

УДК 539.3

А. Ф. Кривой*, Ю. А. Морозов**

*Одесская национальная морская академия, г. Одесса

**Одесский национальный политехнический университет, г. Одесса

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ДВУХ КОМПЛАНАРНЫХ ТРЕЩИН
В СОСТАВНОМ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Построено решение осесимметричной задачи теплопроводности для кусочно-однородного трансверсально-изотропного пространства содержащего две расположенных параллельно плоскости соединения сред, компланарные круговые термоактивные (на которых задана температура или тепловой поток) трещины, в трехмерной постановке. Получены распределения температур в зависимости от теплофизических свойств материалов и расстояния от трещин до границы соединения полупространств.

Ключевые слова: теплопроводность, кусочно-однородное трансверсально-изотропное пространство, термоактивная трещина, двумерные сингулярные интегральные уравнения.

Введение. Проблемы термоупругости в двухсвязных телах, находящихся под действием тепловых нагрузок, часто возникают в различных технических задачах. Наличие границы соединения материалов с разными коэффициентами теплопроводности приводит к появлению существенной неоднородности в распределении температурных полей вблизи границы, а присутствие различных тонких термоизолированных или термоактивных трещин (включений), на которых, заданы температура или тепловой поток, вносит дополнительный вклад в эту неоднородность (обуславливает возрастание в их окрестности температурных градиентов и напряжений).

Неоднородность тепловых полей порождает неоднородность деформаций и напряжений в двухсвязных материалах, что в свою очередь может быть причиной появления новых дефектов и распространения уже имеющихся. Поэтому важно исследовать влияние взаимодействия неоднородностей и границ раздела материалов под действием тепловых и механических нагрузок на распределение тепловых полей и деформаций, чтобы понять качественную картину происходящего процесса.

Задача о распределении температуры и напряжений в полупространстве, с двумя параллельными круговыми трещинами рассмотрена в [1, 2]. В [3] была решена задача теплопроводности для системы параллельных термоактивных включений центры которых лежат соосно в параллельных плоскостях и компланарных, лежащих в одной плоскости с центрами на одной прямой.

При исследовании напряженного состояния составных тел с термоактивными или термоизолированными трещинами, определение температурного поля по заданной на трещине температуре или тепловому потоку имеет как самостоятельное значение, так и вспомогательное, как первый этап решения несвязанной задачи термоупругости.

В работе [4] рассмотрена задача теплопроводности для межфазной круговой и кольцевых трещин. В данной работе построено решение осесимметричной задачи теплопроводности, для кусочно-однородного трансверсально-изотропного пространства, содержащего две расположенных параллельно плоскости раздела сред коллинеарные круговые термоактивные трещины (на которых задана температура или тепловой поток), в трехмерной постановке.

Постановка задачи стационарной термоупругости. Рассмотрим неоднородное пространство, состоящее из двух различных трансверсально-изотропных полупространств, полностью сцепленных в плоскости $x_3 = 0$. В каждом из полупространств в плоскостях $x_3 = h^\pm$ имеются две теплоактивные круговые трещины, занимающие области $\Omega_\pm : \{0 \leq r \leq a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ (рис. 1).

Введем следующие обозначения

$$\mathbf{v} = \{v_k(x, y, z)\}_{k=1,6} = \{\sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, u, v, w\}$$

Компоненты вектора \mathbf{v} при $x_3 \neq 0$, $(x_1, x_2) \in \Omega_\pm$ согласно [5], удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

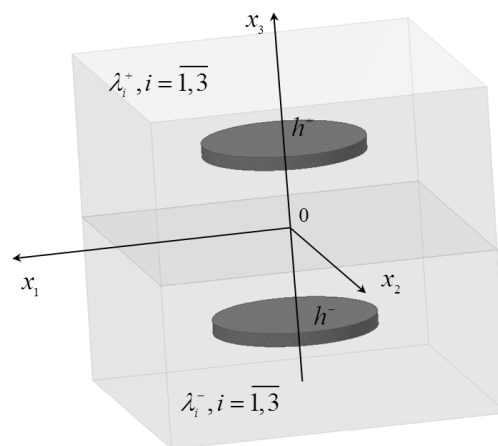


Рис.1

$$\mathbf{I}\partial_3 \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{M}T,$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1/c_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 1/c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 1/c_{44} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{c_{13}}{c_{33}}\partial_1 & -\frac{c_{23}}{c_{33}}\partial_2 \\ -\partial_1 & 0 & 0 \\ -\partial_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1^T,$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(c_{11} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}}\right)\partial_1^2 - c_{66}\partial_2^2 & -\left(c_{12} + c_{66} - \frac{c_{13}c_{23}}{c_{33}}\right)\partial_{12}^2 \\ 0 & -\left(c_{12} + c_{66} - \frac{c_{13}c_{23}}{c_{33}}\right)\partial_{12}^2 & -\left(c_{22} - \frac{c_{23}^2}{c_{33}}\right)\partial_2^2 - c_{66}\partial_1^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{B}\boldsymbol{\beta}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\mathbf{D} & \mathbf{O}_{3 \times 3} \\ \mathbf{O}_{3 \times 3} & -\mathbf{A}_3 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta} = \left(\beta_1 - \frac{c_{13}}{c_{33}}\beta_3, \beta_2 - \frac{c_{23}}{c_{33}}\beta_3, 0, \beta_3, 0, 0 \right)^T, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_1 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_2 \\ 0 & \partial_2 & \partial_1 \end{pmatrix}^T, \quad \partial_1 \equiv \frac{\partial}{\partial x_1}, \partial_2 \equiv \frac{\partial}{\partial x_2}, \partial_3 \equiv \frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$c_{kl} = \theta(x_3)c_{kl}^+ + \theta(-x_3)c_{kl}^-, \quad k, l = \overline{1, 6}, \quad c_{23} = c_{13}, c_{55} = c_{44}, c_{22} = c_{11}, \quad 2c_{66} = c_{11} - c_{12},$$

$$\beta_j = \theta(x_3)\beta_j^+ + \theta(-x_3)\beta_j^-, \quad j = \overline{1, 3}, \quad -\beta_1 = c_{11}\lambda_1 + c_{12}\lambda_2 + c_{13}\lambda_3, \quad -\beta_2 = c_{12}\lambda_1 + c_{22}\lambda_2 + c_{23}\lambda_3,$$

$$-\beta_2 = c_{13}\lambda_1 + c_{23}\lambda_2 + c_{33}\lambda_3, \quad \lambda_j = \theta(x_3)\lambda_j^+ + \theta(-x_3)\lambda_j^-.$$

