УДК 549.3

***А.І. Чиж***
***Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України ім. Я.С. Підстригача, Львів, Україна***

# ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ ТА ПЕРЕМІЩЕННЯ У ПІВНЕСКІНЧЕННІЙ ПЛАСТИНІ З КУСКОВО-СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТЕПЛООБМІНУ

В роботі розвинуто методику розв'язування задач теплопровідності і термопружності для півнескінченної пластини зі змінними коефіцієнтами теплообміну з лицевих поверхонь, яка полягає у зведенні вихідних систем диференціальних рівнянь до систем лінійних інтегральних рівнянь другого роду. На основі отриманих розв'язків досліджено термопружний стан тонкої ізотропної пластини з кусково-сталими коефіцієнтами теплообміну, яка перебуває в кусково-сталому температурному полі. Показано, що кусково-сталі коефіцієнти тепловіддачі дозволяють, в певних випадках, суттєво зменшити прогин пластини і цим самим збільшити її міцність.

*Ключові слова:* тонка пластина, теплопровідність, термопружність, кусково-сталі коефіцієнти теплообміну.

**Вступ.** Тонкостінні елементи конструкцій мають широке застосування в різних галузях машино- та приладобудування, будівництва та енергетики. В процесі експлуатації вони можуть перебувати в умовах змінного теплового навантаження на лицевих поверхнях. Нерідко покриття на лицевих поверхнях таких елементів конструкцій є неоднорідним. У зв'язку з цим актуальною є проблема дослідження термопружного стану тонких пластин зі змінними коефіцієнтами теплообміну і змінною температурою зовнішнього середовища на лицевих поверхнях.

Ефективні методи дослідження температурних полів і розподілів напружень у тонких пластинах з кусково-сталими коефіцієнтами теплообміну наведено, зокрема, в роботах [1 – 4], де розглядалися випадки лише однакових температур зовнішнього середовища та коефіцієнтів теплообміну на лицевих поверхнях. У зв'язку з цим система рівнянь теплопровідності розділяється на два окремі рівняння. У даній роботі розвинуто методику, яка дозволяє розв'язувати задачі теплопровідності для тонких пластин, в яких змінні коефіцієнти теплообміну і температура зовнішнього середовища є різними на різних поверхнях.

**Постановка задачі.** Розглядається защемлена на краю і вільна на нескінченності тонка півнескінченна пластина товщини $2h$, яка перебуває в змінному температурному полі. Температура на лицевих поверхнях є кусково-сталою, приймаючи однакові значення на паралельних до торця пластини $n-1$ смугах ($n$-та частина є півплощиною). Через лицеві і торцеву поверхні здійснюється теплообмін із зовнішнім середовищем за законом Ньютона. Коефіцієнт конвективного теплообміну на торці є сталим, а коефіцієнти теплообміну на лицевих поверхнях – кусково-сталі на тих самих смугах, на яких стала температура зовнішнього середовища. Положення точки на серединній поверхні пластини визначатимемо за допомогою координати $\alpha$, яка змінюється вздовж прямої, перпендикулярної до торця пластини.

Вважаємо, що температура $t$ в пластині змінюється по товщині за лінійним законом [5]:

$$t = T_1(\alpha) + \frac{z}{h} T_2(\alpha). \quad (1)$$

З формули (1) видно, що $T_1$ це температура серединної поверхні оболонки, а $T_2$ – піврізниця температур на лицевих поверхнях $z = \pm h$.

Введемо безрозмірну координату $x = \alpha / h$. Функції $T_1$ і $T_2$ в стаціонарному випадку за відсутності джерел тепла знаходимо з наступної системи рівнянь [5]:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 T_1}{dx^2} - \mu_1 T_1 - \mu_2 T_2 = -\mu_1 t_1 - \mu_2 t_2, \\ \dfrac{d^2 T_2}{dx^2} - 3(1+\mu_1) T_2 - 3\mu_2 T_1 = -3\mu_1 t_2 - 3\mu_2 t_1, \end{cases} \quad (2)$$

де

$$\mu_1(x)=\frac{h}{2}\left(\mu^+(x)+\mu^-(x)\right),\quad \mu_2(x)=\frac{h}{2}\left(\mu^+(x)-\mu^-(x)\right),$$

$$t_1(x)=\frac{1}{2}\left(t_c^+(x)+t_c^-(x)\right),\quad t_2(x)=\frac{1}{2}\left(t_c^+(x)-t_c^-(x)\right),$$

$$\mu^\pm(x)=\mu_1^\pm+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\mu_{i+1}^\pm-\mu_1^\pm\right)H(x;a_i,a_{i+1}),\ t^\pm(x)=t_1^\pm+\sum_{i=1}^{n-1}\left(t_{i+1}^\pm-t_1^\pm\right)H(x;a_i,a_{i+1}),$$

$$H(x;a_i,a_{i+1})=\begin{cases}1,\ x\in[a_i,a_{i+1}),\\ 0,\ x\notin[a_i,a_{i+1}),\end{cases}$$

$\mu^\pm(x)$ — кусково-сталі коефіцієнти теплообміну з лицевих поверхонь, $t^\pm(x)$ — температура зовнішнього середовища на лицевих поверхнях.

