УДК 512.548

Г.В. Крайнічук
Донецький національний університет, Вінниця, Україна

КЛАСИФІКАЦІЯ ТА РОЗВ'ЯЗАННЯ КВАЗІГРУПОВИХ ФУНКЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ *(4;2)*

Тотожності, які визначають оборотну функцію (квазігрупу) називають первинними. Перетворення функційних рівнянь за допомогою цих тотожностей називають також первинними. Два функційні рівняння називають первинно (парастрофно) рівносильними, якщо від одного до іншого можна перейти за допомогою скінченної кількості застосувань первинних перетворень.

В даній статті систематизовано результати про класифікацію та розв'язування загальних квазігрупових функційних рівняннях типу *(2;2)* і *(3;2)*. Класифіковано загальні квазігрупові функційні рівнянь типу *(4;2)*, в результаті отримано 6 класів, на множині оборотних двомісних функцій розв'язано шість рівнянь, які є представниками цих класів.

Ключові слова: квазігрупа, парастроф, оборотна функція, функційне рівняння.

Вступ. Об'єктом досліджень є загальні функційні рівняння, які розглядаються над множиною оборотних функцій (квазігрупових операцій) довільної множини як скінченної, так і нескінченної. Це спричинено різноманітними застосуваннями в таких галузях математики, як математична логіка, теорія кодування, універсальна алгебра, геометрія, теорія планування експериментів тощо (див. [1, 2, 3, 4]).

В статті розглядаються лише функційні рівняння (загальне означення див. Я. Ацель [2]), кожне з яких є рівністю двох термів другого порядку, що містять лише предметні та функційні змінні, причому всі предметні змінні зв'язані квантором загальності. Функційні рівняння, що вивчаються, мають задовольняти таким чотирьом умовам:

1) функційні змінні попарно різні (такі рівняння називають *загальними*);
2) не мають ні функційних, ні предметних сталих;
3) кожна функційна змінна є бінарною, тобто набуває значень в множині двомісних оборотних функцій (такі рівняння називають *квазігруповими*);
4) кожна предметна змінна має принаймні дві появи.

Якщо функційне рівняння має лише одну появу однієї із предметних змінних і таке рівняння має розв'язок на множині оборотних функцій деякої множини , то множина є одноелементною.

Нагадаємо, що двомісна функція (бінарна операція) f називається *оборотною (квазігруповою)*, якщо вона оборотна по кожній своїй змінній. Наприклад, на множині дійсних чисел оборотною буде функція, яка монотонна і необмежена по кожній своїй змінній при довільних значеннях інших змінних [5]. На скінченній множині, наприклад, із 8-ми елементів існує понад 535 мільярдів оборотних двомісних функцій [6].

В. Білоусов [7], А. Чебан [8] вивчали квазігрупові функційні рівняння з точністю до еквівалентності, яка близька до первинної рівносильності. С. Крстіч [9], Я. Дуплак [10], А. Крапєж [11] та інші зводили вивчення залежності між квазігруповими функційними рівняннями до теорії графів. Методом для класифікації квазігрупових функційних рівнянь є первинна еквівалентність, означення якої сформульоване Ф. Сохацьким [12] та уточнене А. Крапєжем [11]. Нагадаємо, що функційні рівняння називаються *первинно (або парастрофно) рівносильними* [12], якщо одне рівняння з іншого можна отримати за скінченну кількість перейменувань функційних і предметних змінних та застосувань рівностей:

$$F({}^{l}F(x;y);y)=x, \qquad F(x;{}^{r}F(x;y))=y, \qquad {}^{r}({}^{r}F)=F, \qquad {}^{l}({}^{l}F)=F$$

які виконуються для всіх значень предметних змінних *x, y* та для всіх значень функційної змінної F в множині двомісних оборотних функцій.

В названих роботах найчастіше досліджувалися квадратичні рівняння, тобто ті, в яких кожна предметна змінна має точно дві появи. Проте, з огляду на застосування, великий інтерес викликають і неквадратичні квазігрупові функційні рівняння. Класифікацію неквадратичних квазігрупових рівнянь досліджували В. Білоусов [13], А. Чебан [14], Ф. Сохацький [15], Р. Коваль [16]. Зокрема, Р. Коваль [16] класифікувала з точністю до первинної рівносильності функційні рівняння від двох, трьох та частково чотирьох функційних змінних, які мають дві предметних змінних з різною кількістю їх появ. В залежності від кількості появ різних предметних змінних, використовується поняття типу.

Типом функційного рівняння від *k* предметних змінних називаємо послідовність $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$, де m_i кількість появ у рівнянні *i*-тої предметної змінної. Доцільність вивчення функційних рівнянь типу *(m;2)* випливає з того, що кожна квазігрупа є розв'язком деякого функційного рівняння типу *(m;2)*. Найуживанішими серед них є мінімальні рівняння при *m=2,3,4*. Розглянемо їх.

Загальних функційних рівнянь від двох функційних змінних типу *(2;2)* з точністю до первинної рівносильності є точно два (див. Р. Коваль [16]):

$$F_1(x;y) = F_2(x;y), \qquad F_1(x;x) = F_2(y;y).$$

Розв'язки першого рівняння вивчалися в [9], а розв'язки другого − в [17].

Загальних первинно нерівносильних функційних рівнянь від трьох функційних змінних типу *(3;2)* є точно три ([16]):

$$F_1(x;y) = F_2(x;F_3(x;y)), \tag{1}$$

$$F_1(F_2(x;x);y) = F_3(x;y), \tag{2}$$

$$F_1(F_2(x;x);x) = F_3(y;y). \tag{3}$$

В дисертації Р. Коваль [16] знайдено 13 загальних функційних рівнянь від чотирьох функційних змінних та від двох різних предметних змінних, 6 із них мають тип *(3;3)*, а 7 рівнянь – тип *(4;2)*. В цих результатах не розрізняється тип функційного рівняння за предметними змінними, що є суттєвим фактом при первинній нерівносильності, яка між ними не встановлювалася.

Метою статті є дослідження загальних функційних рівнянь від чотирьох функційних змінних та від двох предметних змінних з появами *4* та *2* відповідно, тобто типу *(4;2)*. Всього таких рівнянь з точністю до первинної рівносильності є точно 6. Частина цих результатів анонсувалися в [18, 19].

Завдання даного дослідження: класифікувати загальні функційні рівняння типу *(4;2)* та знайти квазігрупові множини розв'язків рівнянь типу *(3;2)* та типу *(4;2)* на двомісних оборотних функціях.

