

УДК 533.6.013.42

Ю.Н. Кононов, В.П. Шевченко, Ю.А. Джуха
Донецкий национальный университет, Винница, Украина

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДВУХСЛОЙНОЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ В ЖЕСТКОМ КРУГОВОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ РЕЗЕРВУАРЕ С УПРУГИМ ДНОМ

Выведено и исследовано частотное уравнение собственных совместных осесимметричных колебаний тяжелой двухслойной идеальной жидкости в жестком круговом цилиндрическом резервуаре с упругим основанием в виде круглой пластины. Частотное уравнение уточнено с учетом измененной глубины нижней жидкости из-за статического прогиба дна. Рассмотрены случаи вырождения пластины в мембрану и в абсолютно жесткую. Для широкого круга параметров рассматриваемой механической системы проведены и проанализированы численные исследования.

Ключевые слова: гидроупругость, круговая пластина, идеальная двухслойная жидкость, осесимметричные колебания.

Введение. Интерес к задаче об осесимметричных колебаниях упругого дна и жидкости в цилиндрическом резервуаре связан с тем, что в этом случае необходимо учитывать статический прогиб дна и продольные колебания жидкости как одного целого. Задача об осесимметричных колебаниях упругого дна кругового цилиндрического сосуда и идеальной жидкости со свободной поверхностью впервые была рассмотрена в работах [1–3]. В статье [4] эта задача была обобщена на случай коаксиального цилиндрического сосуда, а в статье [5] – на несимметричные колебания. В работе [6] было сделано обобщение указанной выше задачи для цилиндрического сосуда произвольного сечения. Экспериментальные исследования представлены в статье [7]. В статьях [8, 9] исследована в линейной постановке динамика и устойчивость колебаний цилиндрического резервуара с упругим дном и жидкостью со свободной поверхностью. Наиболее полная постановка задачи о колебаниях упругих оснований и идеальной жидкости дана в работе [10], а в статьях [11–12] она обобщена на случай двухсвязного цилиндрического сосуда и двухслойной жидкости. В указанных выше статьях осесимметричные собственные частоты совместных колебаний упругих оснований и тяжелой идеальной жидкости в жестком круговом цилиндрическом резервуаре не были полностью изучены. В статье [15] исследованы осесимметричные колебания упругих оснований и однослойной идеальной жидкости в жестком цилиндрическом резервуаре. С позиции функционального анализа аналогичная задача была рассмотрена в [16]. Из последних зарубежных работ, близких по тематике, следует отметить статьи [17–19], в которых рассматриваются осесимметричные колебания двухслойной жидкости применительно к проблеме капиллярных фазоразделителей.

В данной статье обобщается и уточняется задача, рассмотренная в [15], на случай двухслойной идеальной жидкости со свободной поверхностью. Получено более простое частотное уравнение, учитывающее изменение глубины заполнения нижней жидкости за счет статического прогиба основания. Рассмотрены случаи вырождения пластины в мембрану и в абсолютно жесткую. Проведены численные исследования для различных плотностей, глубин заполнения и упругих характеристик пластины.

Постановка задачи. Рассмотрим совместные колебания упругого основания и тяжелой двухслойной идеальной несжимаемой жидкости с плотностями ρ_1 и ρ_2 , заполняющей соответственно до глубин h_1 и h_2 прямой круговой цилиндр радиуса a с жесткой боковой поверхностью. Индекс $i=1$ соответствует верхней жидкости с плотностью ρ_1 , а $i=2$ – нижней жидкости с плотностью ρ_2 . Основание цилиндра представляет собой защемленную круговую изотропную пластину с изгибной жесткостью D , подверженную растягивающим усилиям T в срединной плоскости. Цилиндрическую систему координат $Or\theta z$ расположим на поверхности раздела жидкостей в невозмущенном положении (положении равновесия системы), а ось Oz направим по оси цилиндра противоположно вектору ускорения силы тяжести \vec{g} . Задачу будем рассматривать в линейной постановке, считая движение жидкости потенциальным, а совместные колебания пластины и жидкости – безотрывными.

Уравнения движения и граничные условия данной механической системы имеют вид [1, 2, 4]

$$\Delta\Phi_i = 0, \quad \left. \frac{\partial\Phi_i}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \quad (i=1,2), \quad (1)$$

$$\rho_1 \left(Q_1 - \left. \frac{\partial\Phi_1}{\partial t} \right|_{z=h_1} - g(h_1 + \zeta_1) \right) = P_0, \quad \rho_1 \left(Q_1 - \left. \frac{\partial\Phi_1}{\partial t} \right|_{z=0} - g\zeta_2 \right) = \rho_2 \left(Q_2 - \left. \frac{\partial\Phi_2}{\partial t} \right|_{z=0} - g\zeta_2 \right), \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{\partial\zeta_2}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} \right|_{z=h_1} = \frac{\partial\zeta_1}{\partial t}, \quad \left. \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} \right|_{z=-h_2} = \frac{\partial W}{\partial t}, \quad (4)$$

$$k_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + D\Delta_2^2 W - T\Delta_2 W - \rho_2 g W = P_3 - \rho_2 \left(Q_2 - \left. \frac{\partial\Phi_2}{\partial t} \right|_{z=-\tilde{h}_2} + g\tilde{h}_2 \right), \quad (5)$$

