

УДК 533.6.013.42

Ю.Н. Кононов, А.А. Лимарь  
 Донецький національний університет, Вінниця, Україна

### КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ МЕМБРАНЫ, РАЗДЕЛЯЮЩЕЙ ИДЕАЛЬНЫЕ ЖИДКОСТИ РАЗНОЙ ПЛОТНОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ КАНАЛЕ С ЖЕСТКИМИ ОСНОВАНИЯМИ

В линейной постановке выведено частотное уравнение собственных колебаний мембраны, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с жесткими основаниями. Получена единая форма частотного уравнения как для симметричных, так и несимметричных совместных колебаний мембраны и жидкости. Выведены условия устойчивости плоской формы равновесия мембраны. Эти условия не зависят от глубин заполнения жидкостей и массы мембраны. Рассмотрены случаи отсутствия мембраны, верхней или нижней жидкостей, а также случаи отсутствия гравитации, т.е. случаи невесомости. Для широкого круга параметров рассматриваемой механической системы проведены и проанализированы численные исследования.

*Ключевые слова:* гидроупругость, прямоугольная мембрана, плоские колебания, идеальная жидкость.

**Введение.** На основании единого Лагранжевого подхода задача о колебании и устойчивости упругой прямоугольной пластины между идеальными жидкостями разной плотности в жестком прямоугольном канале, по видимому, впервые была рассмотрена в статье [1] и в монографии [2]. В работе [3] эта задача была рассмотрена на основании Эйлера подхода. Наиболее полное исследование свободных колебаний мембраны на свободной поверхности жидкости в прямоугольном канале было проведено в статье [4]. В работах [5,6] эта задача была обобщена на случай двухслойной жидкости с мембранами на свободной и внутренней поверхностях, а в статье [7] затем обобщена на случай упругого дна. Большое количество работ было посвящено рассмотрению совместных несимметричных колебаний круговой мембраны или пластинки на свободной поверхности жидкости в прямом круговом цилиндре. Так, например, в одной из первых статей [8] было исследовано влияние перегрузки на частоты собственных колебаний жидкости в жестком цилиндрическом баке с безынерционной мембраной на свободной поверхности. Наиболее общее исследование колебаний резервуара с жидкостью, на свободной поверхности которой расположена пластина или мембрана, было проведено в статье [9], а полное исследование этой задачи приведено в монографии [10]. Задача об устойчивости упругих пластинок, разделяющих  $m$ -слойную идеальную жидкость в жестком цилиндрическом резервуаре, произвольного поперечного сечения была рассмотрена в [11]. Из последних работ  $m$  следует отметить работы [12-15]. В статье [12] приведен наиболее общий подход к решению задачи о колебании упругой пластины, разделяющей жидкости разной плотности в произвольном двусвязном цилиндрическом сосуде с упругими основаниями. В работах [13-15] рассмотрена задача об осесимметричных колебаниях упругой мембраны, разделяющей двухплотностную жидкость в жестком круговом цилиндрическом резервуаре применительно к современным капиллярным системам отбора жидкости (КСОЖ).

В данной статье на основании общего подхода, предложенного в [12], продолжены исследования, начатые в работах [5-7], проведено их более полное рассмотрение и получен ряд новых результатов.

**Постановка задачи.** Рассмотрим плоские колебания упругой прямоугольной мембраны, разделяющей идеальные несжимаемые жидкости плотности  $\rho_i$  ( $i=1,2$ ) в жестком прямоугольном канале шириной  $b$ . Мембрана подвержена растягивающим усилиям интенсивности  $T$  в срединной поверхности. Контур мембраны зашпелен. Пусть верхняя и нижняя жидкость заполняет сосуд соответственно до глубин  $h_1$  и  $h_2$ . Систему координат  $Oxuz$  расположим так, чтобы плоскость  $Oxu$  находилась на невозмущенной срединной поверхности мембраны, ось  $Ox$  была направлена вдоль канала по его середине, а ось  $Oz$  – противоположно вектору ускорения силы тяжести  $\vec{g}$  (рис.1).

Колебания мембраны и жидкости будем рассматривать в линейной постановке, считая совместные колебания мембраны и жидкости безотрывными, а движения жидкостей потенциальными.

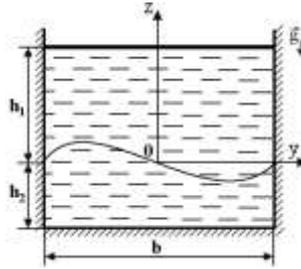


Рис. 1. Прямоугольная мембрана разделяет жидкости разной плотности в прямоугольном канале

Уравнения плоских колебаний упругой мембраны и жидкости имеют вид

$$k_{01} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = P_2 - P_1 \quad \text{при } z=0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z^2} = 0 \quad (i=1,2) \quad (2)$$

с граничными условиями:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \quad \text{при } z=0, \quad (3)$$

$$W \Big|_{y=\pm \frac{b}{2}} = 0, \quad (4)$$

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} W dy = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \Big|_{y=\pm \frac{b}{2}} = 0 \quad (i=1,2), \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z=h_1, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z=h_2. \quad (7)$$

Здесь  $k_{01} = \rho_0 \cdot \delta_0$ ;  $W(y,t)$ ,  $\rho_0$ ,  $\delta_0$  – соответственно нормальный прогиб, плотность и толщина мембраны;  $\Phi_i(y,z,t)$  – потенциал скорости  $i$ -ой жидкости ( $i=1,2$ );  $P_i(y,z,t)$  – гидродинамическое давление в  $i$ -ой жидкости.

