УДК 539.375

І. П. Шацький
Івано-Франківський відділ Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Івано-Франківськ

ЗАДАЧІ ЗГИНУ ПЛАСТИНИ З ЧАСТКОВО ЗАЛІКОВАНОЮ ТРІЩИНОЮ

Запропоновано модель частково залікованої тріщини в зігнутій пластині. У зоні відновлення суцільності поверхнева енергія вважається інакшою, ніж у непошкодженому матеріалі. Враховано ефект закриття тріщини від згину.
Ключові слова: пластина, залікована тріщина, згин.

Вступ. Проблема реновації тривало експлуатованих виробів, споруд та біологічних об'єктів залишається актуальною для сучасного матеріалознавства. У праці [1] підведено підсумки моделювання дефектів, залікованих за ін'єкційними технологіями, тонкими податливими включеннями. Розриви переміщень на відновлених ділянках у плоских та просторових задачах знаходять за числовими розв'язками інтегро-диференціальних рівнянь. У цій роботі пропонуємо аналітичний підхід до експрес-оцінки міцності тонких пластин з частково залікованими тріщиноподібними дефектами, береги яких контактують в умовах деформації згином. Огляди робіт з моделювання контакту берегів тріщин засобами двовимірних теорій пластин містяться у працях [2–5].

Модель та постановка задачі. Розглядаємо пружну ізотропну пластину $(x, y, z) \in \mathbf{R}^2 \times [-h, h]$, послаблену прямолінійною наскрізною тріщиною $\Omega = L_0 \times [-h, h]$, розташованою вздовж відрізка осі абсцис $L_0 = (-l_0, l_0)$. Нехай на деякій ділянці тріщини $\Sigma = L_h \times [-h, h] \subseteq \Omega$ суцільність пластини є відновленою, а на поверхні $\Omega \setminus \Sigma$ є можливим розрив переміщень. У результаті дістаємо новий об'єкт – пластину із частково залікованою тріщиною, локалізованою вздовж контура $L = L_0 \setminus L_h$ (загалом, багатозв'язного). Для спрощення приймаємо, що пружні властивості тіла із залікованою тріщиною зберігаються (нехтуємо подробицями реології з'єднувального шару). Однак питома поверхнева енергія γ_h роз'єднання поверхонь на Σ є інакшою, ніж γ_0 у суцільному тілі (зазвичай $\gamma_h \le \gamma_0$). Таким чином, приходимо до задачі механіки тріщини у однорідній за пружними властивостями та неоднорідній за тріщиностійкістю пластині. У кінцевому результаті прагнемо відповісти на питання: яким повинен бути контур L_h, щоб при заданому співвідношенні γ_h / γ_0 підвищити несучу здатність дефектної пластини на потрібну величину.

Дослідження провели для задач рівномірного симетричного згину пластини з урахуванням контакту берегів тріщини в рамках класичних двовимірних теорій Кірхгофа та плоского напруженого стану, базуючись на енергетичному підході механіки крихкого руйнування.

Відповідно до моделі закриття тріщини по лінії у лицьовій поверхні пластини [3, 6] сформулювали крайову задачу згину пластини з частково залікованою тріщиною:

$$\Delta\Delta\varphi = 0, \quad \Delta\Delta w = 0, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus L;$$
$$[u_y] = h|[\vartheta_y]| > 0, \quad M_y = hN_y \operatorname{sgn}[\vartheta_y], \quad N_y \le 0, \quad x \in L;$$
$$N_x = N_{xy} = N_y = 0, \quad M_y = m, \quad M_{xy} = 0, \quad M_x = 0, \quad (x, y) \to \infty. \tag{1}$$

Тут φ і w – функція напружень і прогин пластинки, Δ – оператор Лапласа, $[u_y]$ і $[\vartheta_y]$ – стрибки переміщення і кута повороту нормалі, N_x, N_{xy}, N_y і M_x, M_{xy}, M_y – мембранні сили і згинальні моменти.

Як відомо [6], задача (1) зводиться до сингулярного інтегрального рівняння відносно стрибка кута повороту нормалі

$$(1+\kappa)\frac{Da_0}{4\pi}\int_L [\vartheta_y]'(\xi)\frac{d\xi}{\xi - x} = m, \quad x \in L; \quad [\vartheta_y](\partial L) = 0, \tag{2}$$

де $D = 2Eh^3/(3(1-\nu^2))$, $a_0 = (3+\nu)(1-\nu)$, $\kappa = 3(1+\nu)/(3+\nu)$, E, ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини.

