УДК 510.22

Н.И. Лавренко

АБСТРАКЦИИ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ И АКТУАЛЬНОЙ БЕСКОНЕЧНОСТЕЙ И НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЕ ПОСТРОЕНИЯ

Абстракции потенциальной и актуальной бесконечностей проанализированы и сопоставлены на примере натурального ряда чисел. Приведены доводы, ставящие под сомнение непротиворечивость второй из этих абстракций. Опираясь на эти абстракции бесконечности, установлена недостаточная строгость применения абстракции актуальной бесконечности в некоторых теоретико-множественных построениях, в частности, в доказательстве теоремы о том, что всякое бесконечное множество имеет счетно-бесконечное подмножество.

Ключевые слова: бесконечность, бесконечное множество, теоретико-множественные построения

Введение. Настоящая работа представляет собой краткую предварительную публикацию, которая содержит два основных результата, оригинально полученных и не опирающихся на какие-либо предшествующие исследования. Первым результатом является сопоставление посредством натурального ряда чисел математических абстракций потенциальной и актуальной бесконечностей, которое ставит под сомнение непротиворечивость второй из этих абстракций. Для получения этого результата, кроме этих абстракций, потребовалось лишь индуктивное определение натуральных чисел из [1]. В качестве иллюстрации к этому результату приведен парадокс Галилея из [1]. Вторым основным результатом является установление посредством этих же двух абстракций бесконечности недостаточной строгости применения абстракции актуальной бесконечности в некоторых теоретико-множественных построениях, в частности, в доказательстве важной теоремы о том, что всякое бесконечное множество имеет счетно-бесконечное подмножество. Для получения этого результата, кроме этих доказательства и теоремы, почерпнутых из [1], потребовались три аксиомы теории множеств из [2]. Более общему и систематическому исследованию теоретико-множественных построений и концепций посвящаются последующие работы.

Абстракции потенциальной и актуальной бесконечностей. О бесконечности судят по ее проявлениям в конечном – другого просто не дано. В сущности, всякая абстракция бесконечности обусловлена этими проявлениями и представляет собой то или иное отрицание конечного, и следовательно, отрицание ограниченности. Придерживаясь этих соображений, попытаемся проанализировать и сопоставить математические абстракции потенциальной и актуальной бесконечностей (см., например, [1]).

Под *потенциальной бесконечностью* будем понимать неограниченное построение, или порождение. При этом, во-первых, имеется в виду принципиальная неограниченность абстрактного построения в рамках математики, где нет места реальным возможностям математиков выполнять какие-либо построения. Поэтому излишне говорить об отвлечении от ограниченности этих возможностей. Во-вторых, имеется в виду построение, которое осуществляется в конечном и неограниченность которого означает не отсутствие каких бы то ни было границ, а выход за те или иные специфические границы (конкретные конструкции, например, числа; конкретные этапы или акты, например, алгоритмические шаги; и т.п.), необходимо возникающие по ходу (в процессе) этого построения. Предполагается лишь принципиальное отсутствие таких ограничений, которые означают завершение этого построения, т.е. его окончание.

Примерами потенциальной бесконечности, т.е. принципиально неограниченного построения, являются бесконечно малые и бесконечно большие величины в математическом анализе и алгоритмическое извлечение корней, представляющих собой иррациональные числа. Примерами принципиально ограниченного построения служат деление натуральных чисел (или многочленов) с остатком и нахождение наибольшего общего делителя двух натуральных чисел (или двух многочленов) по алгоритму Евклида.

Под *актуальной бесконечностью* в теории множеств понимают бесконечность (невыразимость натуральным числом) количества элементов множества, которые существуют в готовом виде и не являются результатом завершения какого-либо построения, или порождения, (см., например, [1]).

Примерами актуальной бесконечности, согласно теоретико-множественной концепции, являются бесконечность множества точек n-мерного (n=1,2, …) евклидова пространства, а также бесконечность множества точек отрезка прямой.

В связи с абстракциями потенциальной и актуальной бесконечностей обратимся к натуральному ряду чисел – важнейшему из первоисточников математики. Натуральные числа и их натуральный ряд индуктивно определяются следующим образом [1]:

(1) 0 – *натуральное число.*

(2) Если n – *натуральное число,* то и n+1 есть *натуральное число* (в [1] унарная операция +1 обозначена штрихом $^{/}$).