$$W|_{r=a} = 0, \quad \left. \frac{\partial W}{\partial r} \right|_{r=a} = 0, \quad (6)$$

$$\int_S (W - W_s) dS = \int_S \zeta_1 dS = \int_S \zeta_2 dS. \quad (7)$$

Здесь Φ_i – потенциал скоростей i -ой жидкости; $z = \zeta_i(r, t)$ – свободная ($i=1$) и внутренняя ($i=2$) поверхность (поверхность раздела жидкостей); Q_i – произвольные функции времени; $k_0 = \rho_0 \delta_0$; W , ρ_0 и δ_0 – соответственно прогиб, плотность и толщина пластины; $\Delta_2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}$ и $\Delta = \Delta_2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – соответственно двухмерный и трехмерный операторы Лапласа для осесимметричного случая; P_0 – давление над свободной поверхностью двухслойной жидкости, а P_3 – внешнее давление на дно цилиндра; W_s – прогиб дна в положении равновесия (статический прогиб), $\tilde{h}_2 = h_2 + w^*$ – измененная глубина заполнения второй жидкости за счет статического прогиба дна ($w^* = \frac{1}{S} \int_S W_s dS$); S – круговая область.

Второе уравнение в (2) показывает непрерывность давления в жидкости при переходе от первой жидкости ко второй, а первое равенство в (3) – непрерывность нормальной составляющей скорости.

С учетом соотношений (2) правая часть уравнения (5) примет вид

$$k_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + D\Delta_2^2 W - T\Delta_2 W - \rho_2 g W = P_3 - P_0 - g(\rho_1 h_1 + \rho_2 \tilde{h}_2) - g(\rho_1 \zeta_1 + \Delta \rho \zeta_2) + \rho_1 \left(\left. \frac{\partial\Phi_1}{\partial t} \right|_{z=0} - \left. \frac{\partial\Phi_1}{\partial t} \right|_{z=h_1} \right) + \rho_2 \left(\left. \frac{\partial\Phi_2}{\partial t} \right|_{z=-\tilde{h}_2} - \left. \frac{\partial\Phi_2}{\partial t} \right|_{z=0} \right). \quad (8)$$

Метод решения. Вследствие осевой симметрии функции Φ_i , ζ_i представим в виде обобщенных рядов Фурье по собственным функциям $\psi_n(r)$ [1, 2, 4, 6]:

$$\Phi_i(r, z, t) = a_{0i}(t) + a_{1i}(t)z + \sum_{n=1}^{\infty} [A_{in}(t)e^{k_n z} + B_{in}(t)e^{-k_n z}] \psi_n(r), \quad (9)$$

$$\zeta_i(r, t) = \zeta_{0i}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_{in}(t) \psi_n(r), \quad (10)$$

а прогиб дна W в виде суммы статического и динамического прогибов:

$$W(r, t) = W_s(r) + W_d(r, t). \quad (11)$$

Здесь

$$\zeta_{0i} = \frac{1}{S} \int_S \zeta_i dS, \quad \zeta_{in} = \frac{1}{N_n^2} \int_S \zeta_i \psi_n dS, \quad N_n^2 = \int_S \psi_n^2 dS. \quad (12)$$

Собственные функции $\psi_n(r)$ и соответствующие им собственные числа k_n находятся из решения краевой задачи $\Delta_2 \psi_n + k_n^2 \psi_n = 0$ на $[0, a]$, $\frac{d\psi_n}{dr} \Big|_{r=a} = 0$ и вместе с произвольной константой образуют на S полную и ортогональную систему функций. Из-за осевой симметрии эти функции имеют вид $\psi_n(r) = J_0(k_n r)$, где $J_1(\xi_n) = 0$, $k_n = \xi_n/a$; J_0, J_1 – функции Бесселя первого рода.

Подставив выражения (9) и (10) в граничные условия (2) – (4) и (7), получим

$$\begin{aligned} A_{1n} &= \frac{\dot{\zeta}_{1n} - \dot{\zeta}_{2n} e^{-\kappa_{1n}}}{2k_n \sinh \kappa_{1n}}, & B_{1n} &= \frac{\dot{\zeta}_{1n} - \dot{\zeta}_{2n} e^{\kappa_{1n}}}{2k_n \sinh \kappa_{1n}}, \\ A_{2n} &= -\frac{\dot{W}_n - \dot{\zeta}_{2n} e^{\kappa_{2n}}}{2k_n \sinh \kappa_{2n}}, & B_{2n} &= -\frac{\dot{W}_n - \dot{\zeta}_{2n} e^{-\kappa_{2n}}}{2k_n \sinh \kappa_{2n}}, \\ a_{11} &= a_{12} = \dot{\zeta}_{01} = \dot{\zeta}_{02}, & \zeta_{01} &= \zeta_{02} = W_0. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь

$$W_n(t) = \frac{1}{N_n^2} \int_S W_d \psi_n dS, \quad W_0 = \frac{1}{S} \int_S W_d dS, \quad \kappa_{1n} = k_n h_1, \quad \kappa_{2n} = k_n \tilde{h}_2. \quad (14)$$

В предположении, что P_0 и P_3 – константы, статический прогиб $W_s(r)$ находится из следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} D\Delta_2^2 W_s - T\Delta_2 W_s - \rho_2 g W_s &= P_3 - P_0 - g(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2), \\ W_s \Big|_{r=a} &= 0, & \frac{\partial W_s}{\partial r} \Big|_{r=a} &= 0. \end{aligned}$$

Будем считать, что решение этой задачи известно, а измененная глубина \tilde{h}_2 задана.