Розв'язок системи (2) задовольняє граничні умови теплообміну за законом Ньютона на торці пластини, прямуючи на нескінченності до сталого значення:

$$\frac{dT_1}{dx}-b_1\left(T_1-T_{11}^c\right)=0,\ x=0;\ \frac{dT_1}{dx}=0,\ x\to\infty;$$

$$\frac{dT_2}{dx}-b_1\left(T_2-T_{21}^c\right)=0,\ x=0;\ \frac{dT_2}{dx}=0,\ x\to\infty. \tag{3}$$

**Методика розв'язування.** ***Знаходження температурного поля.*** Введемо позначення $\eta_i^\pm=\frac{h}{2}(\mu_i^+\pm\mu_i^-)$. Тоді нескладно записати:

$$\mu_1=\eta_1^++\sum_{i=1}^{n-1}\left(\eta_{i+1}^+-\eta_1^+\right)H(x;a_i,a_{i+1}),\quad \mu_2=\eta_1^-+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\eta_{i+1}^--\eta_1^-\right)H(x;a_i,a_{i+1}).$$

Систему (2) з граничними умовами (3) розв'яжемо шляхом зведення до системи лінійних інтегральних рівнянь другого роду. Підставляючи вирази для коефіцієнтів тепловіддачі в (2), отримаємо:

$$\begin{cases}\dfrac{d^2T_1}{dx^2}-\eta_1^+T_1=T_1\sum\limits_{i=1}^{n-1}(\eta_{i+1}^+-\eta_1^+)H(x;a_i,a_{i+1})+T_2\sum\limits_{i=1}^{n}\eta_1^-H(x;a_{i-1},a_i)-\mu_1t_1-\mu_2t_2,\\ \dfrac{d^2T_2}{dx^2}-3(1+\eta_1^+)T_2=3T_2\sum\limits_{i=1}^{n-1}(\eta_{i+1}^+-\eta_1^+)H(x;a_i,a_{i+1})+\\ \qquad\qquad +3T_1\sum\limits_{i=1}^{n}\eta_1^-H(x;a_{i-1},a_i)-3(\mu_1t_2+\mu_2t_1).\end{cases} \tag{4}$$

Вважаючи праві частини рівнянь (4) відомими функціями:

$$\varphi_1(x)=\sum_{i=1}^{n-1}\left(\eta_{i+1}^+-\eta_1^+\right)H(x;a_i,a_{i+1})T_1+\sum_{i=1}^{n}\eta_1^-H(x;a_{i-1},a_i)T_2-\left(\mu_1t_1+\mu_2t_2\right),$$

$$\varphi_2(x)=3\sum_{i=1}^{n-1}\left(\eta_{i+1}^+-\eta_1^+\right)H(x;a_i,a_{i+1})T_2+3\sum_{i=1}^{n}\eta_1^-H(x;a_{i-1},a_i)T_1-3\left(\mu_1t_2+\mu_2t_1\right),$$

розв'яжемо їх методом варіації сталої. В результаті отримаємо:

$$\begin{cases}T_1=C_1e^{\delta_1x}+C_2e^{-\delta_1x}+\dfrac{1}{\delta_1}\displaystyle\int_0^x\varphi_1(s)\operatorname{sh}\delta_1(x-s)ds,\\ T_2=S_1e^{\delta_2x}+S_2e^{-\delta_2x}+\dfrac{1}{\delta_2}\displaystyle\int_0^x\varphi_2(s)\operatorname{sh}\delta_2(x-s)ds.\end{cases}$$

Тут $\delta_1^2=\eta_1^+$ , $\delta_2^2=3\left(1+\eta_1^+\right)$. Задовольнивши граничні умови (3) для $T_1$ в точці $x=0$, отримаємо рівність $\delta_1C_1-\delta_1C_2-b\left(C_1+C_2-T_c\right)=0$, звідки:

$$C_1 = \frac{C_2\left(\delta_1 + b\right)}{\delta_1 - b} - \frac{bT_c}{\delta_1 - b}.$$