Допоміжні поняття та результати. В статті функції розглядаються визначеними на одній і тій же множині, яку називатимемо *базовою* і позначатимемо через Q.

Двомісна функція f називається:

- *лівооборотною*, якщо для всіх $a,b \in Q$ рівняння $f(x;a) = b$ має єдиний розв'язок, який позначають через ${}^{\ell}f(b;a)$.
- *правооборотною*, якщо для всіх $a,b \in Q$ рівняння $f(a;x) = b$ має єдиний розв'язок, який позначають через ${}^{r}f(a;b)$.
- *оборотною (квазігруповою)*, якщо вона є правооборотною і лівооборотною, інакше кажучи, якщо вона має ліву обернену функцію ${}^{\ell}f$ і праву обернену функцію ${}^{r}f$, тобто функції, які задовольняють умовам:

$$f({}^{\ell}f(x;y);y) = x,\ {}^{\ell}f(f(x;y);y) = x,\ f(x;{}^{r}f(x;y)) = y,\ {}^{r}f(x;f(x;y)) = y,\ {}^{r}({}^{r}f) = f,\ {}^{\ell}({}^{\ell}f) = f.$$

Ці тотожності називатимемо *визначальними* або *первинними*, а групоїд $(Q;f)$ називається *квазігрупою*. ${}^{\sigma}f$ називається σ*-парастрофом* функції f, якщо вона визначається таким співвідношенням:

$${}^{\sigma}f(x_1;x_2) = x_3 \leftrightarrow f(x_1;x_2) = x_3,$$

для всіх $\sigma \in S_3 := \{\iota, s, \ell, r, s\ell, sr\}$ – симетрична група порядку *3*, де $s := (12)$, $l := (13)$, $r := (23)$.

Якщо всі парастрофи оборотної функції збігаються, то функція називається *TS-квазігрупою*. Двомісна оборотна функція називається *ідемпотентною*, якщо для довільного елемента x виконується $f(x;x) = x$. Ідемпотентні *TS*-квазігрупи називають *квазігрупами Штейнера*.

Для зручності доведень користуємося поняттями нейтральності та лупи, які наведені в [20]. Випишемо їх. Елемент e називається:

- i*-нейтральним*, якщо рівність $f(x_1;x_2) = x_3$ виконується, коли $x_i = e$ і для довільних однакових значень двох інших змінних;
- *нейтральним*, якщо він є i-нейтральним для деякого $i = 1,2,3$.

Існує три типи нейтральності: ліва, права і середня. Якщо квазігрупа має лівий (правий, середній) нейтральний елемент, то вона називається *лівою (правою, середньою)* лупою. Кожна лупа має точно один нейтральний елемент. Якщо деякий елемент e є i-нейтральним в лупі $(Q;f)$, то він є σ^{-1}-*нейтральним* в σ-парастрофі лупи $(Q;{}^{\sigma}f)$ для всіх $i = 1,2,3$ та для всіх $\sigma \in S_3$. Відповідно, кожний парастроф лупи є також лупою.

Лупа називається:

- *односторонньою*, якщо вона має лівий або правий, або середній нейтральний елемент;
- *двосторонньою*, якщо вона має ліво-правий або ліво-середній або право-середній нейтральний елемент;
- *тристоронньою, якщо* вона має нейтральний елемент, який є і лівим, і правим, і середнім одночасно.

Розв'язок функційного рівняння на множині Q – це послідовність функцій (операцій), визначених на Q, яка перетворює функційне рівняння в істинне висловлення після підстановки замість функційних змінних їх значень.

Два функційних рівняння називають *рівносильними* на множині Q, якщо вони мають однакові множини розв'язків. Два функційних рівняння називають *рівносильними*, якщо вони рівносильні на кожній множині.

Означення 1. ([12], [11]) Два функційних рівняння називаються *первинно (парастрофно) рівносильними,* якщо одне з іншого можна отримати за скінченну кількість застосувань таких перетворень:

1) перейменування предметних змінних;
2) перейменування функційних змінних;
3) перетворення за комутуванням: заміна підтерма виду $F(\omega,\upsilon)$ термом ${}^{s}F(\upsilon,\omega)$;
4) перетворення за зовнішнім діленням: перехід від рівності виду $F_1(\omega_1,\omega_2)=F_2(\upsilon_1,\upsilon_2)$ до рівності ${}^{r}F_2(\upsilon_1;F_1(\omega_1,\omega_2))=\upsilon_2$ або ${}^{l}F_2(F_1(\omega_1,\omega_2);\upsilon_2)=\upsilon_1$;
5) перетворення за внутрішнім (правим або лівим) діленням через змінну x: заміна підтерма $F(x,\upsilon)$ на x і одночасно заміна всіх інших появ змінної x термом ${}^{r}F(x,\upsilon)$, якщо x не має появи в термі υ або заміна підтерма $F(\omega,x)$ на x і одночасно заміна всіх інших появ змінної x термом ${}^{l}F(\omega,x)$ якщо x не має появи в термі ω;
6) перестановка частин рівняння: заміна рівняння $\omega=\upsilon$ на $\upsilon=\omega$.

Перетворення за комутуванням, внутрішнє ділення на підтерм через змінну та зовнішнє ділення на деякий підтерм називають *первинними (парастрофними) перетвореннями* рівняння [12]. Два рівняння називають *первинно рівносильними*, якщо одне з іншого можна отримати за скінченну кількість кроків, первинних перетворень або перейменувань предметних чи функційних змінних. Два рівняння називають *строго первинно рівносильними*, якщо одне з іншого можна отримати за скінченну кількість використання лише первинних перетворень.

Кажуть, що рівняння $\omega=\upsilon$ *зводиться до* рівняння $\omega'=\upsilon'$, якщо від одного до іншого можна перейти за скінченну кількість застосувань первинних перетворень *1)-6).*

Нагадаємо, що послідовність підтермів рівняння називається *самодостатньою* [16], якщо всі появи в рівнянні предметних змінних даної послідовності містяться принаймні в одному із підтермів цієї послідовності. *Первинною (парастрофною) самодостатньою послідовністю* підтермів фунційного рівняння [15] називається самодостатню послідовність підтермів $\upsilon_1,\upsilon_2,\ldots,\upsilon_k$ функційного рівняння, яке первинно рівносильне даному. При $k=1$ терм υ_1 називають *первинно самодостатнім*. Мінімальним (первинно) самодостатнім підтермом функційного рівняння називають терм, який є (первинно) самодостатнім і не має (первинно) самодостатніх підтермів.