Первый этап решения стационарной задачи термоупругости состоит в определении температурно-го поля T , и заключается в решении задачи теплопроводности при заданных граничных условиях.

Постановка задачи теплопроводности. Рассмотрим на берегах трещины следующие варианты условий. На обеих трещинах задана температура (задача А):

$$\zeta_0(x_1, x_2, h^\pm \pm 0) = T_1(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega_+, \quad \zeta_0(x_1, x_2, h^\mp \pm 0) = T_2(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega_-. \quad (1)$$

На верхней трещине задана температура, а на нижней тепловой поток (задача В):

$$\zeta_0(x_1, x_2, h^\pm \pm 0) = T(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega_+, \quad \zeta_3(x_1, x_2, h^\mp \pm 0) = q(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega_-. \quad (2)$$

Здесь введены следующие обозначения $\zeta = \{\zeta_n\}_{n=0,3} = \{T, q_1, q_2, q_3\}$, где T – температура, q_i – компоненты вектора теплового потока \mathbf{q} .

Построение разрывного решения задачи стационарной теплопроводности для составного трансверсально-изотропного пространства. Компоненты вектора ζ при $x_3 \neq 0$, $(x_1, x_2) \notin \Omega_\pm$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений [6]:

$$\lambda_i \partial_i \zeta_0(\mathbf{x}) + \zeta_i(\mathbf{x}) = 0, \quad \sum_{i=1}^3 \partial_i \zeta_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3)$$

где $\lambda_i = \lambda_i^+ \theta(x_3) + \lambda_i^- \theta(-x_3)$, $i = \overline{1, 3}$, $\theta(x)$ – функция Хевисайда, λ_i^+, λ_i^- – коэффициенты теплопроводности, для верхнего $x_3 > 0$ и нижнего $x_3 < 0$ полупространства соответственно. Полное сцепление полупространств обеспечивают условия непрерывности

$$\langle \zeta_k(x_1, x_2) \rangle^\pm = \zeta_k(x_1, x_2) - \zeta_k(x_1, x_2) = 0, \quad k = 0, 3. \quad (4)$$

На трещинах будем считать заданными скачки (или суммы) температуры и теплового потока: $\langle \zeta_k \rangle_{\Omega_\pm}^\pm = \chi_k^{\pm, (\pm)}$,

$$\langle f \rangle_{\Omega_\pm}^\pm = f(x_1, x_2, h^\pm + 0) \pm f(x_1, x_2, h^\pm - 0) = 0, \quad k = 0, 3. \quad (5)$$

Сведём систему (3) к одному уравнению и следуя работе [7] перейдем в пространство обобщенных функций $\mathfrak{S}'(\mathbb{R}^3)$, получим

$$\left[\lambda^2 (\partial_1^2 + \partial_2^2) + \partial_3^2 \right] \zeta_0(\mathbf{x}) = f, f = \sum_{\pm} \sum_{k=0}^1 \delta^{(k)}(\Omega_{\pm}) \langle \partial_3^{1-k} \zeta_0 \rangle_{\Omega_{\pm}}^-, \zeta_0 \in \mathfrak{S}'(\mathbb{R}^3), \quad (6)$$

где $\lambda^2 = \lambda_1/\lambda_3$, $\lambda^2 = \lambda_+^2 \theta(\eta_3) + \lambda_-^2 \theta(-\eta_3)$, $\delta(\Omega_{\pm})$ – обобщенная функция Дирака, сосредоточенная на поверхности Ω_{\pm} .

Фундаментальным решением задачи (6) для составного трансверсально-изотропного пространства, будем называть функцию $\psi_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta})$ из $\mathfrak{S}'(\mathbb{R}^3)$, если она удовлетворяет следующей краевой задаче.

$$\left[\lambda^2 (\partial_1^2 + \partial_2^2) + \partial_3^2 \right] \psi_0(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^1 \delta^{(k)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0), \quad j = 1, 2 \quad (7)$$

$$\psi_0^+(x_1, x_2, 0) = \psi_0^-(x_1, x_2, 0), \quad \lambda_3^+ \partial_3 \psi_0^+(x_1, x_2, 0) = \lambda_3^- \partial_3 \psi_0^-(x_1, x_2, 0),$$

После применения к (7) трехмерного преобразования Фурье, проблема нахождения функции $\psi_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta})$ сведена к задаче Римана в $\mathfrak{S}'(\mathbb{R}^3)$:

$$p^+(\alpha, \beta, \gamma) \Psi^+ = -p^-(\alpha, \beta, \gamma) \Psi^- + F, \quad (8)$$

$$p^{\pm}(\alpha, \beta, \gamma) = \theta(\pm x_3) (-i\alpha, -i\beta, -i\gamma), \quad F = \sum_{k=0}^1 (-i\gamma)^k e^{i(\alpha x_1^0 + \beta x_2^0 + \gamma x_3^0)}.$$