Задовольнивши умову (3) на нескінченності, отримаємо

$$C_2 = \frac{bT_c}{\delta_1 + b} - \frac{\delta_1 - b}{\delta_1\left(\delta_1 + b\right)}\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\varphi_1(s)e^{-\delta_1 s}ds.$$

Таким чином, вираз для $T_1$ набуде вигляду:

$$T_1 = \frac{bT_c e^{\delta_1 x}}{\delta_1 - b} + \frac{bT_c e^{-\delta_1 x}}{\delta_1 + b} - \int_0^{\infty}\frac{\varphi_1\left(s\right)}{2\delta_1}\left[e^{\delta_1\left(x-s\right)} + \frac{\delta_1 - b}{\delta_1 + b}e^{-\delta_1\left(x+s\right)}\right]ds + \frac{1}{\delta_1}\int_0^{x}\varphi_1\left(s\right)\operatorname{sh}\delta_1\left(x-s\right)ds. \quad (5)$$

У такий же спосіб нескладно отримати вираз

$$T_2 = \frac{bT_c e^{\delta_2 x}}{\delta_2 - b} + \frac{bT_c e^{-\delta_2 x}}{\delta_2 + b} - \int_0^{\infty}\frac{\varphi_2\left(s\right)}{2\delta_2}\left[e^{\delta_2\left(x-s\right)} + \frac{\delta_2 - b}{\delta_2 + b}e^{-\delta_2\left(x+s\right)}\right]ds +$$
$$+\frac{1}{\delta_2}\int_0^{x}\varphi\left(s\right)\operatorname{sh}\delta_2\left(x-s\right)ds. \quad (6)$$

Оскільки у вираз для $\varphi_1\left(x\right)$ входять функції $T_1$ і $T_2$, то рівняння (5), (6) є лінійними інтегральними рівняннями другого роду. Отриману систему лінійних інтегральних рівнянь другого роду (5), (6) розв'яжемо чисельно з використанням квадратурної формули Сімпсона [7].

***Визначення компонент термонапруженого стану***. Планарні та поперечні переміщення $u$ і $w$, спричинені знайденим температурним полем у розглянутій пластині, шукатимемо з рівнянь [4,6]:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = -\alpha_t\left(1+\nu\right)h\frac{d^2 T_2}{dx^2}, \quad (7)$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \alpha_t\left(1+\nu\right)h\frac{dT_1}{dx}. \quad (8)$$

Тут $\nu$ та $\alpha_t$ – відповідно коефіцієнти Пуассона та лінійного температурного видовження. Оскільки пластина є защемленою на торці і вільною на нескінченості, то вирази для переміщень повинні задовольняти наступні граничні умови [4]:

$$w\left(x\right) = w'\left(x\right) = 0,\ x = 0,$$
$$w''\left(x\right) = -\alpha_t\left(1+\nu\right)hT_2\left(x\right),\ w'''\left(x\right) = -\alpha_t\left(1+\nu\right)hT_2'\left(x\right),\ x \to \infty, \quad (9)$$
$$u\left(x\right) = 0,\ x = 0;\ \ u' = \alpha_t\left(1+\nu\right)hT_1\left(x\right),\ x \to \infty. \quad (10)$$

Розв'язок рівнянь (7), (8) з урахуванням умов (9), (10) нескладно знайти у вигляді:

$$w = -\alpha_t\left(1+\nu\right)h\int_0^{x}T_2\left(x-s\right)ds,\ u = \alpha_t\left(1+\nu\right)h\int_0^{x}T_1 ds.$$

Моменти, зусилля та напруження в розглянутій пластині визначаються за формулами [6]:

$$N_1 = \frac{2E}{1-\nu^2}\left[u' - \alpha_t\left(1+\nu\right)hT_1\right],\ N_2 = \frac{2E}{1-\nu^2}\left[\nu u' - \alpha_t\left(1+\nu\right)hT_1\right],$$
$$M_1 = \frac{2}{3}\frac{Eh}{1-\nu^2}\left[-w'' - \alpha_t\left(1+\nu\right)hT_2\right],\ M_2 = \frac{2}{3}\frac{Eh}{1-\nu^2}\left[-\nu w'' - \alpha_t\left(1+\nu\right)hT_2\right],$$
$$\sigma_1 = \frac{1}{2h}\left(N_1 + 3M_1\frac{z}{h^2}\right),\ \sigma_2 = \frac{1}{2h}\left(N_2 + 3M_2\frac{z}{h^2}\right).$$

