УДК 512.647

Н.Б. Ілаш
Хмельницький національний університет, Хмельницький, Україна

СТЕПІНЬ АЛГЕБРИ КОВАРІАНТІВ ДВОХ БІНАРНИХ ФОРМ

Використовуючи явну формулу ряду Пуанкаре алгебри коваріантів $\mathcal{C}_{d_1,d_2}$ двох бінарних форм, обчислено степінь $\deg(\mathcal{C}_{d_1,d_2})$ цієї алгебри для різних випадків парності чисел d_1, d_2.

Ключові слова: інваріанти, коваріанти, ряди Пуанкаре, бінарні форми.

Вступ. Розглянемо скінченнопороджену градуйовану комплексну алгебру $R = R_0 \oplus R_1 \oplus \cdots$, де $R_0 = \mathbb{C}$. Позначимо через $\mathcal{P}(R,z) = \sum_{j=0}^{\infty} \dim R_j z^j$ її ряд Пуанкаре. Нехай r – ступінь трансцендентності поля часток алгебри R над $\mathbb{C}$, число $\deg(R) := \lim_{z\to 1}(1-z)^r \mathcal{P}(R,z)$ називається степенем алгебри R.

Початок розкладу в ряд Лорана $\mathcal{P}(R,z)$ в точці $z=1$ має вигляд

$$\mathcal{P}(R,z) = \frac{\deg(R)}{(1-z)^r} + \frac{\psi(R)}{(1-z)^{r-1}} + \cdots .$$

Числа $\deg(R), \psi(R)$ є важливими структурними характеристиками алгебри \$R.\$ Наприклад, якщо R є алгеброю інваріантів скінченної групи G, то $\deg(R)^{-1}$ дорівнює порядку групи G і $2\dfrac{\psi(R)}{\deg(R)}$ є кількістю псевдовідображень в G, див.[1].

Нехай $V_{d_1}, V_{d_2}, \ldots, V_{d_n}$ – векторні $\mathbb{C}$-простори бінарних форм степенів $d_1, d_2, \ldots, d_n$ відповідно, що наділені природною дією групи SL_2. Розглянемо індуковану дію групи SL_2 на алгебру поліноміальних функцій $\mathcal{O}[V_{\mathbf{d}}]$ на векторниму просторі $V_{\mathbf{d}}$, де $V_{\mathbf{d}} = V_{d_1} \oplus V_{d_2} \oplus \ldots \oplus V_{d_n}$. Мовою класичної теорії інваріантів алгебри $\mathcal{I}_{\mathbf{d}} := \mathbb{C}[V_{\mathbf{d}}]^{SL_2}$ і $\mathcal{C}_{\mathbf{d}} := \mathbb{C}[V_{\mathbf{d}} \oplus V^2]^{SL_2}$ називаються відповідно алгеброю спільних інваріантів та алгеброю спільних коваріантів n бінарних форм.

При $n=1$ степінь $\deg(\mathcal{I}_d)$ алгебри інваріантів бінарної d-форми була обчислена Гільбертом в [2]. Пізніше Т.Спрінгер у статті [3] отримав цей же результат, викоростовуючи ряд Пуанкаре алгебри $\mathcal{I}_d := \mathbb{C}[V_d]^{SL_2}$. Крім того, в [4] він знайшов інтегральне зображення степеня та дослідив його асимптотичну поведінку.

Степінь $\deg(\mathcal{C}_d)$ алгебри $\mathcal{C}_d \cong \mathbb{C}[V_1 \oplus V_d]^{SL_2}$ коваріантів бінарної d-форми, при $n=1$, обчислено в [5]. Там же знайдено число $\psi(\mathcal{C}_d)$ та обчислено їх інтегральне зобаження і асимптотична поведінка.

У випадку $d_1 = d_2 = \ldots = d_n = 1$ маємо алгебри спільних інваріантів та коваріантів n лінійних форм. В [6] обчислено степені цих алгебр і досліджена їх асимптотична поведінка.

В даній статті, застосовоючи метод використаний Спрінгером в [3], обчислено степінь алгебри $\mathcal{C}_{d_1,d_2} := \mathcal{O}(V_{d_1} \oplus V_{d_2} \oplus \mathbb{C}^2)^{SL_2(\mathbb{C})}$ коваріантів двох бінарних форм.

Розглянемо два випадки, залежно від однакової чи різної парності чисел d_1 і d_2.

Обчислення $\deg(\mathcal{C}_{d_1,d_2})$ у випадку різної парності чисел d_1 і d_2. Редуктивність $SL_2(\mathbb{C})$ означає, що алгебра $\mathcal{C}_{d_1,d_2}$ є скінченнопородженою $\mathbb{Z}$-градуйованою алгеброю:

$$\mathcal{C}_{d_1,d_2} = (\mathcal{C}_{d_1,d_2})_0 + (\mathcal{C}_{d_1,d_2})_1 + \cdots + (\mathcal{C}_{d_1,d_2})_i + \cdots,$$

де кожен з підпросторів $(\mathcal{C}_{d_1,d_2})_i$ спільних коваріантів степеня i є скінченновимірним.

