УДК 531.36, 534.16

В.Е. Пузырев, Е.В. Камынина, Н.В Савченко
Донецкий национальный университет, Винница, Украина

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЕМПФЕРА ПАССИВНОГО ТИПА ДЛЯ СТАБИЛИЗАЦИИ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ МАЯТНИКА ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ

Рассмотрена задача о пассивной стабилизации малых колебаний маятника переменной длины, который представляет собой массу, подвешенную на пружине. Показано, что добавление в основную систему динамического абсорбера делает нижнее положение равновесия маятника асимптотически устойчивым. Этот результат справедлив для любых значений параметров изучаемой механической системы, в частности, для любых соотношений между частотами продольных и поперечных колебаний маятника. В качестве метода исследования использован прямой метод Ляпунова.

Ключевые слова: маятник переменной длины, динамический абсорбер, критический случай, функция Ляпунова.

Введение. Проблема устранения нежелательных колебаний, возникающих в механических системах, занимает важное место в современной теории колебаний. Одним из распространенных методов решения данной задачи является добавление в исходную систему (ее называют *основной)* различных демпфирующих устройств. Последние делятся на пассивные и активные. К преимуществам демпферов пассивного типа можно отнести их относительную простоту, надежность и низкие энергетические затраты. (Использование демпферов активного типа связано с установкой различного рода усилителей и сенсорной электроники.) В настоящее время используются различные техники пассивного демпфирования колебаний [1]. Можно выделить вязкоупругие материалы, вязкие жидкости, магнитные устройства и пьезокерамические демпферы. Использование вязкоупругих материалов является широко распространенным в различных областях современной техники, как для относительно простых механических систем [2,3], так и для достаточно сложных конструкций [4,5].

Типичным примером демпфера пассивного типа является динамический абсорбер (ДА) или динамический поглотитель колебаний. Он представляет собой присоединенную массу, которая обычно моделируется как материальная точка и характеризуется массой, жесткостью и коэффициентом вязкого трения. Абсорбер может быть использован для успокоения свободных колебаний механической системы [2,6,7], а также вибраций, вызванных действием внешней периодической силы [3,4]. В случае обычного маятника ДА использовался в работах [6,7], а в случае двойного маятника – в статьях [8,9].

Постановка задачи. Рассмотрим следующую механическую систему. Основная система представляет собой маятник переменной длины: материальная точка O_2 массой M, жестко соединенная с муфтой O_1 (см. Рис.1), может перемещаться вдоль прямолинейной направляющей $\mathcal{L}$ под действием силы тяжести и линейной восстанавливающей силы (пружина). Один конец направляющей, которая моделируется жестким невесомым стержнем, с помощью цилиндрического шарнира закреплен в неподвижной точке O. (Массой муфты и каркаса маятника пренебрегаем.) К маятнику присоединен ДА: материальная точка O_3 массой m соединяется с муфтой посредством вязко-упругого шарнира и может совершать колебательное движение вдоль $\mathcal{L}$. Жесткости пружин маятника и абсорбера равны соответственно $\tilde{\kappa}_1$ и $\tilde{\kappa}_2$, $|O_1O_2| = l$, коэффициент вязкого трения обозначим через $\tilde{h}$.

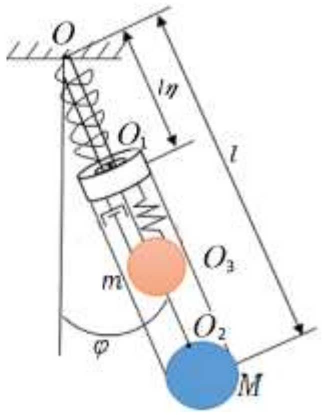

Рис.1

В качестве обобщенных координат возьмем угол между осью маятника и направлением силы тяжести и безразмерные величины, характеризующие, соответственно, расстояния от муфты до неподвижной точки и абсорбера от муфты: $\eta = |OO_1|/l,\ u = |O_1O_3|/l$.