Используя, результаты работы [8], запишем решение задачи (8) в виде

$$\Psi^{\pm} = \pm \sum_{k=0}^1 \frac{(-i\gamma)^k v_{0k}^0}{p^{\pm}(\alpha, \beta, \gamma)} + \sum_{k=0}^1 \frac{(-i\gamma)^k e_0^*}{p^{\pm}(\alpha, \beta, \gamma)}, \quad e_0^* = e^{i\alpha x_1^0 + i\beta x_2^0 + i\gamma x_3^0}. \quad (9)$$

Выразив неизвестные функции v_{0k}^0 через скачки (4) и применив обратное преобразование Фурье, используя известную формулу [9]

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha^2 + \beta^2) e^{i\alpha x + i\beta y} dx dy = \int_0^{\infty} t F(t) J_0(t \sqrt{x^2 + y^2}) dt,$$

получим явное выражение для ψ_j , $j = 0, 3$:

$$\psi_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) = \theta(x_3) \psi_j^+(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) + \theta(-x_3) \psi_j^-(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0), \quad j = 0, 3, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_0^{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) &= -b_{11}^{\pm\pm} \mathcal{L}_{2,0}^{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) \mp b_{12}^{\pm\pm} \mathcal{L}_{2,1}^{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) + b_{11}^{\pm\mp} \mathcal{L}_{3,0}^{\mp}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) \mp b_{12}^{\pm\mp} \mathcal{L}_{3,1}^{\mp}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) - \\ &\quad - \left[\lambda_{\pm}^{-1} \mathcal{L}_{1,0}^{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) - \text{sgn}(x_3 - x_3^{0,\pm}) \mathcal{L}_{1,1}^{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) \right], \\ \psi_3^{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) &= \pm \lambda_3^{\pm} b_{21}^{\pm\mp} \mathcal{L}_{3,1}^{\mp}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) - \lambda_3^{\pm} b_{22}^{\pm\mp} \mathcal{L}_{3,2}^{\mp}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) \mp \lambda_3^{\pm} b_{21}^{\pm\pm} \mathcal{L}_{2,1}^{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) - \lambda_3^{\pm} b_{22}^{\pm\pm} \mathcal{L}_{2,2}^{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) + \\ &\quad + \lambda_3^{\pm} \left[-\text{sgn}(x_3 - x_3^{0,\pm}) \mathcal{L}_{1,1}^{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) + \lambda_{\pm} \mathcal{L}_{1,2}^{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) \right], \\ r_0 &= \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_1^0)^2}, \quad z_{1,\pm} = \lambda_{\pm} (x_3 - x_3^{0,\pm}), \quad z_{2,\pm} = \lambda_{\pm} (x_3 + x_3^{0,\pm}), \quad z_{2,\pm} = \lambda_{\pm} x_3 - \lambda_{\mp} x_3^{0,\mp}, \\ b_{11}^{\pm\pm} &= \left[\lambda_{\pm}^{-1} h_1^{\pm} \mp \lambda_{\pm} h_2^{\pm} \right], \quad b_{12}^{\pm\pm} = b_{21}^{\pm\pm} = \left[h_1^{\pm} \mp \lambda_{\pm} h_2^{\pm} \right], \quad b_{22}^{\pm\pm} = \lambda_{\pm} \left[h_1^{\pm} \mp \lambda_{\pm} h_2^{\pm} \right], \\ b_{11}^{\pm\mp} &= \lambda_{\pm}^{-1} h_1^{\mp} - h_2^{\mp}, \quad b_{12}^{\pm\mp} = \lambda_{\mp} \left[\lambda_{\pm}^{-1} h_1^{\mp} - h_2^{\mp} \right], \quad b_{21}^{\pm\mp} = \left[h_1^{\mp} - \lambda_{\pm} h_2^{\mp} \right], \quad b_{22}^{\pm\mp} = \lambda_{\mp} \left[h_1^{\mp} - \lambda_{\pm} h_2^{\mp} \right], \\ \mathcal{L}_{j,k}^{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} t^k e^{-t|z_j^{\pm}|} J_0(tr_0) dt, \quad j = 2, 3. \end{aligned}$$

Полученное выражение для $\psi_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0)$ ($j = 0, 3$), позволяет решение краевой задачи (3)–(5) в пространстве $\mathfrak{S}'(\mathbb{R}^3)$ записать в следующем виде

