

УДК 539.3

В. П. Шевченко, А. Ю. Удовиченко

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ОБОЛОЧЕК ПРИ ЛОКАЛЬНЫХ НАГРУЗКАХ ПО УТОЧНЕННЫМ ТЕОРИЯМ

Методом интегральных преобразований Фурье получено фундаментальное решение уравнений статики пологих трансверсально-изотропных оболочек. Исследовано напряженно-деформированное состояние оболочек положительной кривизны при локально силовых воздействиях. Выполнены численные исследования поведения прогиба оболочки при воздействии на нее локальной нагрузки. На основе полученных результатов исследовано влияние размера площади круга загрузки на поведение прогиба трансверсально-изотропной оболочки в зависимости от ее геометрических и упругих параметров. Полученные решения сопоставлены с решениями, полученными по теории Кирхгофа–Лява.

Ключевые слова: трансверсально-изотропная оболочка, прогиб оболочки, локальная нагрузка, фундаментальное решение, интегральное преобразование Фурье, положительная кривизна, модель Кирхгофа–Лява, модель Тимошенко.

Введение. Рассматривая задачи концентрации напряжений в тонкостенных конструкциях большой интерес вызывают уточненные теории оболочек [1–3]. Решения задач о действии локальных воздействий на изотропные оболочки по теории Кирхгофа–Лява рассмотрены многими авторами [4, 5]. Однако в современном машиностроении, авиастроении и других отраслях промышленности широко применяются новые листовые типы материалов, которые имеют трансверсально-изотропные свойства. Для исследования прочности таких конструкций в местах концентрации напряжений требуются более современные подходы, основанные не на классической теории Кирхгофа–Лява, а на теории трансверсально-изотропных пластин и оболочек. В отличие от уравнений классической теории, разрешающие уравнения теории оболочек, учитывающих деформацию поперечного сдвига, имеют десятый порядок [6].

Целью этой работы является не только построение системы фундаментальных решений, но и последующее исследование напряженного состояния оболочек при локальных нагрузках.

Постановка задачи. Для исследования прочности оболочек при наличии различного рода концентраторов напряжений (локальные нагрузки, трещины, отверстия и т.д.), как правило используются разрешающие уравнения типа Кирхгофа–Лява [7]. Установлено, что вблизи зон концентрации напряжений эти уравнения дают не всегда корректные результаты. Поэтому в последнее время для решения подобных задач применяются другие приближенные теории. В частности это уравнения теории тонких оболочек, основанных на гипотезах С. П. Тимошенко [8]. Этот подход не только дает более уточненные решения в окрестности локальных воздействий, но и применим для исследования напряженного состояния оболочек, изготовленных из трансверсально-изотропных материалов.

Рассмотрим оболочку постоянной толщины h , изготовленную из трансверсально-изотропного материала. Система разрешающих дифференциальных уравнений, записанная в перемещениях имеет вид [7]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\lambda+\nu}{R_2} \frac{\partial w}{\partial x} &= -\frac{1-\nu^2}{Eh} X, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1+\lambda\nu}{R_2} \frac{\partial w}{\partial y} &= -\frac{1-\nu^2}{Eh} Y, \\ -\frac{k'G_z h}{B} (\nabla^2 w + \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial y}) + \frac{\lambda+\nu}{R_2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1+\lambda\nu}{R_2} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1+2\lambda\nu+\lambda^2}{R_2^2} w &= \frac{Z}{B}, \\ \nabla^2 \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial y} \right) - \frac{k'G_z h}{D} \left(\nabla^2 w + \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial y} \right) &= 0, \quad (\nabla^2 - \chi^2) \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_2}{\partial x} \right) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь

$$B = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad 2\omega = \frac{E}{k'G_z h}, \quad \chi^2 = \frac{2k'G_z h}{D(1-\nu)}.$$

Для определения напряженно-деформированного состояния оболочки при действии локальной нагрузки, распределенной по некоторой области S , сначала получим фундаментальное решение этой системы. Одним из эффективных методов построения фундаментальных решений системы дифференци-

альных уравнений с постоянными коэффициентами (1) является метод интегральных преобразований Фурье [7].

