

УДК 539.3

С. А. Калоеров, А. А. Самодуров

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОСТИ
ДЛЯ МНОГОСВЯЗНЫХ КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ ПЛАСТИНОК

Приведены основные соотношения электромагнитоупругости для многосвязных пьезопластинок. С использованием этих соотношений, а также разложением голоморфных функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера решение задачи для кусочно-однородной пластинки с рядом упругих включений обобщенным методом наименьших квадратов сведено к системе линейных алгебраических уравнений, псевдорешение которой находится с помощью сингулярного разложения. Проведены численные исследования, с помощью которых выявлено влияние относительной жесткости материалов включений и расстояний между ними на значения основных характеристик электромагнитоупругого состояния.

Ключевые слова: электромагнитоупругость, пьезоматериалы, кусочно-однородная пластинка, упругие включения.

В различных областях современной науки и техники в качестве элементов конструкций используются пластинки из пьезоматериалов. Поэтому весьма актуальной является разработка эффективных методов определения напряженного состояния таких элементов и к настоящему времени разработаны методы определения их электромагнитоупругого состояния (ЭМУС) под действием различных механических сил и электромагнитных полей [1–4]. Значительное влияние на ЭМУС пластинок оказывает наличие в них концентраторов напряжений типа отверстий и включений. В работах [3, 4] предложены методы исследования ЭМУС многосвязных пластинок с отверстиями и трещинами, а в статьях [5, 6] методом рядов получено точное аналитическое решение задачи для пластинки с одним упругим включением.

В данной статье приведено решение задачи электромагнитоупругости для кусочно-однородной пластинки с произвольным числом упругих включений.

1. Постановка задачи. Рассмотрим занимающую многосвязную область S пьезопластинку, ограниченную внешним контуром L_0 и контурами отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$). В отверстия без предварительного натяжения вставлены упругие включения из других пьезоматериалов с областями $S^{(l)}$, находящиеся с пластинкой-матрицей в условиях идеального механического и электромагнитоупругого контактов. Пластинка находится под действием внешних сил и электромагнитных полей. Если контур L_0 полностью уходит в бесконечность, будем иметь бесконечную многосвязную пластинку. При этом будем считать, что на бесконечности заданы напряжения $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty$ и угол жесткого поворота ω_3^∞ , а также индукции $D_x^\infty, D_y^\infty, B_x^\infty, B_y^\infty$ или напряженности $E_x^\infty, E_y^\infty, H_x^\infty, H_y^\infty$ электромагнитного поля.

При использовании теории комплексных потенциалов определение электромагнитоупругого состояния (ЭМУС) многосвязной пьезопластинок сводится к нахождению комплексных потенциалов электромагнитоупругости $\Phi_k(z_k)$ из соответствующих граничных условий. После нахождения этих функций основные характеристики ЭМУС (напряжения, перемещения, индукции и напряженности) в пластинке-матрице вычисляются по формулам [3, 4]:

$$\begin{aligned} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{6k}) \Phi'_k(z_k), \\ (u, v, \varphi, \psi) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (p_k, q_k, r_k^0, h_k^0) \Phi_k(z_k) + (-\omega_3 y + u_0, \omega_3 x + v_0, \varphi_0, \psi_0), \\ (D_x, D_y, E_x, E_y) &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{7k}, \lambda_{8k}, r_k^0, \mu_k r_k^0) \Phi'_k(z_k), \\ (B_x, B_y, H_x, H_y) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{9k}, \lambda_{10k}, h_k^0, \mu_k h_k^0) \Phi'_k(z_k). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь

$$z_k = x + \mu_k y; \quad (1.2)$$

μ_k – корні характеристического уравнения

$$l_{4s}(\mu) \left[l_{2\beta}(\mu) l_{2\chi}(\mu) - l_{2v}^2(\mu) \right] - l_{3g}(\mu) \left[l_{3g}(\mu) l_{2\chi}(\mu) - l_{3p}(\mu) l_{2v}(\mu) \right] - l_{3p}(\mu) \left[l_{3p}(\mu) l_{2\beta}(\mu) - l_{3g}(\mu) l_{2v}(\mu) \right] = 0; \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} l_{4s}(\mu) &= s_{11}\mu^4 - 2s_{16}\mu^3 + (2s_{12} + s_{66})\mu^2 - 2s_{26}\mu + s_{22}, \\ l_{3g}(\mu) &= g_{11}\mu^3 - (g_{21} + g_{16})\mu^2 + (g_{12} + g_{26})\mu - g_{22}, \\ l_{3p}(\mu) &= p_{11}\mu^3 - (p_{21} + p_{16})\mu^2 + (p_{12} + p_{26})\mu - p_{22}, \\ l_{2\beta}(\mu) &= -\beta_{11}\mu^2 + 2\beta_{12}\mu - \beta_{22}, \quad l_{2v}(\mu) = -v_{11}\mu^2 + 2v_{12}\mu - v_{22}, \\ l_{2\chi}(\mu) &= -\chi_{11}\mu^2 + 2\chi_{12}\mu - \chi_{22}; \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{1k} &= \mu_k^2, \quad \lambda_{2k} = 1, \quad \lambda_{6k} = -\mu_k, \\ \lambda_{7k} &= v_k \mu_k, \quad \lambda_{8k} = -v_k, \quad \lambda_{9k} = \rho_k \mu_k, \quad \lambda_{10k} = -\rho_k; \\ p_k &= s_{11}\mu_k^2 - s_{16}\mu_k + s_{12} + (g_{11}\mu_k - g_{21})v_k + (p_{11}\mu_k - p_{21})\rho_k, \\ q_k &= s_{12}\mu_k - s_{26} + \frac{s_{22}}{\mu_k} + \left(g_{12} - \frac{g_{22}}{\mu_k} \right) v_k + \left(p_{12} - \frac{p_{22}}{\mu_k} \right) \rho_k, \\ r_k^0 &= g_{11}\mu_k^2 - g_{16}\mu_k + g_{12} - (\beta_{11}\mu_k - \beta_{12})v_k - (v_{11}\mu_k - v_{12})\rho_k, \\ h_k^0 &= p_{11}\mu_k^2 - p_{16}\mu_k + p_{12} - (v_{11}\mu_k - v_{12})v_k - (\chi_{11}\mu_k - \chi_{12})\rho_k; \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$v_k = \frac{l_{3p}(\mu_k) l_{2v}(\mu_k) - l_{3g}(\mu_k) l_{2\chi}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k) l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2v}^2(\mu_k)}, \quad \rho_k = \frac{l_{3g}(\mu_k) l_{2v}(\mu_k) - l_{2\beta}(\mu_k) l_{3p}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k) l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2v}^2(\mu_k)}; \quad (1.6)$$

$-\omega_3 y + u_0$, $\omega_3 x + v_0$ – жесткие перемещения тела как целого; ω_3 – угол поворота плоскости Oxy

против часовой стрелки, причем $\omega_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$; u_0 , v_0 – компоненты поступательного движения

тела; Φ_0 и Ψ_0 – нулевой уровень потенциалов электрического и магнитного полей.

Комплексные потенциалы $\Phi_k(z_k)$ определены в областях S_k , ограниченных контурами L_{kl} , получаемыми из L_l аффинными преобразованиями (1.2). В общем случае функции имеют вид [3, 7]

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} A_{kl} \ln(z_k - z_{kl}) + \sum_{r=1}^R A_{kr}^0 \ln(z_k - z_{kr}^0) + \Phi_{k0}(z_k), \quad (1.7)$$

где Γ_k – постоянные, равные нулю в случае конечной области и определяемые из системы