С учетом выражений (13) – (14), уравнения (2), (3), (8) примут вид

$$\ddot{\zeta}_{1n} + \sigma_{1n}^2 \zeta_{1n} - \frac{\dot{\zeta}_{2n}}{\cosh \kappa_{1n}} = 0, \quad (15)$$

$$\ddot{\zeta}_{2n} + \sigma_{2n}^2 \zeta_{2n} - \frac{1}{a_n} (b_{1n} \ddot{\zeta}_{1n} + b_{2n} \ddot{W}_n) = 0, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} k_0 \frac{\partial^2 W_d}{\partial t^2} + D\Delta_2^2 W_d - T\Delta_2 W_d - \rho_2 g W_d &= -(\rho_1 h_1 + \rho_2 \tilde{h}_2) \ddot{W}_0 - g \rho_2 W_0 + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \rho_2 \left[\frac{1 - \cosh \kappa_{2n}}{k_n \sinh \kappa_{2n}} (\ddot{\zeta}_{2n} + \ddot{W}_n) - g \zeta_{2n} \right] - \rho_1 \left[\frac{\cosh \kappa_{1n} - 1}{k_n \sinh \kappa_{1n}} (\ddot{\zeta}_{1n} + \ddot{\zeta}_{2n}) + g(\zeta_{1n} - \zeta_{2n}) \right] \right\} \psi_n \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь $a_n = \rho_1 \coth \kappa_{1n} + \rho_2 \coth \kappa_{2n}$, $\Delta \rho = \rho_2 - \rho_1$, $b_{in} = \rho_i / \sinh \kappa_{in}$; $\sigma_{1n}^2 = g k_n \tanh \kappa_{1n}$ – квадрат собственных частот колебаний свободной поверхности верхней жидкости при абсолютно жесткой поверхности раздела; $\sigma_{2n}^2 = g k_n \Delta \rho / a_n$ – квадрат собственных частот колебаний поверхности раздела при абсолютно жестких свободной поверхности и упругом дне.

Вывод частотного уравнения. Рассмотрим задачу о собственных совместных колебаниях упругой пластины и жидкости. Для этого положим $\zeta_{in} = e^{i\omega t} \zeta_{in0}$, $W_d(r, t) = e^{i\omega t} w(r)$. В этом случае уравнение (17) на основании уравнений (15) – (16) переписывается следующим образом:

$$D\Delta_2^2 w - T\Delta_2 w - (k_0 \omega^2 + \rho_2 g) w = \left[(\rho_1 h_1 + \rho_2 \tilde{h}_2) \omega^2 - g \rho_2 \right] \tilde{w} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n w_n \psi_n, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{\rho_1 \omega^2 b_{2n}}{k_n \sinh \kappa_{1n} \cosh \kappa_{1n} a_n \Delta_n} \times \\
 &\times \left\{ (\cosh \kappa_{1n} - 1) \omega^2 \left[\omega^2 + (\omega^2 - \sigma_{1n}^2) \cosh \kappa_{1n} \right] - g k_n \sinh \kappa_{1n} \left[\omega^2 - (\omega^2 - \sigma_{1n}^2) \cosh \kappa_{1n} \right] \right\} + \\
 &+ \frac{\rho_2 \omega^2}{k_n \sinh \kappa_{2n} a_n \Delta_n} \left\{ b_{2n} (\omega^2 - \sigma_{1n}^2) \left[(\cosh \kappa_{2n} - 1) \omega^2 - g k_n \sinh \kappa_{2n} \right] + (\cosh \kappa_{2n} - 1) a_n \Delta_n \right\}, \\
 \Delta_n &= (\omega^2 - \sigma_{1n}^2) (\omega^2 - \sigma_{2n}^2) - \omega^4 \frac{b_{1n}}{a_n \cosh \kappa_{1n}} = \left(1 - \frac{b_{1n}}{a_n \cosh \kappa_{1n}} \right) \omega^4 - (\sigma_{1n}^2 + \sigma_{2n}^2) \omega^2 + \sigma_{1n}^2 \sigma_{2n}^2, \\
 w_n &= \frac{1}{N_n^2} \int_S w \psi_n dS, \quad \tilde{w} = \frac{1}{S} \int_S w dS \tag{19}
 \end{aligned}$$

Следует отметить, что корни уравнения $\Delta_n = 0$ описывают собственные частоты колебаний двухслойной идеальной жидкости со свободной поверхностью в круговом цилиндре с абсолютно жестким дном.

Решение уравнения (18) будем искать в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного [10–14]:

$$w = \sum_{k=1}^2 w_k^0 A_k^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{d_n} w_n \psi_n + \tilde{k}_0 \tilde{w}. \tag{20}$$

Здесь

$$\tilde{k}_0 = - \frac{(\rho_1 h_1 + \rho_2 \tilde{h}_2) \omega^2 - g \rho_2}{k_0 \omega^2 + \rho_2 g}, \quad d_n = (Dk_n^2 + T) k_n^2 - (k_0 \omega^2 + \rho_2 g),$$

а \tilde{w} , w_n и A_k^0 ($k=1,2$) – неизвестные константы.