Применим к системе (1) двумерное преобразование Фурье [7]:

$$\bar{u}^{0k}(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int u^{0k}(x, y) e^{-i(\xi x + \eta y)} dx dy \quad (k=1, 2, 3).$$

Математической моделью сосредоточенной силы является обобщенная дельта функция Дирака [9]. Например, если на оболочку действует сосредоточенная сила P , то её можно представить в виде:

$$X = P \delta(x, y); \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

Компоненты перемещений и других искомым функций, обозначим следующим образом $u^{01}, v^{01}, w^{01}, \gamma_1^{01}, \gamma_2^{01}$. Аналогично для сил действующих по оси Y обозначим индексом $u^{02}, \dots, \gamma_2^{02}$, а по оси Z – индексом $u^{03}, \dots, \gamma_2^{03}$. Набор этих функций называются фундаментальным решением системы (1). Применяя к системе уравнений (1) двумерное интегральное преобразование Фурье, получим систему уравнений относительно трансформант $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, решение которой имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{u}^{-01} &= \frac{\bar{X}}{DR_2^2} \frac{\xi^2 \Delta_1^2 \Delta_\omega}{(\xi^2 + \eta^2)^2 \Delta} + \frac{2(1+\nu)\bar{X}}{Eh} \frac{\eta^2 + (1-\nu)\xi^2/2}{(\xi^2 + \eta^2)^2}, \\ \bar{v}^{-01} &= \frac{\bar{X}}{DR_2^2} \frac{\xi \eta \Delta_1 \Delta_2 \Delta_\omega}{(\xi^2 + \eta^2)^2 \Delta} - \frac{(1+\nu)\bar{X}}{Eh} \frac{\xi \eta}{(\xi^2 + \eta^2)^2}, \quad \bar{w}^{-01} = \frac{\bar{X}}{DR_2} \frac{i \xi \Delta_1 \Delta_\omega}{\Delta}, \\ \bar{\gamma}_1^{-01} &= \frac{i \xi}{\Delta_\omega} \bar{w}^{-01}, \quad \bar{\gamma}_2^{-01} = \frac{i \eta}{\Delta_\omega} \bar{w}^{-01}, \quad 2\omega = \frac{D}{k' G_z h}, \quad k^4 = \frac{12(1-\nu^2)}{R_2^2 h^2}, \\ \Delta &= (\xi + \eta) + k(\xi + \lambda \eta) \Delta, \quad \Delta_\omega = 1 + 2\omega(\xi^2 + \eta^2). \end{aligned} \quad (2)$$

Трансформанты перемещений (2) и соответствующие трансформанты для изотропных оболочек [7] отличаются друг от друга лишь множителем Δ_ω . Для сосредоточенных сил Y и Z решение системы (1) в пространстве трансформант имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{u}^{-02} = \bar{v}^{-01}, \quad \bar{w}^{-02} &= -\frac{\bar{Y}}{DR_2^2} \frac{i \eta \Delta_2 \Delta_\omega}{\Delta}, \quad \bar{v}^{-02} = \frac{\bar{Y}}{DR_2^2} \frac{\eta^2 \Delta_2^2 \Delta_\omega}{(\xi^2 + \eta^2)^2 \Delta} + \frac{2(1+\nu)\bar{Y}}{Eh} \frac{\xi^2 + (1-\nu)\eta^2/2}{(\xi^2 + \eta^2)^2}, \\ \bar{u}^{-03} = -\bar{w}^{-01}, \quad \bar{w}^{-03} &= \frac{\bar{Z}}{D} \frac{(\xi^2 + \eta^2)^2 \Delta_\omega}{\Delta}, \quad \bar{\gamma}^{-03} = -\bar{w}^{-02}. \end{aligned}$$

Оригиналы компонент перемещений, например, u^{03} найдем с помощью формулы обращения

$$u^{03} = -\frac{1}{4\pi^2 DR_2} \iint \frac{i \xi (1 + 2\omega(\xi^2 + \eta^2)) ((1+\nu)(\xi^2 + \lambda \eta^2) - (1-\lambda)(\xi^2 + \eta^2)) e^{-i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^4 + k^4 (\xi^2 + \lambda \eta^2)^2 (1 + 2\omega(\xi^2 + \eta^2))};$$

Для разделения переменных в подынтегральном выражении применим формулу Якоби-Ангера [7]

$$\begin{aligned} u^{03} &= -\frac{2}{\pi^2 DR_2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cos(2n+1)\varphi \int_0^{\pi/2} \cos(2n+1)\theta \cos\theta ((1+\nu)(\cos^2\theta + \lambda \sin^2\theta) - (1-\lambda)) d\theta \times \\ &\quad \times \int_0^{\infty} \frac{(1 + 2\omega R^2) J_{2n+1}(rR) dR}{R^4 + k^4 (\cos^2\theta + \lambda \sin^2\theta)^2 (1 + \omega R^2)}. \end{aligned}$$