Підставивши вирази для $w$ і $u$ в вищенаведені вирази, отримаємо:

$$N_1 = 0,\ N_2 = 2E\alpha_t hT_1,\ M_1 = 0,\ M_2 = -\frac{2}{3}Eh^2\alpha_t T_2,\ \sigma_1 = 0,\ \sigma_2 = -E\alpha_t\left(T_1 + \frac{z}{h}T_2\right).$$

**Числовий приклад та обговорення.** Обчислення здійснено для наступних вхідних даних: $a_0 = 0;\ a_1 = 3;\ a_2 = 6;\ a_3 = 9;\ b_1 = 0;\ h = 0{,}01м;\ \gamma = h.$ Тобто розглянуто 4 області на лицевих поверхнях зі сталими коефіцієнтами теплообміну і температурою зовнішнього середовища. Нехай температуру зовнішнього середовища на поверхні $z = h$ задано формулою $t^+ = 30H(x;0,3) + 60H(x;3,6) + 30H(x;6,9) + 60H(x;9,\infty)$, а на поверхні $z = -h$ – $t^- = 40H(x;0,3) + 30H(x;3,6) + 40H(x;6,9) + 30H(x;9,\infty)$. Спочатку розглянемо випадок сталих коефіцієнтів теплообміну на лицевих поверхнях: $\mu^+ = \mu^- = 50$. На мал. 1-4 криві *1* відповідають $T_1$, $T_2$, $w$ і $\sigma_2$, розрахованим для даного випадку. Видно, як бачимо з мал. 3, прогин на нескінченності прямує до $-\infty$. Задаймося метою зменшити магнітуду прогину пластини на безмежності шляхом певної кусково-сталої варіації коефіцієнтів тепловіддачі з лицевих поверхонь. Спочатку змінимо коефіцієнт теплообміну на поверхні $z = h$, вибравши його у вигляді: $\mu^+ = 50H(x;0,3) + 20H(x;3,6) + 50H(x;6,9) + 20H(x;9,\infty)$. Отримані в даному випадку результати для $T_1$, $T_2$, $w$ і $\sigma_2$ на мал. 1-4 номером наведені кривими *2*. З мал. 3 видно, що зростання магнітуди прогину пластини на нескінченності сповільнилося. Тепер задамо коефіцієнт теплообміну на поверхні $z = -h$ таким чином: $\mu^- = 60H(x;0,3) + 10H(x;3,6) + 60H(x;6,9) + 10H(x;9,\infty)$ (криві *3*). На мал. 3 видно, що в даному випадку прогин пластини буде мати додатні значення на більшій відстані від краю. Таким чином, показано, що зміна коефіцієнтів теплообміну на певних ділянках лицевих поверхонь суттєво впливає на прогин пластини і цим самим дозволяє покращити міцність елементів конструкцій розглянутого типу.