Свяжем с точкой O прямоугольную декартову систему координат, ось ординат которой направлена в сторону, противоположную вектору силы тяжести. Тогда радиус-векторы точек O_2 и O_3 запишутся

$$\mathbf{r}_1 = l(\eta+1)(\sin\varphi, -\cos\varphi),\ \ \mathbf{r_2} = (l\eta + lu)(\sin\varphi, -\cos\varphi)$$

а векторы скоростей

$$\mathbf{v_1} = l[\dot\eta(\sin\varphi, -\cos\varphi) + \dot\varphi(\eta+1)(\cos\varphi, \sin\varphi)],$$
$$\mathbf{v}_2 = l[(\dot\eta + \dot u)(\sin\varphi, -\cos\varphi) + \dot\varphi(\cos\varphi, \sin\varphi)].$$

Для кинетической и потенциальной энергий рассматриваемой механической системы имеем, соответственно

$$\mathrm{K} = \frac{1}{2} l^2 \{M[(\dot\eta^2 + (\eta+1)^2\dot\varphi^2] + m[(\dot\eta+\dot u)^2 + \dot\varphi^2(\eta+u)^2]\}, \tag{1}$$

$$\Pi = -gl[M(\eta+1)\cos\varphi + m(\eta+u)\cos\varphi] + \frac{1}{2}\tilde\kappa_1 l^2(\eta-\eta^{(0)})^2 + \frac{1}{2}\tilde\kappa_2 l^2 (u-u^{(0)})^2.$$

$\mathrm{g} -$ ускорение силы тяжести, значения $l\eta^{(0)}, lu^{(0)}$ соответствуют длинам пружин в недеформированном состоянии. Функция Релея имеет вид $R = -hl^2\dot u^2$.

Уравнения движения. Запишем уравнения движения рассматриваемой системы в форме Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = \overline{1,3}). \tag{2}$$

Найдем положения равновесия. Приравнивая нулю градиент потенциальной энергии, получаем

$$\mathrm{gl}\sin\varphi\left[\mathrm{M}(\eta+1) + \mathrm{m}(\eta+\mathrm{u})\right] = 0, \quad -\mathrm{gl}(\mathrm{M}+\mathrm{m})\cos\varphi + \tilde\kappa_1 \mathrm{l}^2\left(\eta - \eta^{(0)}\right) = 0,$$
$$-\mathrm{glm}\cos\varphi + \tilde\kappa_2 \mathrm{l}^2\left(\mathrm{u} - \mathrm{u}^{(0)}\right) = 0. \tag{3}$$

Поскольку $\eta > 0, u > 0,$ то из первого равенства (3) получаем $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$. Тогда нижнему положению равновесия соответствуют значения

$$\eta_0 = \eta^{(0)} + \mathrm{g}\frac{\mathrm{M}+\mathrm{m}}{\mathrm{l}\tilde\kappa_1}, \ \ u_0 = \mathrm{u}^{(0)} + \mathrm{g}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{l}\,\tilde\kappa_2}. \tag{4}$$

Изучим вопрос об устойчивости нижнего положения равновесия данной механической системы, т.е. решения

$$\varphi = 0,\ \eta = \eta_0,\ u = u_0, \quad \dot\varphi = 0, \quad \dot\eta = 0, \quad \dot u = 0. \tag{5}$$

Очевидно, что оно является устойчивым (потенциальная энергия имеет минимум), но будет ли устойчивость асимптотической? Для ответа на этот вопрос воспользуемся прямым методом Ляпунова. Введем безразмерные параметры и время по формулам

$$\nu = m/M,\ \delta = (1+\eta_0)^2 + (\eta_0+u_0)^2,\ p = (1+\nu)/\delta,\ p_1 = \nu/\delta,\ p_2 = \nu(\eta_0+u_0)/\delta,$$

$$\mu = (1+\eta_0)/\delta + p_2,\ \kappa_1 = \tilde\kappa_1 l/(\mathrm{Mg}\delta),\ \kappa_2 = \tilde\kappa_2 l/(\mathrm{Mg}\delta),\ h = \tilde{\mathrm{h}}\sqrt{l}/\left(\mathrm{M}\delta\sqrt{\mathrm{g}}\right), \tau = \sqrt{\mathrm{g}/\mathrm{l}}\ \mathrm{t}. \tag{6}$$

Считаем, что жесткость $\tilde\kappa_2$ пружины абсорбера достаточно велика, чтобы в положении равновесия материальная точка O_3 находилась внутри “тела маятника”, т.е. $u_0 < 1$.

