \frac{u du}{1+\lambda^2 u^2} = \lambda^2 t^2 - \ln(1+\lambda^2 t^2),$$

то остаточно маємо:

$$P(\xi_1 + \eta_{\xi_1} > t) = (1+\lambda^2 t^2)(1+\lambda^2 t^2 - \ln(1+\lambda^2 t^2))e^{-\lambda^2 t^2} .$$

Теорему доведено.

Щільність такого розподілу має вигляд

$$f(t) = -\left((1+\lambda^2 t^2)(1+\lambda^2 t^2 - \ln(1+\lambda^2 t^2) e^{-\lambda^2 t^2} \right)' = 2\lambda^4 t^3 (\lambda^2 t^2 - \ln(1+\lambda^2 t^2)) e^{-\lambda^2 t^2} .$$

Тоді

$$h(t)=\frac{2\lambda^4(\lambda^2t^5-t^3\ln(1+\lambda^2t^2))}{(1+\lambda^2t^2)(1+\lambda^2t^2-\ln(1+\lambda^2t^2)}\,,$$

причому $h(0)=0$, а

$$\lim_{t\to+\infty}h(t)=\frac{2\lambda^4\left(\lambda^2t-\frac{\ln(1+\lambda^2t^2)}{t}\right)}{\left(\lambda^2+\frac{1}{t^2}\right)\left(\lambda^2+\frac{1}{t^2}-\frac{\ln(1+\lambda^2t^2)}{t^2}\right)}=+\infty\,.$$

Загальні висновки. Виходячи з певної фізичної моделі зміни інтенсивності відмов, побудовано однопараметричний розподіл

$$\bar F(t,\lambda)=(1+\lambda^2t^2)e^{-\lambda^2t^2}$$

λ-розподіл. Такий розподіл може слугувати характеристикою надійності елементів системи, або деяких систем у цілому.

λ-розподіл володіє цілим рядом специфічних властивостей, які можуть слугувати орієнтиром для побудови відповідних статистик, які у свою чергу, можуть бути покладені в основу критерія згоди.

1. λ-розподіл є унімодальний розподіл, його мода

$$m=\frac{\sqrt{1,5}}{\lambda}\approx 1,22\frac{1}{\lambda}$$

менша математичного сподівання

$$a=\frac{3\sqrt{\pi}}{4\lambda}\approx 1,31\frac{1}{\lambda}\,.$$

2. Відносно параметра λ значення функції $\bar F(t,\lambda)$ розподіляються таким чином, що $t=k\lambda^{-1}$, де $k>0$, то

$$P(\xi>k\lambda^{-1})=\bar F(k\lambda^{-1},\lambda)=(1+k^2)e^{-k^2}\,,$$

зокрема маємо таку таблицю

Табл. 1 Залежність значення $\bar F(t,\lambda)$ $t=k\lambda^{-1}$, де $k>0$

t	$0,1\lambda^{-1}$	$0,2\lambda^{-1}$	$0,3\lambda^{-1}$	$0,4\lambda^{-1}$	$0,5\lambda^{-1}$	$0,6\lambda^{-1}$	$0,7\lambda^{-1}$
$\bar F(t,\lambda)$	0,999	0,9984	0,9919	0,9860	0,9750	0,9520	0,9089
t	$0,8\lambda^{-1}$	$0,9\lambda^{-1}$	λ^{-1}	$\sqrt{1,5}\,\lambda^{-1}$	$\frac{3\sqrt{\pi}}{4}\lambda^{-1}$	$2\lambda^{-1}$	$3\lambda^{-1}$
$\bar F(t,\lambda)$	0,8692	0,7964	0,7148	0,5500	0,4968	0,0915	0,001

При достатньо малих λ цей розподіл можна застосувати як модель відмов довговічних пристроїв (матеріалів), які після середнього часу життя інтенсивно старіють.

3. Середнє квадратичне відхилення близьке до $\frac{1}{\lambda}$

$$\sigma=\sqrt{\frac{32-9\pi}{16\lambda^2}}\approx 0,97\frac{1}{\lambda}\,.$$

4. Коефіцієнт асиметрії є характеристикою класу λ розподілів

$$\gamma=\frac{(27\pi-84)2\pi}{\sqrt{(32-9\pi)^2}}\approx 0,4\,.$$

5. Квадрат випадкової величини з λ-розподілом є сума двох незалежних однаково розподілених випадкових величин, кожна з яких має показниковий розподіл з параметром λ^2.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Philippe Nain Basic elements of queuing theory. Application to the Modelling of Computer Systems. The University of Massachusetts, 1998. – 110 p.
2. Roy M. K. Erlang mixtures somecliscrete distributions/ M. K. Roy, N. E. Haque// Pak. J. Statist.2008, vol.24(1) pp.45–56.
3. Zaman M. R. Ch–square mixtures of Gamma distribution// M. R. Zaman, M. K. Roy, Nakhter// J. Opt. Sci. – 2005, pp.1632–1635.
4. Базовский И. Надежность. Теория и практика. - М.: Мир, 1965. - 373с.
5. Барлоу Р. Математическая теория надежности / Р. Барлоу, Ф. Прошан. – М.: Мир, 1965. 373с.
6. Боровков А.А. Вероятностные методы в теории массового обслуживания. – М.: Наука, 1972. – 368с.
7. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методи в теории надежности. - М.: Наука, 1965. - 524с.
8. Гнеденко Б.В. Курс теории надежностей / Б.В. Гнеденко. – М.: Наука, 1988. – 447с.
9. Дьогтєва І.О. Побудова функцій розподілу з прогнозованою поведінкою інтенсивності відмов // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць / Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова Національної академії наук України, Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка ; [редкол.: Ю. Г. Кривонос(відп. ред.) та ін.]. - Кам’янець-Подільський : Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2015. – Вип. 12. – С. 74-82.
10. Кендал М. Теория распределений / М. Кендал, А. Стьюарт. – М.: Наука, 1966. – 587с.
11. Томусяк А.А. Об одном методе построения функции распределения с ограничениями на интенсивности отказов // Прикладные задачи теории вероятностей. Сб. научных трудов. – К.: Институт математики АН УССР. – С.102-116.
12. Томусяк А.А. О моделях отказов элементов / А.А. Томусяк, А.Ф. Турбин // Аналитические методы в задачах теории вероятностей. Сб. научных трудов. – К.: Институт математики АН УССР. – С.130-145.

λ -РАСПРЕДЕЛЕНИЕ. СВОЙСТВА И ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ λ -РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

И.А. Дёгтева

РЕЗЮМЕ

В данной статье с помощью метода стохастического склеивания построено класс распределений (λ -распределение). Исследованы свойства λ -распределения, которые могут служить ориентиром для построения соответствующих статистик, которые, в свою очередь, могут быть положены в основу критерия согласия. Найдено основные числовые характеристики λ -распределения. λ -распределение может служить характеристикой надежности элементов системы, или некоторых систем в целом.

Ключевые слова: интенсивность отказов, надежность, λ -распределение, функция распределения.

λ -DISTRIBUTION. PROPERTIES AND NUMERICAL CHARACTERISTICS λ -DISTRIBUTION

I.O. Dohtieva

SUMMARY

In this paper, using the method of bonding stochastic built class divisions (λ -distribution). The properties λ -distribution that can serve as a guide for building relevant statistics, which in turn can be the basis of criterion of consent. Found basic numerical characteristics λ -distribution. λ -distribution can serve as a characteristic of reliability of the system, or some systems as a whole.requency equation.

Key words: intensity rate, reliability, λ -distribution, distribution function.