Множина A називається *самодостатньою множиною* рівняння, якщо вона є множиною предметних змінних деякої самодостатньої послідовності підтермів цього рівняння. *Первинно самодостатньою* підмножиною множини предметних змінних рівняння називають множину предметних змінних деякої первинно самодостатньої послідовності підтермів.

Лема 1. ([16]) *Множини предметних змінних первинно самодостатніх послідовностей підтермів не змінюються при первинних перетвореннях.*

Наслідок 1. ([16]) *Кількість (мінімальних) первинно самодостатніх підмножин предметних змінних функційного рівняння є інваріантною при первинних перетвореннях.*

Лема 2. ([16]) *Якщо загальні функційні рівняння* $\omega=\upsilon$ *і* $\omega'=\upsilon'$ *від* n *предметних змінних та* m *функційних змінних є первинно рівносильними, то на довільній множині* Q *для довільного розв'язку* $(f_1,\ldots,f_m)$ *рівняння* $\omega=\upsilon$ *існує послідовність перестановок* $(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)$ *множини* $\{1,2,3\}$ *та перестановки* τ *множини* $\{1,\ldots,m\}$ *такі, що вибірка*

$$({}^{\sigma_1}f_1, \ldots, {}^{\sigma_m}f_m)$$

є розв'язком рівняння $\omega' = \upsilon'$.

Якщо функційні рівняння типу *(4;2)* $\omega = \upsilon$ і $\omega' = \upsilon'$ первинно рівносильні, то, відповідно до цієї Леми 2, це означає існування перестановок $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ множини $\{1,2,3\}$ та τ з множини $\{1,2,3,4\}$ таких, що для довільного розв'язку (f_1, f_2, f_3, f_4) рівняння $\omega = \upsilon$ вибірка $({}^{\sigma_{1\tau}}f_{1\tau}, {}^{\sigma_{2\tau}}f_{2\tau}, {}^{\sigma_{3\tau}}f_{3\tau}, {}^{\sigma_{4\tau}}f_{4\tau})$ є розв'язком рівняння $\omega' = \upsilon'$, тобто виконується відповідна тотожність із заданим розташуванням предметних змінних.

Основні результати

1. Розв'язки функційних рівнянь типу *(3;2)*

Тут описуються множини розв'язків загальних квазігрупових функційних рівнянь типу *(3;2)*. Повну класифікацію цих рівнянь отримано у 2005 році, а саме:

Теорема 1. ([16]) *Кожне загальне квазігрупове функційне рівняння типу (3;2) первинно рівносильне точно одному з рівнянь (1), (2), (3).*

З рівняння (1) випливає, що в кожному розв'язку (f_1, f_2, f_3) операція f_2 ортогональна до правого ділення операції f_3. Частину розв'язків цього рівняння класифікував у 1983 році В. Білоусов [23]. Він розглядав лише рівняння, які містять лише одну функційну змінну та її парастрофи. Він довів, що всього таких рівнянь з точністю до первинної рівносильності є 7, п'ять з яких добре відомі. Ці рівняння характерні тим, що деякі їх парастрофи ортогональні.

Щоб описати множини всіх розв'язків рівнянь (1) - (3), нагадаємо, що дві функції f та g називаються *ортогональними*, якщо для будь-яких $a, b \in Q$ система з рівнянь $f(x;a) = b$, $f(a;y) = b$ має єдиний розв'язок.

Якщо функція є оборотною, то функції ${}^{l}f$ та ${}^{r}f$ визначаються такими співвідношеннями

$$f(x;y) = z \Leftrightarrow {}^{l}f(z;y) = x \Leftrightarrow {}^{r}f(x;z) = y .$$

Твердження 1. ([25]) *Трійка двомісних оборотних функцій* (f_1, f_2, f_3)*, що визначені на множині* Q*, є розв'язком загального функційного рівняння (1), тоді і тільки тоді, коли виконується співвідношення*

$$f_1(x;y) = f_2(x; f_3(x;y)).$$

Розв'язки інших двох рівнянь подано в наступних твердженнях, які є очевидними і легко доводяться.

Твердження 2. *Трійка двомісних оборотних функцій* (f_1, f_2, f_3)*, що визначені на множині* Q*, є розв'язком загального функційного рівняння (2), тоді і тільки тоді, коли виконуються співвідношення*

$$f_2(x;x) = a, \qquad f_3(x;y) = f_1(a;x).$$

Твердження 3. *Трійка двомісних оборотних функцій* (f_1, f_2, f_3)*, що визначені на множині* Q*, є розв'язком функційного рівняння з (3), тоді і тільки тоді, коли виконуються співвідношення*

$$f_3(y;y) = a, \qquad f_2(x;x) = {}^{l}f_1(a;x).$$

2. Класифікація та розв'язування функційних рівнянь типу *(4;2)*

В цій частині статті подано повну класифікацію загальних квазігрупових функційних рівнянь типу *(4;2)*. Таких рівнянь точно шість, розв'язки кожного з них на множині двомісних оборотних функцій наведено в Твердженнях 4-9.

2.1. Допоміжні твердження для класифікації

Розглянемо функційні рівняння від двох різних предметних змінних та чотирьох різних функційних змінних, тобто загальні функційні рівняння типу *(4;2)*. В Теоремі 3.2.4. [16, стор. 58] встановлено існування 13 загальних функційних рівнянь, що мають тип *(4;2)* і *(3;3)*. Наприклад, функційних рівнянь типу *(4;2)* виписано 7 загальних рівнянь, решта – це загальні рівняння типу *(3;3)*.

Для того, щоб дати повну класифікацію загальних квазігрупових функційних рівнянь типу *(4;2)* необхідно довести таке допоміжне твердження.