$$\zeta_j(\mathbf{x}) = \theta(x_3)\zeta_j^+(\mathbf{x}) + \theta(-x_3)\zeta_j^-(\mathbf{x}), j = 0, 3, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \zeta_0^\pm(\mathbf{x}) &= \frac{-1}{2\pi} \left\{ \iint_{\Omega_\pm} \left[b_{11}^{\pm\pm} \chi_3^{\mp\pm}(\mathbf{x}^0) \frac{1}{\mathcal{R}_\pm^{(2)}} \mp b_{12}^{\pm\pm} \chi_0^{\mp\pm}(\mathbf{x}^0) \partial_3 \frac{\lambda_\pm^{-1}}{\mathcal{R}_\pm^{(2)}} \right] d\mathbf{x}^0 - \iint_{\Omega_\mp} \left[b_{11}^{\pm\mp} \chi_3^{\mp\mp}(\mathbf{x}^0) \frac{1}{\mathcal{R}_\mp^{(3)}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) \pm \right. \\ &\quad \left. \pm b_{12}^{\pm\mp} \chi_0^{\mp\mp}(\mathbf{x}^0) \lambda_\mp^{-1} \partial_3 \frac{1}{\mathcal{R}_\mp^{(3)}} \right] d\mathbf{x}^0 + \iint_{\Omega_\pm} \left[\lambda_\pm^{-1} \chi_3^{\mp\pm}(\mathbf{x}^0) \frac{1}{\mathcal{R}_\pm^{(1)}} - \chi_0^{\mp\pm}(\mathbf{x}^0) \frac{\text{sgn}(x_3 - x_3^{0,\pm})}{\lambda_\pm} \partial_3 \frac{1}{\mathcal{R}_\pm^{(1)}} \right] d\mathbf{x}^0, \\ \zeta_3^\pm(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\lambda_\pm^\pm}{\lambda_\mp^\mp} \iint_{\Omega_\mp} \left[\mp b_{21}^{\pm\mp} \chi_3^{\mp\mp}(\mathbf{x}^0) \partial_3 \frac{1}{\mathcal{R}_\mp^{(3)}} - b_{22}^{\pm\mp} \chi_0^{\mp\mp}(\mathbf{x}^0) \partial_3^2 \frac{\lambda_\mp^{-1}}{\mathcal{R}_\mp^{(3)}} \right] d\mathbf{x}^0 \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{\lambda_3^\pm}{\lambda_\pm^\pm} \iint_{\Omega_\pm} \left[b_{21}^{\pm\pm} \chi_3^{\mp\pm}(\mathbf{x}^0) \partial_3 \frac{1}{\mathcal{R}_\pm^{(2)}} \mp b_{22}^{\pm\pm} \chi_0^{\mp\pm}(\mathbf{x}^0) \lambda_\pm^{-1} \partial_3^2 \frac{1}{\mathcal{R}_\pm^{(2)}} \right] d\mathbf{x}^0 + \frac{\lambda_3^\pm}{\lambda_\pm^\pm} \iint_{\Omega_\pm} \left[\chi_0^{\mp\pm}(\mathbf{x}^0) \partial_3^2 \frac{1}{\mathcal{R}_\pm^{(1)}} - \right. \\ &\quad \left. - \text{sgn}(x_3 - x_3^{0,\pm}) \chi_3^{\mp\pm}(\mathbf{x}^0) \partial_3 \frac{1}{\mathcal{R}_\pm^{(1)}} \right] d\mathbf{x}^0, \quad \mathcal{R}_\pm^{(j)} = \sqrt{r_0^2 + z_{j,\pm}^2}, j = 2, 3. \end{aligned}$$

Выполнив предельный переход $x_3 \rightarrow h^\pm$, получим суммы физических величин

$$\begin{aligned} \chi_0^{\pm\pm}(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega_\pm} \left\{ b_{11}^{\pm\pm} \chi_3^{\mp\pm}(\mathbf{x}^0) \frac{1}{\mathcal{R}_{2,\pm}} \pm b_{12}^{\pm\pm} \chi_0^{\mp\pm}(\mathbf{x}^0) \frac{\tilde{z}_{2,\pm}}{\mathcal{R}_{2,\pm}^3} \right\} d\mathbf{x}^0 + \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega_\mp} \left\{ b_{11}^{\pm\mp} \chi_3^{\mp\mp}(\mathbf{x}^0) \frac{1}{\mathcal{R}_{3,\pm}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) \mp \right. \\ &\quad \left. \mp b_{12}^{\pm\mp} \chi_0^{\mp\mp}(\mathbf{x}^0) \frac{\lambda_\mp^{-1} \lambda_\pm \tilde{z}_{3,\mp}}{\mathcal{R}_{3,\mp}^3} \right\} d\mathbf{x}^0 - \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega_\pm} \lambda_\pm^{-1} \chi_3^{\mp\pm}(\mathbf{x}^0) \frac{1}{r_0} d\mathbf{x}^0 - 2\chi_0^{\pm\pm}(\mathbf{x}), \\ \chi_3^{\pm\pm}(\mathbf{x}) &= \frac{\lambda_3^\pm}{2\pi} \left\{ \lambda_\mp^{-1} \iint_{\Omega_\mp} \left[\pm b_{21}^{\pm\mp} \chi_3^{\mp\mp}(\mathbf{x}^0) \frac{\lambda_\pm \tilde{z}_{3,\mp}}{\mathcal{R}_{3,\mp}^3} - b_{22}^{\pm\mp} \chi_0^{\mp\mp}(\mathbf{x}^0) \lambda_\mp^{-1} \left[\frac{3\lambda_\pm^2 \tilde{z}_{3,\mp}^2}{\mathcal{R}_{3,\mp}^5} - \frac{\lambda_\pm^2}{\mathcal{R}_{3,\mp}^3} \right] \right] d\mathbf{x}^0 \mp \right. \\ &\quad \left. \mp \iint_{\Omega_\pm} \left[b_{21}^{\pm\pm} \chi_3^{\mp\pm}(\mathbf{x}^0) \frac{\tilde{z}_{2,\pm}}{\mathcal{R}_{2,\pm}^3} \pm b_{22}^{\pm\pm} \chi_0^{\mp\pm}(\mathbf{x}^0) \left(\frac{3\lambda_\pm \tilde{z}_{2,\pm}^2}{\mathcal{R}_{2,\pm}^5} - \frac{\lambda_\pm}{\mathcal{R}_{2,\pm}^3} \right) \right] d\mathbf{x}^0 + \left[2\pi\chi_3^{\pm\pm}(\mathbf{x}) - \iint_{\Omega_\pm} \chi_0^{\mp\pm}(\mathbf{x}^0) \frac{\lambda_\pm^{-1}}{r_0^3} d\mathbf{x}^0 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\mathcal{R}_{j,\pm} = \sqrt{r_0^2 + \tilde{z}_{j,\pm}^2}$, $j = 2, 3$, $\tilde{z}_{2,\pm} = 2\lambda_\pm x_3^{0,\pm}$, $\tilde{z}_{3,\mp} = \lambda_\pm h^\pm - \lambda_\mp x_3^{0,\pm}$.