Формальний степеневий ряд $\mathcal{PC}_{d_1,d_2}(z)=\sum_{i=0}^{\infty}\dim((\mathcal{C}_{d_1,d_2})_i)z^i$, де $\mathcal{PC}_{d_1,d_2}(z)\in\mathbb{Z}[[z]]$, називається рядом Пуанкаре алгебри спільних коваріантів двох бінарних форм. Скінченна породженність алгебри $\mathcal{C}_{d_1,d_2}$ означає, що її ряд Пуанкаре є розкладом деяких раціональних функцій.

Наступна теорема дає явний вигляд цих раціональних функцій для випадку різної парності чисел d_1 і d_2.

Розглянемо лінійний оператор φ_n, $n\in\mathbb{N}$, що перетворює раціональну функцію f від z в раціональну функцію $\varphi_n(f)$, яка визначена наступним чином на степенях z^n

$$\left(\varphi_n(f)\right)(z^n)=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}f(\zeta_n^j z),\zeta_n=e^{\frac{2\pi i}{n}}.$$

Терема 1[7]. Нехай $d_2-d_1=1\left(\operatorname{mod}2\right)$ і $d_2>d_1$. Тоді Ряд Пуанкаре $\mathcal{P}(\mathcal{C}_{d_1,d_2},z)$ має вигляд

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}_{d_1,d_2},z)=\sum_{d_1/2\le k\le d_1}\varphi_{2k-d_1}\left((1+z)A_k(z)\right)+\sum_{k=0}^{[d_2/2]}\varphi_{d_2-2k}\left((1+z)B_k(z)\right),\text{ де}$$

$$A_k(z)=\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(d_2-d_1+1)}z^{(d_1-k)(d_1-k+1)+\frac{1}{4}(d_1+d_2-2k+1)^2}}{(z^2,z^2)_k(z^2,z^2)_{d_1-k}(z,z^2)_{\frac{d_2+d_1+1}{2}-k}(z,z^2)_{\frac{d_2-d_1+1}{2}+k}},$$

$$B_k(z)=\begin{cases}\dfrac{(-1)^k z^{k(k+1)}}{(z^{d_2-d_1-2k},z^2)_{d_1+1}(z^2,z^2)_k(z^2,z^2)_{d_2-k}} & \text{for } 2k<d_2-d_1,\\[3ex] \dfrac{(-1)^{\frac{d_2-d_1-1}{2}}z^{k(k+1)+1/4(d_2-d_1-1-2k)^2}}{(z,z^2)_{s+1}(z,z^2)_{d_1-s}(z^2,z^2)_k(z^2,z^2)_{d_2-k}} & \text{for } s=\dfrac{2k-(d_2-d_1)-1}{2}.\end{cases}$$

Тут $(a,q)_n=(1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1})$ позначає q-зсунутий факторіал.

Щоб обчислити раціональний коефіцієнт $\deg(\mathcal{C}_d)$, доведемо декілька додаткофих фактів.

Лема1.

(i) Початок розкладу в ряд Лорана функції $(1+z)\mathrm{A}_k(z)$ в точці $z=1$ має вигляд

$$\frac{1}{(1-z)^{d_2+d_1+1}}\cdot\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(d_2-d_1+1)}}{2^{d_1-1}k!(d_1-k)!(d_2+d_1-2k)!!(d_2-d_1+2k)!!}-$$
$$-\frac{1}{(1-z)^{d_2+d_1}}\cdot\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(d_2-d_1+1)}\left((d_1-2k+1)(d_1+d_2+2)\right)}{2^{d_1}k!(d_1-k)!(d_2+d_1-2k)!!(d_2-d_1+2k)!!}+\cdots$$

(ii) Початок розкладу в ряд Лорана функції $(1+z)B_k(z)$ в точці $z=1$ має вигляд

$$\frac{1}{(1-z)^{d_1+d_2+1}}\cdot\frac{(-1)^k}{2^{d_2-1}k!(d_2-k)!\prod_{i=0}^{d_1}(d_2-d_1-2k+2i)}+$$

$$+\frac{(-1)^k}{(1-z)^{d_2+d_1}}\cdot\frac{(d_1+d_2+2)(d_2-2k-1)}{2^{d_2}k!(d_2-k)!\prod_{i=0}^{d_1}(d_2-d_1-2k+2i)}+\cdots$$

Доведення. В [5] доведено, що

$$(z^2,z^2)_k(z^2,z^2)_{d-k}=2^d k!(d-k)!(1-z)^d-2^{d-1}k!(d-k)!((d-k)^2+k^2)(1-z)^{d+1}+O((1-z)^{d+2})$$

Помітивши, що початок ряду Тейлора за степенями $(1-z)$ функції $(z,z^2)_n$ має вигляд

$$(z,z^2)_n=(1-z)(1-z^3)\cdots(1-z^{2n-1})=(2n-1)!!(1-z)^n-(2n-1)!!\frac{n(n-1)}{2}(1-z)^{n+1}+\cdots,$$