Лема 3. *Кожне загальне функційне рівняння від двох предметних змінних типу (4;2) первинно рівносильне принаймні одному із таких рівнянь:*

$$F_1(x;y) = F_2(x; F_3(x; F_4(x;y))), \tag{4}$$

$$F_1(y;y) = F_2(F_3(x;x); F_4(x;x)), \tag{5}$$

$$F_1(x;x)=F_2(y;F_3(y;F_4(x;x))), \quad (6)$$
$$F_1(y;y)=F_2(x;F_3(x;F_4(x;x))), \quad (7)$$
$$F_1(x;x)=F_2(F_3(x;y);F_4(x;y)), \quad (8)$$
$$F_1(x;x)=F_2(x;F_3(F_4(x;y);y)). \quad (9)$$

Доведення. В межах даного доведення, всі функційні змінні позначаємо одним і тим самим символом $(\cdot)$ і вважаємо, що різні появи цього символу позначають різні функційні змінні, оскільки в загальному рівнянні всі функційні змінні є попарно різними. Інколи $(\cdot)$ опускаємо, наприклад, за цих позначень рівняння (4) має вигляд

$$xy = x(x\cdot xy).$$

Всі рівняння розглядаємо з точністю до комутування підтермів. Оскільки функційні рівняння мають дві предметні змінні, то предметну змінну, яка має чотири появи позначимо через x, а змінну, яка має дві появи – через y. Нагадаємо, якщо терм має вид $F(x;x)$, то його називають квадратом.

Кожне рівняння, що задовольняє умові теореми, має шість появ предметних змінних. З точністю до комутування, всі такі рівняння можна поділити за довжиною підтермів (*довжиною терма* називають кількість появ предметних змінних в цьому термі, а *довжиною рівняння* називають суму довжин термів лівої і правої частини). Оскільки всього є шість появ предметних змінних, то всі такі рівняння за довжиною можна поділити на три види: *1=5, 2=4, 3=3,* де *m=n* означає, що ліва частина рівняння має *m* появ предметних змінних, а права – *n* появ. Вид *3=3*, в свою чергу, має вигляд *1+2=1+2*, який поділимо зовні на одиничний підтерм, отримаємо вид *2=4*. Вид *1=5* може мати вигляди *1=1+4* та *1=2+3*. Перший поділимо зовні на одиничний підтерм, а другий на терм довжини *3*, в обох випадках отримаємо вид *2=4*.

Отже, всі функційні рівняння типу *(4;2)* зводяться до рівнянь виду *2=4*. Цей вигляд за розташуванням дужок можна подати у двох випадках:

A) 2=2+2, *B) 2=1+(1+2).*

Спочатку розглянемо функційні рівняння, які не мають квадратів. Це означає, що підтерми довжини два мають появи різних предметних змінних. Таких рівнянь з розташуванням дужок для випадку *A)* немає, оскільки маємо три підтерми і чотири появи однієї і тієї ж змінної. Для випадку *B)* таке рівняння одне: дві появи змінної y знаходяться в різних підтермах довжини два, а на всіх інших місцях розташована змінна x. З точністю до комутування, отримуємо $xy = x(x\cdot xy)$,тобто рівняння (4).

Розглянемо функційні рівняння, в яких є квадрати.

Припустимо, що y^2 є підтермом рівняння, тоді на всіх інших місцях знаходиться змінна x. Для випадку *A)* маємо три такі рівняння:

$$y^2 = x^2\cdot x^2, \qquad x^2 = y^2\cdot x^2, \qquad x^2 = x^2\cdot y^2.$$

Перше рівняння збігається з (5), а інші два – зводяться до першого зовнішнім діленням на x^2 зліва і справа відповідно. У випадку *B)* маємо два такі рівняння:

$$y^2 = x\cdot(x\cdot x^2), \qquad x^2 = x\cdot(x\cdot y^2)$$

Перше рівняння збігається з (7), а друге – зводиться до першого діленням зовні двічі на x.

Надалі розглядатимемо рівняння, в яких y^2 не є підтермом.

Нехай рівняння має точно один квадрат, а саме x^2, тоді для розташування дужок випадку *A)* інші два підтерми довжини два будуть мати вигляд xy, тому маємо такі три рівняння:

$$x^2 = xy\cdot xy, \qquad xy = x^2\cdot xy, \qquad xy = xy\cdot x^2.$$

Перше рівняння збігається з рівнянням (8), а два інші рівняння зводяться до першого діленням зовні на терм xy.

Для розташування дужок випадку *B)* один із підтермів довжини два збігається з x^2, а інший з xy. Якщо x^2 знаходиться зліва, то маємо такі два рівняння:

$$x^2 = x\cdot(y\cdot xy), \qquad x^2 = y\cdot(x\cdot xy).$$

Перше рівняння збігається з (9). Друге рівняння поділимо на x через y, отримаємо рівняння (8). Якщо x^2 знаходиться справа, то маємо такі рівняння:

$$xy = x\cdot(y\cdot x^2), \qquad xy = y\cdot(x\cdot x^2)$$

Ці рівняння, послідовним діленням зовні на предметні змінні x, y відповідно та комутуванням частин рівняння, зводяться до двох попередніх рівнянь, які, в свою чергу, з точністю до комутування, первинно рівносильні до рівнянь (9) і (8).

Припустимо, що рівняння має два квадрати, тобто підтерм x^2 має дві появи в рівнянні. З розташуванням дужок випадку *А)* таких рівнянь немає. З розташуванням дужок *В)* маємо одне рівняння $x^2 = y\cdot(y\cdot x^2)$, яке збігається з рівнянням (6).

З доведення цієї леми бачимо, що два рівняння типу *(4;2)*, а саме, рівняння 3.24 і 3.32 з Теореми 3.2.4. [16] первинно рівносильні.

2.2. Розв'язання рівнянь (4) - (9)

Згідно з Лемою 3, різних загальних функційних рівнянь типу *(4;2)* є принаймні шість. У цьому пункті статті подано їх розв'язки на двомісних оборотних функціях. Множини розв'язків цих рівнянь анонсовано в доповідях та опубліковано в тезах конференцій [21, 22].

Твердження 4. *Нехай* f_1, f_2, f_3, f_4 *– двомісні оборотні функції, які визначені на множині* Q. *Тоді четвірка функцій* (f_1, f_2, f_3, f_4) *є розв'язком функційного рівняння (4), тоді і тільки тоді, коли виконується співвідношення*

$$f_1(x;y) = f_2(x; f_3(x; f_4(x;y))).$$

Доведення очевидне.

Наприклад, нехай f_2, f_3 – довільні двомісні оборотні функції, які визначені на множині Q такі, що $f_1 = f_2$, $f_3 = {}^r f_4$, тоді, легко бачити, що четвірка оборотних функцій (f_1, f_2, f_3, f_4) є розв'язком функційного рівняння (4).

