УДК 512.552.13

Н.Р. Ронська
Львівський національний університет ім. Івана Франка, Львів, Україна

ДЕЯКІ УЗАГАЛЬНЕННЯ АДЕКВАТНИХ ДУО-КІЛЕЦЬ

Доведено, що адекватна дуо-область Безу є роздільною областю. Роздільна дуо-область Безу є кільцем елементарних дільників.
Ключові слова: кільце Безу, адекватне кільце, кільце елементарних дільників, роздільне кільце.

Першим адекватні області розглядав Хелмер з метою отримання абстрактної характеризації кільця цілих функцій [7]. Адекватні кільця з дільниками нуля в радикалі Джекобсона вивчались Капланським [9]. Гілман і Хенріксен показали, що регулярне в сенсі фон Неймана кільце є адекватним [6]. Перший приклад неадекватної області Безу, яка є областю елементарних дільників побудував Хенріксен [8].

Забавський [2] ввів новий клас кілець елементарних дільників, який узагальнює адекватні кільця. Новий клас кілець містить адекватні кільця і кільця, побудовані Хенріксеном. Ці кільця об’єднані в клас, який отримав назву узагальнено-адекватних кілець. Забавський і Кузніцька ввели до розгляду новий клас так званих роздільних кілець, що містить адекватні кільця [3].

В даний час інформації про будову некомутативних кілець елементарних дільників є небагато. Один з відомих результатів: кільця елементарних дільників, в яких довільний максимальний однобічний ідеал є двобічним. Як показали Забавський, Комарницький [4] і Туганбаєв [5] такі кільця є дуо-кільцями. Гаталевич [1] був першим, хто вивчав некомутативні адекватні кільця та їхні узагальнення. Він довів, що узагальнено-адекватна справа дуо-область Безу є областю елементарних дільників. Також було доведено, що адекватна справа дуо-область Безу є областю елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли вона є лівою дуо-областю.

Клас кілець, розглянутий в даній статті є узагальненням адекватних кілець. Цей клас отримав назву роздільних дуо-кілець. Адекватне кільце є роздільним, навпаки неправильно. Всі кільця є асоціативними кільцями з 1, причому $1 \neq 0$.

Означення 1. Кільце R називається правим (лівим) кільцем Безу, якщо кожен скінченнопороджений правий(лівий) ідеал в R є головним.

Праве і ліве кільце Безу називають кільцем.

Означення 2. Елемент $a \neq 0$ області Безу R називається адекватним справа, якщо для будь-якого елемента $b \in R$ знайдуться такі елементи $r, s \in R$, що

(1) $a = rs;$

(2) $bR + rR = R;$

(3) $\forall s' \in R, sR \subset s'R \neq R \Rightarrow bR + s'R \neq R.$

Означення 3. Кільце, в якому кожен ненульовий елемент є адекватним справа, називається адекватним справа.

Прикладом адекватного справа кільця є абельово регулярне кільце.

Означення 4. Кільце R називають правим(лівим) дуо-кільцем, якщо виконуються наступні еквівалентні умови:

(1) Кожен правий (лівий) ідеал в R є ідеалом;

(2) Для кожного $x \in R, Rx \subset xR, (Rx \supset xR).$

Праве і ліве дуо-кільце називають дуо-кільцем.

Означення 5. Кільце R називається чистим, якщо кожен його елемент можна подати у вигляді суми ідемпотента та оборотного елемента.

Означення 6. Кільце R називається кільцем елементарних дільників, якщо довільна матриця A над R володіє діагональною редукцією, тобто, для A над R знайдуться оборотні матриці P і Q відповідного розміру, такі, що $PAQ = D$ - діагональна матриця, тобто $D = (d_{ii})$, причому $Rd_{ii}R \subset Rd_{i-1,i-1} \cap d_{i-1,i-1}R$.

Означення 7. Дуо-кільце R називається роздільним справа, якщо для деяких елементів $a, b, c \in R$, $c \neq 0$ таких, що $aR + bR + cR = R$ існують такі елементи $r, s \in R$, що $c = rs$; де $rR + aR = R$, $sR + bR = R$ і $rR + sR = R$.

Наступний приклад є прикладом дуо-кільця, яке не є адекватним справа. Це фактично узагальнення прикладу Хенріксена на дуо-випадок.

Приклад. Нехай $Z[i]$ – кільце цілих гаусових чисел, а $Q[i]$ - поле дробів кільця $Z[i]$. Введемо автоморфізм на кільці $Z[i]$ і його продовження на $Q[i]$ наступним чином:

$$\delta(a+bi)=a-bi \text{, де } a,b\in \mathrm{Z}.$$

Розглянемо кільце R формальних степеневих рядів зі змінною x такого виду:

$$R=\{z_0+q_1x+q_2x+\ldots \mid z_0\in \mathrm{Z}, q_i\in Q\}.$$

І визначимо $xa=\delta(a)x$.