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, q_k - \mu_k p_k, v_k, \mu_k v_k, \rho_k, \mu_k \rho_k \right) \Gamma_k = \\ = \left(\sigma_y^\infty, -\tau_{xy}^\infty, \sigma_x^\infty, 2\omega_3^\infty, -D_y^\infty, D_x^\infty, -B_y^\infty, B_x^\infty \right) \end{aligned} \quad (1.8)$$

для бесконечной области при задании на бесконечности компонент векторов индукции электромагнитного поля или системы

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, q_k - \mu_k p_k, r_k^0, \mu_k r_k^0, h_k^0, \mu_k h_k^0 \right) \Gamma_k = \\ = \left(\sigma_y^\infty, -\tau_{xy}^\infty, \sigma_x^\infty, 2\omega_3^\infty, -E_x^\infty, -E_y^\infty, -H_x^\infty, -H_y^\infty \right), \end{aligned} \quad (1.9)$$

если на бесконечности заданы компоненты векторов напряженности поля; A_{kl} , A_{kj}^0 – постоянные, определяемые из систем

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(1, \mu_k, p_k, q_k, v_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0 \right) i A_{kl} = \left(\frac{Y_l}{2\pi}, -\frac{X_l}{2\pi}, 0, 0, -\frac{Q_{el}}{2\pi}, -\frac{Q_{ml}}{2\pi}, 0, 0 \right); \quad (1.10)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(1, \mu_k, p_k, q_k, v_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0 \right) i A_{kr}^0 = \left(\frac{Y_r}{2\pi}, -\frac{X_r}{2\pi}, 0, 0, -\frac{Q_{er}^0}{2\pi}, -\frac{Q_{mr}^0}{2\pi}, 0, 0 \right); \quad (1.11)$$

$\Phi_{k0}(z_k)$ – функции, голоморфные в многосвязных областях S_k ; X_l , Y_l и Q_{el} , Q_{ml} – компоненты главного вектора приложенных к контуру L_l внешних усилий и суммарные электрические заряды и магнитные диполи; X_r , Y_r и Q_{er}^0 , Q_{mr}^0 – компоненты сосредоточенной силы и сосредоточенные электрические заряды и магнитные диполи в точке $z_r^0(x_r^0, y_r^0)$.

Функции $\Phi_k(z_k)$ для неподкрепленных контуров L_l удовлетворяют граничным условиям [7]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(1, \mu_k, v_k, \rho_k \right) \Phi_k(z_k) = \pm \int_0^s \left(-Y_{ln}, X_{ln}, D_{ln}, B_{ln} \right) ds + (c_{l1}, c_{l2}, c_{l3}, c_{l4}) \quad (1.12)$$

при задании на контуре индукции электромагнитного поля D_{ln} , B_{ln} или

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(1, \mu_k, r_k^0, h_k^0 \right) \Phi_k(z_k) = \left(\mp \int_0^s Y_{ln} ds, \mp \int_0^s -X_{ln} ds, \varphi_{l*}, \psi_{l*} \right) + (c_{l1}, c_{l2}, -\varphi_0, -\psi_0), \quad (1.13)$$

если на контуре заданы потенциалы электрического и магнитного полей φ_{l*} , ψ_{l*} . Для контуров, на которых заданы перемещения u_{l*} , v_{l*} , граничные условия имеют вид

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(p_k, q_k, v_k, \rho_k \right) \Phi_k(t_k) = \left(u_{l*} + \omega_3 y - u_0, v_{l*} - \omega_3 x - v_0, \pm \int_0^s D_{ln} ds + c_{l3}, \pm \int_0^s B_{ln} ds + c_{l4} \right), \quad (1.14)$$

при задании на контурах индукций или

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(p_k, q_k, r_k^0, h_k^0 \right) \Phi_k(t_k) = (u_{l*} + \omega_3 y - u_0, v_{l*} - \omega_3 x - v_0, \varphi_{l*} - \varphi_0, \psi_{l*} - \psi_0), \quad (1.15)$$

если на контуре заданы потенциалы электрического и магнитного полей. В (1.12)–(1.15) верхние знаки в правой части относятся к внешнему контуру, нижние – к контурам отверстий и тонких колец.