Сведение поставленных задач к интегральным уравнениям и их решение. Используя соотношения (11) и граничные условия (1) и (2), поставленные задачи сведем к системам двумерных сингулярных интегральных уравнений. Для задачи А система будет иметь следующий вид

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_+} \chi_3^{-+}(\mathbf{x}^0) \left[\frac{-b_{11}^{++}}{\mathcal{R}_{2,+}} - \lambda_+^{-1} \frac{1}{r_0} \right] d\mathbf{x}^0 + b_{11}^{+-} \iint_{\Omega_-} \chi_3^{-+}(\mathbf{x}^0) \frac{1}{\mathcal{R}_{3,-}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) d\mathbf{x}^0 &= 2\pi T_1(\mathbf{x}), \\ \iint_{\Omega_-} \chi_3^{--}(\mathbf{x}^0) \left[\frac{-b_{11}^{--}}{\mathcal{R}_{2,-}} - \lambda_-^{-1} \frac{1}{r_0} \right] d\mathbf{x}^0 + b_{11}^{-+} \iint_{\Omega_+} \chi_3^{--}(\mathbf{x}^0) \frac{1}{\mathcal{R}_{3,+}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) d\mathbf{x}^0 &= 2\pi T_2(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (13)$$

Для задачи В следующий вид

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_+} \chi_3^{-+}(\mathbf{x}^0) \left[\frac{-b_{11}^{++}}{\mathcal{R}_{2,\pm}} - \lambda_\pm^{-1} \frac{1}{r_0} \right] d\mathbf{x}^0 - b_{12}^{+-} \iint_{\Omega_-} \chi_0^{--}(\mathbf{x}^0) \frac{\lambda_-^{-1} \lambda_+ \tilde{z}_{3,-}}{\mathcal{R}_{3,-}^3} &= 2\pi T(\mathbf{x}), \\ -\frac{b_{21}^{+-}}{\lambda_+} \iint_{\Omega_+} \chi_3^{-+}(\mathbf{x}^0) \frac{\lambda_\pm \tilde{z}_{3,+}}{\mathcal{R}_{3,+}^3} d\mathbf{x}^0 + \iint_{\Omega_-} \chi_0^{--}(\mathbf{x}^0) \left[b_{22}^{--} \left(\frac{3\lambda_- \tilde{z}_{2,-}^2}{\mathcal{R}_{2,-}^5} - \frac{\lambda_-}{\mathcal{R}_{2,-}^3} \right) - \frac{\lambda_-^{-1}}{r_0^3} \right] d\mathbf{x}^0 &= \frac{4\pi q(\mathbf{x})}{\lambda_3^-}. \end{aligned} \quad (14)$$

Воспользовавшись формулами 2.12.8 из [10], получим следующие соотношения

$$\int_0^\infty J_0(tr_0) = \frac{1}{r_0}, \quad \int_0^\infty t^k e^{-t|\tilde{z}_{j,\pm}|} J_0(tr_0) dt = \frac{1}{\mathcal{R}_{j,\pm}^{2k+1}}, k = 0, 1, \tag{15}$$

$$\int_0^\infty t^2 e^{-t|\tilde{z}_{j,\pm}|} J_0(tr_0) dt = \frac{3\lambda_\pm \tilde{z}_{j,\pm}^2}{\mathcal{R}_{j,\pm}^5} - \frac{\lambda_\pm}{\mathcal{R}_{j,\pm}^3}, j = 2, 3.$$

используя которые, перейдем в системах (13), (14) к полярным координатам и применив конечное преобразование Фурье и теорему о свертке [9], а так же формулы интегрирования и дифференцирования функций Бесселя [11] и соотношение (2.12) из [12] получим следующие системы интегральных уравнений.

– Для задачи А :

$$\begin{cases} -b_{11}^{++} W_{n,n}^{0,h_2^+} [\chi_{3n}^{++}] - \lambda_+^{-1} W_{n,n} [\chi_{3n}^{++}] + b_{11}^{+-} W_{n,n}^{0,h_3^-} [\chi_{3n}^{--}] = 2\pi T_{1n}(r), \\ b_{11}^{-+} W_{n,n}^{0,h_3^+} [\chi_{3n}^{--}] - b_{11}^{--} W_{n,n}^{0,h_2^-} [\chi_{3n}^{--}] - \lambda_-^{-1} W_{n,n} [\chi_{3n}^{--}] = 2\pi T_{2n}(r). \end{cases} \tag{16}$$

– Для задачи В :

$$\begin{cases} -b_{11}^{++} W_{n,n}^{0,h_2^+} [\chi_{3n}^{++}] - \lambda_+^{-1} W_{n,n} [\chi_{3n}^{++}] - b_{12}^{+-} W_{n,n+1}^{0,h_3^-} [\tilde{\chi}_{0n}^{--}] = 2\pi T_n(r), \\ -b_{21}^{-+} W_{n,n}^{1,h_3^+} [\chi_{3n}^{--}] + b_{22}^{--} W_{n,n+1}^{1,h_2^-} [\tilde{\chi}_{0n}^{--}] - \lambda_-^{-1} W_{n,n+1} [\tilde{\chi}_{0n}^{--}] = \frac{2\pi q_n(r)}{\lambda_3^-}, \end{cases} \tag{17}$$