Кільце R є областю Безу. Покажемо, що R є дуо-кільцем. Без обмеження загальності можна вважати, що всі ліві ідеали області R мають вигляд

$$I=\{(q_i+q_{i+1}x+\ldots)x^i \mid q_k\in Q\}.$$

Тоді одержуємо

$$(q_i+q_{i+1}x+\ldots)x^i(z_0+b_1x+\ldots)x^i=$$

$$=\begin{cases}(q_i+q_{i+1}x+\ldots)(z_0+b_1x+\ldots)x^i, \textit{ якщо } i \textit{ парне}\\ (q_i+q_{i+1}x+\ldots)(\bar{z}_0+\bar{b}_1x+\ldots)x^i, \textit{ якщо } i \textit{ непарне}\end{cases}$$

Це показує, що лівий ідеал I є двобічним. Двобічність довільного правого ідеалу доводиться аналогічно.

Даний приклад можна узагальнити, не обмежуючи себе кільцем цілих гаусових чисел.

Нехай K – комутативна область головних ідеалів, а σ – довільний автоморфізм, визначений на K. Позначимо через Q – поле дробів K, а через $\bar{\sigma}$ – продовження автоморфізму σ на поле Q, тобто

$$\bar{\sigma}\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{\sigma(a)}{\sigma(b)} \text{, де } a,b\in K.$$

Розглянемо кільце

$$R=\{k_0+q_1x+q_2x+\ldots \mid k_0\in K, q_i\in Q\}, \text{ де } xa=\sigma(a)x.$$

Аналогічно можна показати, що кільце R є дуо-областю Безу. Можемо обмежитись розглядом підкільця многочленів кільця R.

Прикладом дуо-кільця Безу з дільниками нуля з відповідною їх структурою можуть послуговувати певні фактор-кільця даного кільця.

Теорема 1. *Дуо-область Безу є роздільним кільцем тоді і тільки тоді, коли для кожного* $c\in R\setminus\{0\}$ *фактор-кільце* R/cR *є чистим кільцем.*

Доведення. Оскільки згідно з [12] у випадку квазідуо, а отже і дуо-кілець класи чистих кілець і кілець з властивістю заміни співпадають, то використаємо характеризацію кілець з властивістю заміни. Нехай $\bar{R}=R/cR$ і $\bar{a}=a+cR$, $\bar{b}=b+cR$. R є чистим кільцем, тоді існує такий ідемпотент $\bar{e}\in\bar{R}$, що $\bar{e}\in\bar{a}\bar{R}$ і $\bar{1}-\bar{e}\in\bar{b}\bar{R}$.[10] Маємо $e+ap=cs$ для деяких елементів $p,s\in R$. Подібно $1-e+b\alpha=c\beta$ для деяких елементів $\alpha,\beta\in R$. Замінюючи $e=cs-ap$ і $1-e+b\alpha=c\beta$, отримуємо $apR+bR+cR=R$. Оскільки $\bar{e}=\bar{e}^2$, тоді $e(1-e)=ct$ для деякого елемента $t\in R$. Нехай $eR+cR=dR$, отримуємо $e=de_0$, $c=ce_0$ де $e_0R+c_0R=R$ для деяких елементів $b_0,c_0\in R$. Тоді $e+c_0j=1$ для деякого елемента $j\in R$. Візьмемо $r=c_0$, $s=d$, отримаємо $c=rs$, де $rR+cR=R$ і $cR\subset sR$. Так як $e=ap+cs$, тоді маємо $rR+apR=R$, $sR\subset apR$. Очевидно $sR+bR=R$, $rR+sR=R$ і $rR+aR=R$.

Нехай $aR+bR+cR=R$, $c\neq 0$ і $c=rs$, де $rR+sR=R$, $rR+aR=R$ і $sR+bR=R$. Нехай $\bar{r}=r+cR$, $\bar{s}=s+cR$. Так як $rR+sR=R$, тоді $ru+sv=1$. Тоді $r^2u+rsv=r$, $\bar{r}^2\bar{u}+\bar{c}\bar{v}=\bar{r}$, отже $\bar{r}^2\bar{u}=\bar{r}$. $rus+svs=s$, оскільки R є дуо-кільцем, то $\exists u',v'\in R$ і $rsu'+s^2v'=s$. Отже $\bar{s}\bar{v}\bar{s}=\bar{s}$. Нехай $\bar{s}\bar{v}=\bar{e}$, очевидно, $\bar{e}^2=\bar{e}$ і $\bar{1}-\bar{e}=\bar{r}\bar{u}$. $rR+aR=R$, тоді $\bar{a}\bar{\beta}\bar{e}=\bar{e}$ для деякого елемента $\bar{\beta}\in\bar{R}$. Подібно $\bar{b}\bar{x}(\bar{1}-\bar{e})=\bar{1}-\bar{e}$ для деякого елемента $\bar{x}\in\bar{R}$. Ми можемо довести, що $\bar{a}\bar{R}+\bar{b}\bar{R}=\bar{R}$. Тоді існує такий ідемпотент $\bar{e}\in\bar{R}$, що $\bar{e}\in\bar{a}\bar{R}$ і $\bar{1}-\bar{e}\in\bar{b}\bar{R}$. Згідно з [11] R є чистим кільцем. Теорему доведено.