(3) *Натуральные числа* получаются только согласно пунктам (1) и (2).

Это определение является предписанием, или алгоритмом, по которому строятся натуральные числа, а также их натуральный ряд.

Согласно индуктивному определению натуральных чисел их натуральный ряд представляет собой последовательность

$$0,\ 1,\ \dots,\ n,\ \dots, \tag{1}$$

которая состоит из 0 и первых n порожденных (или построенных) натуральных чисел и которая неограниченно возрастает вследствие порождения каждым последним ее числом n и операцией +1 следующего числа n+1. Тем самым строящийся по индуктивному определению натуральный ряд чисел *потенциально бесконечный.*

В сущности, потенциально бесконечный натуральный ряд чисел – это непременно конечная и вместе с тем неограниченно возрастающая совместно с последним своим переменным числом n последовательность (1), содержащая, по предположению, сколь угодно большие натуральные числа, необходимые для математических построений.

От такого генетически обоснованного и логичного понимания натурального ряда чисел многие математики перешли к рассмотрению этого ряда в готовом виде, в котором все натуральные числа существуют независимо от какого-либо их порождения, или построения. В этом рассмотрении натуральный ряд чисел *актуально бесконечный*.

Разумеется, последнего (и значит, наибольшего) натурального числа не имеет ни потенциально бесконечный натуральный ряд чисел ни актуально бесконечный натуральный ряд чисел. Точнее, в потенциально бесконечном натуральном ряду чисел последнее число непременно существует, однако оно не постоянное, а переменное и неограниченно возрастающее. Тогда как в актуально бесконечном натуральном ряду чисел не существует ни постоянного последнего числа ни переменного.

В связи с указанной дифференциацией бесконечности натурального ряда чисел всякая бесконечная последовательность (как определенная на нем функция) рассматривается либо как потенциально бесконечная, либо как актуально бесконечная в соответствии с тем, какая из этих бесконечностей присваивается натуральному ряду чисел.

Далее, согласно индуктивному определению натуральных чисел в потенциально бесконечном натуральном ряду чисел строится каждое натуральное число, и следовательно, строится каждое число актуально бесконечного натурального ряда чисел, и тем самым строится этот ряд в целом. Вследствие этого актуально бесконечный натуральный ряд чисел необходимо является результатом завершения потенциально бесконечного натурального ряда чисел. Что невозможно, так как это противоречит как абстракции потенциальной бесконечности, так и абстракции актуальной бесконечности.

Единственной возможностью избежать этого противоречия представляется допущение, что актуально бесконечный натуральный ряд чисел является своеобразным пределом потенциально бесконечного натурального ряда чисел. Причем стремление потенциально бесконечного натурального ряда чисел как переменной n к пределу $+\infty$ в математическом анализе означает стремление этого ряда как переменной последовательности (1) к пределу в виде актуально бесконечного натурального ряда чисел. При стремлении к последнему ряду потенциально бесконечный натуральный ряд чисел следует рассматривать в виде такой последовательности его отрезков:

$$0;\ 0,1;\ 0,1,2;\ \dots;\ 0,1,2,\dots,n;\ \dots .$$

В этом случае гипотетический переход от потенциально бесконечного натурального ряда чисел к актуально бесконечному натуральному ряду чисел аналогичен предельному переходу, т.е. переходу от сходящейся последовательности к ее пределу.

Однако и при такой точке зрения на актуально бесконечный натуральный ряд чисел его абстракция противоречива. Попытаемся доказать это. Пусть согласно индуктивному определению натуральных чисел параллельно и в противоположных направлениях строятся два натуральных ряда чисел так, что для каждого натурального числа n каждому числу k ($0 \le k \le n$) одного из этих рядов взаимно однозначно соответствует число n-k другого ряда:

$$0,\quad 1,\quad \ldots,\quad n\text{-}1,\quad n,\quad \ldots \tag{2}$$

$$\ldots,\quad n,\quad n\text{-}1,\quad \ldots,\quad 1,\quad 0\quad . \tag{3}$$

В этом взаимно однозначном соответствии началу 0 и концу n одного из рядов (2) и (3) соответствуют (в том же порядке) конец n и начало 0 другого из этих рядов. При каждом значении n один из рядов (2) и (3) получается из другого ряда посредством такого преобразования: *крайние числа, а также равноотстоящие от них числа ряда меняются своими местами*. Это преобразование обратно самому себе и поэтому порождает группу второго порядка G. Пара рядов (2) и (3) инвариантна (симметрична) относительно преобразований из группы G. Это означает то, что не существует принципиальных оснований отдавать предпочтение какому-либо из этих рядов. В этом смысле ряды (2) и (3) равноправны.

Переход от одного из рядов (2) и (3) к другому имеет место при изменении порядка счета некоторых предметов на обратный порядок счета этих же предметов. Пусть K – гипотетический кортеж, ряд, некоторых однородных элементов (например, точек евклидовой прямой), счет которых в одном порядке представлен рядом (2), а в обратном порядке – рядом (3). Тогда начало 0 каждого из рядов (2) и (3) и конец n другого из этих рядов обозначают один тот же крайний элемент кортежа K и через этот элемент обозначают друг друга. Тем самым существование одного из них равносильно существованию другого.

При неограниченном возрастании числа n (и значит, числа элементов кортежа K) натуральный ряд чисел в записи (2) неограниченно возрастает, т.е. потенциально бесконечный, в направлении слева направо, а натуральный ряд тех же чисел в записи (3) – в направлении справа налево. При этом существуют и начала и концы рядов (2) и (3), причем концы представлены неограниченно возрастающей переменной n. В этом случае никакие противоречия не возникают. Имеет место лишь относительность направления количественного возрастания кортежа K, т.е. зависимость этого направления от того, с какого конца кортежа K начинается счет его элементов.

Иначе дело обстоит при гипотетическом переходе от потенциально бесконечных натуральных рядов чисел (2) и (3) к актуально бесконечным натуральным рядам чисел $\overline{(2)}$ и $\overline{(3)}$ соответственно. При этом переходе концы (в виде переменной n) рядов (2) и (3) исчезают, т.е.не существуют в рядах $\overline{(2)}$ и $\overline{(3)}$. Что же касается начал (в виде нуля) рядов (2) и (3), то при указанном гипотетическом переходе возможны два случая: (a) эти начала переходят в такие же начала рядов $\overline{(2)}$ и $\overline{(3)}$; (b) эти начала исчезают вместе с переменными концами рядов (2) и (3). В случае (a) существующее начало и несуществующий конец каждого из актуально бесконечных натуральных рядов чисел $\overline{(2)}$ и $\overline{(3)}$ по построению означают соответственно существование несуществующего конца и отсутствие существующего начала другого из этих двух рядов. Тем самым как начало, так и конец каждого из актуально бесконечных натуральных рядов чисел $\overline{(2)}$ и $\overline{(3)}$ (и значит, каждый крайний элемент актуально бесконечного кортежа K) и существует и вместе с тем не существует, т.е. имеет место противоречие. В случае (b) из отсутствия начал актуально бесконечных натуральных рядов чисел $\overline{(2)}$ и $\overline{(3)}$ по индуктивному определению натуральных чисел и по принципу математической индукции следует, что эти ряды не имеют (не содержат) ни одного натурального числа, т.е. не существуют (и значит, не существует актуально бесконечный кортеж K). Таким образом, и в первом и во втором случае абстракция актуально бесконечного натурального ряда чисел противоречива, и следовательно, противоречива абстракция актуальной бесконечности вообще.