В последнем выражении сменим порядок индексов и после преобразований получим

$$\begin{aligned} u^{03} &= -\frac{2}{\pi^2 DR_2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cos(2n-1)\varphi \int_0^{\pi/2} \cos(2n-1)\theta \cos\theta ((1+\nu)(\cos^2\theta + \lambda \sin^2\theta) - \\ &\quad - (1-\lambda)) \sum_{j=1}^2 b_j \int_0^{\infty} \frac{J_{2n-1}(rR) dR}{p^2 + ik^2 d_j^2}. \end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$d_j^2 = t^2(\theta) [-i\omega k^2 t^2(\theta) \mp \sqrt{1 - \omega^2 k^4 t^4(\theta)}] \quad (\operatorname{Re} \sqrt{i} d_j > 0),$$

$$t^2(\theta) = \cos^2 \theta + \lambda \sin^2 \theta, \quad b_j = \pm \left(1 - 2\omega i k^2 d_j^2 \right) / \left(i k^2 (d_2^2 - d_1^2) \right), \quad \zeta = kr.$$

Окончательное выражение для компоненты u^{03} получим, используя функцию $G_{n,\nu}(z)$ [7]

$$u^{03} = \frac{r}{\pi^2 DR_2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{u_{nm}^{03}}{m!} G_{n,n+m-1}(\zeta \sqrt{i}) \cos(2n-1)\varphi, \quad \zeta = k\sqrt{i}.$$

Здесь

$$u_{nm}^{03} = \int_0^{\pi/2} [\cos(2n-1)\theta \cos \theta ((1+\nu)(\cos^2 \theta + \lambda \sin^2 \theta) - (1-\lambda)) \sum_{j=1}^2 b_j d_j^{2n-2} (1-d_j^2)^m] d\theta.$$

Аналогичным образом получим представления для \bar{v}^{03} и w^{03}

$$v^{03} = \frac{r}{\pi^2 DR_2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{v_{nm}^{03}}{m!} G_{n,n+m-1}(\zeta \sqrt{i}) \sin(2n-1)\varphi,$$

$$v_{nm}^{03} = \int_0^{\pi/2} [\sin(2n-1)\theta \sin \theta ((1+\nu)(\cos^2 \theta + \lambda \sin^2 \theta) - (1-\lambda)) \sum_{j=1}^2 b_j d_j^{2n-2} (1-d_j^2)^m] d\theta;$$

$$w^{03} = \frac{r}{2\pi k^2 D} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{w_{nm}^{03}}{m!} G_{n,n+m}(\zeta \sqrt{i}) \cos 2n\varphi, \quad w_{nm}^{03} = \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^2 i b_j d_j (1-d_j^2)^m \cos 2n\theta d\theta.$$

Компоненты усилий и моментов определяются аналогично и имеют вид

$$T_{1,2}^{03} = \frac{k^2 R_2}{8\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{(t_{1,2}^{03})_{mn}}{m!} G_{n,n+m}(\zeta \sqrt{i}) \cos 2n\varphi, \quad S^{03} = \frac{k^2 R_2}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{s_{mn}^{03}}{m!} G_{n,n+m}(\zeta \sqrt{i}) \sin 2n\varphi,$$

$$M_{1,2}^{03} = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{(m_{1,2}^{03})_{mn}}{m!} G_{n,n+m}(\zeta \sqrt{i}) \cos 2n\varphi, \quad H^{03} = -\frac{1-\nu}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h_{mn}^{03}}{m!} G_{n,n+m}(\zeta \sqrt{i}) \sin 2n\varphi. \quad (3)$$

Здесь

$$(t_{1,2}^{03})_{mn} = \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^2 \int_0^{\pi/2} b_j i^{-1} (1 \mp \cos 2\theta) t^2 d_j^{2n} (1-d_j^2)^m \cos 2n\theta d\theta,$$

$$s_{mn}^{03} = \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^2 \int_0^{\pi/2} b_j i^{-1} d_j^{2n} (1-d_j^2)^m t^2(\theta) (\cos 2(n-1)\theta - \cos 2(n+1)\theta) d\theta,$$

$$(m_{1,2}^{03})_{mn} = \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^2 (-1)^j \int_0^{\pi/2} \frac{(1-d_j^2)^m d_j^{2n}}{d_2^2 - d_1^2} (1+\nu \pm (1-\nu) \cos 2\theta) \cos 2n\theta d\theta,$$

$$h_{mn}^{03} = \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^2 (-1)^j \int_0^{\pi/2} \frac{(1-d_j^2)^m d_j^{2n}}{d_2^2 - d_1^2} (\cos 2(n-1)\theta - \cos 2(n+1)\theta) d\theta.$$

Полученные решения $u^{0j}, T_{1,2}^{0j}, M_{1,2}^{0j}$ ($j=1,2,3$) называются фундаментальными и являются основой для решения различных граничных задач теории трансверсально-изотропных оболочек.