Наступна теорема показує, що клас адекватних дуо-областей Безу міститься в класі роздільних дуо-областей.

Теорема 2. *Адекватна дуо-область Безу є роздільною дуо-областю.*

Доведення. Нехай $aR+bR+cR=R$ і $c\neq 0$. R є адекватною областю, тоді $c=rs$, де $rR+aR=R$ і $s'R+aR\neq R$ для деякого необоротного елемента $s'\in R$ такого, що $sR\subset s'R\neq R$. Отже, $rR+sR=R$. Нехай $sR+bR=dR\neq R$. d є лівим дільником елемента s, тоді $dR+aR=hR\neq R$. Оскільки $cR\subset dR\subset hR$

і $bR \subset dR \subset hR$, $aR \subset hR$, маємо $aR+bR+cR \subset hR \neq R$. Це неможливо в силу умови $aR+bR+cR=R$. Теорема доведена.

Теорема 3. *Роздільна дуо-область Безу є кільцем елементарних дільників.*

Доведення. Оскільки дуо-область Безу є кільцем Ерміта, то достатньо показати, що матриця $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, де $aR+bR+cR=R$, зводиться до діагонального вигляду. Оскільки $rR+aR=R$, $sR+bR=R$ і $rR+sR=R$, то $(sa+rb)R+rcR=R$ і $\exists u,v \in R$, що $(sa+rb)\cdot u+rcv=1$. Тоді існують оборотні матриці $P=\begin{pmatrix} s & r \\ * & * \end{pmatrix}$ і $Q=\begin{pmatrix} v & * \\ u & * \end{pmatrix}$, що $PAQ=\begin{pmatrix} 1 & * \\ * & * \end{pmatrix} \Rightarrow$ матриця A допускає діагональну редукцію.

Насамкінець відмітимо, що теорема 1 узагальнює на дуо-випадок результат роботи [6], а теореми 2, 3 узагальнюють результати, отримані для узагальнено-адекватних дуо-кілець Безу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Helmer O. The elementary divisor theorem for certain rings without chain conditions / O. Helmer // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – V. 49. – P. 225-236.
2. Kaplansky. I. Elementary divisor rings and modules / I. Kaplansky // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – V. 66. – P. 464-491.
3. Gillman L., Henriksen M. Rings of continuos functions in which every finitely generated ideal is principal / L. Gillman, M. Henriksen // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – V. 82. – P. 366-394.
4. Henriksen M. Some remarks about elementary divisor rings / M. Henriksen // Michigan Math. J. – 1955/56. – V. 3., № 2. – P. 159-163.
5. Забавський Б.В. Узагальнені адекватні кільця / Б.В. Забавський // Укр. мат. журн. – 1996. – Т. 48, № 4. – С. 554-557.
6. Кузніцька Б.М. Роздільні кільця / Б.М. Кузніцька, Б.В. Забавський // Мат. Студ. – 2015. – Т. 42, № 24. – С. 153-155.
7. Забавський Б.В. Дистрибутивные области с элементарными делителями / Б.В. Забавський, М.Я. Комарницький // Укр. мат. журн. – 1990. –Т. 42, № 7. – С. 1000-1004.
8. Туганбаев А.А. Кольца элементарных делителей и дистрибутивные кольца / А.А. Туганбаев // Успехи математических наук. – 1991. – Т. 46, № 6. – С. 219-220.
9. Гаталевич А.І. Про адекватні і узагальнено адекватні дуо-кільця і дуо-кільця елементарних дільників / А.І. Гаталевич // Математичні студії. – 1998. – Т. 9, № 2. – С. 115-119.
10. Yu Hua-Ping. Stable range one for exchange rings / Yu Hua-Ping // Journal of Pure ande Applied Algebra. – 1995. – V. 98, № 1, P. 105-109.
11. McGovern W. Neat rings / W. McGovern // J. Pure Appl. Algebra. – 2006, V. 205. – P. 243-265.
12. Nicholson W. K. Lifting idempotents and exchange rings / W. K. Nicholson // Trans. Amer. Math. Soc. – 1977. – V. 229. – P. 269-278.

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ АДЕКВАТНЫХ ДУО-КОЛЕЦ

Н.Р. Ронська

РЕЗЮМЕ

Доказано, что адекватная дуо-область Безу являеться раздельной областью. Раздельная дуо-область Безу есть кольцом элементарных делителей.

Ключевые слова: Кольцо Безу, адекватное кольцо, кольцо элементарных делителей, раздельное кольцо.

ON SOME GENERALIZATION OF ADEQUATE DUO-RING

N.R. Ronska

SUMMARY

It is proved that adequate Bezout duo-domain is avoidable domain. Avoidable Bezout duo-domain is an elementary divisor ring.

Key words: Bezout ring, adequate ring, elementary divisor ring, avoidable ring.