Некоторые теоретико-множественные построения. В связи с установленной в предыдущем разделе противоречивостью абстракции актуальной бесконечности обратимся к парадоксу Галилея [1], суть которого сводится к следующему взаимно однозначному соответствию между целыми положительными числами и их квадратами:

$$\left.\begin{matrix} 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots \\ 1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots \end{matrix}\right\} \tag{4}$$

В теории множеств это соответствие истолковывается как равенство в количественном отношении актуально бесконечного множества всех целых положительных чисел и его подмножества всех квадратов этих чисел. Причем имеющее место при этом равенстве нарушение древней аксиомы: *целое больше своей части*, преподносится как особенность актуальной бесконечности этих множеств, а не как проявление противоречивости этой бесконечности. Между тем такая трактовка парадокса Галилея опровергается следующим рассуждением. Для каждого целого положительного числа n ряд целых положительных чисел имеет следующую пару отрезков: $1, 2, \ldots, n$ и $1, 2, \ldots, n^2$. Для этих двух отрезков соответствие (4) схематически выглядит так:

$$\begin{array}{l} 1,2,3,\ldots,n,\ldots \\ 1,2,3,4,5,6,7,8,9,\ldots,n^2,\ldots \end{array} \Bigg\} \qquad (5)$$

В этом соответствии целое, т.е. отрезок $1,2,\ldots,n$, количественно равно части, образованной квадратами $1,4,9,\ldots n^2$ / не этого же целого, а другого целого в виде отрезка $1,2,\ldots,n^2$, в n раз большего чем первое целое; и аксиома: *целое больше своей части*, не нарушается. В случае потенциальной бесконечности ряда целых положительных чисел соответствие (4) в виде соответствия (5) также потенциально бесконечно (т.е. неограниченно продолжается в соответствии с неограниченным возрастанием числа n и отрезков $1,2,\ldots,n$ и $1,2,\ldots,n^2$), и указанная аксиома не нарушается. Таким образом, нарушение в соответствии (4) аксиомы*: целое больше своей части*, может означать и означает лишь противоречивость актуальной бесконечности ряда целых положительных чисел.

Аналогичным образом объясняются и многие другие взаимно однозначные соответствия между натуральным рядом чисел и его подмножествами, в частности, подмножеством натуральных чисел, кратных некоторому фиксированному целому положительному числу.

И вообще всякое взаимно однозначное соответствие между каким-либо бесконечным множеством и некоторым его подмножеством обусловлено потенциальной бесконечностью этих множеств и не нарушает аксиомы*: целое больше своей части*. Причем в теории множеств потенциальная бесконечность участвующих в этом соответствии множеств по недоразумению принимается за актуальную бесконечность, и как следствие имеет место мнимое нарушение этой аксиомы, выдаваемое за характеристическое свойство актуальной бесконечности.

Далее, обратимся к теоретико-множественному доказательству следующей принципиально важной теоремы [1]: *Всякое бесконечное множество M имеет счетно-бесконечное подмножество* (здесь имеется в виду актуальная бесконечность). В начале этого доказательства строится подмножество $\{a_0, a_1, a_2, a_3,\ldots\}$ множества M посредством многократного неявного применения аксиом выбора, пары и объединения [2], а также операции вычитания по следующей схеме:

$$M \xrightarrow{\text{а.в.}} \{a_0\} \xrightarrow{\text{о.в.}} M - \{a_0\} \xrightarrow{\text{а.в.}} \{a_1\} \xrightarrow{\text{а.п.}} \{\{a_0\}, \{a_1\}\} \xrightarrow{\text{а.о.}} \{a_0, a_1\} \xrightarrow{\text{о.в.}} M - \{a_0, a_1\} \xrightarrow{\text{а.в.}} \{a_2\} \xrightarrow{\text{а.п.}}$$
$$\xrightarrow{\text{а.п.}} \{\{a_0, a_1\}, \{a_2\}\} \xrightarrow{\text{а.о.}} \{a_0, a_1, a_2\} \xrightarrow{\text{о.в.}} M - \{a_0, a_1, a_2\} \xrightarrow{\text{а.в.}} \{a_3\} \xrightarrow{\text{а.п.}} \{\{a_0, a_1, a_2\}, \{a_3\}\} \xrightarrow{\text{а.о.}}$$
$$\xrightarrow{\text{а.о.}} \{a_0, a_1, a_2, a_3\} \xrightarrow{\text{о.в.}} \ldots,$$

где а.в., а.п., а.о., о.в., - сокращения выражений "аксиоме выбора", "аксиоме пары", "аксиоме объединения", "операции вычитания"; стрелка $\longrightarrow$ заменяет выражение "отсюда по X получаем", где X - выражение, сокращение которого стоит под стрелкой; $a_i \in M$, i=0,1,2,3,…

