

УДК 510.2:519.7

С. В. Сторожев

### НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННОЕ ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДИК ОЦЕНКИ СТРАТЕГИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Реализовано построение нечетко-интервальной модификации обобщенного критерия пессимизма-оптимизма Гурвица и нечетко-интервальной модификации критерия Шеремета, представляющих собой возможные инструменты решения задач селективного отбора оптимизированных локальных стратегий в условиях полной неопределенности реакции среды их реализации, а также нечеткости исходных статистических и экспертных данных. Представлены примеры численной реализации построенных нечетко-интервальных подходов к определению оптимизированных локальных стратегий. Описанные методики применимы для оценки стратегий в моделях технологических, финансово-инвестиционных и социально-экономических процессов с нечеткими данными.

*Ключевые слова:* обобщенный критерий пессимизма-оптимизма Гурвица, критерий Шеремета, нечетко-интервальные модификации, селективный отбор оптимизированных нечетких стратегий, модели технологических, финансово-инвестиционных и социально-экономических процессов.

**Введение и формулировка целей исследования.** Вопросы разработки методов для оценивания эффективности стратегий реализации социально-экономических и технологических проектов, описываемых многокритериальными разветвленными иерархическими моделями, сохраняют актуальность в связи с необходимостью максимально полного учета специфики моделируемых процессов [1–9]. В этом контексте, одним из важных заданий является построение нечетких версий разработанных ранее критериев оценивания стратегий с целью достижения более корректного учета факторов неопределенности в описаниях параметров моделей и в реакции среды реализации оцениваемых стратегий. В частности, к ряду эффективных приемов формирования обобщенных оценок для множества сопоставляемых многофакторных локальных стратегий относятся критерии Гурвица [10–14] и Шеремета [15–18], применяемые в указанных публикациях к моделям с частными критериями четкой количественной природы. В данном контексте, цель представляемого в данной работе исследования заключается в построении нечетко-множественных аналогов вышеуказанных критериев и иллюстрации методики их применения на конкретных примерах.

**Построение нечетко-интервальной версии обобщенного критерия пессимизма-оптимизма Гурвица.** При получении основных соотношений нечетко-интервальной версии обобщенного критерия пессимизма-оптимизма Гурвица [10–14] полагается, что для нескольких вариантов сопоставляемых локальных стратегий  $S_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) имеются нечеткие количественные оценки экспертной либо статистической природы в виде обобщенных показателей  $A_{ij}$  ( $i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$ ) эффективности применения  $S_i$  в течение ряда одинаковых последовательных промежутков времени  $T_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ).

Указанные оценки представлены нечеткими интервалами – нормальными нечеткими множествами  $A_{ij}$  с трапецидальными функциями принадлежности  $\mu_{A_{ij}}(x)$ . Реперные точки нечетких интервалов  $A_{ij}$  представлены кортежами  $(a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij})$ . Из оценок  $A_{ij}$  формируется матрица  $\|A_{ij}\|$  ( $i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$ ) нечетких выигрышей от применения стратегии  $S_i$  за период  $T_j$ .

Алгоритм выбора из множества  $S_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) наиболее эффективной стратегии, предпочтительной для использования в последующий период  $T_{n+1}$  с учетом неопределенности среды реализации, предполагает на первом этапе перестановку в порядке убывания нечетко-интервальных оценок  $A_{ij}$ , размещенных в каждой  $i$ -й строке матрицы  $\|A_{ij}\|$ .

Данное упорядочивание может быть выполнено на основе операций сравнения нечетких интервалов [19] с использованием характеристики  $R(A_{ij})$ , рассчитываемой по формулам:

$$\begin{aligned} & (\Delta_{1A_{ij}} / 3 + \Delta_{2A_{ij}} / 2 + \Delta_{3A_{ij}} / 3) / (\Delta_{1A_{ij}} + \Delta_{2A_{ij}} + \Delta_{3A_{ij}})^2, \\ \Delta_{1A_{ij}} &= ((c_{ij} - 3b_{ij} + 2d_{ij})^2 + 1)^{1/2} / 6, \quad \Delta_{2A_{ij}} = ((2c_{ij} + d_{ij} - a_{ij} - 2b_{ij})^2 + 1)^{1/2} / 3, \\ \Delta_{3A_{ij}} &= ((3c_{ij} - 2a_{ij} - b_{ij})^2 + 1)^{1/2} / 6. \end{aligned} \quad (1)$$

В этом случае  $A_{ij} > A_{kl}$  если  $R(A_{ij}) > R(A_{kl})$  и  $A_{ij} < A_{kl}$  если  $R(A_{ij}) < R(A_{kl})$ . Для получаемой таким образом модифицированной матрицы нечетких интервалов вводится обозначение  $\|B_{ij}\|$ .