Исключим вначале неизвестную константу \tilde{w} . Для этого подставим (20) во второе условие (19) и воспользуемся условием ортогональности собственных функций ψ_n константе:

$$\tilde{w} = \tilde{k} \sum_{k=1}^2 \tilde{w}_k^0 A_k^0, \tag{21}$$

$$\text{где } \tilde{k} = \frac{k_0 \omega^2 + \rho_2 g}{\omega^2 (\rho_1 h_1 + \rho_2 \tilde{h}_2 + k_0)}, \quad \tilde{w}_k^0 = \frac{1}{S} \int_S w_k^0 dS.$$

С учетом (21) форма прогиба (20) примет вид

$$w = \sum_{k=1}^2 \left(w_k^0 + k^* \tilde{w}_k^0 \right) A_k^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{d_n} w_n \psi_n, \tag{22}$$

$$\text{где } k^* = \tilde{k}_0 \tilde{k} = \frac{g \rho_2 - (\rho_1 h_1 + \rho_2 \tilde{h}_2) \omega^2}{\omega^2 (\rho_1 h_1 + \rho_2 \tilde{h}_2 + k_0)}.$$

Исключим теперь неизвестную константу w_n . Для этого подставим (22) в первое условие (19):

$$w_n = \sum_{k=1}^2 \frac{d_n}{d_n - b_n} E_{kn}^0 A_k^0. \tag{23}$$

Здесь

$$E_{kn}^0 = \frac{1}{N_n^2} \int_S w_k^0 \psi_n dS. \tag{24}$$

Таким образом, с учетом (23) форма прогиба (22) зависит только от неизвестных констант A_k^0 ($k=1,2$) и имеет вид

$$w = \sum_{k=1}^2 \left(w_k^0 + k^* \tilde{w}_k^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{d_n - b_n} E_{kn}^0 \psi_n \right) A_k^0. \quad (25)$$

Из условий жесткого защемления пластины (6) следует частотное уравнение собственных совместных колебаний упругого основания и двухслойной идеальной жидкости со свободной поверхностью:

$$\tilde{w}_1 C_2 - \tilde{w}_2 C_1 = 0, \quad (26)$$

где $\tilde{w}_k = B_k + k^* \tilde{w}_k^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{d_n - b_n} E_{kn}^0 B_n^*$, $B_k = w_k^0 \Big|_{r=a}$, $C_k = \frac{\partial w_k^0}{\partial r} \Big|_{r=a}$ ($k = \overline{1,2}$), $B_n^* = J_0(\xi_n)$.

Воспользовавшись разложением функций w_k^0 в ряд по собственным функциям ψ_n и формулой (24), перепишем уравнение (26) в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{d_n - b_n} (C_2 E_{1n}^0 - C_1 E_{2n}^0) B_n^* = k^* (C_1 \tilde{w}_2^0 - C_2 \tilde{w}_1^0). \quad (27)$$

Уравнение (27) более удобно для дальнейших аналитических исследований, однако из-за разложения функций w_k^0 в ряд для достижения заданной точности необходимо учитывать большее число членов в ряде этого уравнения, чем для предыдущего уравнения (26).

Частотный спектр уравнений (26) – (27) при $\rho_1 < \rho_2$ состоит из трех наборов частот, отвечающих частотам колебаний свободной поверхности, поверхности раздела жидкостей и упругого дна. При отсутствии поверхности раздела ($\rho_1 = \rho_2$) или в случае абсолютно жесткого дна частотный спектр будет состоять из двух наборов.

Отметим, что если в уравнении (26) положить $\rho_1 = \rho_2$, $\tilde{h}_2 = h_2$ и $h_1 + h_2 = h$, то это уравнение совпадает с частотным уравнением работы [15] при наличии свободной поверхности у жидкости.

Частные случаи частотного уравнения собственных совместных колебаний упругого основания и двухслойной жидкости со свободной поверхностью. Уравнения (26) – (27) довольно общие и включают в себя ряд частых случаев, которые представляют самостоятельный интерес.

Пластина вырождается в мембрану ($D = 0$). В этом случае в граничных условиях (6) нужно рассмотреть только первое условие и в коэффициенте d_n положить изгибную жесткость равной нулю. Частотные уравнения (26) – (27) примут соответственно вид

$$\tilde{w}_1 = 0, \quad (28)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{d_n - b_n} E_{1n}^0 B_n^* = -k^* \tilde{w}_1^0. \quad (29)$$

Пластина вырождается в абсолютно жесткую. В этом случае из уравнений (15) – (17) остаются только первые два и частотное уравнение запишется так:

$$\Delta_n = 0. \quad (30)$$

В безразмерном виде уравнение (30) примет вид

$$(\rho_{12} + \coth \kappa_{1n} \coth \kappa_{2n}) x^2 - (\coth \kappa_{1n} + \coth \kappa_{2n}) x + 1 - \rho_{12} = 0, \quad (31)$$

где $x = \omega^2 / g k_n$, $\kappa_{in} = \xi_n H_i$, $H_i = \frac{h_i}{a}$, $\rho_{12} = \rho_1 / \rho_2$.

Из вида левой части уравнения (31) следует, что зависимость x от H_1 и H_2 симметрична.