Давление  $P_i(x,y,z,t)$  находится из интеграла Коши-Лагранжа  $\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + gz + \frac{P_i}{\rho_i} = Q_i$ , где  $Q_i$  – произвольная функция времени. Не ограничивая общности эту функцию можно положить равной нулю.

Уравнение (3) показывает непрерывность нормальной составляющей скорости при переходе от первой жидкости ко второй.

С учетом интеграла Коши-Лагранжа уравнение (1) можно записать следующим образом

$$k_{01} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + g \Delta \rho W = \rho_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \quad \text{при } z=0, \quad (8)$$

где  $\Delta \rho = \rho_2 - \rho_1$ .

**Метод решения.** Представим функции  $\Phi_i(y,z,t)$  в виде рядов Фурье по собственным функциям  $\psi_n(y)$

$$\Phi_i = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_{in}(t) e^{k_n z} + B_{in}(t) e^{-k_n z} \right] \psi_n(y) \quad (i=1,2), \quad (9)$$

$$\psi_n(y) = \cos k_n \left( y + \frac{b}{2} \right), \quad (10)$$

а соответствующие им собственные числа  $k_n = \frac{\pi n}{b}$ . Собственными функциям  $\psi_n(y)$  и собственные числа  $k_n$  описывают колебания идеальной жидкости в прямоугольном канале.

Представление функций  $\Phi_i(y, z, t)$  в виде (9) с учетом (10) позволяет удовлетворить уравнению (2) и граничным условиям (6).

Подставив ряды (9) в (3) и (7) и, воспользовавшись ортогональностью функций  $\psi_n$ , получаем линейную систему уравнений относительно неизвестных  $A_{1n}$ ,  $B_{1n}$  и  $\dot{W}_n$

$$\begin{cases} A_{1n} - B_{1n} = \frac{1}{k_n} \dot{W}_n, \\ A_{1n} - B_{1n} = A_{2n} - B_{2n}, \\ A_{1n} e^{\kappa_{1n}} - B_{1n} e^{-\kappa_{1n}} = 0, \\ A_{2n} e^{-\kappa_{2n}} - B_{2n} e^{\kappa_{2n}} = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Разрешим система (11) относительно  $A_{1n}$ ,  $B_{1n}$

$$A_{1n} = -\frac{\dot{W}_n e^{-\kappa_{1n}}}{2k_n \sinh \kappa_{1n}}, \quad B_{1n} = -\frac{\dot{W}_n e^{\kappa_{1n}}}{2k_n \sinh \kappa_{1n}}, \quad (12)$$

$$A_{2n} = \frac{\dot{W}_n e^{\kappa_{2n}}}{2k_n \sinh \kappa_{2n}}, \quad B_{2n} = \frac{\dot{W}_n e^{-\kappa_{2n}}}{2k_n \sinh \kappa_{2n}}.$$

Здесь

$$W_n = \frac{1}{N_n^2} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} W \psi_n dy, \quad N_n^2 = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \psi_n^2 dy = \frac{b}{2}, \quad \kappa_{in} = h_i k_n. \quad (13)$$

С учетом соотношений (9), (12) и (13) уравнение (8) примет вид

$$k_{01} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + g \Delta \rho W = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \ddot{W}_n}{k_n} \psi_n, \quad (14)$$

где  $a_n = \rho_1 \coth \kappa_{1n} + \rho_2 \coth \kappa_{2n}$ .

Таким образом, совместные колебания упругой мембраны и жидкости находятся из системы интегро-дифференциальных уравнений (14) и (13), граничных условий (4), условий несжимаемости жидкости (5) и заданных начальных условий.

**Собственные совместные колебания упругой мембраны и жидкости.** Для нахождения собственных частот совместных колебаний упругой мембраны и жидкости положим

$$W(y, t) = w(y) e^{i\omega t} \quad (17)$$

Подставив (17) в (14) и (13) и в граничные условия (4), получим следующую краевую задачу для формы прогиба мембраны

$$\frac{d^2 w}{dy^2} + q w = - \frac{\omega^2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n w_n}{k_n} \psi_n, \quad (18)$$

$$w_n = \frac{1}{N_n^2} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} w \psi_n dy, \quad (19)$$

$$w|_{y=\pm\frac{b}{2}} = 0. \quad (20)$$

Здесь  $q = \frac{k_{01}\omega^2 - g\Delta\rho}{T}$ .

Общее решение уравнения (18) будем искать в виде линейной комбинации двух решений  $w_k^0$  ( $k = \overline{1, 2}$ ) соответствующего однородного уравнения

$$\frac{d^2 w_k^0}{dy^2} + q w_k^0 = 0 \quad (21)$$

и частного решения неоднородного уравнения в виде ряда по собственным формам колебаний идеальной жидкости  $\psi_n$

$$w = \sum_{k=1}^2 A_k^0 w_k^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{C}_n \psi_n. \quad (22)$$

Здесь  $A_k^0$  и  $\tilde{C}_n$  неизвестные константы.

Решения уравнения (21) зависят от знака выражения  $k_{01}\omega^2 - g\Delta\rho$  и имеют вид

$$w_k^0 = \begin{cases} \sin py, \cos py & \text{при } k_{01}\omega^2 - g\Delta\rho > 0, \\ e^{\tilde{p}y}, e^{-\tilde{p}y} & \text{при } k_{01}\omega^2 - g\Delta\rho < 0, \end{cases}$$

где  $p^2 = \frac{k_{01}\omega^2 - g\Delta\rho}{T}$ ,  $\tilde{p}^2 = -p^2$ .