В качестве примера рассмотрим трансверсально-изотропную оболочку, находящуюся под действием локальной силовой нагрузки распределенной по площади круга радиуса R_0 . Закон распределения локальной нагрузки в указанной области запишем в виде

$$q(x, y, x_0, y_0) = \begin{cases} q_0, & r \leq R_0 \\ 0, & r > R_0 \end{cases}, \quad x, y \in S^\infty, x_0, y_0 \in D,$$

где q_0 – интенсивность распределенной нагрузки. Её главный вектор равен $P = q_0 \pi R_0^2$.

Тогда решение задачи о напряженно-деформированном состоянии трансверсально-изотропной оболочки под действием этой нагрузки можно записать в виде

$$\Phi(x, y) = \iint_S q(x, y, x_0, y_0) E(x - x_0, y - y_0) dx_0 dy_0.$$

Здесь $E(x - x_0, y - y_0)$ – фундаментальное решение системы уравнений (1); $\Phi(x, y)$ – любая из компонент перемещений или внутренних силовых величин.

Исследуем изменение прогиба оболочки в центре нагружаемой площадки при изменении радиуса круга площадки загрузки для трансверсально-изотропной оболочки и сопоставим его с решением по теории Кирхгофа–Лява.

Методику построения искомых функций рассмотрим на примере нормального перемещения $w^{03}(x, y)$, соответствующего оболочке неотрицательной кривизны

$$w^{03} = \frac{1}{2\pi k^2 D} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{w_{nm}^{03}}{m!} G_{n,n+m}(\zeta\sqrt{i}) \cos 2n\varphi \int_0^{2\pi} \int_0^{R_0} G_{0,m}(r\sqrt{i}) r dr d\varphi,$$

$$w(r, \varphi) = -\frac{q_0}{2\pi k^2 D} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{w_{nm}^{03}}{m!} \int_0^{R_0} \int_0^{2\pi} G_{n,n+m}(r\sqrt{i}) \cos(2n \arctg(\frac{r_0 \sin \varphi_0 + r \sin \varphi}{r_0 \cos \varphi_0 + r \cos \varphi})) R_0 d\varphi_0 dR_0.$$

Интегралы, входящие в выражение (3), в общем случае считаются численно. Рассмотрим значения прогиба оболочки в центре нагруженной площадки:

$$w(0, 0) = -\frac{q_0}{2\pi k^2 D} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{w_{0m}^{03}}{m!} 2\pi \int_0^{R_0} G_{0,m}(r_0\sqrt{ik}) r_0 dr_0.$$

Для интеграла в последнем выражении справедлива формула

$$\int_0^{R_0} G_{0,m}(r_0\sqrt{ik}) r_0 dr_0 = -\frac{2}{k^2 i} (G_{0,m+1}(R_0\sqrt{ik}) - \frac{m!}{2}).$$

Тогда, окончательно для трансверсально-изотропной оболочки получим:

$$w_T(0, 0) = -\frac{q_0}{k^2 D} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{w_{0m}^{03}}{m!} [-2i(G_{0,m+1}(R_0\sqrt{ik}) - \frac{m!}{2})] = \frac{2q_0 i}{k^2 D} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{w_{0m}^{03}}{m!} [G_{0,m+1}(R_0\sqrt{ik}) - \frac{m!}{2}]. \quad (4)$$

Полагая в формуле (4) $\omega = 0$ получим значение прогиба для изотропной оболочки по теории Кирхгофа–Лява.

$$w_H(0, 0) = -\frac{2P}{\pi^2 k^2 D} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_0^2} \frac{w_{m0}^{03}}{m!} \left(G_{0,m+1}(\alpha_0\sqrt{i}) - \frac{m!}{2} \right).$$

На основе полученных результатов исследуем поведение прогиба $w^*(0, 0)$ сферической оболочки в зависимости от радиуса площадки загрузки. Результаты расчетов представлены на рис. 1. На нем представлены графики изменения безразмерного прогиба для трансверсально-изотропной w_T и изотропной w_H оболочек при следующих значениях параметров: $R_2/h = 10$, $R_0/h = 0...1$.

Выводы. Из представленного рисунка видно, что в случае трансверсально-изотропной оболочки прогиб в окрестности точки приложения сосредоточенной силы имеет логарифмическую особенность и примерно на расстоянии толщины оболочки совпадает со значением прогиба изотропной оболочки. Следовательно, исследование напряженно-деформированного состояния оболочек при загрузке локальной нагрузкой, распределенной по площадке $R_0/h \geq 1$ можно проводить по более простой модели Кирхгофа–Лява.