При идеальном механическом и электромагнитном контакте пластинки с включением с областью $S^{(l)}$ граничные условия на L_l имеют вид [3, 5]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left[\left(1, \mu_k, p_k, q_k, v_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0 \right) \Phi_k(z_k) - \left(1, \mu_k^{(l)}, p_k^{(l)}, q_k^{(l)}, v_k^{(l)}, \rho_k^{(l)}, r_k^{0(l)}, h_k^{0(l)} \right) \Phi_k^{(l)}(z_k^{(l)}) \right] = \left(c_{l1}, c_{l2}, \omega_3 y - u_0 - \omega_3^{(l)} y + u_0^{(l)}, -\omega_3 x - v_0 + \omega_3^{(l)} x + v_0^{(l)}, c_{l3}, c_{l4}, \varphi_0, \psi_0 \right), \quad (1.16)$$

где $\Phi_k^{(l)}(z_k^{(l)})$ – комплексные потенциалы для включения с областью $S^{(l)}$, которые в общем случае имеют вид (1.7), где нужно принимать, что $\Gamma_k = 0$, $A_k^{(l)}$, $A_k^{(j)0}$ – величины, вычисляемые по формулам

(1.10), (1.11); $c_{l1}, c_{l2}, c_{l3}, c_{l4}, \Phi_0, \Psi_0, u_0, u_0^{(l)}, v_0, v_0^{(l)}$ – постійні. Якщо включення з контуром L_l являється абсолютно жорстким, то також повинно виконуватися умову [3]

$$\sum_{k=1}^4 (\beta_{kl1} - \bar{\beta}_{kl1}) = 0, \tag{1.17}$$

в котрому β_{kl1} – вичет функції $\Phi_{k0}(z_k)$ в точці z_{kl} .

2. Рішення задачі для нескінченної пластинки з еліптичеськими (круговими) включеннями.

Пусть в пьезопластинке з еліптичеськими отворсьтиями без пьедварительного натяжения впаыны упругие вклучения из других пьезоматериалов, находящиеся с пластинкой в условиях идеального механического и електромагнитно-упругого контактов (рис. 1). Обозначим полуоси вклучений и контуры отворсьтий через a_l, b_l и L_l . На нескінченности пластинка находится под действием усилий $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty$, однородного електромагнитного поля, характеризуемого напряженностями $E_x^\infty, E_y^\infty, H_x^\infty, H_y^\infty$; угол поворота $\omega_3^\infty = 0$.

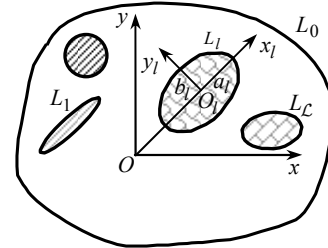


Рис. 1

В рассматриваемом случае комплексные потенциалы (1.7) для пластинки и вклучений имеют вид

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \Phi_{k0}(z_k), \quad \Phi_k^{(l)}(z_k^{(l)}) = \Phi_{k0}^{(l)}(z_k^{(l)}), \tag{2.1}$$

где Γ_k – постоянные, определяемые из системы (1.9); $\Phi_{k0}(z_k)$ – функции, голоморфные вне эллиптических контуров L_{kl} , соответствующих контурам L_l при аффинных преобразованиях (1.2); $\Phi_{k0}^{(l)}(z_k^{(l)})$ – функции, голоморфные в эллипсах $L_k^{(l)}$, соответствующих контурам L_l при аффинных преобразованиях $z_k^{(l)} = x + \mu_k^{(l)} y$. Для построения указанных функций используем методы конформных отображений.