где

$$W_{n,n}^{v,h_i^\pm} [\chi_{jn}^{\pm}] = \frac{1}{\pi} \int_0^a W_{n,n}^{v,h_i^\pm}(r, \rho) \chi_{jn}^{\pm}(\rho) \rho d\rho, \quad W_{n,n}^{v,h_i^\pm}(r, \rho) = \int_0^\infty h_i^\pm t^v J_n(rt) J_n(\rho t) dt, \quad h_i^\pm = e^{-t|\tilde{z}_{i,\pm}|},$$

$$W_{n,n} [\chi_{jn}^{\pm}] = \frac{1}{\pi} \int_0^a W_{n,n}(r, \rho) \chi_{jn}^{\pm}(\rho) \rho d\rho, \quad W_{n,n}(r, \rho) = \int_0^\infty J_n(rt) J_n(\rho t) dt,$$

$$\chi_{jn}^{\pm}(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \chi_j^{\pm}(\rho, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi, \quad \chi_j^{\pm}(\rho, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^\infty \chi_{jn}^{\pm}(\rho) e^{in\varphi}, \quad \tilde{\chi}_{0n}^{\pm}(\rho) = \rho^n [\rho^{-n} \chi_{0n}^{\pm}(\rho)]'.$$

Если на дефектах заданы постоянные значения температуры и теплового потока: $T_k^\pm(x_1, x_2) = T_k$, $k = 1, 2$ (задача А); $T(x_1, x_2) = T$, $q(x_1, x_2) = q$ (задача В) то системы (15) и (16) будут иметь ненулевые решения только при $n = 0$. Их решения будем разыскивать в виде рядов по полиномам Якоби ($y = \rho/a$) [13].

$$\tilde{\chi}_0^{--}(y) = y(1-y^2)^{-1/2} \sum_{m=0}^\infty \psi_m^- P_m^{1,-1/2}(1-2y^2), \quad \chi_3^{++}(y) = (1-y^2)^{-1/2} \sum_{m=0}^\infty \psi_m^+ P_m^{1,-1/2}(1-2y^2). \tag{18}$$

Используя стандартную процедуру метода ортогональных многочленов, сводим системы интегральных уравнений (16), (17) к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \sum_{m=0}^\infty \alpha_m^+ a_{k,m}^+ + \sum_{m=0}^\infty \alpha_m^- a_{k,m}^- = f_k^1, \\ \sum_{m=0}^\infty \alpha_m^+ b_{k,m}^+ + \sum_{m=0}^\infty \alpha_m^- b_{k,m}^- = f_k^2, \quad k = \overline{0, \infty}, \end{cases} \tag{19}$$

Коэффициенты в системе (19) для задачи А имеют следующий вид:

$$a_{k,m}^+ = -b_{11}^{++} \lambda_+ - A_k, \quad a_{k,m}^- = b_{11}^{+-} \lambda_+ q_{k,m}^{3,-}, \quad b_{k,m}^+ = b_{11}^{+-} \lambda_-, \quad b_{k,m}^- = -b_{11}^{--} \lambda_- g_{k,m}^{2,-} - A_k,$$

$$f_k^j = \frac{4\lambda_\pm T \pi k!}{\Gamma(k+1/2)(2k+1/2)} \delta_{k0}, \quad j = 1, 2, \quad A_k = (2k+1/2)^{-1}, \quad \psi_k^\pm \frac{\Gamma(k+1/2)}{k!} = \alpha_k^\pm.$$

для задачи В следующий: $a_{k,m}^+ = -\frac{2b_{11}^{++}}{\lambda_+} g_{k,m}^{2,+} - A_k$, $a_{k,m}^- = -\frac{2b_{12}^{+-}}{\lambda_-} g_{k,m}^{3,-} \Big|_{\nu=0}^{\mu=1}$, $b_{k,m}^+ = \frac{2b_{21}^{-+}}{\lambda_-} g_{k,m}^{3,+} \Big|_{\nu=1}^{\mu=0}$,

$$b_{k,m}^- = -B_k + \frac{2b_{22}^-}{\lambda_-} g_{k,m}^{2,-} \Big|_{v=1}^{\mu=1}, f_k^1 = \frac{4\pi T}{\lambda_+^{-1}} \frac{k!}{\Gamma(k+1/2)(2k+1/2)} \delta_{k0}, f_k^2 = \frac{4\pi q}{\lambda_3^- \lambda_-^{-1}} \frac{k!}{\Gamma(k+3/2)(2k+1/2)} \delta_{k0},$$

$$B_k = (2k+3/2)^{-1}, g_{k,m}^{l,\pm}(v,\mu) = \int_0^\infty e^{-t|z_{l,\pm}|} \frac{J_{2k+v+1/2}(t) J_{2m+\mu+1/2}(t)}{t} dt, g_{k,m}^{j,+} \Big|_{v=\mu=0} \equiv g_{k,m}^{j,+}.$$

Система (19) решалась методом редукции, для которого доказана сходимость.

В результате с помощью разрывного решения (10) получены формулы для определения поля температур в окрестности трещин, которые для задачи А имеют следующий вид:

$$\zeta_0^+(x_3, x) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^\infty \left\{ \alpha_m^+ [b_{11}^{++} W_2^+(x_3, x) + \lambda_+^{-1} W_1^+(x)] - \alpha_m^- b_{11}^{+-} W_3^-(x_3, x) \right\},$$

$$\zeta_0^-(x_3, x) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^\infty \left\{ \alpha_m^- [b_{11}^{--} W_2^-(x_3, x) + \lambda_-^{-1} W_1^-(x)] - \alpha_m^+ b_{11}^{-+} W_3^+(x_3, x) \right\},$$

для задачи В следующий вид:

$$\zeta_0^+(x_3, x) = -\frac{b_{11}^{++}}{\pi} \sum_{m=0}^\infty \alpha_m^+ W_2^{0,+}(x_3, x) - \frac{\lambda_+^{-1}}{\pi} \sum_{m=0}^\infty \alpha_m^+ W_1^{0,+}(x_3, x) + \frac{b_{12}^{+-}}{\pi} \sum_{m=0}^\infty \alpha_m^- W_3^{1,\pm}(x_3, x),$$

$$\zeta_0^-(x_3, x) = \frac{b_{12}^{--}}{\pi} \sum_{m=0}^\infty \alpha_m^- W_2^{1,-}(x_3, x) + \frac{b_{11}^{-+}}{\pi} \sum_{m=0}^\infty \alpha_m^+ W_3^{0,+}(x_3, x) - \operatorname{sgn}(x_3 - x_3^{0,\pm}) \sum_{m=0}^\infty \alpha_m^- W_1^{1,-}(x_3, x),$$