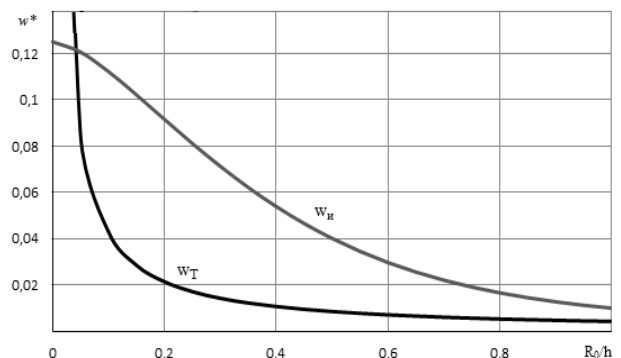


Рис. 1

Следуя результатам, приведенным в [10], размер площадки загрузки, позволяющий использовать теорию Кирхгофа–Лява при исследовании прочности оболочек при локальном нагружении составляет $R_0 \geq 0,68h$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пелех Б. Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью / Б. Л. Пелех. – К.: Наук. думка, 1973. – 248 с.
2. Sih G. C. On crack in shells with shear deformation / G. C. Sih, H. C. Hagedorf // *Mechanics of fracture*. – 1977. – Vol. 3. – P. 201–229.
3. Семькина Т. Д. Расчет трансверсально-изотропных оболочек / Т. Д. Семькина // *Теоретическая и прикладная механика*. – Минск: БИТУ, 2006. – Вып. 21. – С. 134–136.
4. Величко П. М. О действии сосредоточенных сил и моментов на оболочку положительной кривизны / П. М. Величко, В. П. Шевченко // *Известия АН СССР. Механика твердого тела*. – 1969. – № 2. – С. 147–151.
5. Шевляков Ю. А. К вопросу о действии сосредоточенных воздействий на пологие оболочки / Ю. А. Шевляков, В. П. Шевченко // *Концентрация напряжений*. – К.: «Наукова думка», 1965. – Вып. 1. – С. 326–327.
6. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек / С. А. Амбарцумян. – М.: Наука, 1974. – 446 с.
7. Хижняк В. К. Напряженно-деформированное состояние трансверсально-изотропных оболочек при локальных нагрузках / В. К. Хижняк, В. П. Шевченко // *Прикл. механика*. – 1972. – № 11. – С. 21–27.
8. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Наука, 1966. – 636 с.
9. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике / В. С. Владимиров. – М.: Наука, 1976. – 280 с.
10. Шевляков Ю. А. Изгиб пластин и оболочек при локальных нагрузках / Ю. А. Шевляков, В. П. Шевченко // *Гидроаэромеханика и теория упругости*. – Харьков: Изд-во Харьковского университета, 1968. – № 8. – С. 17–23.

Поступила в редакцию 09.04.2014 г.

РЕЗЮМЕ

Методом інтегральних перетворень Фур'є отримано фундаментальне розв'язання рівнянь статичної похилих трансверсально-ізотропних оболонок. Досліджено напружено-деформований стан оболонок позитивної кривизни за локально силового впливу. Виконано численні дослідження поведінки прогину оболонки при впливі на неї локального навантаження. На основі отриманих результатів досліджено вплив розміру площі кола завантаження на поведінку прогину трансверсально-ізотропної оболонки в залежності від її геометричних і пружних параметрів. Отримане розв'язання співставлене з розв'язанням, отриманим по теорії Кірхгофа–Лява.

Ключові слова: трансверсально-ізотропна оболонка, прогин оболонки, локальне навантаження, фундаментальне рішення, інтегральне перетворення Фур'є, позитивна кривизна, модель Кірхгофа–Лява, модель Тимошенко.

SUMMARY

The fundamental solution of the equations of statics of shallow transversely isotropic shells was obtained using Fourier integral method. The stress-strain state of shells of positive curvature with local power impacts was researched. The numerical study of the behavior of shell deflection when exposed to a local load was accomplished. The influence of the size of a loading area of a circle on the behavior of the deflection of the transversely isotropic shell depending on its geometrical and elastic parameters on the basis of the obtained results was studied. The obtained solutions were compared with the solutions obtained using Kirchhoff–Love theory.

Keywords: transversely isotropic shell, shell deflection, local load, fundamental solution, integral Fourier transformation, positive curvature, Kirchhoff-Love model, Timoshenko model.