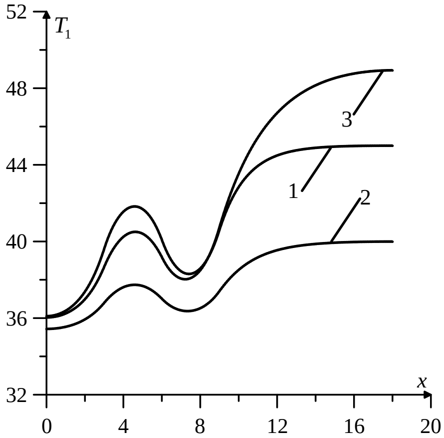

Рис. 1

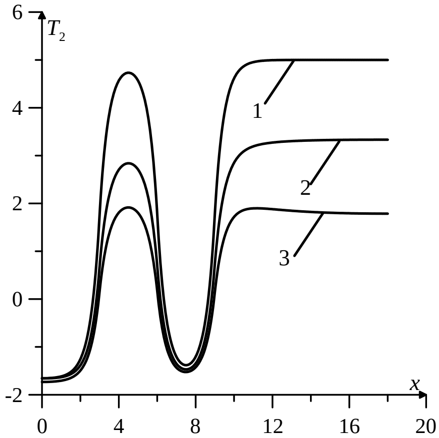

Рис. 2

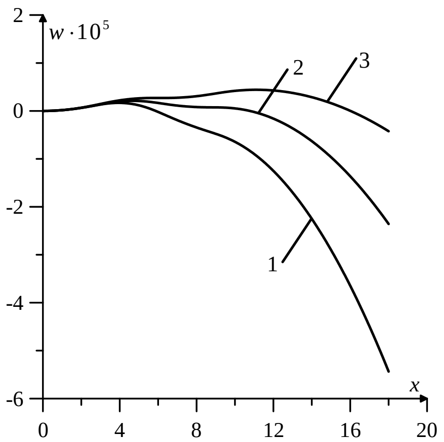

Рис. 3

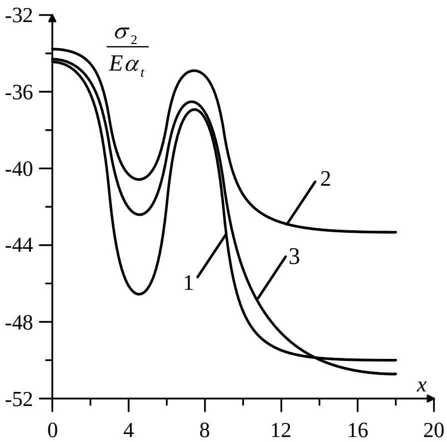

Рис. 4

**Висновки**. В роботі наведено методику знаходження розподілу температури, переміщень, зусиль, моментів і напружень в півнескінченній пластині з кусково-сталими коефіцієнтами тепловіддачі і температурою зовнішнього середовища на лицевих поверхнях за жорсткого защемлення торцевої поверхні. Вихідну систему рівнянь теплопровідності зведено до системи двох інтегральних рівнянь другого роду з регулярними ядрами. Розв'язки отриманих рівнянь знайдено за допомогою числової схеми, побудованої на використанні квадратурної формули Сімпсона. Показано, що змінні коефіцієнти теплообміну суттєво впливають на міцність тонких пластин розглянутого типу.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. Видин Ю.В. О температурном поле неограниченной пластины при переменном коэффициенте теплообмена / Ю.В. Видин // Изв. Вузов. Авиационная техника. – 1967, – Т. 7, С. 65-69.
2. Громовык В.И. Температурные напряжения в нагреваемых ортотропных пластинах с переменным коэффициентом теплоотдачи / В.И. Громовык // П. М. – 1973, Т. 9, № 9, С. 94-98.
3. Коляно Ю.М. Определение температурных полей в тонких анизотропных пластинках с переменным коэффициентом теплоотдачи / Ю.М. Коляно, В.И. Горомовык // ДАН БССР. – 1970. – Т. 14, № 11, С. 1000-1002.
4. Подстригач Я.С. Термоупругость тел при переменных коэффициентах теплоотдачи / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно, В.И. Громовык, В.Л. Лобзень – К: Наукова думка, 1977. – 160 с.
5. Коваленко А.Д. Основы термоупругости / А.Д. Коваленко – К: Наукова думка, 1970. – 304 с.
6. Подстригач Я.С. Термоупругость тонких оболочек. / Я.С. Подстригач, Р.Н. Швец – К.: Наукова думка, 1978. – 344 с.
7. Верлань А.Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков // – К.: Наукова думка, 1986. – 543 с.


## ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ И ПЕРЕМЕЩЕНИЕ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЕ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ТЕПЛООБМЕНА

**А. И. Чиж**

**РЕЗЮМЕ**

В работе развита методика решения задач теплопроводности и термоупругости для полубесконечной пластины с переменными коэффициентами теплообмена с лицевых поверхностей, состоящая в сведении исходных систем дифференциальных уравнений к системам линейных интегральных уравнений второго рода. На основе полученных решений исследовано термоупругое состояние тонкой изотропной пластины с кусочно-постоянными коэффициентами теплообмена, находящаяся в кусочно-постоянном температурном поле. Показано, что кусочно-постоянные коэффициенты теплоотдачи позволяют, в определенных случаях, существенно уменьшить прогиб пластины и тем самым увеличить ее прочность.

*Ключевые слова:* тонкая пластина, теплопроводность, термоупругость, кусочно-постоянные коэффициенты теплообмена.

## TEMPERATURE FIELD AND MOVING IN A SEMI-INFINITE PLATE WITH LUMP-CONSTANT COEFFICIENTS OF HEAT TRANSFER

**A. I. Chizh**

**SUMMARY**

In this paper, a technique for solving the heat-conduction and thermoelasticity problems for a semiinfinite plate with variable heat-exchange coefficients on the facial surfaces is developed. This technique rests upon the reducing of the initial systems of differential equations to systems of linear integral equations of the second kind. By making use of the obtained solutions, the thermoelastic state of a thin isotropic plate with piecewise-constant heat-exchange coefficients is analyzed for the case of the piecewise-constant temperature field. It is shown that the piecewise-constant heat-exchange coefficients can, in some cases, significantly reduce the deflection of the plate and thereby increase its strength.

*Keywords:* thin plate, heat conduction, thermoelasticity, piecewise-constant heat-exchange coefficients.