Отобразив конформно внешность единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ и $|\zeta_k^{(l)}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{kl} и $L_k^{(l)}$ по формулам [8]

$$z_k = z_{0kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right), \quad z_k^{(l)} = z_{0k}^{(l)} + R_k^{(l)} \left(\zeta_k^{(l)} + \frac{m_k^{(l)}}{\zeta_k^{(l)}} \right), \tag{2.2}$$

где

$$\begin{aligned} z_{0kl} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\ R_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2}, \\ m_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2 R_{kl}}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

и проводя соответствующие разложения [3], для функций получим выражения

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}(z_k), \quad \Phi_k^{(l)}(z_k^{(l)}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn}^{(l)} \psi_{kn}^{(l)}(z_k^{(l)}). \tag{2.4}$$

Здесь

$$\varphi_{kln}(z_k) = \frac{1}{\zeta_{kl}^n}, \quad \psi_{kn}^{(l)}(z_k^{(l)}) = \frac{(z_k^{(l)} - z_{k0}^{(l)})^n}{(R_k^{(l)})^n}. \tag{2.5}$$

Выражения для $z_{0k}^{(l)}$, $R_k^{(l)}$ получаются по формулам (2.3), если в них μ_k заменить на $\mu_k^{(l)}$ – корни характеристического уравнения (1.3) для материала включения $S^{(l)}$.

Постоянные, входящие в функции (2.4), будем определять из граничных условий (1.16) на контурах контактов пластинки и включений. В случае многосвязной области этим условиям удобнее удовлетворять в дифференциальной форме, получаемой из (1.16) дифференцированием по дуге контура ds ,

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left[\varepsilon_{ki} \delta_k \Phi'_k(z_k) - \varepsilon_{ki}^{(l)} \delta_k^{(l)} \Phi_k^{(l)}(z_k^{(l)}) \right] = 0 \quad (i = \overline{1, 8}). \quad (2.6)$$

Здесь

$$\delta_k = dz_k/ds, \quad \varepsilon_{ki} = (\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, p_k, q_k, \lambda_{8k}, \lambda_{10k}, r_k^0, h_k^0), \\ \varepsilon_{ki}^{(l)} = (\lambda_{6k}^{(l)}, \lambda_k^{(l)}, p_k^{(l)}, q_k^{(l)}, \lambda_{8k}^{(l)}, \lambda_{10k}^{(l)}, r_k^{0(l)}, h_k^{0(l)}). \quad (2.7)$$

Для производных комплексных потенциалов имеем выражения

$$\Phi'_k(z_k) = \Gamma_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \Phi'_{kln}(z_k), \quad \Phi_k^{(l)}(z_k^{(l)}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn}^{(l)} \Psi_{kn}^{(l)}(z_k^{(l)}), \quad (2.8)$$

в которых

$$\Phi'_{kln}(z_k) = -\frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1} R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})}, \quad \Psi_{kn}^{(l)}(z_k^{(l)}) = \frac{n (z_k^{(l)} - z_{k0}^{(l)})^{n-1}}{(R_k^{(l)})^n} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}). \quad (2.9)$$

Граничным условиям (2.6) удовлетворим обобщенным методом наименьших квадратов. Выберем на контурах включений систему точек $M_{lm}(x_{lm}, y_{lm})$, в которых удовлетворим граничным условиям (2.6). Подставив функции (2.8), (2.9) в граничные условия (2.6), получим систему

$$\sum_{k=1}^4 \left[\sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varepsilon_{ki} \delta_k a_{kln} \Phi'_{kln}(t_{klm}) + \overline{\varepsilon_{ki}} \overline{\delta_k} \overline{a_{kln}} \overline{\Phi'_{kln}(t_{klm})} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varepsilon_{ki}^{(l)} \delta_k^{(l)} a_{kn}^{(l)} \Psi_{kn}^{(l)}(t_{km}^{(l)}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \overline{\varepsilon_{ki}^{(l)}} \overline{\delta_k^{(l)}} \overline{a_{kn}^{(l)}} \overline{\Psi_{kn}^{(l)}(t_{km}^{(l)})} \right) \right] = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 [\varepsilon_{ki} \delta_k \Gamma_k] \quad (i = \overline{1, 8} \quad m = \overline{1, M_l}). \quad (2.10)$$

Псевдорешение этой системы будем находить с применением сингулярного разложения [9, 10]. После нахождения псевдорешения системы (2.10) постоянные, входящие в комплексные потенциалы, будут известны, что позволит вычислять напряжения в пластине и в упругих включениях.