Твердження 5. *Нехай* f_1, f_2, f_3, f_4 *– двомісні оборотні функції, які визначені на множині* Q. *Тоді четвірка функцій* (f_1, f_2, f_3, f_4) *є розв'язком функційного рівняння (5), тоді і тільки тоді, коли існує елемент* a *з множини* Q *такий, що виконуються співвідношення:*

$$f_1(y;y) = a,\ f_4(x;x) = {}^r f_2(f_3(x;x);a). \tag{10}$$

Доведення. Нехай четвірка (f_1, f_2, f_3, f_4) двомісних оборотних функцій, що визначені на множині Q, є розв'язком функційного рівняння (5), тобто виконується тотожність:

$$f_1(y;y) = f_2(f_3(x;x); f_4(x;x)). \tag{11}$$

Нехай $c \in Q$ і $a := f_2(f_3(c;c); f_4(c;c))$. Покладемо $x = c$ в (8), отримаємо $f_1(y;y) = a$, тобто першу рівність з (10). Враховуючи це, з (11) отримуємо $f_2(f_3(x;x); f_4(x;x)) = a$. Звідси, враховуючи означення правого ділення для функції f_2, маємо другу рівність з (10) для всіх $x \in Q$.

Навпаки, нехай четвірка операцій (f_1, f_2, f_3, f_4) задовольняє умови теореми, тобто існує елемент a з множини Q такий, що виконуються рівності (11). Тоді

$$f_2(f_3(x;x); f_4(x;x)) = f_2(f_3(x;x); {}^r f_2(f_3(x;x);a)) = a = f_1(y,y).$$

Отже, (11) – тотожність, що й треба було довести.

Твердження 6. *Нехай* f_1, f_2, f_3, f_4 *– двомісні оборотні функції, які визначені на множині* Q. *Тоді четвірка функцій* (f_1, f_2, f_3, f_4) *є розв'язком функційного рівняння (6), тоді і тільки тоді, коли існує перетворення* δ*, підстановка* α *множини* Q *такі, що виконуються співвідношення:*

$$f_1(x;x) = \alpha\delta x,\ f_4(x;x) = \delta x,\ f_3(y;\delta x) = {}^r f_2(y;\alpha\delta x). \tag{12}$$

Доведення. Нехай четвірка (f_1, f_2, f_3, f_4) двомісних оборотних функцій, що визначені на множині Q, є розв'язком функційного рівняння (6), тобто виконується тотожність:

$$f_1(x;x) = f_2(y; f_3(y; f_4(x;x))) \tag{13}$$

Нехай a довільний елемент множини Q. Тоді при $y = a$ визначимо $\alpha x := f_2(a; f_3(a;x))$. Врахувавши це позначення з тотожності (13) маємо $f_1(x;x) = \alpha f_4(x;x)$. Позначимо $\delta x := f_4(x;x)$, тоді з останньої рівності отримуємо першу рівність з (12). Врахувавши її для (13), отримаємо $\alpha\delta x = f_2(y; f_3(y;\delta x))$. Звідси, за означенням правого ділення функції f_2, отримуємо третю рівність з (12).

Навпаки, нехай четвірка оборотних функцій (f_1, f_2, f_3, f_4) задовольняє умови теореми, тобто існують перетворення δ, підстановка α з множини Q такі, що виконуються рівності (12). Тоді отримуємо

$$f_2(y; f_3(y; f_4(x;x))) = f_2(y; f_3(y;\delta x)) = f_2(y; {}^r f_2(y;\alpha\delta x)) = \alpha\delta x = f_1(x;x).$$

Отже, (13) є тотожністю, а це означає, що четвірка оборотних функцій (f_1, f_2, f_3, f_4) є розв'язком функційного рівняння (6).

Твердження 7. *Нехай* f_1, f_2, f_3, f_4 *– двомісні оборотні функції, які визначені на множині* Q. *Тоді четвірка функцій* (f_1, f_2, f_3, f_4) *є розв'язком функційного рівняння (7), тоді і тільки тоді, коли існує підстановка* α *та елемент* a *з множини* Q *такі, що виконуються співвідношення:*

$$f_1(y;y) = a,\ f_2(x;\alpha x) = a,\ f_4(x;x) = {}^r f_3(x;\alpha x). \tag{14}$$

Доведення. Нехай четвірка (f_1, f_2, f_3, f_4) двомісних оборотних функцій, що визначені на множині Q, є розв'язком функційного рівняння (7), тобто виконується тотожність:

$$f_1(y;y) = f_2(x; f_3(x; f_4(x;x))). \tag{15}$$

Нехай c довільний елемент множини Q і визначимо $a := f_2(c; f_3(c; f_4(c;c)))$. Покладемо $x = c$ в (15), отримаємо першу рівність з (14). Врахувавши її у (15), маємо $f_2(x; f_3(x; f_4(x;x))) = a$. З отриманої рівності, за означенням правого ділення функції f_2, отримуємо ${}^r f_2(x;a) = f_3(x; f_4(x;x))$.

Визначимо перетворення $\alpha x := {}^r f_2(x;a)$, яке є підстановкою множини Q, позаяк воно визначено як зсув квазігрупової операції. З визначення перетворення α отримуємо другу рівність із (14). Враховуючи перетворення α, з рівності ${}^r f_2(x;a) = f_3(x; f_4(x;x))$ маємо $f_3(x; f_4(x;x)) = \alpha x$. Звідси, за означенням правого ділення функції f_3, випливає третя рівність з (14).

Навпаки, нехай четвірка квазігрупових операцій (f_1, f_2, f_3, f_4) задовольняє умови теореми, тобто існують підстановка α та елемент a з множини Q такі, що виконуються співвідношення (14). Тоді отримуємо

$$f_2(x; f_3(x; f_4(x;x))) = f_2(x; f_3(x; {}^r f_3(x;\alpha x))) = f_2(x;\alpha x) = a = f_1(y;y).$$

Отже, (15) є тотожністю, тобто, четвірка оборотних функцій (f_1, f_2, f_3, f_4) є розв'язком функційного рівняння (7).

Твердження 8. *Нехай* f_1, f_2, f_3, f_4 *– двомісні оборотні функції, які визначені на множині* Q. *Тоді четвірка функцій* (f_1, f_2, f_3, f_4) *є розв'язком функційного рівняння (8), тоді і тільки тоді, коли*

$$f_4(x;y) = {}^r f_2(f_3(x;y); f_1(x;x)). \tag{16}$$

Доведення. Нехай (f_1, f_2, f_3, f_4) – довільна четвірка двомісних оборотних функцій, що визначені на множині Q. Тоді ця четвірка є розв'язком функційного рівняння (8), а це означає виконання тотожності

$$f_1(x;x) = f_2(f_3(x;y); f_4(x;y)),$$

яка за означенням правого ділення функції f_2 рівносильна (16).