Переходя к возмущениям $\varphi = \varphi^*$, $\eta = \eta_0 + \eta^*$, $u = u_0 + u^*$, запишем уравнения возмущенного движения (верхний индекс “*” в целях удобства ниже опускаем)

$$(1+\mu\eta+p_2u)\varphi'' + (\mu\eta' + p_2u')\varphi' + (\mu + p\eta + p_1u)\varphi + \ldots = 0,$$
$$p\eta'' + p_1u'' + \kappa_1\eta + \frac{1}{2}p\varphi^2 - \mu\varphi'^2 + \ldots = 0, \tag{7}$$
$$p_1\eta'' + p_1u'' + hu' + \kappa_2u + \frac{1}{2}p_1\varphi^2 - p_2\varphi'^2 + \ldots = 0.$$

Здесь многоточием обозначены совокупности слагаемых, имеющих порядок малости выше второго относительно возмущений и их производных, штрихом обозначено дифференцирование по времени τ.

Система уравнений первого приближения для (7) распадается на две подсистемы. Первому уравнению соответствует пара чисто мнимых характеристических корней $\pm i\sqrt{\mu}$, а второму и третьему – характеристический многочлен

$$p_1(p-p_1)\lambda^4 + hp\lambda^3 + (\kappa_1 p_1 + p\kappa_2)\lambda^2 + \kappa_1 h\lambda + \kappa_1\kappa_2.$$

Все его коэффициенты положительны, равно как и определитель Гурвица

$$\begin{vmatrix} hp & \kappa_1 h & 0 \\ p(p-p_1) & \kappa_1 p_1 + p\kappa_2 & \kappa_1\kappa_2 \\ 0 & hз & \kappa_1 h \end{vmatrix} = h^2\kappa_1{}^2 p_1{}^2.$$

Поэтому, согласно критерию Льенара-Шипара [10], все четыре корня имеют отрицательные вещественные части. Соответственно, для системы (7) получаем критический (по Ляпунову) случай пары чисто мнимых корней.

Решение задачи устойчивости. Для решения поставленной задачи устойчивости воспользуемся результатами работы [9]. Рассмотрим вспомогательную систему

$$\begin{gathered} \varphi'' = -\mu\eta'\varphi' + p_2 u'\varphi' - \mu\varphi + p\eta\varphi + p_1 u\varphi - \mu^2\eta\varphi + \mu p_2 u\varphi, \\ \eta'' = \frac{1}{2(p-p_1)}[2hu' - 2\kappa_1\eta + 2\kappa_2 u - p\varphi^2 + 2\mu\varphi'^2 + p_1\varphi^2 - 2p_2\varphi'^2], \\ u'' = -\frac{1}{2(p-p_1)}[2phu' + 2p\kappa_2 u - 2\kappa_1 p_1\eta + pp_1\varphi^2 - 2pp_2\varphi'^2 + pp_1\varphi^2 + 2p\mu\varphi'^2] \end{gathered} \tag{8}$$

которая получается из уравнений возмущенного движения при отбрасывании слагаемых порядка малости выше второго относительно возмущений обобщенных координат и их производных. Перепишем систему (8) в виде

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau} = \boldsymbol{\Lambda x} + \sum_{s=1}^{4}\xi_s \boldsymbol{C}^{(s)}\boldsymbol{x}, \qquad \frac{d\boldsymbol{\xi}}{d\tau} = \boldsymbol{B\xi} + \sum_{s=1}^{2}x_s \boldsymbol{D}^{(s)}\boldsymbol{x}, \tag{9}$$

где

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T = \left(\varphi, -\frac{\varphi'}{\omega}\right)^T, \ \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)^T = (\eta, \eta', u, u')^T, \ \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\omega} = \sqrt{\mu},$$