где

$$W_l^{\mu,\pm}(x_3, x) = \frac{1}{2^{1/2}} \int_0^\infty e^{-t|z_{l,\pm}|} t^{-1/2} J_{2m+\mu+1/2}(t) J_0(xt) dt, \quad x = r/a.$$

Численные результаты и выводы. На основании формул (20), (21) были проведены численные исследования распределения температуры T в зависимости от расстояния h^\pm до границы соединения сред. На рис. 2, 3 получены распределение температур при $h^+ = a/3$, на рис. 4, 5 при $h^+ = a/5, h^- = a/3$, на рис. 6, 7 при $h^+ = a/7, h^- = a/7$. Вычисления проведены при следующих значениях коэффициентов теплопроводности $\lambda_1^+ = 247,04 \text{ Вт/м}\cdot\text{гр}$, $\lambda_3^+ = 194,95 \text{ Вт/м}\cdot\text{гр}$, $\lambda_1^- = 107,08 \text{ Вт/м}\cdot\text{гр}$, $\lambda_3^- = 79,256 \text{ Вт/м}\cdot\text{гр}$, и для задачи А заданных на поверхности трещин значений температур $T_k(x_1, x_2) = 60^0 \quad k=1,2$ (рис. 2, 4, 6), для задачи В значения температуры $T(x_1, x_2) = 60^0$ и теплового потока $q(x_1, x_2) = 600 \text{ Вт}$ (рис. 3, 5, 7).