Это логическое построение неограниченное (ввиду бесконечности множества M). Поэтому строящееся в нем подмножество множества M потенциально бесконечное. Построение этого подмножества уточняется следующим утверждением [1]: " Продолжая таким образом, мы выберем различные элементы a_0, a_1, a_2, a_3, ... , соответствующие натуральным числам 0, 1, 2, 3, ... , что доказывает теорему." По очевидному замыслу приведенного доказательства отмеченное в нем соответствие распространяет предполагаемую актуальную бесконечность натурального ряда чисел на введенное по построению подмножество множества M и тем самым преобразует это потенциально бесконечное подмножество в актуально бесконечное. Что невозможно. Действительно, это соответствие выстраивается по ходу неограниченного построения подмножества $\{a_0, a_1, a_2, a_3,\ldots\}$ множества M. Поэтому оно потенциально бесконечно, а вместе с ним потенциально бесконечен и ряд участвующих в нем натуральных чисел. Следовательно, в построении приведенного доказательства, за исключением заявленной актуальной бесконечности множества M, имеет место только потенциальная бесконечность и доказывается существование только потенциально бесконечного подмножества $\{a_0, a_1, a_2, a_3,\ldots\}$ множества M. Если же, как это имеет место в теории множеств, считать, что в нем доказывается существование актуально счетно-бесконечного подмножества множества M, то это подмножество необходимо должно быть результатом завершения неограниченного построения подмножества $\{a_0, a_1, a_2, a_3,\ldots\}$ множества M. Что противоречит как абстракции потенциальной бесконечности, так и абстракции актуальной бесконечности.

Таким образом, важнейшая теорема теории множеств, доказательство которой проанализировано, не является строго доказанной. А вместе с этой теоремой нестрогими являются и все ее следствия, в частности, следствие [1]: *Бесконечное множество M эквивалентно некоторому своему истинному подмножеству*.

Итак, теоретико-множественная догма о том, что аксиома: *целое больше своей части*, теряет силу для актуально бесконечных множеств, не является строго обоснованной.

В заключение отметим, что подобно проанализированному доказательству во многих теоретико-множественных рассуждениях (см., например, [1]) вводятся явно неограниченные построения (т.е. вводится потенциальная бесконечность), а затем следует или подразумевается заключение: таким образом, получили нечто актуально бесконечное. Тем самым в этих рассуждениях дело обстоит так, как если бы потенциальная бесконечность необходимо завершалась актуальной бесконечностью или даже означала актуальную бесконечность. Что, разумеется, не выдерживает никакой критики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клини С.К. Введение в метаматематику / С.К. Клини. – М.: И.Л, 1957. – 526 с.
2. Мендельсон Э. Введение в математическую логику / Э. Мендельсон – М.: Наука, 1976. – 320 с.

АБСТРАКЦІЇ ПОТЕНЦІЙНОЇ ТА АКТУАЛЬНОЇ НЕСКІНЧЕННОСТЕЙ І ДЕЯКІ ТЕОРЕТИКО-МНОЖИННІ ПОБУДОВИ

М.І. Лавренко

РЕЗЮМЕ

Абстракції потенційної та актуальної нескінченностей проаналізовані та зіставлені на прикладі натурального ряду чисел. Наведені доводи, які ставлять під сумнів несуперечність другої з цих абстракцій. За допомогою цих абстракцій нескінченности установлена недостатня строгість застосування абстракції актуальної нескінченности в деяких теоретико-множинних побудовах, зокрема в доведенні теореми про те, що кожна нескінченна множина має зліченну підмножину.

Ключові слова: нескінченність, нескінченна множина, теоретико-множинні побудови

THE ABSTRACTION OF POTENTIAL AND ACTUAL INFINITIES AND SOME OF THE SET-THEORETIC CONSTRUCTIONS

N.I. Lavrenko

SUMMARY

An example of the natural numbers are analyzed and compared by the abstraction of potential and actual infinity. Present arguments calling into the question the consistency of the second of these abstractions. By means of these infinity abstractions, incorrectness of the set-theoretic prove of the theorem which states that any infinite set has denumerable subset has been proved.

Keywords: infinity, infinite set, set-theoretic prove