$\boldsymbol{C}^{(s)}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}^{(s)}$ – квадратные матрицы соответствующих порядков, верхний индекс T означает транспонирование. Вводя комплексную переменную $z = x_1 + ix_2$ имеем

$$\begin{gathered} z' = i\omega z + \frac{1}{2\omega}\Big[i\left(p-\omega^4\right)\xi_1\left(z+\bar z\right) - \omega^3\xi_2\left(z-\bar z\right) + i\left(p_1 - p_2\omega^2\right)\xi_3\left(z+\bar z\right) - p_2\omega\xi_4\left(z-\bar z\right)\Big], \\ \bar z' = -i\omega\bar z + \frac{1}{2\omega}\Big[-i\left(p-\omega^4\right)\xi_1\left(z+\bar z\right) + \omega^3\xi_2\left(z-\bar z\right) - i\left(p_1 - p_2\omega^2\right)\xi_3\left(z+\bar z\right) + p_2\omega\xi_4\left(z-\bar z\right)\Big], \\ \xi_1' = \xi_2, \qquad \xi_2' = \frac{1}{p-p_1}\Big\{-\kappa_1\xi_1 + \kappa_2\xi_3 + h\xi_4 + 0.125\cdot[\left(-p+p_1+2p_2\omega^3-2\omega^4\right)z^2 + \\ + 2\left(-p+p_1-2p_2\omega^3+2\omega^4\right)z\bar z + \left(-p+p_1+2p_2\omega^3-2\omega^4\right)\bar z^2]\Big\}, \\ \xi_3' = \xi_4, \qquad \xi_4' = -\frac{1}{p_1\left(p-p_1\right)}\left[-\kappa_1 p_1\xi_1 + \kappa_2 p\,\xi_3 + h\,p\,\xi_4 + \frac{1}{4}\omega^2\left(pp_2 - p_1\omega^2\right)\left(z-\bar z\right)^2\right]. \end{gathered} \tag{10}$$

Рассмотрим вещественнозначную функцию Ляпунова вида

$$V(z,\bar z,\xi) = \alpha z\bar z + \beta V_*^{(2)}(\xi) + V^{(3)}(z,\bar z,\xi) + V^{(4)}(z,\bar z),$$

где α, β – произвольные вещественные числа, $V_*^{(2)}(\xi)$ – положительно определенная квадратичная форма, полная производная которой по времени в силу линейной части системы (10) $V'^{(2)}(\xi)$ является отрицательно определенной,

$$V^{(3)} = \xi_1(k_{12}z^2 + k_{11}z\overline{z} + k_{10}\overline{z}^2) + \xi_2(k_{22}z^2 + k_{21}z\overline{z} + k_{22}\overline{z}^2) + \xi_3(k_{32}z^2 + k_{31}z\overline{z} + k_{30}\overline{z}^2) + $$
$$+\xi_4(k_{42}z^2 + k_{41}z\overline{z} + k_{40}\overline{z}^2).$$

Согласно [9], коэффициенты форм $V^{(3)}, V^{(4)}$ можно выбрать таким образом, что полная производная по времени функции $V(z,\overline{z},\xi)$ в силу системы (10) будет равна

$$dV/d\tau = \beta V'^{(2)}(\xi) + G(z\overline{z})^2 + V'^{(4)}(z,\overline{z},\xi) + \cdots$$

Здесь G – вещественная постоянная, зависящая от коэффициентов системы (10), форма четвертого порядка $V'^{(4)}(z,\overline{z},\xi)$ является квадратичной относительно переменных ξ_s $\left(s = \overline{1,4}\right)$, следовательно, имеет более высокий порядок малости, чем $V'^{(2)}(\xi)$, многоточием обозначена совокупность слагаемых порядка выше четвертого. Если $G<0$, то функция V вместе со своей производной V' удовлетворяют условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости [11], соответственно нулевое решение системы (9) асимптотически устойчиво.

Выражение для G имеет вид

$$G = -\frac{1}{4p_1(p-p_1)}\left\{p_1\left[p - p_1 + 2\mu(\mu - p_2)\right]\left(Rek_{22} - k_{21})\right) + 2\mu\left(pp_2 - \mu p_1\right)\left(Rek_{42} - k_{41}\right)\right\}. \tag{11}$$