Твердження 9. *Нехай* f_1, f_2, f_3, f_4 *– двомісні оборотні функції, які визначені на множині* Q. *Тоді четвірка функцій* (f_1, f_2, f_3, f_4) *є розв'язком функційного рівняння (9), тоді і тільки тоді, коли функції* f_2, f_3 *оборотні, існує підстановка* α *з множини* Q *така, що виконуються співвідношення:*

$$f_1(x;x) = f_2(x;\alpha x),\ f_4(x;y) = {}^r f_3(y;\alpha x). \tag{17}$$

Доведення. Нехай четвірка (f_1, f_2, f_3, f_4) двомісних оборотних функцій, що визначені на множині Q, є розв'язком функційного рівняння (9), тобто виконується тотожність:

$$f_1(x;x) = f_2(x; f_3(y; f_4(x;y))). \tag{18}$$

Нехай $a \in Q$ і $\alpha x := f_3(a; f_4(x;a))$. Покладемо в (18) $y = a$, отримаємо отримуємо першу рівність з (17). Враховуючи отримане, рівність (18) має вигляд:

$$f_2(x;\alpha x) = f_2(x; f_3(y; f_4(x;y))).$$

Скоротимо ліву і праву частини рівняння зовні на x, в результаті отримаємо $\alpha x = f_3(y; f_4(x;y))$.

Звідси, за означенням правого ділення функції f_3, отримуємо другу рівність з (14).

Навпаки, нехай четвірка операції (f_1, f_2, f_3, f_4) задовольняє умови теореми, тобто існують підстановка α, оборотні функції f_2, f_3 множини Q такі, що виконуються співвідношення (17), тоді

$$f_2(x; f_3(y; f_4(x; y))) = f_2(x; f_3(y; {}^r f_3(y; \alpha x))) = f_2(x; \alpha x) = f_1(x; x),$$

тобто (18) є тотожністю.

2.3. Класифікація рівнянь

В цьому пункті наведено основний результат статті, а саме повну класифікацію загальних квазігрупових функційних рівнянь типу *(4;2).*

Теорема 2. *Кожне загальне функційне рівняння від двох предметних змінних типу (4;2) первинно рівносильне точно одному із рівнянь (4)-(9).*

Доведення. Згідно з Лемою 3, досить довести, попарну первинну нерівносильність рівнянь (4)-(9). Згідно з Лемою 1, випишемо всі самодостатні множини предметних змінних кожного рівняння, а потім, згідно з Наслідком 1, обчислимо кількість самодостатніх множин в кожному із цих рівнянь. Результат зобразимо в Таблиці 1:

Табл. 1. Кількість самодостатніх множин у кожному рівнянні (4)-(9)

Рівняння	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
Кількість самодостатніх множин	0	2	1	2	0	0

З Наслідку 1 випливає первинна нерівносильність пар рівнянь, які мають різну кількість самодостатніх множин. Залишилося встановити первинну нерівносильність чотирьох пар рівнянь, що видно із Таблиці 2:

Табл. 2. Попарна первинна нерівносильність рівнянь (4)-(9)

	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
(4)	Таблиця 1	Таблиця 1	Таблиця 1	Пункт 1.	Пункт 2.
(5)	#	Таблиця 1	Пункт 3.	Таблиця 1	Таблиця 1
(6)	#	#	Таблиця 1	Таблиця 1	Таблиця 1
(7)	#	#	#	Таблиця 1	Таблиця 1
(8)	#	#	#	#	Пункт 1.

1. Розглянемо первинну нерівносильність пар рівнянь (8), (4) та (8), (9). Припустимо, що вони первинно рівносильні. Нехай $(Q,\cdot)$ – довільна неодноелементна квазігрупа Штейнера, тоді четвірка функцій $(\cdot;\cdot;\cdot;\cdot)$ є розв'язком і рівняння (4), і рівняння (9). З Леми 2 випливає, що ця ж четвірка квазігруп є розв'язком рівняння (8), тобто

$$x \cdot x = (x \cdot y) \cdot (x \cdot y).$$

Оскільки квазігрупа Штейнера ідемпотентна, то дана тотожність рівносильна тотожності $x = xy$, яка виконується лише в одноелементній квазігрупі. Отримане протиріччя доводить первинну нерівносильність зазначених пар рівнянь.

2. Розглянемо пару рівнянь (4) і (9). Припустимо, що ці рівняння первинно рівносильні. Згідно з Лемою 2, виконується тотожність:

$${}^{\sigma_{1\tau}} f_{1\tau}(x; y) = {}^{\sigma_{2\tau}} f_{2\tau}(x; {}^{\sigma_{3\tau}} f_{3\tau}(x; {}^{\sigma_{4\tau}} f_{4\tau}(x; y))). \tag{19}$$

Визначимо $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ множини $\{1,2,3\}$ та τ з множини $\{1,2,3,4\}$. Для цього, згідно з твердження 9, розглянемо розв'язки рівняння (9), які визначаються такими умовами:

$$f_1(x; x) = f_2(x; x), \ \ f_4(x; y) = {}^l f_3(x; y). \tag{20}$$

Розглянемо всі 6 можливих образів множини $\{3,4\}$ відносно підстановки τ. Якщо τ таке, що

$$\{3,4\} \in \{\{1\tau,2\tau\},\{1\tau,4\tau\},\{2\tau,3\tau\},\{3\tau,4\tau\}\},$$

то візьмемо розв'язок (20), в якому функція f_3 є *TS*-квазігрупою, а функції f_1, f_2, f_3 попарно непарастрофні (існування таких квазігруп встановлено в [25]). Оскільки в *TS*-квазігрупі всі парастрофи однакові, то, враховуючи другий вираз із (20) та замінивши в (19) $f_3(x;y)$ на y, отримаємо, у всіх випадках, парастрофність двох інших функцій f_1, f_2, що суперечить їх вибору. Справді, для випадку $\{3,4\}=\{1\tau,2\tau\}$ з тотожності (19) маємо

$$f_3(x;y) = f_3(x;{}^{\sigma_{3\tau}}f_{3\tau}(x;{}^{\sigma_{4\tau}}f_{4\tau}(x;y))).$$

Отриману рівність скоротимо на y або, що теж саме, замінимо $f_3(x;y)$ на y, в результаті отримаємо парастрофність двох інших функцій ${}^{\sigma_{3\tau}}f_{3\tau}$ і ${}^{\sigma_{4\tau}}f_{4\tau}$, де $\{3\tau,4\tau\}=\{1,2\}$, що суперечить їх вибору. Для інших випадків доведення аналогічне.