Отримаємо перші доданки розкладу в ряд Тейлора знаменника дробу

$$\frac{z^{(d_1-k)(d_1-k+1)+\frac{1}{4}(d_1+d_2-2k+1)^2}(1+z)}{(z^2,z^2)_k(z^2,z^2)_{d_1-k}(z,z^2)_{\frac{d_2+d_1+1}{2}-k}(z,z^2)_{\frac{d_2-d_1+1}{2}+k}}$$ за степенями $(1-z)$:

$$(z^2,z^2)_k(z^2,z^2)_{d_1-k}(z,z^2)_{\frac{d_2+d_1+1}{2}-k}(z,z^2)_{\frac{d_2-d_1+1}{2}+k}=$$
$$=2^{d_1}k!(d_1-k)!(d_2+d_1-2k)!!(d_2-d_1+2k)!!(1-z)^{d_2+d_1+1}-2^{d_1-1}(d_2+d_1-2k)!!(d_2-d_1+$$
$$+2k)!!k!(d_1-k)!\left(\frac{1}{4}\left((d_2-d_1+2k)^2+(d_2+d_1-2k)^2-2\right)+(d_1-k)^2+k^2\right)(1-z)^{d_2+d_1+2}.$$

Розклад чисельника цього ж дробу в ряд Тейлора за степенями $(1-z)$, має вигляд

$$(1+z)z^{(d_1-k)(d_1-k+1)+\frac{1}{4}(d_1+d_2-2k+1)^2}=2-(2(d_1-k)(d_1-k+1)+\frac{1}{2}(d_1+d_2-2k+1)^2+1)(1-z)+\cdots,$$

Використавши просте співвідношення, яке справедливе для формальних рядів, отримаєм

$$(1+z)\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(d_2-d_1+1)}z^{(d_1-k)(d_1-k+1)+\frac{1}{4}(d_1+d_2-2k+1)^2}}{(z^2,z^2)_k(z^2,z^2)_{d_1-k}(z,z^2)_{\frac{d_2+d_1+1}{2}-k}(z,z^2)_{\frac{d_2-d_1+1}{2}+k}}=$$
$$=\frac{1}{(1-z)^{d_2+d_1+1}}\cdot\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(d_2-d_1+1)}}{2^{d_1-1}k!(d_1-k)!(d_2+d_1-2k)!!(d_2-d_1+2k)!!}+$$
$$+\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(d_2-d_1+1)}}{(1-z)^{d_2+d_1}}\cdot\frac{2(d1-k)(d1-k+1)+\frac{1}{2}(d1+d2-2k+1)^2+1}{2^{d_1}k!(d_1-k)!(d_2+d_1-2k)!!(d_2-d_1+2k)!!}-$$
$$-\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(d_2-d_1+1)}}{(1-z)^{d_2+d_1}}\frac{\frac{1}{4}((d2-d1+2k)^2+(d1+d2-2k)^2-2)+(d1-k)^2+k^2}{2^{d_1}k!(d_1-k)!(d_2+d_1-2k)!!(d_2-d_1+2k)!!}+\cdots.$$

Звідки отримуємо твердження (i) Леми.

(ii) Розглянемо спочатку випадок $2k<d_2-d_1$. Помітимо, що початок розкладу функції $(z^{d_2-d_1-2k},z^2)_{d_1+1}$ в ряд Тейлора за степенями $1-z$ має вигляд

$$\frac{(d_1+d_2-2k)!!}{(d_2-d_1-2k-2)!!}(1-z)^{d_1+1}-\frac{(d_1+d_2-2k)!!(d_1+1)(d_2-2k-1)}{2(d_2-d_1-2k-2)!!}(1-z)^{d_1+2}+\cdots.$$

Міркуючи аналогічно, як при доведенні пункту (i) леми, отримуємо початок розкладу функції $\frac{(-1)^k(1+z)z^{k(k+1)}}{(z^{d_2-d_1-2k},z^2)_{d_1+1}(z^2,z^2)_k(z^2,z^2)_{d_2-k}}$, в ряд Лорана за степенями $(1-z)$:

$$\frac{(-1)^k(1+z)z^{k(k+1)}}{(z^{d_2-d_1-2k},z^2)_{d_1+1}(z^2,z^2)_k(z^2,z^2)_{d_2-k}}=\frac{1}{(1-z)^{d_1+d_2+1}}\cdot\frac{(-1)^k(d_2-d_1-2k-2)!!}{2^{d_2-1}k!(d_2-k)!(d_1+d_2-2k)!!}+(-1)^k\times$$
$$\times\frac{\left(\left((d_2-k)^2+k^2+(d_1+1)(d_2-2k-1)\right)-(2k^2+2k+1)\right)\dfrac{2^{d_2}k!(d_2-k)!(d_1+d_2-2k)!!}{(d_2-d_1-2k-2)!!}}{\left(\dfrac{2^{d_2}k!(d_2-k)!(d_1+d_2-2k)!!}{(d_2-d_1-2k-2)!!}\right)^2(1-z)^{d_1+d_2}}+\cdots$$

Звідси випливає твердження пункту (ii) леми для випадку $2k<d_2-d_1$.