Подставив (22) в уравнение (18), и воспользовавшись равенством  $\frac{d^2 \psi_n}{dy^2} = -k_n^2 \psi_n$ , найдем  $\tilde{C}_n$

$$\tilde{C}_n = \frac{\omega^2 a_n w_n}{k_n d_n}, \quad (23)$$

где  $d_n = T k_n^2 + g\Delta\rho - k_{01}\omega^2$ .

Подставив (23) в (22), а затем (22) в (19), получим выражение для  $w_n$

$$w_n = \frac{k_n d_n}{k_n d_n - \omega^2 a_n} \sum_{k=1}^2 A_k^0 E_{kn}^0. \quad (24)$$

Здесь

$$E_{kn}^0 = \frac{1}{N_n^2} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} w_k^0 \psi_n dy =$$

$$= \frac{2T}{bd_n} \begin{cases} \left[ \begin{matrix} (-1)^n - 1 \\ (-1)^n e^{\frac{\tilde{p}b}{2}} - e^{-\frac{\tilde{p}b}{2}} \end{matrix} \right] p \cos \frac{pb}{2}, \left[ \begin{matrix} (-1)^n + 1 \\ e^{\frac{\tilde{p}b}{2}} - (-1)^n e^{-\frac{\tilde{p}b}{2}} \end{matrix} \right] p \sin \frac{pb}{2} & \text{при } k_{01}\omega^2 - g\Delta\rho > 0, \\ \tilde{p}, \left[ \begin{matrix} \tilde{p} \\ e^{\frac{\tilde{p}b}{2}} - (-1)^n e^{-\frac{\tilde{p}b}{2}} \end{matrix} \right] \tilde{p} & \text{при } k_{01}\omega^2 - g\Delta\rho < 0. \end{cases} \quad (25)$$

Окончательное выражение для формы прогиба мембраны  $w$  примет вид

$$w = \sum_{k=1}^2 \left( w_k^0 - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n E_{kn}^0}{\omega^2 \tilde{a}_n - k_n \tilde{d}_n} \psi_n \right) A_k^0, \quad (26)$$

где  $\tilde{a}_n = a_n + k_n k_{01}$ ,  $\tilde{d}_n = T k_n^2 + g\Delta\rho$ .

В формулу (26) входит две неизвестные константы  $A_1^0$  и  $A_2^0$ . Из условия закрепления мембраны (20) получим два линейных уравнения

$$\sum_{k=1}^2 \left( B_{kj} - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{kn} B_{nj}^* \right) A_k^0 = 0, \quad (j=1,2). \quad (27)$$

Здесь

$$B_{kj} = w_k^0 \Big|_{y=\pm \frac{b}{2}} = \begin{cases} (-1)^j \sin \frac{pb}{2}, \cos \frac{pb}{2} \\ e^{(-1)^j \frac{\tilde{p}b}{2}}, e^{(-1)^{j+1} \frac{\tilde{p}b}{2}} \end{cases}, \quad B_{nj}^* = \psi_n \Big|_{y=\pm \frac{b}{2}} = \begin{cases} 1, j=1 \\ (-1)^n, j=2 \end{cases}, \quad (28)$$

$$\alpha_{kn} = \frac{\omega^2 a_n E_{kn}^0}{\omega^2 \tilde{a}_n - k_n \tilde{d}_n}. \quad (29)$$

Для удобства записи введен индекс  $j$  ( $j=1$  соответствует контуру  $y = -\frac{b}{2}$ , а  $j=2$  –  $y = \frac{b}{2}$ ).

Из равенства нулю определителя однородной системы (27) следует частотное уравнение собственных совместных колебаний упругой мембраны и жидкости

$$\left| \left\| C_{jk} \right\|_{j,k=1}^2 \right| = 0, \quad (30)$$

где

$$C_{jk} = B_{kj} - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{kn} B_{nj}^*. \quad (31)$$

Собственные формы колебаний будут найдены из однородной системы (27). Например, если  $A_2^0 \neq 0$ , то форма прогиба для частоты  $\omega_l^2$  будет иметь вид

$$w_l = \sum_{k=1}^2 \left( w_{kl}^0 - \omega_l^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n E_{kn}^0}{\omega_l^2 \tilde{a}_n - k_n \tilde{d}_n} \psi_n \right) A_k^0. \quad (32)$$

Здесь  $A_1^0 = -\frac{C_{22}}{C_{21}} A_2^0$ .

Воспользовавшись разложением функции  $w_k^0$  в ряд по полной и ортогональной системе функций

$\psi_n$ , условием  $\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \psi_n dy = 0$  и обозначением (25), формулы (26) - (32) можно переписать так

$$w = \sum_{k=1}^2 \left( \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{kn} \psi_n \right) A_k^0, \quad (33)$$

$$\sum_{k=1}^2 \left( \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{kn} B_{nj}^* \right) A_k^0 = 0, \quad (34)$$

$$\left| \left\| C_{jk} \right\|_{j,k=1}^2 \right| = 0, \quad (35)$$

где  $C_{jk} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{kn} B_{nj}^*$ ,  $w_l = \sum_{k=1}^2 \left( \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{nk} \psi_n \right) A_k^0$ ,  $\beta_{nk} = \frac{k_n d_n E_{kn}^0}{\omega^2 \tilde{a}_n - k_n \tilde{d}_n}$ .