В рамках предлагаемого обобщения нечетко-интервальная модификация критерия пессимизма-оптимизма Гурвица определяется как принцип выбора в качестве оптимальной той стратегии  $S_{i_0}$  из множества анализируемых, которая минимизирует нечетко-интервальную функцию вида

$$H_{i_0}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \sum_{j=1}^n \lambda_j B_{i_0 j}. \quad (2)$$

Здесь  $\lambda_j$  – нечетко-интервальные коэффициенты, обладающие обобщенным свойством положительной определенности  $\lambda_j \geq Z$  и удовлетворяющие условию нормальности

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = E; \quad (3)$$

$Z, E$  – соответственно нулевая и единичная нечетко-интервальные величины.

Для определения коэффициентов  $\lambda_j$  вводятся в рассмотрение нечетко-интервальные характеристики

$$B_j = \sum_{i=1}^m B_{ij} \quad (j = \overline{1, n}); \quad (4) \quad \bar{B}_j = B_j / m = \left( \sum_{i=1}^m b_{ij} \right) / m \quad (j = \overline{1, n}), \quad (5)$$

$$B = \sum_{j=1}^n B_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n B_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A_{ij}, \quad (6)$$

обладающие свойством  $\bar{B}_1 \leq \bar{B}_2 \leq \dots \leq \bar{B}_n$ .

На следующем этапе построения критерия постулируются два варианта соотношений, характеризующих неопределенность реакции среды реализации рассматриваемых стратегий

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \dots : \lambda_n = \bar{B}_n : \bar{B}_{n-1} : \dots : \bar{B}_1, \quad (7)$$

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \dots : \lambda_n = \bar{B}_1 : \bar{B}_2 : \dots : \bar{B}_n, \quad (8)$$

и отражающих гипотезы о ситуации, диктующей осторожность, пессимизм в выборе стратегий либо о ситуации, которая характеризуется как благополучная, безопасная, оптимистичная.

Соотношение (7) согласно исходной концепции построения обобщенного критерия пессимизма-оптимизма Гурвица [10–14] предписывает в диктующей осторожность ситуации использование принципа «невозрастания средних выигрышей». Соотношение (8) в ситуации, оцениваемой как безопасная, рекомендует использование принципа «неубывания средних выигрышей».

Таким образом, в случае ситуации осторожного выбора наилучшей стратегии с учетом соотношений (3), (7) представления для нечетко-интервальных коэффициентов  $\lambda_j$  принимают вид

$$\lambda_j = E \cdot \bar{B}_{n-j+1} / \bar{B} \quad (j = \overline{1, n}), \quad (9)$$

а в случае благоприятной для реализации стратегий ситуации коэффициенты  $\lambda_j$  имеют представления

$$\lambda_j = E \cdot \bar{B}_j / \bar{B} \quad (j = \overline{1, n}). \quad (10)$$

Расчеты в соотношениях (2)–(10) осуществляются с использованием соотношений алгебры нечетких интервалов [2, 3, 7]. В частности, арифметические операции с нормальными нечеткими интервалами  $A_i$ , описываемыми кортежами реперных точек  $(a_i, b_i, c_i, d_i)$  ( $i = \overline{1, 2}$ ), соответственно представляют собой: процедуры получения нормальных нечетких интервалов  $A_1 + A_2$  с кортежами реперных точек  $(a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2)$ ; нормальных нечетких интервалов  $A_1 - A_2$  с кортежами реперных точек  $(a_1 - d_2, b_1 - c_2, c_1 - b_2, d_1 - a_2)$ ; нормальных нечетких интервалов  $A_1 \cdot A_2$  с кортежами реперных точек  $(a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot b_2, c_1 \cdot c_2, d_1 \cdot d_2)$ ; нормальных нечетких интервалов  $A_1 / A_2$  с кортежами реперных точек  $(a_1 / d_2, b_1 / c_2, c_1 / b_2, d_1 / a_2)$ . Результатом возведения нечеткого интервала  $A_1$  в четкую степень  $n$  является нечеткий интервал с кортежем реперных точек  $(a_1^n, b_1^n, c_1^n, d_1^n)$ .