За розв'язками (2) підраховуються коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів в околі вершин незалікованих ділянок тріщин

$$K_N = \mp\frac{B}{4}\lim_{x\to\partial L^\pm}\sqrt{2|x-\partial L^\pm|}[u_y]'(x), \quad K_M = \pm\frac{Da_0}{4}\lim_{x\to\partial L^\pm}\sqrt{2|x-\partial L^\pm|}[\vartheta_y]'(x).$$

Граничне значення зовнішнього навантаження, яке призводить до розповсюдження контактної тріщини визначається із енергетичного критерію механіки крихкого руйнування за комбінованого розтягу та згину [3]

$$\frac{\pi}{4h^2E}\left\{K_N^2 + \kappa\left(\frac{K_M}{h}\right)^2\right\} = 2\gamma_*,$$

де $\gamma_* = \gamma_0$ або $\gamma_* = \gamma_h$ – питома ефективна поверхнева енергія неушкодженого або залікованого матеріалу.

Ступінь заліковування тріщини будемо описувати двома параметрами: $\eta = \sqrt{\gamma_h/\gamma_0}$ – характеризує якість заліковування, $\psi = \mathrm{mes}L_h/\mathrm{mes}L_0 \in [0,1]$ – характеризує кількісну міру відновленої області. Ефективність заліковування опишемо відношенням граничних значень навантаження для залікованої та первинної тріщини: $\chi = |m_h|/|m_0|$.

Аналіз. Знайдемо $\chi(\eta,\psi)$ для різних варіантів заліковування.

1. Нехай $L_h = \varnothing$, $L = L_0$. Для незалікованої тріщини [6, 7]

$$K_N = \frac{\kappa}{1+\kappa}\frac{|m|\sqrt{l_0}}{h}, \quad K_M = \frac{m\sqrt{l_0}}{1+\kappa}; \quad |m_0| = 2h^2\sqrt{\frac{1+\kappa}{\kappa}\frac{2E\gamma_0}{\pi l_0}}.$$

2. Нехай тріщина залікована поблизу вершин: $L_h = (-l_0,-l)\cup(l,l_0)$, $L = (-l,l)$, $\psi = 1 - l/l_0$. Для укороченої тріщини

$$K_N = \frac{\kappa}{1+\kappa}\frac{|m|\sqrt{l}}{h}, \quad K_M = \frac{m\sqrt{l}}{1+\kappa}; \quad |m_h| = 2h^2\sqrt{\frac{1+\kappa}{\kappa}\frac{2E\gamma_h}{\pi l}}.$$

Тоді

$$\chi = \eta\Big/\sqrt{1-\psi}. \tag{3}$$

3. Нехай тріщина залікована посередині відрізка: $L_h = (-l,l)$, $L = (-l_0,-l)\cup(l,l_0)$, $\psi = l/l_0$. Тоді для незалікованої ділянки справа [8, 9]

$$K_N^\pm = \frac{\kappa}{1+\kappa}\frac{|m|}{h}\sqrt{\frac{l_0-l}{2}}F^\pm(\lambda), \quad K_M^\pm = \frac{m}{1+\kappa}\sqrt{\frac{l_0-l}{2}}F^\pm(\lambda);$$

$$|m_h| = 2h^2\sqrt{\frac{1+\kappa}{\kappa}\frac{2E\gamma_h}{\pi(l_0-l)}}\frac{\sqrt{2}}{F^-(\lambda)}; \quad F^\pm(\lambda) = \frac{\pm 1}{\lambda\sqrt{1\pm\lambda}}\left(1\pm\lambda - \frac{E(\lambda)}{K(\lambda)}\right), \quad \lambda = \frac{l_0-l}{l_0+l},$$

$K(\lambda), E(\lambda)$ – повні еліптичні інтеграли першого та другого роду.

$$\chi = \frac{\eta}{\sqrt{1-\psi}}\frac{\sqrt{2}}{F^-\left(\dfrac{1-\psi}{1+\psi}\right)}. \tag{4}$$

4. Нехай тріщина залікована на багатьох дрібних ділянках завдовжки $d-2l$ з кроком $d = 2l_0/N$ (N – число ділянок). Тоді $\psi = 1 - 2l/d$. Прийнявши при великих N справедливими результати періодичної задачі [8, 9], отримаємо

$$K_N \approx \frac{\kappa}{1+\kappa}\frac{|m|}{h}\sqrt{\frac{d}{\pi}\mathrm{tg}\frac{\pi l}{d}}, \quad K_M \approx \frac{m}{1+\kappa}\sqrt{\frac{d}{\pi}\mathrm{tg}\frac{\pi l}{d}};$$

$$|m_h| \approx 2h^2\sqrt{\frac{1+\kappa}{\kappa}\frac{2E\gamma_h}{d}\mathrm{ctg}\frac{\pi l}{d}}, \quad \chi \approx \eta\sqrt{\frac{\pi N}{2}\mathrm{tg}\frac{\pi\psi}{2}}. \tag{5}$$

Результати підрахунку ефективності відновлення несучої здатності дефектної пластини за різних тактик заліковування подано на рис. 1. Лінії *1, 2, 3* відповідають формулам (3), (4) та (5) при $N = 10$. Вочевидь інтерес викликають значення $\chi > 1$.