Вначале рассмотрим частотное уравнение (35) при  $k_{01}\omega^2 - g\Delta\rho > 0$ . В этом случае коэффициенты  $C_{jk}$  принимают вид

$$C_{11} = \frac{2pT}{b} \cos \frac{pb}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n - 1] \alpha_n, \quad C_{12} = \frac{2pT}{b} \sin \frac{pb}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n + 1] \alpha_n,$$

$$C_{21} = \frac{2pT}{b} \cos \frac{pb}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [1 - (-1)^n] \alpha_n, \quad C_{22} = \frac{2pT}{b} \sin \frac{pb}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [1 + (-1)^n] \alpha_n,$$

а частотное уравнение –

$$C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21} = \frac{16p^2T^2}{b^2} \sin pb \left( \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{2m-1} \right) \left( \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{2m} \right) = 0. \quad (36)$$

Здесь  $\alpha_n = \frac{k_n}{\omega^2 a_n - k_n d_n} = \frac{k_n}{\omega^2 \tilde{a}_n - k_n \tilde{d}_n}$

Теперь рассмотрим случай  $k_{01}\omega^2 - g\Delta\rho < 0$ . В этом случае коэффициенты  $C_{jk}$  частотного уравнения (35) запишутся следующим образом

$$C_{11} = \frac{2\tilde{p}T}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (-1)^n e^{\frac{\tilde{p}b}{2}} - e^{-\frac{\tilde{p}b}{2}} \right] \alpha_n, \quad C_{12} = \frac{2\tilde{p}T}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ e^{\frac{\tilde{p}b}{2}} - (-1)^n e^{-\frac{\tilde{p}b}{2}} \right] \alpha_n,$$

$$C_{21} = \frac{2\tilde{p}T}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ e^{\frac{\tilde{p}b}{2}} - (-1)^n e^{-\frac{\tilde{p}b}{2}} \right] \alpha_n, \quad C_{22} = \frac{2\tilde{p}T}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (-1)^n e^{\frac{\tilde{p}b}{2}} - e^{-\frac{\tilde{p}b}{2}} \right] \alpha_n,$$

а частотное уравнение –

$$C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21} = -\frac{\tilde{p}^2T^2}{b^2} \sinh \tilde{p}b \left( \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{2m-1} \right) \left( \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{2m} \right) = 0. \quad (37)$$

Так как  $\sin pb \neq 0$  и  $\sinh \tilde{p}b \neq 0$ , то из вида уравнений (36) и (37) следует, что частотное уравнение (35) имеет вид  $\left( \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{2m-1} \right) \left( \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{2m} \right) = 0$ , не зависит от условий  $k_{01}\omega^2 - g\Delta\rho > 0$  или  $k_{01}\omega^2 - g\Delta\rho < 0$ , распадается на четные и нечетные частоты и может быть записана в единой форме для этих частот  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 0$  или

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{\omega^2 \tilde{a}_n - k_n \tilde{d}_n} = 0. \quad (38)$$

Несложно показать, что нули знаменателя левой части уравнения (38) описывают частоты колебаний незакрепленной мембраны и являются асимптотами для этого уравнения.

Таким образом, если  $n = 2m - 1$ , то уравнение (38) описывает нечетные частоты, а если  $n = 2m$ , то – четные частоты. Следует отметить, что такого упрощения удалось достигнуть за счет разложения функции  $w_k^0$  в ряд по полной и ортогональной системе собственных функций  $\psi_n$  и рассмотрении уравнения (35). При использовании уравнения (30) значительно возросли бы аналитические вычисления, и такого упрощения можно было бы достигнуть, если разложить тригонометрические и гиперболические функции на простейшие дроби так, как это сделано, например, в работах [3, 5-7].

Левая часть уравнения (38) является монотонно возрастающей функцией параметра  $\omega^2$  на интервале  $(k_n \tilde{d}_n / \tilde{a}_n, k_{n+1} \tilde{d}_{n+1} / \tilde{a}_{n+1})$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), принимающая на нем значения от  $-\infty$  до  $\infty$ .

Следовательно, между двумя последовательными значениями  $k_n \tilde{d}_n / \tilde{a}_n$  лежит только один корень уравнения (38). Этим заранее определяются интервалы, в которых находятся собственные частоты.

Таким образом, рассматриваемая задача имеет бесконечный дискретный спектр собственных значений  $\omega_l^2$ , являющихся корнями характеристических уравнений (30), (35) и (38), а соответствующие им собственные функции  $w_l(y)$  образуют полную ортогональную систему функций на отрезке  $[-b/2, b/2]$ .

Если в ряде уравнения (38) удержат два члена, то из неравенства  $\omega^2 > 0$  следует с достаточной для практики точностью условия устойчивости плоской формы равновесия мембраны. Для нечетных и четных форм колебаний они соответственно примут вид

$$T > \frac{g(\rho_1 - \rho_2)b^2}{5\pi^2} \quad (n=1,3), \quad (39)$$

$$T > \frac{g(\rho_1 - \rho_2)b^2}{10\pi^2} \quad (n=2,4). \quad (40)$$

Условия устойчивости (39) и (40) не зависят от глубин заполнения жидкостей и массы мембраны. Из этих условий видно, что для устойчивости несимметричных колебаний нужно в два раза большее натяжение мембраны, чем для симметричных. Неравенства (39) - (40) можно уточнить с учетом трех, четырех и более членов ряда, но при этом придется воспользоваться условиями положительности корней полиномов  $2, 3, \dots, n$ -ой степеней, что значительно усложнит аналитические исследования. Из условий (39) и (40) следует, что, с учетом принятой точности, при естественной стратификации  $\rho_1 \leq \rho_2$  частотное уравнение всегда имеет положительные корни и плоская форма равновесия упругой мембраны устойчива. Неустойчивость может иметь место только при нарушении естественной стратификации, т.е. при условии  $\rho_1 > \rho_2$ . Выписанные соотношения (39), (40) совпадают с ранее полученными [6].