На заключительном этапе построения нечетко-интервальной модификации обобщенного критерия Гурвица для каждой из сопоставляемых стратегий  $S_i$  рассчитываются определяемые соотношением (2) нечетко-интервальные показатели оцениваемых стратегий  $H_i(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ . Оптимальной является стратегия с максимальной характеристикой  $H_i$  и для ее выбора производится сопоставительное оценивание этих нечетко-интервальных величин с использованием определяемой соотношением (1) характеристики  $R(H_i)$ .

**Построение нечетко-интервальной версии обобщенного критерия Шеремета.** В соответствии с концепцией применения данного критерия, имеющего позитивный опыт использования в финансово-экономическом математическом моделировании [15–18], полагается, что для нескольких вариантов сопоставляемых локальных стратегий  $S_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) имеются экспертные либо статистические нечеткие количественные оценки эффективности реализации каждой из них в условиях неопределенности по  $n$  факторам в виде обобщенных нечетко-интервальных показателей  $A_{ij}$  ( $i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$ ).

Имеются также определяемые на основе анализа матриц экспертных парных сравнений нормализованные нечетко-интервальные характеристики для весовых коэффициентов  $\lambda_{ij}$  – нечетких рангов сопоставительного оценивания значимости для  $n$  факторов, включаемых в анализ стратегий  $S_i$ .

Алгоритм оценивания стратегий на исходном этапе предполагает переход к нормированным нечетко-интервальным показателям

$$\bar{A}_{ij} = A_{ij} / A_i, \quad A_i = \sum_{j=1}^n A_{ij}, \quad (11) \quad \bar{\lambda}_{ij} = \lambda_{ij} / \lambda_i, \quad \lambda_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \quad (i = \overline{1, m}), \quad (12)$$

и получение для каждой из альтернативных стратегий нечетко-интервальной характеристики  $R_i$  с кортежем реперных точек  $(a_i, b_i, c_i, d_i)$ , рассчитываемой по формуле

$$R_i = \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_{ij} (E - \bar{A}_{ij})^2, \quad (13)$$

в которой  $E$  – единичная нечетко-интервальная величина.

Конечные оценочные показатели для стратегий  $S_i$  определяются как нечетко-множественные характеристики  $\hat{R}_i = [R_i]^{1/2}$  с функциями принадлежности  $\mu_{\hat{R}_i}(x)$  вида

$$\mu_{\hat{R}_i}(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, a_i); \\ ((x - a_i)/(b_i - a_i))^{1/2}, & x \in (a_i, b_i); \\ 1, & x \in (b_i, c_i); \\ ((d_i - x)/(d_i - c_i))^{1/2}, & x \in (c_i, d_i); \\ 0, & x \in (d, \infty). \end{cases} \quad (14)$$

В процессе выбора наилучшей из анализируемых локальных стратегий  $S_i$  сопоставляются показатели  $\xi_i$  дефазификации для их нечетких характеристик  $\hat{R}_i$ , рассчитываемые по формулам

$$\xi_i = \left( \int_{a_i}^{d_i} x \cdot \mu_{\hat{R}_i}(x) \cdot dx \right) / \left( \int_{a_i}^{d_i} \mu_{\hat{R}_i}(x) \cdot dx \right). \quad (15)$$

**Примеры численной реализации методик определения оптимизированных стратегий на основе нечетких вариантов обобщенных критериев Гурвица и Шеремета.** Представленный пример реализации описанного выше варианта обобщенного критерия Гурвица, наряду с иллюстрацией методики получения конкретных нечетко-интервальных оценок  $H_i(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  для определения оптимальной стратегии, дает также основания для заключения о корректности предложенного нечетко-интервального обобщения. В нем рассматривается вариант задания массива  $A_{ij}$  ( $i = 1, 3; j = 1, 4$ ) нечетких количественных оценок эффективности трех стратегий, применяющихся в течение четырех последовательных периодов времени и являющихся в количественном отношении малыми нечеткими возмущениями для исходных параметров, использовавшихся при реализации четкого варианта критерия в работах [10, 11].

Рассматриваемая матрица нечетких интервалов, заданных кортежами реперных точек, состоит из элементов, приведенных в табл. 1.