Коэффициенты $k_{js}\left(j = \overline{1,4}; s = 1,2\right)$ находятся из условия обращения в ноль формы третьего порядка $V'^{(3)}(z,\overline{z},\xi)$ в представлении производной функции Ляпунова. Данное условие приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно указанных коэффициентов, правые части этих уравнений суть линейные комбинации величин α и β. Поэтому справедливы представления $k_{js} = \alpha k_{js}^{\alpha} + \beta k_{js}^{\beta}$ и, как следствие, равенство $G = \alpha G^{\alpha} + \beta G^{\beta}$, где величины с верхним индексом зависят только от коэффициентов системы (10) (и не зависят от параметров α, β). Таким образом, для нахождения G^{α} необходимо знание только компонент k_{js}^{α}, последние могут быть найдены, если формально положить $\beta = 0$. Имеем следующую систему

$$\begin{cases} 2k_{12}^{\alpha} - 4ip_1\omega k_{22}^{\alpha} = -\mu p_1, \\ \omega p_1(2\kappa_1 + 8\omega - 8\mu\omega^2)k_{22}^{\alpha} - 2\omega\kappa_1 k_{42}^{\alpha} = ip_1[(p_1 - p)(2\omega^2\mu + p) + \omega^2\mu p], \\ 2(hp + 2ip_1^2 p - 2ip_1 p)k_{42}^{\alpha} + 2p_1(p_1 - p)k_{32}^{\alpha} - 2p_1 hk_{22}^{\alpha} = -p_1 p_2(p_1 - p), \\ 2\omega p\kappa_2 k_{42}^{\alpha} - 2p_1\omega\kappa_2 k_{22}^{\alpha} = ip_1[\omega^2 p_2(p_1 - p) - p_1 p]. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \kappa_2(p_1 k_{41}^{\alpha} - pk_{21}^{\alpha}) = 0, \\ p\kappa_1(k_{21}^{\alpha} - k_{41}^{\alpha}) = 0. \end{cases}$$

Решая последнюю, находим $k_{21}^{\alpha} = 0,\ k_{41}^{\alpha} = 0,$

$$k_{22}^{\alpha} = \frac{2\sqrt{\mu}p_1 h(\mu + p_1) + i[(-4p\mu(p_1 - p) + \kappa_2 p_1)(\mu^2 + p_1)\kappa_1 p(p + p_3\mu)]}{2\sqrt{\mu}(16\mu^2 p^2 + 4p\mu\kappa_1 - 16p\mu^2 p_1 + 4\kappa_2 p_1\mu - \kappa_1\kappa_2) + 4\mu h(\kappa_1 - 4\mu p_1)i},$$

$$k_{42}^{\alpha} = \frac{p}{2\sqrt{\mu}}\frac{\sqrt{\mu}p_1 h + 2\mu^{\frac{3}{2}}h + i\{(\mu p_3 + p)[\kappa_1 - 4\mu(p_1 - p)] + \kappa_2(\mu^2 + p_1)\}}{(16\mu^2 p^2 + 4p\mu\kappa_1 - 16p\mu^2 p_1 + 4\kappa_2 p_1\mu - \kappa_1\kappa_2) + 2h(\kappa_1 - 4\mu p_1)i}.$$

Выделяем вещественные части

$$\operatorname{Re} k_{22}^{\alpha} = \frac{1}{\Delta}[p\kappa_1(p\kappa_1 + 4p\mu^3 + \mu p_3\kappa_1 - 4\mu^2 p_3 p_1)],$$

$$\operatorname{Re} k_{42}^{\alpha} = \frac{1}{\Delta}[4h\mu p[\kappa_1 - 4\mu(p_1 - p)](\mu p_3 + p)\kappa_1 - 4\mu^2(p_1 p_3 - p\mu)],$$

$$\Delta = 4\mu\{4\mu h^2(\kappa_1 - 4\mu p_1)^2 + [-16p^2\mu^2 - 4\kappa_1 p\mu + \kappa_2\kappa_1 + 4p_1\mu(4p\mu - \kappa_2)]^2\}.$$

Заметим, что Δ не обращается в нуль ни при каких допустимых значениях параметров, поскольку выражение в фигурных скобках представляет собой сумму квадратов выражений, которые не могут обращаться в нуль одновременно (при $\kappa_1 = 4\mu p_1$ выражение в квадратных скобках равно $16p^2\mu^2 \neq 0$). Подставляя найденные значения коэффициентов в выражение (11), получаем

$$G^\alpha = -\frac{1}{2p_1\Delta}G_1^\alpha G_2^\alpha \frac{n!}{r!(n-r)!},$$

где $G_1^\alpha = [\kappa_1(p_1 + 2\mu p_2) + 8\mu^2(\mu p_1 - pp_2)], G_2^\alpha = [\kappa_1(p_1 + \mu p_2) + 4\mu^2(\mu p_1 - pp_2)].$