Нехай $\{3,4\} \in \{\{1\tau,3\tau\},\{2\tau,4\tau\}\}$, тоді візьмемо розв'язок $(\cdot;\circ;\cdot;\circ)$, якщо $\{3,4\}=\{1\tau,3\tau\}$ і розв'язок $(\circ;\cdot;\circ;\cdot)$, якщо $\{3,4\}=\{2\tau,4\tau\}$, де $(Q,\cdot)$, $(Q,\circ)$ – довільні *TS*-квазігрупи, які визначаються такими таблицями Келі:

$(\cdot)$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	3	2	5	4	7	6
2	3	2	1	6	7	4	5
3	2	1	3	7	6	5	4
4	5	6	7	4	1	2	3
5	4	7	6	1	5	3	2
6	7	4	5	2	3	6	1
7	6	5	4	3	2	1	7

$(\circ)$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	7	5	6	3	4	2
2	7	2	6	5	4	3	1
3	5	6	3	7	1	2	4
4	6	5	7	4	2	1	3
5	3	4	1	2	5	7	6
6	4	3	2	1	7	6	5
7	2	1	4	3	6	5	7

В обох випадках тотожність (19) матиме вигляд

$$x \cdot y = x \circ (x \cdot (x \circ y)).$$

Проте, ця рівність не є тотожністю. Справді, обчислимо її ліву і праву частини при $x=2$ та $y=4$

$$2 \cdot 4 = 6 \neq 2 \circ (2 \cdot (2 \circ 4)) = 2 \circ (2 \cdot 5) = 2 \circ 7 = 1.$$

Отримане протиріччя доводить, що припущення неправильне, тобто рівняння (4) і (9) не є первинно рівносильними.

3. Залишилося розглянути пару рівнянь (5) і (7). Припустимо, що ці рівняння первинно рівносильні. Згідно з Лемою 2, виконується тотожність

$${}^{\sigma_{1\tau}}f_{1\tau}(y;y) = {}^{\sigma_{2\tau}}f_{2\tau}(x;{}^{\sigma_{3\tau}}f_{3\tau}(x;{}^{\sigma_{4\tau}}f_{4\tau}(x;x))).$$

Будемо розглядати розв'язки рівняння (5), які, згідно Твердження 5, визначаються такими співвідношеннями

$$f_1(y;y) = e, \quad f_4(x;x) = {}^{r}f_2(f_3(x;x),e), \tag{21}$$

де e – довільний фіксований елемент множини Q. Розглянемо розв'язок (21), такий, що f_1 – суто середня лупа (це та, яка не є ні лівою, ні правою), f_2, f_3, f_4 – квазігрупи, які не є односторонніми лупами, ні лівими, ні правими, ні середніми. Тоді, з Леми 2 та Твердження 7 випливає, що

$${}^{\sigma_{1\tau}}f_{1\tau}(y;y) = a, \quad {}^{\sigma_{4\tau}}f_{4\tau}(x;x) = {}^{r\sigma_{3\tau}}f_{3\tau}(x;{}^{r\sigma_{2\tau}}f_{2\tau}(x;a)) \tag{22}$$

для деякого a із Q. Це означає, що елемент a є середнім елементом операції ${}^{\sigma_{1\tau}}f_{1\tau}$. Оскільки операції f_2, f_3, f_4 не мають нейтральних елементів, то кожен з їх парастрофів також не має нейтральних елементів, тому $1\tau = 1$. Позаяк f_1 є суто середньою лупою, то операція ${}^{\sigma_1}f_1$ з (22) буде середньою лупою лише тоді, коли $\sigma_1 \in \{\iota, s\}$. Звідси випливає, що $a = e$. Отже, надалі вважатимемо, що $1\tau = 1$, $\sigma_1 \in \{\iota, s\}$.

Розглянемо інший розв'язок (21), вважаючи, що f_3, f_4 – тристоронні лупи з нейтральним елементом e і $f_2(e;e) = e$, до того ж, f_2 – квазігрупа, яка не є лупою. Оскільки $1\tau = 1$ і $\sigma_1 \in \{\iota, s\}$, то з (22) випливає співвідношення

$$^{\sigma_{4\tau}} f_{4\tau}(x;x) = {}^{r\sigma_{3\tau}} f_{3\tau}(x; {}^{r\sigma_{2\tau}} f_{2\tau}(x;e)). \qquad (23)$$

Якщо в (23) $4\tau = 2$, то $^{\sigma_{3\tau}} f_{3\tau}$ та $^{\sigma_{2\tau}} f_{2\tau}$ є тристоронніми лупами з нейтральним елементом e, тому права частина (23) дорівнює e, тобто

$$^{\sigma_2} f_2(x;x) = e.$$

Отримана рівність означає, що $^{\sigma_2} f_2$ є середньою лупою, тобто f_2 є односторонньою лупою, що суперечить припущенню. Це ж саме протиріччя отримуємо при $3\tau = 2$ та $2\tau = 2$.

Отже, наше припущення про первинну рівносильність рівнянь (5) і (7) хибне, тобто ці рівняння первинно нерівносильні.