В іншому випадку $(1+z)B_k=\dfrac{(-1)^{\frac{d_2-d_1-1}{2}}(1+z)z^{k(k+1)+1/4(d_2-d_1-1-2k)^2}}{(z,z^2)_{\frac{d_1-d_2+1}{2}+k}(z,z^2)_{\frac{d_1+d_2+1}{2}-k}(z^2,z^2)_k(z^2,z^2)_{d_2-k}}$. З доведеного вище випливає, що початок розкладу в ряд Тейлора за степенями $(1-z)$ знаменника наступний

$$(z,z^2)_{\frac{d_1-d_2+1}{2}+k}(z,z^2)_{\frac{d_1+d_2+1}{2}-k}(z^2,z^2)_k(z^2,z^2)_{d_2-k}=$$
$$=2^{d_2}k!(d-k)!(d_1-d_2+2k)!!(d_1+d_2-2k)!!(1-z)^{d_1+d_2+1}-2^{d_2-1}k!(d-k)!(d_1-d_2+2k)!!\times$$
$$\times(d_1+d_2-2k)!!\left(\frac{1}{2}(d_1{}^2+d_2{}^2-1)+(d_2-2k)^2\right)(1-z)^{d_1+d_2+2}+\cdots.$$

Те ж саме для чисельника має вигляд

$$(1+z)z^{k(k+1)+1/4(d_2-d_1-1-2k)^2}=2-(2k(k+1)+\frac{1}{2}(d_2-d_1-2k-1)^2+1)(1-z)+\cdots.$$

Звідси

$$(1+z)\frac{(-1)^{\frac{d_2-d_1-1}{2}}z^{k(k+1)+1/4(d_2-d_1-1-2k)^2}}{(z,z^2)_{\frac{d_1-d_2+1}{2}+k}(z,z^2)_{\frac{d_1+d_2+1}{2}-k}(z^2,z^2)_k(z^2,z^2)_{d_2-k}}=$$
$$=\frac{1}{(1-z)^{d_2+d_1+1}}\cdot\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(d_2-d_1-1)}}{2^{d_2-1}k!(d_2-k)!(d_2+d_1-2k)!!(d_1-d_2+2k)!!}+$$
$$+\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(d_2-d_1)}}{(1-z)^{d_2+d_1-1}}\frac{(d_1+d_2+2)(d_2-2k-1)}{2^{d_2}k!(d_2-k)!(d_2+d_1-2k)!!(d_1-d_2+2k)!!}+O((1-z)^{d_2+d_1-2})$$

Врахувавши, що при $2k\geq d_2-d_1$ справедливою є рівність

$$\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(d_2-d_1-1)}}{(d_2+d_1-2k)!!(d_1-d_2+2k)!!}=\frac{(-1)^k}{\prod\limits_{i=0}^{d_1}(d_2-d_1-2k+2i)},$$ отримаємо твердження (ii) Леми.

Наступна лема показує, як функція φ_n діє на від'ємні степені $(1-z)$.

Лема 2. [5] Для $h\in\mathbb{N}$,

$$\varphi_n\left(\frac{1}{(1-z)^h}\right)=\sum_{i=0}^{h}\frac{\alpha_{ni}}{(1-z)^i},$$

де $\alpha_{nh}=n^{h-1}$ і $\alpha_{n,h-1}=-n^{h-2}(n-1)\dfrac{h}{2}$.

Тепер ми можемо обчислити коефіцієнт $\deg(\mathcal{C}_{d_1,d_2})$.

Теорема 2. Степінь алгебри спільних коваріантів двох бінарних форм $\deg(\mathcal{C}_{d_1,d_2})$ у випадку різної парності чисел d_1 і d_2, $d_1 < d_2$ обчислюється за формулою

$$\deg(\mathcal{C}_{d_1,d_2}) = g(d_1,d_2) + g(d_2,d_1),$$

де $g(b,d) = \dfrac{1}{2^{d-1} d!} \displaystyle\sum_{k=0}^{d/2} \dfrac{(-1)^k \binom{d}{k} (d-2k)^{d+b}}{\prod_{i=0}^{b} (d-b-2k+2i)}$