При $\rho_{12} < 1$ уравнение (31) имеет два положительных корня, которым соответствуют два набора частот, характеризующие колебания свободной и внутренней поверхностей, а при $\rho_{12} = 1$ это уравнение имеет корни $x_1 = \tanh(\kappa_{1n} + \kappa_{2n})$ и $x_2 = 0$, отвечающие колебаниям только свободной поверхности.

Для абсолютно жесткого дна можно рассмотреть два предельных случая: $h_2 = \infty$ и $h_1 = \infty$. В первом случае уравнение (31) имеет корни

$$x_1 = (1 - \rho_{12}) / (\rho_{12} + \coth \kappa_{1n}) \text{ и } x_2 = 1, \quad (32)$$

а во втором –

$$x_1 = (1 - \rho_{12}) / (\rho_{12} + \coth \kappa_{2n}) \text{ и } x_2 = 1. \quad (33)$$

Из формул (32) следует, что добавление второй жидкости с плотностью ρ_1 и глубиной h_1 к первой бесконечно глубокой жидкости ($h_2 = \infty$) с плотностью ρ_2 приводит к появлению новой частоты ($\sigma_{1n}^2 = gk_n(1 - \rho_{12}) / (\rho_{12} + \coth \kappa_{1n})$) при сохранении прежней частоты ($\sigma_{2n}^2 = gk_n$). Из формул (33) следует, что добавление второй бесконечно глубокой жидкости ($h_1 = \infty$) с плотностью ρ_1 к первой жидкости с плотностью ρ_2 и глубиной h_2 приводит также к появлению новой частоты ($\sigma_{1n}^2 = gk_n(1 - \rho_{12}) / (\rho_{12} + \coth \kappa_{2n})$) при сохранении прежней частоты ($\sigma_{2n}^2 = gk_n$). В обоих случаях новая частота соответствует замене свободной поверхности твердой «крышкой» и она меньше прежней. Таким образом, добавление второй жидкости привело к уменьшению частот колебаний, что понятно из физических соображений. Это также отмечалось в монографии [16].

На рис. 1–4 приведены графики зависимости двух корней уравнения (31), т.е. квадратов двух безразмерных частот от безразмерной плотности ρ_{12} для $H_1 = 0.1, 0.5$.

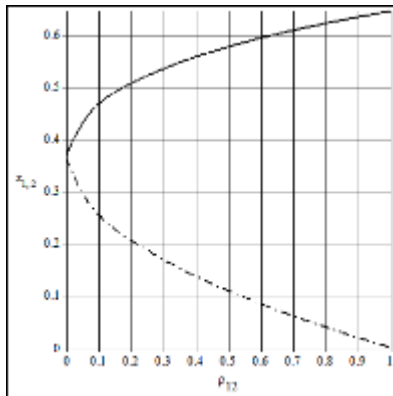


Рис.1. Графики зависимости $x_{1,2}$ от ρ_{12} при $H_1 = 0.1, H_2 = 0.1$

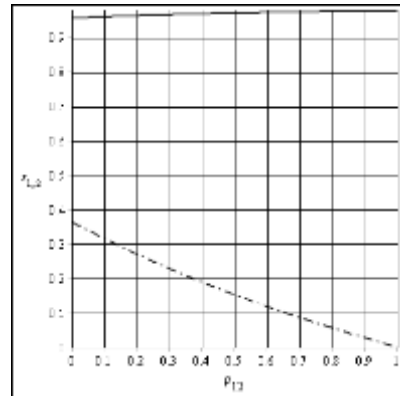


Рис.2. Графики зависимости $x_{1,2}$ от ρ_{12} при $H_1 = 0.1, H_2 = 0.5$

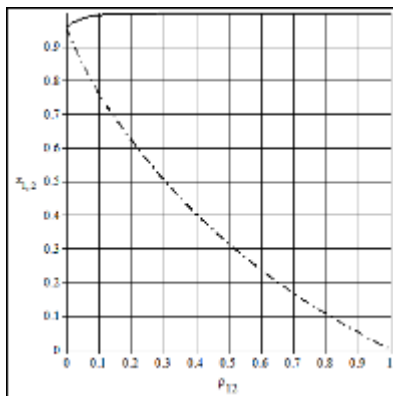


Рис.3. Графики зависимости $x_{1,2}$ от ρ_{12} при $H_1 = 0.5, H_2 = 0.5$

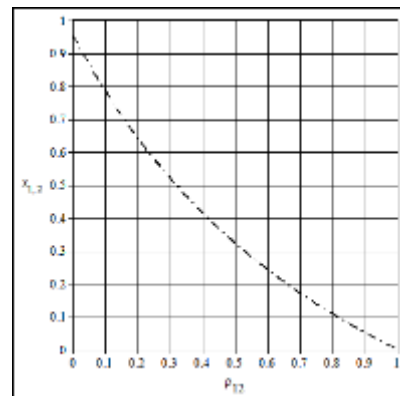


Рис.4. Графики зависимости $x_{1,2}$ от ρ_{12} при $H_1 = 0.5, H_2 = 1.0$

На основании приведенных графиков можно утверждать, что при $H_1, H_2 \geq 0.5$ можно уже пользоваться полученными приближенными формулами (32) и (33).

Верхняя жидкость отсутствует. В этом случае в коэффициентах уравнения (26) – (30) нужно положить $\rho_1 = 0$. Этот случай был рассмотрен в статье [15] на основании более общего подхода и без учета измененной глубины жидкости.