Таблица 1

Нечеткие оценки  $A_{ij}$  эффективности локальных стратегий  $S_i$  за период  $T_j$

$T_j$	$S_1$	$S_2$	$S_3$
$T_1$	(7.9, 7.95, 8.05, 8.1)	(6.9, 6.95, 7.05, 7.1)	(5.9, 5.95, 6.05, 6.1)
$T_2$	(3.9, 3.95, 4.05, 4.1)	(6.9, 6.95, 7.05, 7.1)	(11.9, 11.95, 12.05, 12.1)
$T_3$	(5.9, 5.95, 6.05, 6.1)	(6.9, 6.95, 7.05, 7.1)	(7.9, 7.95, 8.05, 8.1)
$T_4$	(19.9, 19.95, 20.05, 20.1)	(6.9, 6.95, 7.05, 7.1)	(9.9, 9.95, 10.05, 10.1)

Применение разработанной методики приводит к следующим оценкам  $H_i$  и  $R(H_i)$  для анализируемых стратегий в предположении о неблагоприятной реакции среды реализации

$$H_1 = (7.68, 7.83, 8.13, 8.29), \quad H_2 = (6.74, 6.87, 7.13, 7.26), \quad H_3 = (8.02, 8.16, 8.47, 8.62);$$

$$R(H_1) = 3.326, \quad R(H_2) = 2.917, \quad R(H_3) = 3.465,$$

что соответствует оптимальности дальнейшего использования локальной стратегии  $S_3$  и оценкам

$$H_1 = (11.17, 11.39, 11.69, 11.86), \quad H_2 = (6.74, 6.87, 7.13, 7.26), \quad H_3 = (9.37, 9.53, 9.85, 10.01);$$

$$R(H_1) = 4.796, \quad R(H_2) = 2.917, \quad R(H_3) = 4.037$$

в предположении о благоприятной реакции среды реализации, что в этом случае соответствует выводу об оптимальности для дальнейшего использования локальной стратегии  $S_1$ . Представленные результаты и выводы согласуются с полученными в работах [10, 11].

В качестве примера реализации разработанного нечетко-множественного обобщения критерия Шеремета рассматривается случай задания трех альтернативных вариантов локальных стратегий с четырьмя оцениваемыми факторами (табл. 2).

Таблица 2

Нечеткие оценки  $A_{ij}$  эффективности локальных стратегий  $S_i$  по четырем рассматриваемым факторам

Оценки $A_{ij}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$
$A_{i1}$	(7.9, 7.95, 8.05, 8.1)	(6.9, 6.95, 7.05, 7.1)	(5.9, 5.95, 6.05, 6.1)
$A_{i2}$	(3.9, 3.95, 4.05, 4.1)	(6.9, 6.95, 7.05, 7.1)	(11.9, 11.95, 12.05, 12.1)
$A_{i3}$	(5.9, 5.95, 6.05, 6.1)	(6.9, 6.95, 7.05, 7.1)	(7.9, 7.95, 8.05, 8.1)
$A_{i4}$	(19.9, 19.95, 20.05, 20.1)	(6.9, 6.95, 7.05, 7.1)	(9.9, 9.95, 10.05, 10.1)

Нечеткие рейтинги для оцениваемых факторов во всех анализируемых стратегиях полагаются одинаковыми, задаются нечеткими интервалами с реперными точками

$$\lambda_{i1} = (0.19, 0.195, 0.205, 0.21), \quad \lambda_{i2} = (0.39, 0.395, 0.405, 0.41),$$

$$\lambda_{i3} = (0.09, 0.095, 0.105, 0.11), \quad \lambda_{i4} = (0.29, 0.295, 0.305, 0.31),$$

и имеют нормализованные значения

$$\bar{\lambda}_{i1} = (0.183, 0.191, 0.209, 0.218), \quad \bar{\lambda}_{i2} = (0.375, 0.387, 0.413, 0.427),$$

$$\bar{\lambda}_{i3} = (0.086, 0.093, 0.107, 0.114), \quad \bar{\lambda}_{i4} = (0.279, 0.289, 0.311, 0.323).$$

В соответствии с описанным алгоритмом, последовательно находятся оценки

$$R_1 = (0.375, 0.387, 0.413, 0.427), \quad R_2 = (0.086, 0.093, 0.107, 0.114),$$

$$R_3 = (0.278, 0.289, 0.311, 0.323); \quad \xi_1 = 0.402, \quad \xi_2 = 0.101, \quad \xi_3 = 0.301,$$

на основании которых в качестве оптимальной определяется стратегия  $S_1$ .