Доведення. Використовуючи леми 1, 2, маємо

$$\sum_{d_1/2 \le k \le d_1} \varphi_{2k-d_1}\left((1+z)A_k(z)\right) =$$

$$= \sum_{d_1/2 \le k \le d_1} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(d_2-d_1+1)}}{2^{d_1-1} k!(d_1-k)!(d_2+d_1-2k)!!(d_2-d_1+2k)!!} \varphi_{2k-d_1}\left(\frac{1}{(1-z)^{d_2+d_1+1}}\right) + \cdots =$$

$$= \frac{1}{(1-z)^{d_2+d_1+1}} \sum_{d_1/2 \le k \le d_1} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(d_2-d_1-1)} (2k-d_1)^{d_2+d_1}}{2^{d_1-1} k!(d_1-k)!(d_2+d_1-2k)!!(d_2-d_1+2k)!!} + \cdots,$$

$$\sum_{0 \le k < [d_2/2]} \varphi_{d_2-2k}\left((1+z)B_k(z)\right) =$$

$$= \sum_{0 \le k < [d_2/2]} \varphi_{d_2-2k}\left(\frac{1}{(1-z)^{d_1+d_2+1}} \cdot \frac{(-1)^k}{2^{d_2-1} k!(d_2-k)! \prod_{i=0}^{d_1} (d_2-d_1-2k+2i)} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{(1-z)^{d_2+d_1+1}} \sum_{0 \le k \le d_2/2} \frac{(-1)^k (d_2-2k)^{d_2+d_1}}{2^{d_2-1} k!(d_2-k)! \prod_{i=0}^{d_1} (d_2-d_1-2k+2i)} + \cdots$$

Застосувавши теорему 1, після нескладних обчислень отримаємо твердження нашої теореми.

Обчислення $\deg(\mathcal{C}_{d_1,d_2})$ у випадку однакової парності чисел d_1 і d_2. Для обчислення степеня алгебри спільних коваріантів двох бінарних форм знову скористаємось рядом Пуанкаре цієї алгебри.

Теорема 3. [7] При $d_1 = d_2 \pmod 2$ і $d_2 > d_1$ ряд Пуанкаре $\mathcal{PC}_{d_1,d_2}(z)$ обчислюється за формулою

$$\mathcal{PC}_{d_1,d_2}(z) = \sum_{d_1/2 \le k \le d_1} \varphi_{2k-d_1}\left((1+z)A_k(z)\right) + \sum_{d_1/2 \le k \le d_1} \left(z\varphi_{2k-d_1}\left((1+z)B_k(z)\right)\right)'_z +$$

$$+ \sum_{0 \le 2k \le d_2-d_1-2} \varphi_{d_2-2k}\left((1+z)C_k(z)\right) + \sum_{d_1+d_2+2 \le 2k \le 2d_2} \varphi_{d_2-2k}\left((1+z)C_k(z)\right).$$

де

$$A_k(z) = -\frac{1}{z^{d_2+d_1-2k}} \lim_{t \to z^{2k-(d_1+d_2)}} \left(f_{d_1,d_2}(tz^{d_2}, z)(1-tz^{d_2+d_1-2k})^2\right)'_t,$$

$$B_k(z) = \lim_{t \to z^{2k-(d_1+d_2)}} \left(f_{d_1,d_2}(tz^{d_2}, z)(1-tz^{d_2+d_1-2k})^2\right),$$

$$C_k(z) := \lim_{t \to z^{-2k}} \left(f_{d_1,d_2}(tz^{d_2}, z)(1-tz^{2k})\right)$$

$$f_{d_1,d_2}(tz^{d_2},z)=\frac{1}{(tz^{d_2-d_1},z^2)_{d_1+1}(t,z^2)_{d_2+1}}.$$

Подамо коефіцієнти $A_k(z), B_k(z), C_k$ у явному вигляді. Почнемо з

$$A_k(z)=-\frac{1}{z^{d_2+d_1-2k}}\lim_{t\to z^{2k-(d_1+d_2)}}\left(f_{d_1,d_2}(tz^{d_2},z)(1-tz^{d_2+d_1-2k})^2\right)'_t.$$

Оскільки $2d_2\ge d_1+d_2\ge d_1+d_2-2k\ge d_2-d_1\ge 0,$ маємо

$$\left(f_{d_1,d_2}(tz^{d_2},z)(1-tz^{d_2+d_1-2k})^2\right)'_t=\Big(\frac{z^{d_1+d_2}}{1-tz^{d_1+d_2}}+\ldots+\frac{z^{d_1+d_2-2k+2}}{1-tz^{d_1+d_2-2k+2}}+\frac{z^{d_1+d_2-2k-2}}{1-tz^{d_1+d_2-2k-2}}+\ldots$$
$$+\frac{z^{d_2-d_1}}{1-tz^{d_2-d_1}}+\frac{z^{2d_2}}{1-tz^{2d_2}}+\ldots+\frac{z^{d_1+d_2-2k+2}}{1-tz^{d_1+d_2-2k+2}}+\frac{z^{d_1+d_2-2k-2}}{1-tz^{d_1+d_2-2k-2}}+\ldots+\frac{1}{1-t}\Big)\times$$
$$\times\frac{1}{(1-tz^{d_1+d_2})\cdots(1-tz^{d_1+d_2-2k+2})(1-tz^{d_1+d_2-2k-2})\cdots(1-tz^{d_2-d_1})}\times$$
$$\times\frac{1}{(1-tz^{2d_2})\cdots(1-tz^{d_1+d_2-2k+2})(1-tz^{d_1+d_2-2k-2})\cdots(1-t)}.$$