В безразмерном виде частотное уравнение (38) и условия устойчивости (39), (40) будут иметь вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\rho_{12} \coth \kappa_{1n} + \coth \kappa_{2n} + \pi n \tilde{k}_{01}) \Omega^2 - \pi n (\tilde{T} \pi^2 n^2 - \rho_{12} + 1)} = 0, \quad (41)$$

$$\tilde{T} > \frac{\rho_{12} - 1}{5\pi^2} \doteq 0.02026(\rho_{12} - 1) \quad (n=1,3), \quad (42)$$

$$\tilde{T} > \frac{\rho_{12} - 1}{10\pi^2} \doteq 0.01013(\rho_{12} - 1) \quad (n=2,4), \quad (43)$$

где  $\Omega^2 = \frac{b}{g} \omega^2$ ,  $\kappa_{in} = \pi n H_i$ ,  $H_i = \frac{h_i}{b}$ ,  $\tilde{T} = \frac{T}{g \rho_2 b^2}$ ,  $\tilde{k}_{01} = \frac{k_{01}}{\rho_2 b}$ ,  $\rho_{12} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ .

Уравнение (41) имеет особенности при  $\Omega^2 = \pi n \frac{1 + \tilde{T} \pi^2 n^2 - \rho_{12}}{\rho_{12} \coth \kappa_{1n} + \coth \kappa_{2n} + \pi n \tilde{k}_{01}}$ , которые необходимо будет учитывать при проведении численных расчетов.

**Некоторые частные случаи исходной задачи.** Рассмотрим ряд частных случаев исходной задачи, а именно: отсутствие мембраны ( $T=0, k_{01}=0$ ), отсутствие верхней ( $\rho_1=0$ ) или нижней жидкости ( $\rho_1=0$ ).

**Мембрана, разделяющая жидкости, отсутствует ( $T=0, k_{01}=0$ ).** В этом случае система уравнений и граничных условий (1) - (8) вырождаются в следующую систему уравнений и граничных условий

$$\begin{aligned} P_2 &= P_1 \quad \text{при } z=0, \\ \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z^2} &= 0 \quad (i=1,2) \\ \frac{\partial W}{\partial t} &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \quad \text{при } z=0, \end{aligned}$$

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} W dy = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \right|_{y=\pm \frac{b}{2}} = 0 \quad (i=1,2),$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = h_1, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = h_2.$$

$$g \Delta \rho W = \rho_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial t},$$

а уравнение (14) с учетом выражений (13) сводится к следующему дифференциальному уравнению

$$\ddot{W}_n + \omega_n^2 W_n = 0.$$

Здесь  $W(y,t)$  – уравнение поверхности раздела жидкостей, а

$$\omega_n^2 = \frac{g \Delta \rho}{a_n} \quad (44)$$

квадрат частоты колебаний двухслойной идеальной жидкости в прямоугольном канале. Из выражения (44) следует, что при  $\rho_2 \leq \rho_1$  положение равновесия рассматриваемой механической системы будет неустойчивым.

В безразмерном виде квадрат частоты (44) будет иметь вид

$$\Omega_{n0}^2 = \frac{1 - \rho_{12}}{\rho_{12} \coth \kappa_{1n} + \coth \kappa_{2n}} \quad (45)$$

**Случай отсутствия верхней жидкости** ( $\rho_1 = 0$ ). Положив в уравнениях (1) - (8), (14), (21) - (38) плотность верхнее жидкости равной нулю ( $\rho_1 = 0$ ), получим решение рассматриваемой задачи.

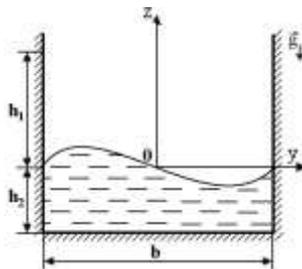


Рис. 2. Случай отсутствия верхней жидкости ( $\rho_1 = 0$ )

Частотное уравнение (38) в этом случае снова распадается на четные и нечетные частоты и принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{\omega^2 (\rho \coth \kappa_n + k_n k_{01}) - k_n (T k_n^2 + g \rho)} = 0. \quad (46)$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_{n0}^2}{(1 + n \tilde{k}_0 \tanh \kappa_n) \omega^2 - (1 + \tilde{T} n^2) \omega_{n0}^2} = 0, \quad (47)$$

где  $\rho = \rho_2$ ,  $h = h_2$ ,  $\kappa_n = \kappa_{2n}$ ,  $\tilde{T} = \frac{T}{g \rho b^2}$ ,  $\tilde{k}_0 = \frac{k_{01}}{\rho b}$ ,  $\omega_{n0}^2 = g k_n \tanh \kappa_n$  – квадрат частоты колебаний идеальной жидкости в прямоугольном канале.

Запишем частотное уравнение (47) в безразмерном виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega_{n0}^2}{(1 + \pi n \tilde{k}_0 \tanh \kappa_n) \Omega^2 - (1 + \tilde{T} \pi^2 n^2) \Omega_{n0}^2} = 0. \quad (48)$$

Здесь  $\Omega^2 = \frac{b}{g} \omega^2$ ,  $\Omega_{n0}^2 = \pi n \tanh \kappa_n$ ,  $\kappa_n = \pi n H$ ,  $H = \frac{h}{b}$ .

Из неравенств (42) и (43) следует, что в случае отсутствия верхней жидкости ( $\rho_{12} = 0$ ) плоская форма равновесия мембраны всегда устойчива.

Уравнение (48) совпадает с уравнением работы [4].