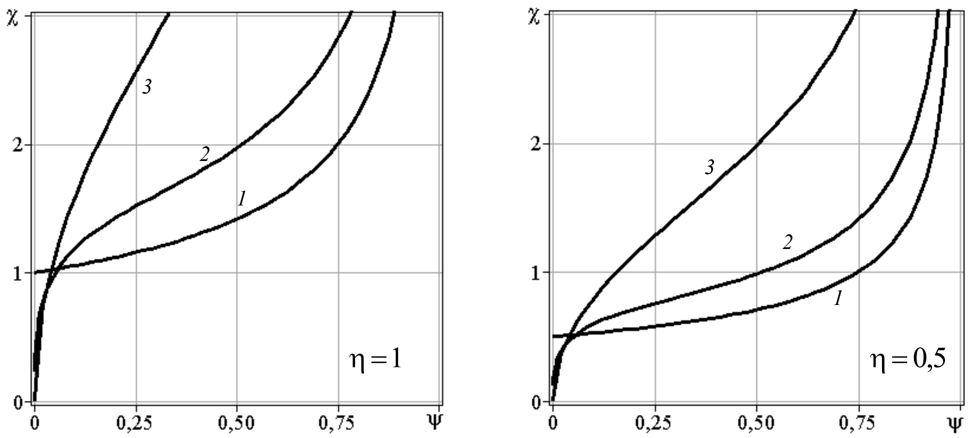

Рис. 1

Висновки. Заліковування тріщини посередині при не надто малих ψ є ефективнішим, ніж заліковування поблизу вершин. Зі зменшенням параметра η успіх заліковування істотно знижується. Здобуті результати заміною граничних навантажень $|m|$ на

$$c(n,\,m)=\begin{Bmatrix}\sqrt{(1+\kappa)/\kappa}\sqrt{n^2+\kappa\left(m/h\right)^2}, & n\ge\kappa|\,m\,|/h\\ n+|\,m\,|/h, & n\le\kappa|\,m\,|/h\end{Bmatrix}$$

[10] переносяться на загальний випадок комбінованого розтягу зусиллями n та згину моментами m пластини з частково залікованою тріщиною. Значення $\chi(\eta,\psi)$ при цьому не змінюються.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Маруха В. І. Механіка руйнування та міцність матеріалів. Т. 12: Ін'єкційні технології відновлення роботоздатності пошкоджених споруд тривалої експлуатації / В. І. Маруха, В. В. Панасюк, В. П. Силованюк; Ред. В. В. Панасюк. – Львів: Сполом, 2009. – 262 с.
2. Khludnev A. M. Analysis of cracks in solids. / A. M. Khludnev, V. A. Kovtunenko. – Southampton; Boston: WIT-Press, 2000. – 408 p.
3. Задачі теорії пластин та оболонок із взаємопов'язаними крайовими умовами на розрізах / І. Шацький, В. Перепічка, Т. Даляк, А. Щербій // Матем. проблеми механіки неоднорідних структур: В 2-х т. – Львів: Каменяр, 2000. – Т. 2. – С. 51–54.
4. Zehnder A. T. Fracture mechanics of thin plates and shells under combined membrane, bending and twisting loads / A. T. Zehnder, M. J. Viz // Applied mechanics reviews. – 2005. – Vol. 58. – P. 37–48.
5. Хлуднев А. М. Теория трещин с возможным контактом берегов / А. М. Хлуднев // Успехи механики. – 2005. – Т. 3, № 4. – С. 41–82.
6. Шацький І. П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами / І. П. Шацький // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1988. – № 7. – С. 49–51.
7. Young M. J. Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates – A classical plate solution / M. J. Young, C. T. Sun // Int. J. Fracture. – 1992. – Vol. 55. – P. 81–93.
8. Шацкий И. П. Взаимодействие коллинеарных разрезов с контактирующими кромками в изгибаемой пластине / И. П. Шацкий // Физ.-хим. механика материалов. – 1990. – Т. 26, № 3. – С. 70–75.
9. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М. П. Саврук. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.
10. Шацький І. П. Гранична рівновага пластинки з колінеарними тріщинами при комбінованому розтязі та згині / І. П. Шацький // Доп. НАН України. – 1995. – № 10. – С. 62–64.

Надійшло до редакції 23.09.2013 р.

РЕЗЮМЕ

Предложена модель частично залеченной трещины в изгибаемой пластине. В области восстановления сплошности поверхностная энергия отличается от таковой для неповрежденного материала. Учитывается эффект закрытия трещины от изгиба.

Ключевые слова: пластина, залеченная трещина, изгиб.

SUMMARY

The model of partially healed crack in bending plate is proposed. On the recovered area of crack continuity takes place while surface energy differs from that in undamaged body. The crack closure effect under bending is considered.

Keywords: plate, healed crack, bending.