3. Анализ численных результатов. Были проведены численные исследования для пластинки, изготовленной из следующих материалов: 1) композит на основе $BaTiO_3 - CoFe_2O_4$ (материал М1) [11]; 2) композит, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные, которого соответствуют кадмию селениду $CdSe$, а пьезомагнитные и магнитные – $BaTiO_3$ (М2) [12]; 3) композит, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные, которого соответствуют $PZT - 4$, а пьезомагнитные и магнитные – $CoFe_2O_4$ (М3) [12]. При проведении расчетов постоянные материалов включений были связаны с соответствующими постоянными материала пластинки следующим образом:

$$s_{ij}^{(l)} = \lambda_s^{(l)} \cdot s_{ij}, \quad g_{ki}^{(l)} = \lambda_{pe} \cdot g_{ki}, \quad p_{ki}^{(l)} = \lambda_{pe} \cdot p_{ki}, \quad \beta_{kl}^{(l)} = \frac{1}{\lambda_{pe}} \cdot \beta_{kl}, \quad \chi_{kl}^{(l)} = \frac{1}{\lambda_{pe}} \cdot \chi_{kl}, \quad v_{ij}^{(l)} = \frac{1}{\lambda_{pe}} \cdot v_{ij},$$

где $\lambda_s^{(l)}$ – параметры относительной жесткости включений; λ_{pe} – параметр пьезоэффектности материалов включений. Ниже описаны некоторые из полученных результатов для пластинки из материалов М1 и М3.

В таблице для растяжения усилиями $\sigma_y^\infty = p$ пластинки с двумя одинаковыми круговыми включениями (рис. 2) радиуса a с точностью до p приведены значения напряжений в точке перемычки А для некоторых зна-

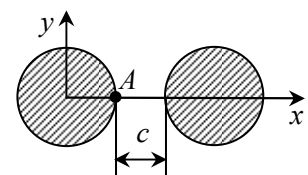


Рис. 2

$\lambda_s^{(l)}$	Напря- жение	c/a									
		∞	2	1	0,5	0,1	∞	2	1	0,5	0,1
		Пластинка из материала М1					Пластинка из материала М3				
∞	σ_s	3,019	3,042	3,299	4,075	8,693	2,652	2,658	2,891	3,647	8,491
10^3	σ_s	3,012	3,035	3,299	4,137	6,428	2,652	2,658	2,896	3,652	7,918
10^2	σ_s	2,951	2,973	3,299	3,958	4,670	2,659	2,664	2,900	3,669	6,577
10^1	σ_s	2,460	2,465	2,643	1,709	1,443	2,717	2,713	2,943	3,746	5,475
	σ_n	0,006	0,025	0,073	0,203	0,172	0,045	0,045	0,045	0,041	0,007
10^{-1}	σ_s	0,285	0,353	0,662	0,616	0,683	3,258	3,380	3,410	3,006	2,199
	σ_n	-0,015	-0,039	-0,219	-0,177	-0,148	1,042	1,566	1,757	0,538	-1,792
10^{-2}	σ_s	0,184	0,260	0,637	0,562	0,625	3,327	3,540	3,541	2,894	2,142
	σ_n	-0,018	-0,043	-0,268	-0,208	-0,170	1,224	1,995	2,369	0,418	-2,395
10^{-3}	σ_s	0,643	0,448	0,453	-1,338	-0,804	3,336	3,563	3,561	2,859	2,130
	σ_n	-0,015	-0,043	-0,365	-1,871	-1,625	1,245	2,053	2,457	0,351	-2,460
0	σ_s	0,645	0,549	0,464	-1,401	-0,932	3,335	3,561	3,560	2,860	2,132
	σ_n	-0,144	-0,151	-0,368	-1,870	-1,625	1,245	2,049	2,464	0,351	-2,467