**Случай отсутствия нижней жидкости ( $\rho_2 = 0$ ).** Этот случай наиболее интересен, так как позволяет рассмотреть новую задачу о собственных колебаниях жидкости в прямоугольном канале с жестким верхним и упругим нижним основаниями. Такой канал будем называть «опрокинутым».

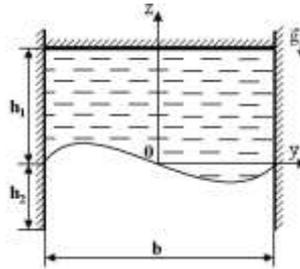


Рис. 3. Случай отсутствия нижней жидкости ( $\rho_2 = 0$ ) – «опрокинутый» канал

Положив в основных формулах и уравнениях (18) - (40) плотность нижней жидкости равной нулю ( $\rho_2 = 0$ ), получим решение рассматриваемой задачи, а частотное уравнение (38) в этом случае запишется так

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{\omega^2 (\rho \coth \kappa_n + k_n k_0) - k_n (T k_n^2 - g \rho)} = 0, \quad (49)$$

где  $\rho = \rho_1$ ,  $h = h_1$ ,  $\kappa_n = \kappa_{1n}$ .

Интересно отметить, что частотное уравнение (49) также следует из частотного уравнения (46), если в нем формально положить  $g := -g$ , т.е. рассмотреть «опрокинутый» канал (см. рис.4 и рис.5).

В безразмерном виде уравнение (49) и условия устойчивости (42), (43) примут вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\coth \kappa_n + \pi n \tilde{k}_0) \Omega^2 + \pi n (1 - \tilde{T} \pi^2 n^2)} = 0. \quad (50)$$

$$\tilde{T} > \frac{1}{5\pi^2} \doteq 0.02026 \quad (n=1,3), \quad (51)$$

$$\tilde{T} > \frac{1}{10\pi^2} \doteq 0.01013 \quad (n=2,4). \quad (52)$$

Здесь  $\Omega^2 = \frac{b}{g} \omega^2$ ,  $\tilde{T} = \frac{T}{g \rho b^2}$ ,  $\tilde{k}_0 = \frac{k_{01}}{\rho b}$ ,  $\kappa_n = \pi n H$ ,  $H = \frac{h}{b}$ .

**Влияние перегрузки на собственные частоты колебаний.** В этом случае величину ускорения свободного падения представим в виде  $g = n_x g_0$  ( $g_0 = 9.81$ ) и в безразмерном виде частотное уравнение (38) и условия устойчивости (39), (40) будут иметь вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\rho_{12} \coth \kappa_{1n} + \coth \kappa_{2n} + \pi n \tilde{k}_{01}) \Omega^2 - \pi n (\tilde{T} \pi^2 n^2 + (1 - \rho_{12}) n_x)} = 0, \quad (53)$$

$$\tilde{T} > \frac{\rho_{12} - 1}{5\pi^2} n_x \doteq 0.02026 (\rho_{12} - 1) n_x \quad (n=1,3), \quad (54)$$

$$\tilde{T} > \frac{\rho_{12} - 1}{10\pi^2} n_x \doteq 0.01013 (\rho_{12} - 1) n_x \quad (n=2,4), \quad (55)$$

где  $\Omega^2 = \frac{b}{g_0} \omega^2$ ,  $\tilde{T} = \frac{T}{g_0 \rho_2 b^2}$ .

При невесомости  $g = 0$  ( $n_x = 0$ ) уравнения (53) запишется так

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\rho_{12} \coth \kappa_{1n} + \coth \kappa_{2n} + \pi n \tilde{k}_{01}) \Omega^2 - \pi^3 n^3 \tilde{T}} = 0, \tag{56}$$

а из неравенств (54) - (55) следует, что плоская форма равновесия мембраны всегда устойчива.

**Численные исследования.** Численные исследования частотных уравнений (41), (48), (50), (54), (56) и соответствующих неравенств (42) - (43), (51) - (52), (54) - (55) были проведены для следующих значений безразмерных параметров:  $\rho_{12} = 0, 0.25, 0.5, 1, 2, 3, 4$ ;  $\tilde{T} = 0, 0.25, 0.5, 1, 2, 3, 4$ ;  $H_i = 0.5, 1, 1.5$ ;  $\tilde{k}_0 = 0, 0.5, 1$ ;  $n_x = -5.5$  с учетом десяти членов в рядах суммы.

На рис. 4 - 7 представлены графики зависимости квадрата первой безразмерной несимметричной частоты от безразмерной величины натяжения  $\tilde{T}$  при  $\rho_2 = 0$  (случай отсутствия нижней жидкости) (рис.4), при  $\rho_1 = 0$  (случай отсутствия верхней жидкости  $\rho_{12} = 0$ ) (рис.5), при  $\rho_{12} = 0.5$  (рис.6) и при  $\rho_{12} = 2.0$  (рис.7). На рис. 8 - 9 представлены графики зависимости квадрата первой безразмерной несимметричной частоты от безразмерной величины плотности  $\rho_{12}$  при  $\tilde{T} = 0.1$  (рис.8) и  $\tilde{T} = 1.0$  (рис.9). На всех рисунках  $H_1 = H_2 = 1$ , а значению  $\tilde{k}_0 = 0$  отвечает верхний график,  $\tilde{k}_0 = 0.5$  – средний график и  $\tilde{k}_0 = 1$ . – нижний график.

Следует отметить, что графики для симметричных частот качественно не отличаются от графиков для несимметричных частот и, как правило, значения четных частот примерно в пять раз больше соответствующих значений нечетных частот.