С учетом формул (6) имеем

$$\mu p_1 - p\,p_2 = \nu/\delta[(1+\eta_0)/\delta + \nu(\eta_0 + u_0)/\delta] - \nu(1+\nu)(\eta_0 + u_0)/\delta^2 =$$

$$= \frac{\nu}{\delta^2}(1 + \eta_0 - \eta_0 - u_0) = \frac{\nu}{\delta^2}(1 - u_0) > 0.$$

Поэтому $G_1^\alpha > 0.$ Кроме того,

$$G_2^\alpha = \frac{1}{2}\left(G_1^\alpha + \kappa_1 p_1\right) > \frac{1}{2}G_1^\alpha > 0,$$

Выберем множители α и β положительными, для определенности можно положить $\alpha = 1$, функция, $V(z,\bar{z},\xi)$ при этом является положительно определенной. Тогда, выбирая β достаточно малым, можно добиться отрицательности величины $G = \alpha G^\alpha + \beta G^\beta$, а тем самым и отрицательной определенности полной производной функции Ляпунова в силу уравнений (10) (и, соответственно, уравнений (9)). Таким образом, показано, что для любых допустимых значений параметров нулевое решение системы (9) асимптотически устойчиво.

Возвращаясь к системе (7), заметим, что для нее выполнены все условия теоремы 1 работы [9]. В самом деле, поскольку

$$L^{(4)} = \frac{1}{2}l^2\left[M\eta^2 + m(\eta + u)^2\right]\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{24}gl\left[M(1+\eta_0) + m(\eta_0 + u_0)\right]\varphi^4,$$

то достаточно проверить выполнение равенства (12) из [9]. Последнее представляет собой условие того, что вещественная часть коэффициента при $z^2\bar{z}$ в первом уравнении системы (10) (при условии дописывания членов разложения степени выше второй) равна нулю. Учитывая, что $z = \varphi - i\varphi'/\omega,$ это равносильно отсутствию в левой части первого уравнения системы (7) слагаемых, содержащих множитель φ' в нечетной степени. Однако, как следует из вида уравнений (3) и представления для $L^{(4)}$ такие слагаемые действительно отсутствуют.

Это означает, что полученный результат справедлив и по отношению к невозмущенному решению системы (7), то есть положение равновесия (5) рассмотренной механической системы асимптотически устойчиво.

Заключение. В статье рассмотрена задача о пассивной стабилизации положения равновесия математического маятника переменной длины в однородном поле силы тяжести. Хотя нижнее положение равновесия маятника (без абсорбера) является устойчивым, но устойчивость не является асимптотической. По этой причине малые колебания, возникающие вследствие случайных мгновенных возмущений, не являются затухающими. Показано, что добавление в систему массы, связанной с маятником посредством вязко-упругого шарнира, делает нижнее положение равновесия асимптотически устойчивым. Результат получен с помощью построения функции Ляпунова, при этом для уравнений возмущенного движения имеет место критический случай пары чисто мнимых корней.