чений отношения c/a , где c – расстояние между контурами включений, и параметра $\lambda_s^{(l)}$ при $\lambda_{pe} = 1$. Величины, соответствующие значениям $\lambda_s^{(l)}$, равным ∞ и 0, относятся к случаям пластинки с абсолютно мягкими и абсолютно жесткими включениями соответственно. На рис. 3 (для пластинки из материала М1) и рис. 4 (для пластинки из материала М3) изображены графики распределения в пластинке

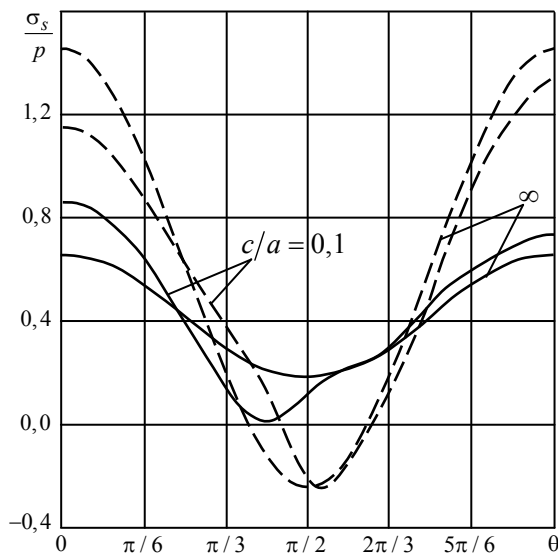


Рис. 3

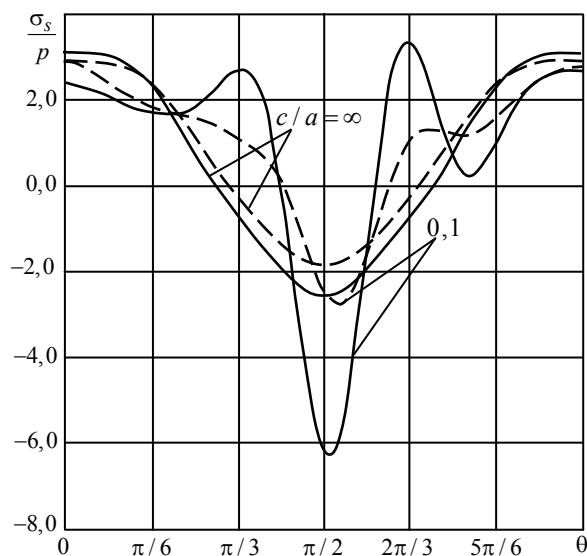


Рис. 4

вблизи контура нормальных напряжений σ_s на площадках, перпендикулярных к контуру левого включения. При этом θ – центральный угол, отсчитываемый от линий центров включений против часовой стрелки, сплошные линии относятся к случаю, когда $\lambda_s^{(l)} = 0,5$, штриховые – когда $\lambda_s^{(l)} = 2$.

Из таблицы и рис. 3, 4 видно, что с уменьшением расстояния между включениями концентрация напряжений в зоне между включениями растет; при $c/a > 2$ влияние одного включения на напряженное состояние около другого незначительно и им можно пренебречь. Чем мягче материал включений (чем больше $\lambda_s^{(l)}$), тем больше эта концентрация напряжений; при $\lambda_s^{(l)} > 10^3$ включения можно считать абсолютно мягкими. В этом случае значения напряжений в пластинке совпадают с соответствующими зна-