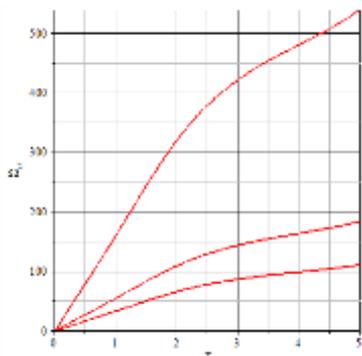


Рис. 4. Зависимость квадрата первой безразмерной частоты от безразмерной величины натяжения  $\tilde{T}$  при  $\rho_2 = 0$  (случай отсутствия нижней жидкости)

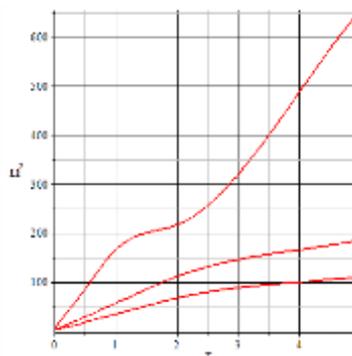


Рис. 5. Зависимость квадрата первой безразмерной частоты от безразмерной величины натяжения  $\tilde{T}$  при  $\rho_1 = 0$  (случай отсутствия верхней жидкости),  $\rho_{12} = 0$

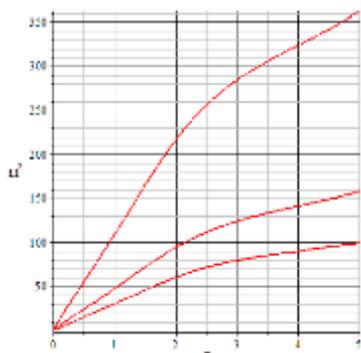


Рис. 6. Зависимость квадрата первой безразмерной частоты от безразмерной величины натяжения  $\tilde{T}$  при  $\rho_{12} = 0.5$

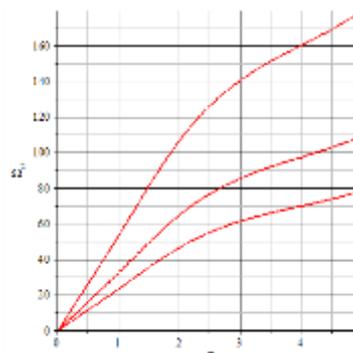
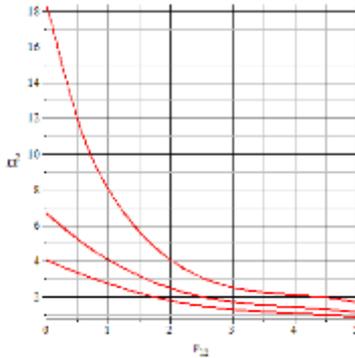
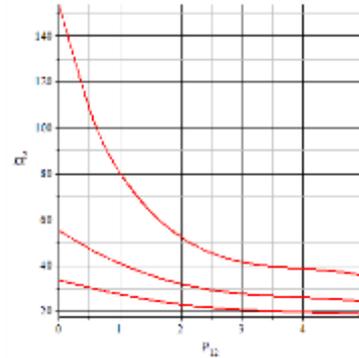


Рис. 7. Зависимость квадрата первой безразмерной частоты от безразмерной величины натяжения  $\tilde{T}$  при  $\rho_{12} = 2.0$

Рис. 8. Зависимость квадрата первой безразмерной частоты от безразмерной величины плотности  $\rho_{12}$  при  $\tilde{T} = 0.1$ Рис. 9. Зависимость квадрата первой безразмерной частоты от безразмерной величины плотности  $\rho_{12}$  при  $\tilde{T} = 1$ 

На основании проведенных аналитических и численных исследований можно сделать следующие общие выводы как для четных, так и для нечетных частот:

- 1) При увеличении натяжения мембраны или при возрастании перегрузки частоты возрастают.
- 2) С уменьшением плотности верхней жидкости частоты возрастают и принимают наибольшее значение при отсутствии верхней жидкости, а с увеличением плотности верхней жидкости частоты убывают и при малом натяжении мембраны могут обратиться в ноль, что приведет к потере устойчивости плоской формы равновесия мембраны.
- 3) С уменьшением массы мембраны частоты возрастают и принимают наибольшее значение при отсутствии массы, т.е. для безинерционных мембран. При уменьшении натяжения зависимость частот от массы мембраны существенно уменьшается.
- 4) Если плотность верхней жидкости не больше плотности нижней, то при возрастании перегрузки частоты возрастают, а если плотность верхней жидкости больше плотности нижней, то при возрастании перегрузки частоты убывают, и может наступить потеря устойчивости плоской формы равновесия мембраны. Зависимость квадрата частоты от перегрузки в большинстве случаев почти линейная.
- 5) Уменьшение частот происходит с увеличением глубины заполнения верхней жидкости или с уменьшением глубины заполнения нижней жидкости.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильгамов М.А. Об устойчивости упругой пластины между жидкостями разной плотности / М.А.Ильгамов, Ж.М. Сахабутдинов // Изб. проблемы прикл. механики. Сб. статей к шестидесятилетию акад. Н. Челомея. – М., 1974. – С. 341-346.
2. Ильгамов М.А. Введение в нелинейную гидроупругость / М.А.Ильгамов. – М.: Наука, 1991. – 200 с.
3. Кононов Ю.Н. Свободные колебания двухслойной жидкости, разделенной упругой пластинкой в прямоугольном канале / Ю.Н. Кононов, Е.А. Татаренко // Теор. и прикл. механика. – 2002. – Т. 36. – С. 170-176.
4. Троценко В.А. Свободные колебания жидкости в прямоугольном канале с упругой мембраной на свободной поверхности / В.А. Троценко // Прикл. механика. – 1995. – Т. 31, № 8. – С. 74-80.
5. Кононов Ю.Н. Свободные колебания двухслойной жидкости с упругими мембранами на свободной и внутренней поверхностях / Ю.Н. Кононов, Е.А. Татаренко // Прикл. гідромеханіка. – 2003. – Т. 5(77), № 3. – С. 48-54.
6. Кононов Ю.Н. Свободные колебания двухслойной жидкости с упругими мембранами на “свободной” и внутренней поверхностях / Ю.Н. Кононов, Е.А. Татаренко // Акустичний вісник. – 2003. – Т. 6, № 4. – С. 44-52.
7. Кононов Ю.Н. Свободные колебания упругих мембран и двухслойной жидкости в прямоугольном канале с упругим дном / Ю.Н. Кононов, Е.А. Татаренко // Прикл. гідромеханіка. – 2008. – № 1. – С. 33-38.
8. Самодаев В.Е. Влияние перегрузки на частоты собственных колебаний жидкости в жестком цилиндрическом баке с мембраной на свободной поверхности / В.Е. Самодаев // Тр. семинара “Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью”. – Томск, 1972. – С. 180–186.
9. Докучаев Л.В. О колебании резервуара с жидкостью, на свободной поверхности которой расположена мембрана / Л.В. Докучаев // Строительная механика и расчет сооружений. – 1972. – № 1. – С. 49-54.
10. Докучаев Л.В. Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами / Л.В. Докучаев. – М.: Машиностроение, 1987. – 232 с.
11. Шевченко В.П. Об устойчивости упругих пластинок, разделяющих многослойную идеальную жидкость / В.П. Шевченко, Ю.Н. Кононов // Актуальные аспекты физико-механических исследований. Механика. – К.:

- Наук. Думка. – 2007. – С. 348-361.
12. Карнаух А.Ю. Колебания упругой пластины, разделяющей жидкости в цилиндрическом сосуде с упругими основаниями / А.Ю. Карнаух // Изв. вузов Сев. Кав. Регион. – 2013. – №1 (173). – С.78–81.
  13. Гончаров Д.А. Осесимметричные колебания двухплотностной жидкости в цилиндрическом баке [Электронный ресурс] / Д.А. Гончаров // Наука и образование электронное научно-техническое издание. – Электронные данные. – [Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012]. – № 4. – Режим доступа: <http://technomag.bmstu.ru/doc/362856.html> (дата обращения: 19.02.2014).
  14. Гончаров Д.А. Динамика двухслойной жидкости, разделенной упругой перегородкой с учетом сил поверхностного натяжения [Электронный ресурс] / Д.А. Гончаров // Наука и образование электронное научно-техническое издание. – Электронные данные. – [Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013]. – № 11. – Режим доступа: <http://technomag.bmstu.ru/doc/619258.html> (дата обращения: 19.02.2014).
  15. Пожалостин А.А. Свободные осесимметричные колебания двухслойной жидкости с упругим разделителем между слоями при наличии сил поверхностного натяжения [Электронный ресурс] / А.А. Пожалостин, Д.А. Гончаров // Наука и инновации: инженерный журнал. – Электронные данные. – [Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013] – № 12. – URL: <http://engjournal.ru/catalog/eng/teormach/1147.html> (дата обращения: 19.02.2014).

### КОЛИВАННЯ ПРЯМОКУТНОЇ МЕМБРАНИ, ЩО РОЗДІЛЯЄ ІДЕАЛЬНІ РІДИНИ РІЗНОЇ ЩІЛЬНОСТІ В ПРЯМОКУТНОМУ КАНАЛІ З ЖОРСТКИМИ ОСНОВАМИ

Ю. М. Кононов, О.О. Лимар.

#### РЕЗЮМЕ

У лінійній постановці виведено частотне рівняння власних коливань мембрани, що розділяє ідеальні рідини різної щільності в прямокутному каналі з жорсткими підставами. Отримано єдина форма частотного рівняння як для симетричних, так і несиметричних спільних коливань мембрани і рідини. Виведено умови стійкості плоскої форми рівноваги мембрани. Ці умови не залежать від глибин заповнення рідин і маси мембрани. Розглянуто випадки відсутності мембрани, верхньої або нижньої рідин, а також випадок відсутності гравітації, тобто випадок невагомості. Для широкого кола параметрів розглянутої механічної системи проведені та проаналізовані чисельні дослідження.

*Ключові слова:* гідропружність, прямокутна мембрана, плоскі коливання, ідеальна рідина.

### VIBRATIONS OF A RECTANGULAR DIAPHRAGM, WHICH SEPARATES LIQUIDS OF DIFFERENT DENSITIES IN A RECTANGULAR CHANNEL WITH RIGID FOUNDATIONS

Yu.M. Kononov, O.O. Limar

#### SUMMARY

In the linear formulation received equation frequency of natural oscillations of the membrane separating the ideal liquid of different density in a rectangular channel with a rigid base. To establish a single form of the frequency equation for symmetrical and asymmetrical joint oscillation of the membrane and liquid. Are derived stability conditions of equilibrium flat shape of the membrane. These conditions do not depend on the depth of filling liquid and mass of the membrane. The cases of the absence of the membrane, the top or bottom of liquids, as well as a case of absence of gravity, ie, case of weightlessness. For a wide range of parameters of the mechanical system has been analyzed and numerical studies.

*Keywords:* hydroelasticity, rectangular membrane, flat oscillations, ideal fluid.