Висновки. У статті систематизовано результати про класифікацію та розв'язування загальних функційних рівняннях типу *(2;2)* і *(3;2)*. Класифіковано загальні функційні рівнянь типу *(4;2)*, в результаті отримано 6 класів, на множині оборотних двомісних функцій розв'язано шість рівнянь, які є представниками цих класів. Подальшою перспективою є дослідження кожного отриманого класу функційних рівнянь мінімального типу, тобто *(2;2)*, *(3;2)* та *(4;2)*, де кожен функційний символ в рівнянні є однією й тією ж функційною змінною або її будь-яким парастрофом. Точніше, потрібно дослідити 11 різних мінімальних класів парастрофних тотожностей.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Aczel J. Lectures on Functional Equations and their applications / J. Aczel. – New York: Acad. press, 1966. – 510 p.
2. Ацель Я. Функциональные уравнения с несколькими переменными / Я. Ацель, Ж. Домбр. – М.: Физматлит, 2003. – 432 с.
3. Taylor M.A. A generalization of a theorem of Belousov / M.A. Taylor // Bull. London Math. Soc. – 1978. – V. 10, № 3. – P. 285-286.
4. Глухов М.М. О применениях квазигрупп в криптографии / М.М. Глухов // Прикладная дискретная математика. − 2008. – V. 2, № 2. − С. 28-32.
5. Белоусов В.Д. Основы теории квазигрупп и луп / В.Д. Белоусов – М.: Наука, 1967. – 222 с.
6. McKay B. D. On the number of Latin Squares / B.D. McKay, I. Wanless // Ann. Combin. − 2005. − V. 9. − P. 335-344.
7. Белоусов В.Д. Уравновешенные тождества в квазигруппах / В.Д. Белоусов // Мат. сб. – 1966. – 70(112):I. – 55-97 с.
8. Чебан А.М. Системы квазигрупп с обобщённым тождеством Муфанг / А.М. Чебан // Мат.исследования. – 1971. – т.VI, вып.3, – Кишинев. – С. 180-187.
9. Krstic S. Kvadratni kvazigrupni identiteti: PhD thesis / S. Krstic. – Belgrade: University of Belgrade, 1985. – 105 p.
10. Duplak J. Identities and deleting maps on quasigroups / J. Duplak // Math. Institute of the Czechoslovak Academy of Scien. 1988. – Vol. 38(113), – N.1. –P. 1-7.
11. Krapež A. Simic S.K., Tosic D.V., Parastrophically uncancellable quasigroup equations / A. Krapež, S.K. Simic, D.V. Tosic // Aequat. Mathem. 79, – 2010. – P. 261-280.
12. Сохацький Ф.М. Про класифікацію функційних рівнянь на квазігрупах / Ф.М. Сохацький // Український математичний журнал. – 2004.– Т. 56, № 9. – С. 1259-1266.
13. Белоусов В.Д. Системы квазигрупп с обобщёнными тождествами / В.Д. Белоусов // УМН. XX, I. – 1965. – Т. 75-146 с.
14. Чебан А.М. Системы квазигрупп с обобщённым тождеством Бола / А.М. Чебан // Вопросы теории квазигрупп и луп – Кишинев. – 1971. – С. 165-175.
15. Сохацький Ф.М. Асоціати та розклади багатомісних операцій: дисертація на здобуття наук. ступ. доктора фіз.-мат. наук: 01.01.06 / Сохацьий Федір Михайлович. – Київ, 2006. – 334 с.
16. Коваль Р. Класифікація функційних рівнянь малої довжини на квазігрупових операціях: дисертація на здобуття наук. ступ. кандидата фіз.-мат. наук 01.01.06 / Коваль Р. – Вінницький держ. педагогічний ун-т ім. М. Коцюбинського. – Вінниця, 2005. – 133 с.
17. Krapež A. Strictly quadratic functional equations on quasigroups / A. Krapež // Publ.Inst.Math. – 1981 – №29(43). – P.125-138.
18. Krainichuk H.V. Classification and solution of functional equations of the type *(4;2)* on quasigroups / H.V. Krainichuk // Communications of the 20th Conference on applied and industrial mathematics dedicated to academician Mitrofan M.Ciobanu, August 22−25, 2012. − Chisinau, 2012. − P.138−139.
19. Krainichuk Halyna On classification of identities of the type (4;2) on quasigroups /H. Krainichuk // Abstracts of Reports of International conference dedicated to the 120-th anniversary of Stefan Banach, September 17-21, 2012: –

Lviv. – 2012. – P.256.
20. Sokhatsky Fedir. A note on loops / Fedir Sokhatsky // Book of Extended Abstracts. − Mathematics & IT: research and education MITRE-2015: international conference: Jule 2-5, 2015. − Chisinau, 2015. − P. 35-36.
21. Крайнічук Г.В. Деякі розв'язки функційних рівнянь типу *(4;2)* на квазігрупах / Г.В. Крайнічук // Сучасні проблеми математики та її застосування у природничих науках та інформаційних технологіях: міжн. наук. конф. для молодих вчених, 25-26 квітня 2014 р. – Харків: ХНУ імені В.Н. Каразіна, 2014. – с. 9-10.
22. Krainichuk H.V. On a solution of a functional equation of type *(4;2)* on quasigroup / H.V. Krainichuk // XI Белорусская математическая конференція: международная научная конференція: тезисы докладов. Часть 5. Алгебра и теория чисел. – Минск: Белорусский государственный университет, 2012. – С.61-62.
23. Белоусов В.Д. Парастрофно-ортогональные квазигруппы / В.Д. Белоусов // Кишинев: Штиинца. − 1983. – 52 с.
24. Belousov V.D. Parastrophic-orthogonal quasigroups / V.D. Belousov // Quasigrops and related systems. – 2005. – V. 13, № 1, − P. 25-72.
25. McKay B. D. On the number of Latin Squares / B.D. McKay, I.M. Wanless // Ann. Combin. − 2005. − № 9. − P. 335-344.

КЛАССИФИКАЦИЯ И РЕШЕНИЕ КВАЗИГРУППОВЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА *(4; 2)*

Г.В. Крайничук

РЕЗЮМЕ

Тождества, определяющие оборотную функцию (квазигруппу) называются первичными. Преобразования функциональных уравнений с помощью этих тождеств также называются первичными. Два функциональных уравнения называются первично (парастрофно) эквивалентными, если от одного уравнения к другому можна перейти с помощью конечного количества применений первичных преобразований.

В этой статье систематизировано результаты классификации и решения общих квазигрупповых функциональных уравнений типа *(2;2)* и *(3;2)*. Классифицированы общие квазигрупповые функциональные уравнения типа *(4;2)*, в результате получено 6 классов, на множестве двухместных оборотных функций найдены решения шести уравнений, которые являются представителями этих классов.

Ключевые слова: квазигруппа, парастроф, оборотная функция, функциональное уравнение.

CLASSIFICATION AND SOLUTION OF QUASIGROUP FUNCTIONAL EQUATIONS OF THE TYPE *(4;2)*

H.V. Krainichuk

SUMMARY

Identities that define the inverse function (quasigroup) are called primary. Conversions of functional equations using these identities are also called primary. Two functional equations are called primarily (parastrophically) equivalent, if you can go from one equation to another with the help of the finite number of applications of the primary transformations.

In this article, the results of classification and solution of general quasigroup functional equations of the type *(2,2)* and *(3,2)* are systematized. General quasigroup functional equations of the type *(4,2)* are classified, as a result, 6 classes are obtained, six equations, which are the representatives of these classes are solved on the set of inverse binary functions.

Key words: quasigroup, parastrophe, inverse function, functional equation.