Численные исследования. При проведении численных исследований наибольший интерес будет представлять влияние упругости дна на частотный спектр рассматриваемой задачи.

Введем безразмерные переменные:

$$\Omega^2 = \frac{\omega^2 a}{g}, \quad \tilde{D} = \frac{D}{\rho_2 g a^4}, \quad \tilde{T} = \frac{T}{\rho_2 g a^2}, \quad \tilde{k}_{01} = \frac{k_0}{\rho_2 a}.$$

Пусть дно является абсолютно упругим ($T=0$), тогда будем иметь [14]

$$w_1^0 = J_0\left(\mu \frac{r}{a}\right), \quad w_2^0 = I_0\left(\mu \frac{r}{a}\right), \quad \mu^4 = \frac{\tilde{k}_{01} \Omega^2 + 1}{\tilde{D}},$$

$$E_{1n}^0 = \frac{2\mu J_1(\mu)}{(\mu^2 - \xi_n^2) J_0(\xi_n)}, \quad E_{2n}^0 = \frac{2\mu I_1(\mu)}{(\mu^2 + \xi_n^2) J_0(\xi_n)}.$$

Численные исследования частотного уравнения (26) в безразмерном виде были проведены для следующих значений безразмерных параметров: $\rho_{12} = 0..1$, $H_i = 0..2$, $\tilde{k}_{01} = 0..2$, $\tilde{D} = 0.1..10$. Для случая $\rho_1 = \rho_2$ ($\rho_{12} = 1$) на рис. 5–6 с учетом пяти-шести членов в рядах уравнения (26) ($n = \overline{1,5}$ или $n = \overline{1,6}$) черным цветом представлены графики квадратов безразмерной первой частоты третьего набора Ω_{31}^2 от безразмерной жесткости \tilde{D} для различных глубин заполнения $H_1 = H_2 = 0.25, 0.5, 0.75$ (рис. 5) и массовой характеристики пластины $\tilde{k}_{01} = 0.5, 1.0, 2.0$ (рис. 6). На рис. 5 нижний график черного цвета соответствует $H_1 = H_2 = 0.75$, средний – $H_1 = H_2 = 0.5$, а верхний – $H_1 = H_2 = 0.25$. На рис. 6 нижний график черного цвета соответствует $\tilde{k}_{01} = 2.0$, средний – $\tilde{k}_{01} = 1.0$, а верхний – $\tilde{k}_{01} = 0.5$. Аналогичные графики приведены для случая $\rho_{12} = 0.5$ серым цветом.

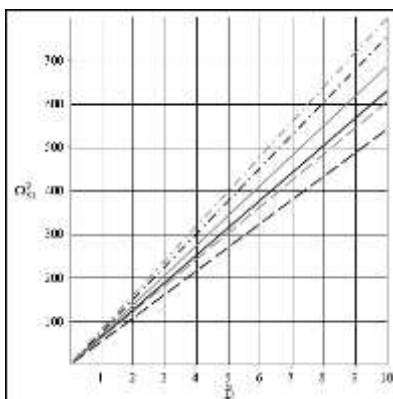


Рис. 5. Графики зависимости Ω_{31}^2 от \tilde{D} для $\rho_{12} = 0.5, 1.0$ и различных H_i

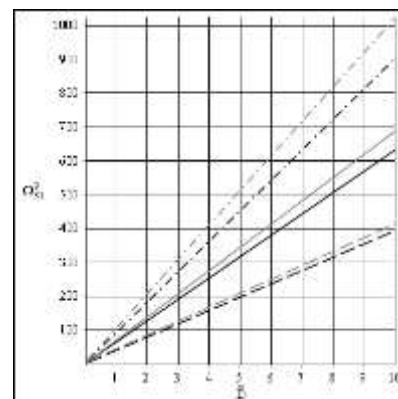


Рис. 6. Графики зависимости Ω_{31}^2 от \tilde{D} для $\rho_{12} = 0.5, 1.0$ и различных \tilde{k}_{01}

В табл. 1 приведены значения безразмерных квадратов частот первого набора Ω_{1n}^2 (левый столбец) и второго набора Ω_{2n}^2 (правый столбец), вычисленные для абсолютно жесткого дна по уравнению (31), для значений $H_1 = H_2 = 0.5$ и $\rho_{12} = 0.25, 0.5, 1.0$.

Табл. 1. Зависимость квадратов безразмерных частот первого набора Ω_{1n}^2 и второго набора Ω_{2n}^2 для значений $H_1 = H_2 = 0.5$ и $\rho_{12} = 0.25, 0.5, 1.0$ в случае абсолютно жесткого дна

$\rho_{12} = 0.25$	$\rho_{12} = 0.5$	$\rho_{12} = 1.0$
3.819 2.151	3.825 1.207	3.828 0.0
7.016 4.197	7.016 2.333	7.016 0.0
10.173 6.103	10.173 3.391	10.173 0.0

В табл. 2–4 приведены значения Ω_{1n}^2 (левый столбец), Ω_{2n}^2 (средний столбец) и Ω_{3n}^2 (правый столбец) в зависимости от числа членов в рядах уравнения (34) ($n = \overline{1,3}$) для параметров $H_1 = H_2 = 0.5, \tilde{k}_{01} = 1, \tilde{D} = 1$ и $\rho_{12} = 0.25$ (табл. 2), $\rho_{12} = 0.5$ (табл. 3), $\rho_{12} = 1.0$ (табл. 4).