ченнями для пластинки с отверстиями [2]. При $\lambda_s^{(l)} < 10^{-3}$ включения можно считать абсолютно жесткими, если $c/a > 0,1$, а при меньших значениях c/a переход к абсолютно жесткому ядру осуществляется при еще меньших значениях параметра $\lambda_s^{(l)}$. Но значения напряжений в пластинке с абсолютно жесткими включениями значительно отличаются от соответствующих значений для пластинки с отверстиями, контуры которых жестко подкреплены [7]. Значения указанных величин совпадают, если материалы включений не обладают пьезоэффектом, т. е. когда λ_{pe} весьма малы [5].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гринченко В. Т. Электроупругость / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга. – К.: Наук. думка. – 1989. – 280 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. Т. 5).
2. Партон В. З. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В. З. Партон, Б. А. Кудрявцев. – М.: Наука, 1988. – 472 с.
3. Калоеров С. А. Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных сред / С. А. Калоеров, А. И. Баева, О. И. Бороненко. – Донецк: Юго-Восток, 2007. – 270 с.
4. Калоеров С. А. Двумерные задачи электромагнитоупругости для многосвязных тел / С. А. Калоеров, А. В. Петренко. – Донецк: Юго-Восток, 2011. – 232 с.
5. Калоеров С. А. Влияния значений пьезомодулей на пьезоэффект в задачах электромагнитоупругости / С. А. Калоеров, А. А. Самодуров // Теорет. и прикладная механика. – 2013. – Вып. 7(53). – С. 118–130.
6. Калоеров С. А. Решение задачи электромагнитоупругости для кусочно-однородных пластин / С. А. Калоеров, А. А. Самодуров // Актуальные пробл. механики деформируемого твердого тела: Тр. VII Междунар. науч. конф. (Донецк–Мелекино, 11–14 июня 2013 г.). – Донецк, 2013. – Т. 1. – С. 163–167.
7. Калоеров С. А. Исследование электромагнитоупругого состояния пьезопластины с подкрепленными отверстиями / С. А. Калоеров, А. А. Самодуров // Вісн. Донец. ун-та. Сер. А. Природ. науки. – 2013. – Вып. 1. – С. 42–48.
8. Калоеров С. А. Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела / С. А. Калоеров, Е. С. Горянская // Концентрация напряжений. – К.: А. С. К., 1998. – С. 10–26. (Механика композитов: В 12 т., Т. 7).
9. Воеводин В. В. Вычислительные основы линейной алгебры / В. В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
10. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулдер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
11. Tian W.-Y. Multiple crack interaction problem in magnetoelastic solids / W.-Y. Tian, U. Gabbert // Europ. J. Mech. Part A. – 2004. – Vol. 23. – P. 599–614.
12. Hrennikoff A. Solution of problems of elasticity by the framework method / A. Hrennikoff // J. Appl. Mech. – 1941. – Vol. 8. – P. A169–A175.

Поступила в редакцию 28.04.2014 г.

РЕЗЮМЕ

Наведені основні співвідношення електромагнітопружності для багатозв'язних п'єзопластинок. З використанням цих співвідношень, а також розкладання голоморфних функцій в ряди Лорана та по поліномам Фабера розв'язок задачі для кусково-однорідної пластинки з рядом пружних включень узагальнено методом найменших квадратів зведено до системи лінійних алгебраїчних рівнянь, псевдорозв'язок якої знайдено сингулярним розкладанням. Проведені числові дослідження, з допомогою яких виявлен вплив відносної жорсткості матеріала включення на значення основних характеристик електромагнітопружного стану.

Ключевые слова: електромагнітопружність, п'єзоматеріали, кусково-однорідна пластинка, пружні включення.

SUMMARY

Basic relations of electromagnetoelasticity for multiply piezoplates are given. With the use of these relations and the expansion of holomorphic functions in the Laurent series and Faber polynomials given the solution of the problem for a piecewise-homogeneous plate with several elastic inclusions which is reduced to a system of linear algebraic equations by the generalized least squares method, which solution founds by pseudo-singular value decomposition. Numerical investigations by which revealed the effect of relative rigidity the material of inclusion on the value of main characteristics of electromagnetoelastic state.

Keywords: electromagnetoelasticity, piezomaterials, piecewise-homogeneous plate, elastic inclusions.