Врахувавши далі очевидні тотожності, отримаємо

$$A_k(z)=(-1)^{\frac{d_1-d_2}{2}}z^{(1+d_1-k)(d_1-k)+(1+\frac{d_1+d_2}{2}-k)(\frac{d_1+d_2}{2}-k)}=$$
$$=\frac{2k-\dfrac{d_1-d_2}{2}-\displaystyle\sum_{i=d_1-k+1}^{k}\left(\frac{1}{1-z^{2i}}+\frac{1}{1-z^{2i-d_1+d_2}}\right)}{(z^2,z^2)_k(z^2,z^2)_{d_1-k}(z^2,z^2)_{k-\frac{d_1-d_2}{2}}(z^2,z^2)_{\frac{d_1+d_2}{2}-k}}.$$

Перейшовши у функції $B_k(z)$ до границі, маємо

$$B_k(z)=\frac{1}{(1-z^{2k})\cdots(1-z^2)(1-z^{-2})\cdots(1-z^{-2(d_1-k)})}\times$$
$$\times\frac{1}{(1-z^{2k+d_2-d_1})\cdots(1-z^2)(1-z^{-2})\cdots(1-z^{-(d_1+d_2-2k)})}.$$

У випадку $2k\le d_2-d_1-2$ явний вираз для $C_k(z)$ встановлений у [7]:

Нарешті, зауваживши, що $d_2-2k<0$ при $\dfrac{d_1+d_2}{2}+2\le k\le d_2,$ отримаємо

Теорема 3′. При $d_1=d_2 \pmod 2$ і $d_2>d_1$ ряд Пуанкаре $\mathcal{PC}_{d_1,d_2}(z)$ обчислюється за формулою

$$\mathcal{PC}_{d_1,d_2}(z)=\sum_{d_1/2\le k\le d_1}\varphi_{2k-d_1}\left((1+z)A_k(z)\right)+$$
$$+\sum_{d_1/2\le k\le d_1}\left(z\varphi_{2k-d_1}\left((1+z)B_k(z)\right)\right)'_z+\sum_{0\le 2k\le d_2-d_1-2}\varphi_{d_2-2k}\left((1+z)C_k(z)\right),$$

де

$$A_k(z)=(-1)^{\frac{d_1-d_2}{2}}z^{(1+d_1-k)(d_1-k)+(1+\frac{d_1+d_2}{2}-k)(\frac{d_1+d_2}{2}-k)}\times$$
$$\times\frac{2k-\dfrac{d_1-d_2}{2}-\displaystyle\sum_{i=d_1-k+1}^{k}\left(\frac{1}{1-z^{2i}}+\frac{1}{1-z^{2i-d_1+d_2}}\right)}{(z^2,z^2)_k(z^2,z^2)_{d_1-k}(z^2,z^2)_{k-\frac{d_1-d_2}{2}}(z^2,z^2)_{\frac{d_1+d_2}{2}-k}},$$

$$B_k(z)=\frac{(-1)^{\frac{d_1-d_2}{2}}z^{(1+d_1-k)(d_1-k)+(1+\frac{d_1+d_2}{2}-k)(\frac{d_1+d_2}{2}-k)}}{(z^2,z^2)_k(z^2,z^2)_{d_1-k}(z^2,z^2)_{\frac{d_2}{2}+k-\frac{d_1}{2}}(z^2,z^2)_{\frac{d_2}{2}-(k-\frac{d_1}{2})}},$$

$$C_k(z)=\frac{(-1)^k z^{k(k+1)}}{(z^{d_2-d_1-2k},z^2)_{d_1+1}(z^2,z^2)_k(z^2,z^2)_{d_2-k}}.$$

Міркуючи, аналогічно, як в доведенні Леми 1, можна довести наступні формули.

Лема 3. Справедливі наступні твердження

(i) Початок розкладу функції $(1+z)B_k(z)$ за степенями $(1-z)$ має вигляд

$$\frac{(-1)^{\frac{d_1-d_2}{2}}}{(1-z)^{d_1+d_2}}\cdot\frac{1}{2^{d_1+d_2-1}k!(d_1-k)!\left(\frac{d_2-d_1}{2}+k\right)!\left(\frac{d_2+d_1}{2}-k\right)!}+$$

$$+\frac{(-1)^{\frac{d_1-d_2}{2}}}{(1-z)^{d_1+d_2-1}}\cdot\frac{(d_1+d_2+2)(2k-d_1-1)+1}{2^{d_1+d_2}k!(d_1-k)!\left(\frac{d_2-d_1}{2}+k\right)!\left(\frac{d_2+d_1}{2}-k\right)!}+\dots$$