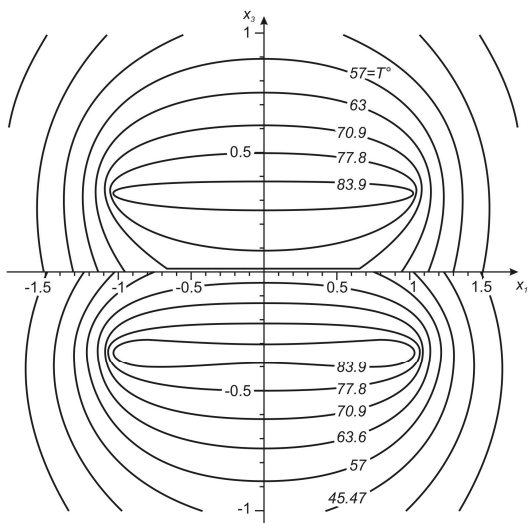


Рис. 2

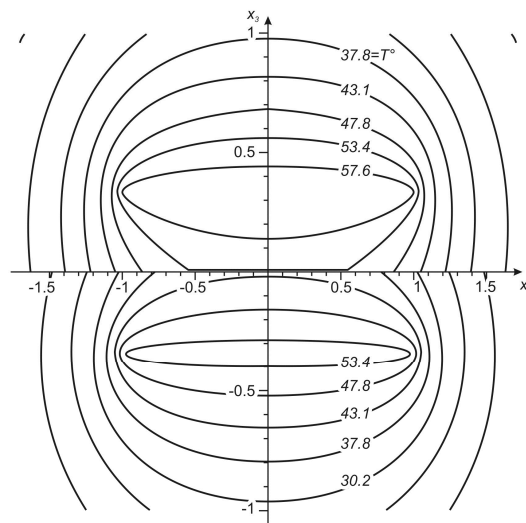


Рис. 3

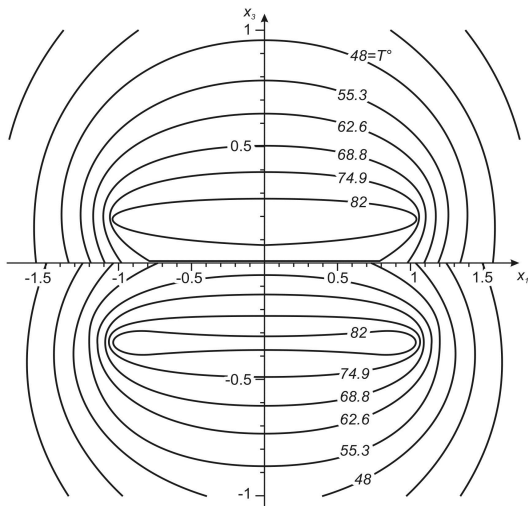


Рис. 4

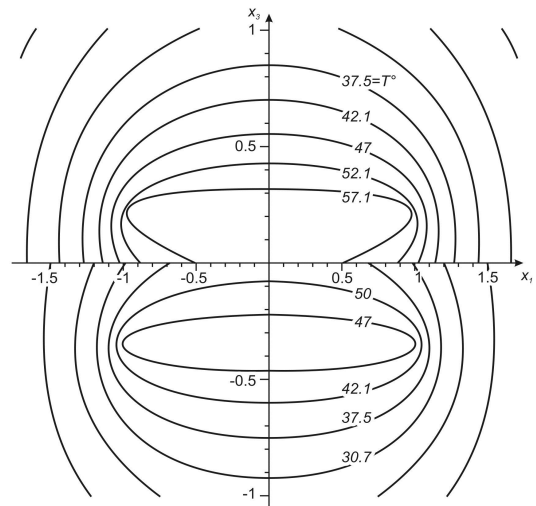


Рис. 5

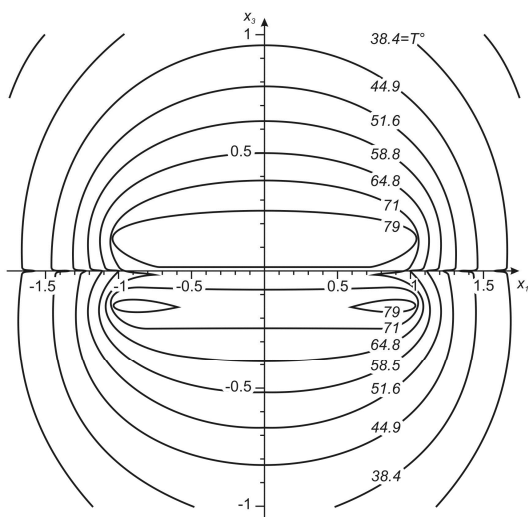


Рис. 6

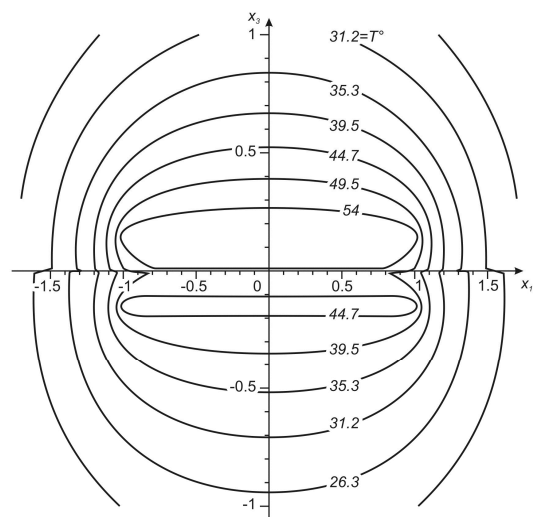


Рис. 7

Результаты вычислений показывают, что значение температуры для задачи А примерно на 30 % выше чем для задачи В. При сближении трещин (рис. 4–7) наблюдаются уменьшение температуры, как вблизи трещины, так и на удалении от неё. Так же проведенные исследования показывают, что на распределение температурных полей существенное влияние оказывает плоскость соединения материалов, особенно это заметно для задачи В (рис. 3, 5, 7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кит Г. С. Термоупругое состояние тела с двумя компланарными или параллельными трещинами / Г. С. Кит, О. П. Сушко // Теорет. и прикл. механика. – 2005. – Вып. 40. – С. 3–8.
2. Кит Г. С. Розподіл температури та напружень у тілі при тепловиділенні у кругових дискових областях / Г. С. Кит, О. П. Сушко // машинознавство. – 2009. – № 2 (140). – С. 3–7.
3. Кривой А. Ф. Решение задачи теплопроводности для кусочно-однородного ортотропного пространства с межфазными дефектами / А. Ф. Кривой, Ю. А. Морозов // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2012. – Т. 17, вип. 3 (15). – С. 107–119.
4. Petrova V. Thermal fracture of a functionally graded homogeneous bimaterial with system of cracks (Citations:1) / V. Petrova, S. Schmauder // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2011. – Vol. 55, No 2. – P. 148–157.
5. Ding H. Elasticity of Transversely Isotropic Materials (SOLID MECHANICS AND ITS APPLICATIONS) / H. Ding, W. Chen, L. Zhang. – Springer, Dordrecht, 2006. – Vol. 126. – 443 p.
6. Карслоу Г. Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер. – М., 1964. – 488 с.
7. Kryvyy O. The Discontinuous Solution for the Piece-homogeneous Transversal Isotropic Medium / O. Kryvyy // Operator Theory: Advances and Applications. – 2009. – Vol. 191. – P. 387–398.

8. Кривий О. Ф. Сингулярні інтегральні співвідношення і рівняння для кусково-однорідного трансверсально-ізотропного простору з міжфазними дефектами / О. Ф. Кривий // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2010. – Т. 53, № 1. – С. 23–35.
9. Снеддон И. Преобразование Фурье / И. Снеддон. – М.: Изд-во ностр. лит., 1955. – 668 с.
10. Прудников А. П. Интегралы и ряды. Специальные функции / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. – М.: Наука, 1983. – 751 с.
11. Градштейн И. Ц. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. Ц. Градштейн, И. М. Рыжик. – М.: Физматгиз, 1962. – 1100 с.
12. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г. Я. Попов. – М.: Наука, 1982. – 342 с.
13. Попов Г. Я. О применении многочленов Якоби к решению интегральных уравнений / Г. Я. Попов // *Изв. вузов. Математика.* – 1966. – № 4. – С. 3–7.

Поступила в редакцию 16.10.2013 г.

РЕЗЮМЕ

Побудовано розв'язок вісесиметричної задачі теплопровідності для кусково-однорідного трансверсально-ізотропного простору, що містить дві розташованих паралельно площині з'єднання середовищ компланарні кругові термоактивні (на яких задана температура або тепловий потік) тріщини, в тривимірній постановці. Отримано розподіл температур залежно від теплофізичних властивостей матеріалів та відстані від тріщин до границі з'єднання півпросторів.

Ключові слова: теплопровідність, кусково-однорідний трансверсально-ізотропний простір, термоактивна тріщина, двовимірні сингулярні інтегральні рівняння.

SUMMARY

The solution of the axisymmetric problem of heat conduction for a piecewise-homogeneous transversely isotropic space containing two arranged parallel to the plane of compound medium coplanar circular thermoactive (on which the is given by the temperature or heat flux) cracks in three-dimensional setting. Distributions of the temperature depending on the thermal properties of materials and the distance from the cracks to the border joint of the half-space.

Keywords: thermal conductivity, piecewise-homogeneous orthotropic space, thermoactive crack, two-dimensional singular integral equations.