Табл. 2 Зависимость квадратов безразмерных частот первого, второго и третьего наборов от числа членов в рядах уравнения (34) при $\rho_{12} = 0.25$

$n = 1$			$n = \overline{1,2}$			$n = \overline{1,3}$		
3.819	2.151	71.599	3.819	2.151	71.589	3.819	2.151	71.589
		1365.144	7.016	4.197	1274.066	7.016	4.197	1273.439
		7507.625			7281.578	10.173	6.103	6887.477

Табл. 3 Зависимость квадратов безразмерных частот первого, второго и третьего наборов от числа членов в рядах уравнения (34) при $\rho_{12} = 0.5$

$n = 1$			$n = \overline{1,2}$			$n = \overline{1,3}$		
3.825	1.207	68.38	3.825	1.207	68.372	3.825	1.207	68.371
		1345.962	7.016	2.333	1257.714	7.016	2.333	1257.084
		7469.98			7238.249	10.173	3.391	7238.249

Табл. 4 Зависимость квадратов безразмерных частот первого и третьего наборов от числа членов в рядах уравнения (34) при $\rho_{12} = 1.0$

$n = 1$			$n = \overline{1,2}$			$n = \overline{1,3}$		
3.828	0.0	62.772	3.828	0.0	62.764	3.828	0.0	62.764
		1313.866	7.016	0.0	1230.289	7.016	0.0	1229.657
		7407.853			7166.632	10.173	0.0	6789.014

Из приведенных таблиц видна хорошая сходимость рядов уравнения (26), слабое изменение квадратов безразмерных частот первого Ω_{1n}^2 и второго Ω_{2n}^2 наборов и существенное изменение квадрата безразмерной частоты третьего набора Ω_{3n}^2 , а также то, что с увеличением числа членов ряда добавляются новые частоты и уточняются предыдущие.

На основании проведенных численных исследований можно сделать следующие выводы:

- 1) Частотный спектр состоит из трех наборов частот, соответствующих колебаниям свободной, внутренней поверхностей и упругого дна. В достаточно широком диапазоне изменения параметров механической системы наблюдается слабое изменение частот первого и второго наборов и существенное изменение частот третьего набора;

- 2) Зависимость первой частоты третьего набора Ω_{31}^2 от безразмерной жесткости \tilde{D} в большинстве случаях почти линейная;
- 3) С уменьшением глубин заполнения H_i происходит незначительное уменьшение частот первого и второго наборов и существенное увеличение третьего;
- 4) С уменьшением массовой характеристики пластины \tilde{k}_{01} происходит значительное увеличение частот только третьего набора. Наибольшее увеличение происходит для безмассовой пластины ($\tilde{k}_{01}=0$);
- 5) Учет измененной глубины заполнения второй жидкости за счет статического прогиба для рассматриваемого круга параметров внес поправки на частотный спектр не более 3%;
- 6) В случае постоянной массы жидкости стратификация существенно влияет только на первый и второй наборы частот и незначительно - на третий;
- 7) Отмечается хорошая сходимость рядов в частотных уравнениях. Так, с достаточной для практики точностью в этих рядах можно удерживать не более пяти членов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петренко М.П. Собственные колебания жидкости со свободной поверхностью и упругого дна цилиндрической полости / М.П. Петренко // Прикладная механика. – 1969. – Т. 5, № 6. – С. 44–50.
2. Петренко М.П. Вынужденные колебания жидкости и упругого дна цилиндрического бака / М.П. Петренко // Прикладная механика. – 1970. – Т. 6, № 6. – С. 127–131.
3. Пожалостин А.А. Свободные колебания жидкости в жестком круговом цилиндрическом сосуде с упругим плоским дном / А.А. Пожалостин // Изв. вузов. Сер. Авиационная техника. – 1963. – №4. – С. 25–32.
4. Карнаух А.Ю. Свободные колебания плоского упругого дна коаксиального цилиндрического сосуда и идеальной жидкости со свободной поверхностью / А.Ю. Карнаух // Вісн. Донецького національного ун-ту. Сер. А. – 2008. – Вип. 1. – С. 202–206.
5. Карнаух А.Ю. Собственные формы совместных колебаний упругого дна и жидкости со свободной поверхностью / А.Ю. Карнаух, Н. К. Дидок // Труды ИПММ НАН Украины. – 2009. – Т. 18. – С. 78–84.
6. Карнаух А.Ю. Собственные колебания упругого дна цилиндрического сосуда и жидкости со свободной поверхностью / А.Ю. Карнаух, Н.К. Дидок // Труды ИПММ НАН Украины. – 2010. – Т. 20. – С. 102–108.
7. Лакиза В.Д. Исследование динамических процессов в жестком цилиндрическом сосуде с упругим дном, частично заполненным жидкостью / В.Д. Лакиза // Прикладная механика. – 2006. – Т.42, № 11. – С. 114–120.
8. Дидок Н.К. Поперечные колебания цилиндра с упругим дном, содержащего жидкость со свободной поверхностью / Н.К. Дидок // Труды ИПММ НАН Украины. – 2011. – Т. 22. – С. 71–108.
9. Дидок Н.К. Динамика и устойчивость колебаний цилиндрического резервуара с упругим дном и жидкостью со свободной поверхностью / Н.К. Дидок, Ю.Н. Кононов // Изв. вузов Сев.-Кав. регион. Естеств. науки. – 2013, № 5. – С. 30–34.
10. Дидок Н.К. Динамика и устойчивость колебаний цилиндрического резервуара с идеальной жидкостью и упругими основаниями / Н.К. Дидок, Ю.Н. Кононов // Труды ИПММ НАН Украины. – 2013. – Т. 27. – С. 102–108.
11. Карнаух А.Ю. Свободные колебания упругих оснований двусвязного цилиндрического сосуда с жидкостью / А.Ю. Карнаух // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела: матер. VI Междунар. науч. конф. – Донецк: Юго-Восток, 2010. – С. 164–168.
12. Карнаух А.Ю. Колебания упругой пластинки, разделяющей жидкости в цилиндрическом сосуде с упругими основаниями // Изв. вузов Сев.-Кав. регион. Естеств. науки. – 2013, № 2. – С. 33–36.
13. Докучаев Л.В. Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами / Л.В. Докучаев. – М.: Машиностроение, 1987. – 232с.
14. Кононов Ю.Н. О решении обобщенного неоднородного бигармонического уравнения в задачах гидроупругости / Ю.Н. Кононов, Н.К. Дидок, Ю.А. Джуха // Вісн. Донецького національного ун-ту. Сер. А. – 2014. – Вип. 1. – С. 64–69.
15. Кононов Ю.Н. Осесимметричные колебания упругих оснований и идеальной жидкости в жестком цилиндрическом резервуаре / Ю.Н. Кононов, В.Ф. Русаков, Ю.А. Джуха // Вісн. Запорізького національного ун-ту. Сер. Фіз.-мат. – 2015. – №. 2. – С. 105-114.
16. Мышкис А.Д. Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости / А.Д. Мышкис, В.Г. Бабский, М.Ю. Жуков, Н.Д. Копачевский, Н.А. Слобожанин, А.Д. Тюпцов / Под ред. А.Д. Мышкис – К.: Наук. думка, 1992. – 592с.
17. Гончаров Д.А. Осесимметричные колебания двухфазной жидкости в цилиндрическом баке [Электронный ресурс] / Д.А. Гончаров // Наука и образование электронное научно-техническое издание. – Электронные данные. – [Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012]. – № 4. – Режим доступа: <http://technomag.bmstu.ru/doc/362856.html> (дата обращения: 19.02.2014).
18. Гончаров Д.А. Динамика двухслойной жидкости, разделенной упругой перегородкой с учетом сил поверхностного натяжения [Электронный ресурс] / Д.А. Гончаров // Наука и образование электронное