(ii) Перший доданок розкладу функції $(1+z)A_k(z)$ в ряд Лорана за степенями $1-z$ має вигляд

$$(-1)^{\frac{d_2-d_1}{2}}\left(-\frac{\sum_{i=d_1-k+1}^{k}\frac{1}{i}+\sum_{i=\frac{d_1+d_2}{2}-k+1}^{k+\frac{d_2-d_1}{2}}\frac{1}{i}}{2^{d_1+d_2}k!(d_1-k)!\left(\frac{d_2-d_1}{2}+k\right)!\left(\frac{d_2+d_1}{2}-k\right)!(1-z)^{d_1+d_2+1}}+\right.$$

$$+\frac{d_1+d_2}{(1-z)^{d_1+d_2}\cdot 2^{d_1+d_2-1}k!(d_1-k)!\left(\frac{d_2-d_1}{2}+k\right)!\left(\frac{d_2+d_1}{2}-k\right)!}-$$

$$\left.-\frac{(d_1+d_2+2)(d_1-2k+1)}{(1-z)^{d_1+d_2}\cdot 2^{d_1+d_2+1}k!(d_1-k)!\left(\frac{d_2-d_1}{2}+k\right)!\left(\frac{d_2+d_1}{2}-k\right)!}\left(\sum_{i=d_1-k+1}^{k}\frac{1}{i}+\sum_{i=\frac{d_1+d_2}{2}-k+1}^{k+\frac{d_2-d_1}{2}}\frac{1}{i}\right)\right).$$

Доведемо аналог леми 2 з попереднього пункту

Лема 4. $z\varphi_n\left(\frac{1}{(1-z)^h}\right)=\sum_{i=0}^{h}\frac{\beta_{ni}}{(1-z)^i}, h\in\mathbb{N}$, де $\beta_{nh}=n^{h-1},\ \beta_{n,h-1}=-n^{h-2}\left((n-1)\frac{h}{2}+n\right)$.

Доведення. Помітимо, що $z=1-(1-z)$ і скористаємось лемою 2. Матимемо:

$$z\varphi_n\left(\frac{1}{(1-z)^h}\right)=\varphi_n\left(\frac{1}{(1-z)^h}\right)-(1-z)\varphi_n\left(\frac{1}{(1-z)^h}\right)=\sum_{i=0}^{h}\frac{\alpha_{ni}}{(1-z)^i}-\sum_{i=0}^{h}\frac{\alpha_{ni}}{(1-z)^{i-1}}.$$

Врахуваши значення коефіцієнтів $\alpha_{nh}=n^{h-1},\ \alpha_{n,h-1}=-n^{h-2}(n-1)\frac{h}{2}$ в лемі 2, матимемо

$$\beta_{nh}=\alpha_{nh}=n^{h-1},\ \beta_{n,h-1}=\alpha_{n,h-1}-\alpha_{n,h}=-n^{h-2}(n-1)\frac{h}{2}-n^{h-1}=-n^{h-2}\left((n-1)\frac{h}{2}+n\right).$$

Що й вимагалось довести.

Тепер можемо обчислити число $\deg(\mathcal{C}_{d_1,d_2})$, при $d_1=d_2 \mod 2$.

Теорема 4. Степінь алгебри спільних коваріантів двох бінарних форм $\deg(\mathcal{C}_{d_1,d_2})$ у випадку однакової парності чисел d_1 і $d_2, d_1 < d_2$ обчислюється за формулою

$$\deg(\mathcal{C}_{d_1,d_2}) = \frac{(-1)^{\frac{d_1-d_2}{2}}(d_1+d_2)}{d_1!d_2!}\sum_{\frac{d_1}{2}\le k\le d_1}(k-\frac{d_1}{2})^{d_1+d_2-1}\binom{d_1}{k}\binom{d_2}{\frac{d_2+d_1}{2}-k}-$$

$$-\sum_{\frac{d_1}{2}\le k\le d_1}(k-\frac{d_1}{2})^{d_1+d_2}\binom{d_1}{k}\binom{d_2}{\frac{d_2+d_1}{2}-k}\left(H_k - H_{d_1-k} - H_{\frac{d_1+d_2}{2}-k} + H_{k+\frac{d_2-d_1}{2}}\right)+$$

$$+\frac{1}{(d_1+1)!d_2!}\sum_{k=0}^{\frac{d_2-d_1}{2}-1}\binom{d_2}{k}\frac{(-1)^{k+d_1}(\frac{d_2}{2}-k)^{d_1+d_2}}{\binom{\frac{d_2+d_1-k}{2}}{d_1+1}}.$$

Доведення. Знайдемо спочатку початок розкладу в ряд Лорана за степенями $(1-z)$ першої суми. Для цього скористаємось лемами 2 та 3. Отримаємо

$$\sum_{\frac{d_1}{2}\le k\le d_1}\varphi_{2k-d_1}\left((1+z)A_k(z)\right) =$$

$$= -\frac{\displaystyle\sum_{\frac{d_1}{2}\le k\le d_1}(-1)^{\frac{d_2-d_1}{2}}\binom{d_1}{k}\binom{d_2}{\frac{d_2+d_1}{2}-k}\left(\sum_{i=d_1-k+1}^{k}\frac{1}{i}+\sum_{i=\frac{d_1+d_2}{2}-k+1}^{k+\frac{d_2-d_1}{2}}\frac{1}{i}\right)(k-\frac{d_1}{2})^{d_1+d_2}}{(1-z)^{d_1+d_2+1}d_1!d_2!} + O((1-z)^{-d_1-d_2}).$$