Отметим также следующее важное обстоятельство. Для основной системы возможно возникновение вертикальных (продольных) колебаний маятника, которым соответствует периодическое решение $\eta(\tau) = \tilde{\eta}_0 + \cos(\theta_0 + \tilde{\omega}\tau),\ \tilde{\omega} = \sqrt{\kappa_1 / p}.$ Как известно [12-14], в результате этого может происходить "раскачивание" системы вследствие параметрического резонанса. В этой связи, использование ДА, как можно видеть из уравнений движения, делает невозможным возникновение вертикальных незатухающих колебаний и устраняет угрозу возрастания амплитуды возмущенного движения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Johnson C.D. Design of passive damping systems / C.D. Johnson // Journal of vibration and acoustics. – 1995. – V. 117 (B). – P. 171-175.
2. Chinnery A.E. Motion of a rigid body with an attached spring-mass damper / A.E Chinnery, C.D. Hall // Journal of guidance, control, and dynamics. – 1995. – V. 18, № 6. – P. 1404-1409.
3. Viet L.D. The effective damping approach to design a dynamic vibration absorber using Coriolis force / L.D. Viet, N.D Anh, H. Matsuhisa // J. of Sound and Vibration. – 2011. – V. 330. – P. 1904–1916.
4. Ch. Meinhardt. Passive damping devices for earthquake protection of bridges and buildings / Meinhardt Ch., Siepe D., Nawrotzki. P. // Seismic isolation and protective systems. – 2011. – V. 2, № 1. – P. 35-55.
5. Асланов В.С. Гравитационная стабилизация спутника с помощью подвижной массы / В.С. Асланов, С.П. Безгласный // Прикладная математика и механика. – 2012. – Т. 76, № 4. –С. 565-575.
6. He C. On the passive stabilization of the equilibrium state of Lagrangian systems / C. He, G. Liu , L.Yang, Y.Tian // Acta Mechanica. – 1999. – V. 134, № 1. – P. 17 - 26.
7. Peiffer K. On the asymptotic behavior of a passively stabilized system with one critical variable / K. Peiffer, A. Ya. Savchenko // Rend. Acc. Sc. Mat. Napoli. – 2000. – V. 67. – P. 157-168.
8. Puzyrev V.E. Using dynamic vibration absorber for stabilization of a double pendulum oscillations / V.E. Puzyrev, N.V. Savchenko // Nonlinear dynamics and systems theory. – 2014. – V. 14, № 4. – P. 402-409.
9. Пузырев В.Е. Асимпотическая устойчивость положения равновесия двойного маятника с присоединенной массой / В.Е. Пузырев, Н.В. Савченко // Механика твердого тела. – 2014. – Т. 44. – С. 75-86.
10. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М: Наука, 1966. – 576с.
11. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения / И.Г. Малкин. – М.: Наука, 1966. – 530 с.
12. Якубович В.А. Параметрический резонанс в линейных системах / В. А. Якубович, В. М. Старжинский / М.: Наука, 1987. – 328 с.
13. Акуленко Л.Д. Устойчивость равновесия маятника переменной длины / Л.Д. Акуленко, С.В. Нестеров // Прикладная математика и механика. – 2009. – Т. 73, №. 6. – С. 893–901.
14. Красильников П.С., Исследование резонансных колебаний математического маятника переменной длины / П.С. Красильников, Т.А. Сторожкина // Труды МАИ. Вып. 46. [Электронный ресурс], Режим доступа: http://www.mai.ru/science/trudy.

ВИКОРИСТАННЯ ДЕМПФЕРА ПАСИВНОГО ТИПУ ДЛЯ СТАБІЛІЗАЦІЇ МАЛИХ КОЛИВАНЬ МАЯТНИКА ЗМІННОЇ ДОВЖИНИ

В.Є Пузирьов, О.В. Каминіна, Н.В Савченко

РЕЗЮМЕ

Досліджено задачу про пасивну стабілізацію малих коливань маятника змінної довжини, який представляє собою масу, що підвішено на пружині. Показано, що додавання в основну систему динамічного абсорбера робить нижній стан рівноваги маятника асимптотично стійким. Цей результат є справедливим для будь-яких значень параметрів досліджуваної механічної системи, зокрема, для будь-яких співвідношень між частотами поздовжніх і поперечних коливань маятника. Як метод дослідження використано прямий метод Ляпунова.

Ключові слова: маятник змінної довжини, динамічний абсорбер, критичний випадок, функція Ляпунова

USE OF THE PASSIVE DAMPER FOR STABILIZATION OF SMALL OSCILLATIONS OF THE PENDULUM WITH VARYING LENGTH

V.E. Puzyryov, O.V. Kamynina, N.V Savchenko

SUMMARY

The problem of a passive stabilization of small oscillations of the pendulum with varying length, which is modeling as a mass hanging on a spring, is considered. It has been shown that a dynamic absorber attached to the basic system makes the lower equilibrium of the pendulum asymptotically stable. This result holds for all values of the parameters of the mechanical system studied, in particular, for any correlations between the frequencies of the longitudinal and transverse oscillations of a pendulum. The Lyapunov's direct method is used to prove the result.

Keywords: the pendulum of varying length, dynamical absorber, critical case, Lyapunov function