- научно-техническое издание. – Электронные данные. – [Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013]. – № 11. – Режим доступа: <http://technomag.bmstu.ru/doc/619258.html> (дата обращения: 19.02.2014).
19. Пожалостин А.А. Свободные осесимметричные колебания двухслойной жидкости с упругим разделителем между слоями при наличии сил поверхностного натяжения [Электронный ресурс] / А.А. Пожалостин, Д.А. Гончаров // Наука и инновации: инженерный журнал. – Электронные данные. – [Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013] – № 12. – Режим доступа: <http://engjournal.ru/catalog/eng/teormach/1147.html> (дата обращения: 19.02.2014).

**ОСЕСИМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ ДВОШАРОВОЇ ІДЕАЛЬНОЇ РІДИНИ
З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ В ЖОРСТКОМУ КРУГОВОМУ ЦИЛІНДРИЧНОМУ
РЕЗЕРВАРІ З ПРУЖНИМ ДНОМ**

Ю.М. Кононов, В.П. Шевченко, Ю.О. Джуха

РЕЗЮМЕ

Виведене і досліджене частотне рівняння власних сумісних осесиметричних коливань важкої двошарової ідеальної рідини в жорсткому круговому циліндричному резервуарі з пружною основою у вигляді кругової пластини. Частотне рівняння уточнене з урахуванням зміненої глибини нижньої рідини через статичний прогин дна. Розглянуті випадки мембрани та абсолютно твердої пластини. Для широкого кола параметрів механічної системи, що розглядається, проведені та проаналізовані чисельні дослідження.

Ключові слова: гідропружність, кругова пластинка, ідеальна двошарова рідина, осесиметричні коливання

**AXISYMMETRIC VIBRATIONS OF A TWO-LAYER IDEAL LIQUID
WITH A FREE SURFACE IN A RIGID CIRCULAR CYLINDRICAL
TANK WITH ELASTIC BOTTOM**

Yu.M. Kononov, V.P. Shevchenko, Yu.O. Dzhukha

SUMMARY

Frequency equation of natural axisymmetric vibrations of a two-layer heavy ideal liquid in a rigid circular cylindrical tank with elastic foundation in the form of a circular plate is derived and investigated. The frequency equation is updated adjusting for modified depth of the liquid due to static deflection of bottom. The cases of membrane and absolutely rigid plate are considered. Numerical investigations are conducted and analyzed for a wide range of parameters of the considered mechanical system.

Key words: hydroelasticity, circular plate, ideal two-layer liquid, axisymmetric vibrations.