Враховуючи результати двох останіх лем, маємо

$$\sum_{\frac{d_1}{2}\le k\le d_1}\left(z\varphi_{2k-d_1}\left(1+z)B_k(z)\right)\right)'_z =$$

$$= \sum_{\frac{d_1}{2}\le k\le d_1}\left(\frac{(-1)^{\frac{d_1-d_2}{2}}}{2^{d_1+d_2-1}k!(d_1-k)!\left(\frac{d_2-d_1}{2}+k\right)!\left(\frac{d_2+d_1}{2}-k\right)!}z\varphi_{2k-d_1}\left(\frac{1}{(1-z)^{d_1+d_2}}\right)\right)'_z +$$

$$+\left(O((1-z)^{-d_1-d_2+1})\right)'_z =$$

$$= \frac{1}{(1-z)^{d_1+d_2+1}}\cdot\frac{(-1)^{\frac{d_1-d_2}{2}}(d_1+d_2)}{2^{d_1+d_2-1}d_1!d_2!}\sum_{\frac{d_1}{2}\le k\le d_1}\left((2k-d_1)^{d_1+d_2-1}\binom{d_1}{k}\binom{d_2}{\frac{d_2+d_1}{2}-k}\right) + O((1-z)^{-d_1-d_2}).$$

Враховуючи леми 1(ii) та 2, маємо

$$\sum_{\frac{d_1+d_2}{2}+1\le k\le d_2}\varphi_{d_2-2k}\left((1+z)C_k(z)\right) =$$

$$= \frac{1}{2^{d_2-1}d_2!(1-z)^{d_1+d_2+1}}\sum_{\frac{d_1+d_2}{2}+1\le k\le d_2}\binom{d_2}{k}\frac{(-1)^{k+d_1}(d_2-2k)^{d_1+d_2}}{\prod_{i=0}^{d_1}(d_2-d_1-2k+2i)} + O((1-z)^{-d_1-d_2}).$$

Додавши відповідні частини отриманих рівностей, після нескладних перетворень, одержимо потрібну рівність.

Взявши в попердній теоремі $d_1 = d_2$, отримаємо

Наслідок. Степінь алгебри спільних коваріантів двох бінарних форм $\deg(\mathcal{C}_{d_1,d_2})$ у випадку рівності чисел d_1 і d_2 обчислюється за формулою

$$\deg \mathcal{C}_{d,d}(z) = \frac{2}{(d!)^2} \sum_{\frac{d}{2} \le k \le d} (k - \frac{d}{2})^{2d-1} \binom{d}{k}^2 \left(d - (k - \frac{d}{2}) \sum_{i=d-k+1}^{k} \frac{1}{i} \right)$$

Висновок. З доведення Теорем 2 і 4 випливає, що степінь трансцендентності поля часток алгебри $\mathcal{C}_{d_1,d_2}$ над $\mathbb{C}$, рівний $d_1 + d_2 + 1$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Benson D. Polynomial invariants of finite groups / D. Benson. – London Mathematical Society Lecture Note Series. 190: Cambridge University Press, 1993 – 118p.
2. Hilbert D. Ueber die vollen Invariantensysteme/ D. Hilbert // Math. Ann. – 1893. – V.42. – P. 313-373.
3. Springer T. Invariant theory / T. Springer. –Berlin: Springer-Verlag, 1977. – 111p.
4. Springer T.A. On the invariant theory of SU 2 //T.A.Springer// Indag.Math. – 1980. – V.42. – P. 339-345.
5. Bedratyuk L. The degree of the algebra of covariants of a binary forms / L.Bedratyuk, N. Ilash // Journal of Commutative Algebra. – 2015.–V. 7. – P.459-472.
6. Ilash N. The Poincaré series for the algebras of joint invariants and covariants of n linear forms / N. Ilash // C. R. Acad. Bulg. Sci. – 2015. – V. 68. – P. 715-724.
7. Bedratyuk L. The Poincaré series of the algebras of simultaneous invariants and covariants of two binary forms / L. Bedratyuk // Linear and Multilinear Algebra. – 2010. – V.58.– P.789-803.

СТЕПЕНЬ АЛГЕБРЫ КОВАРИАНТОВ ДВУХ БИНАРНЫХ ФОРМ

Н.Б. Ілаш

РЕЗЮМЕ

Используя явные формулы ряда Пуанкаре алгебры $\mathcal{C}_{d_1,d_2}$ ковариантов двух бинарных форм, вычислено степень этой алгебры для различных случаев четности чисел d_1, d_2.

Ключевые слова: инварианты, коварианты, ряды Пуанкаре, бинарние формы.

THE DEGREE OF COVARIANT ALGEBRA TWO BINARY FORMS

N.B Ilash

SUMMARY

Using an explicit formula for the Poincare series for the algebra $\mathcal{C}_{d_1,d_2}$ of covariants of two binary forms, we calculate the degree of this algebra for different cases of parity of numbers d_1, d_2.

Keywords: invariants, covariants, Poincaré series, binary forms.