**Выводы.** Результатом проведенных исследований является построение нечетко-интервальной модификации обобщенного критерия пессимизма-оптимизма Гурвица и нечетко-интервальной модификации критерия Шеремета. Они представляют собой один из возможных инструментов решения задачи селективного отбора оптимизированных локальных стратегий в условиях полной неопределенности реакции среды их реализации, а также нечеткости исходных статистических и экспертных данных. Описанные методики применимы для оценки стратегий в моделях технологических, финансово-инвестиционных и социально-экономических процессов с нечеткими данными.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Борисов В. В. Нечеткие модели и сети / В. В. Борисов, В. В. Круглов, А. С. Федулов. – М.: Горячая линия – Телеком, 2007. – 284 с.
2. Герасимов Б. М. Системы поддержки принятия решений: проектирование, применение, оценка эффективности / Б. М. Герасимов, М. М. Дивизинюк, И. Ю. Субач. – Севастополь: СНИЯЭиП, 2004. – 318 с.
3. Дилигенский Н. В. Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология / Н. В. Дилигенский, Л. Г. Дымова, П. В. Севастьянов. – М.: Из-во Машиностроение-1, 2004. – 397 с.
4. Дымова Л. Г. Применение методов теории нечетких множеств для оценки эффективности инвестиций / Л. Г. Дымова, Д. В. Севастьянов // Финансы, учет, аудит. – 1997. – № 3. – С. 34–38.
5. Дымова Л. Г. Многокритериальная оценка уровня социально-экономического развития регионов / Л. Г. Дымова, П. В. Севастьянов, Л. И. Шейграцева // Белорусский экономический журнал. – 1999. – № 2. – С. 112–118.
6. Матвійчук А. В. Аналіз та прогнозування розвитку фінансово-економічних систем із використанням теорії нечіткої логіки / А. В. Матвійчук – К.: Центр навчальної літератури, 2005. – 205 с.
7. Рыжов А. П. Модели поиска решений в нечеткой среде / А. П. Рыжов. – М.: Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2004. – 96 с.
8. Саати Т. Аналитическое планирование. Организация систем / Т. Саати, К. Кернс. – М.: Радио и связь, 1991. – 224 с.
9. Методика многокритериальной иерархической оценки качества в условиях неопределенности / П. В. Севастьянов, Л. Г. Дымова, М. Каптур, А. В. Зенькова // Информационные технологии. – 2001. – № 9. – С. 84–87.
10. Лабскер Л. Г. Обобщенный критерий пессимизма-оптимизма Гурвица / Л. Г. Лабскер // Качество информационных услуг: сб. научн. трудов. – Тамбов: ТГТУ, 2000. – Вып. III. – С. 34–43.
11. Лабскер Л. Г. Обобщенный критерий пессимизма-оптимизма Гурвица / Л. Г. Лабскер // Финансовая математика. – М.: МГУ, 2001. – С. 401–414.
12. Лабскер Л. Г. Обобщенный критерий пессимизма-оптимизма Гурвица относительно рисков. Часть I. / Л. Г. Лабскер // Управление риском. – 2001. – № 2. – С. 35–37.
13. Лабскер Л. Г. Обобщенный критерий пессимизма-оптимизма Гурвица относительно рисков. Часть II. / Л. Г. Лабскер // Управление риском. – 2001. – № 3. – С. 28–36.
14. Лабскер Л. Г. Игровые методы в управлении экономикой и бизнесом / Л. Г. Лабскер, Л. О. Бабешко. – М.: Дело, 2001. – 464 с.
15. Шеремет А. Д. Финансы предприятий / А. Д. Шеремет, Р. С. Сайфулин. – М.: ИНФРА-М, 1999. – 512 с.
16. Шеремет А. Д. Теория экономического анализа / А. Д. Шеремет. – М.: ИНФРА-М, 2002. – 333 с.
17. Шеремет А. Д. Комплексный анализ хозяйственной деятельности / А. Д. Шеремет. – М.: ИНФРА-М, 2006. – 416 с.
18. Шеремет А. Д. Методика финансового анализа деятельности коммерческих организаций / А. Д. Шеремет, Е. В. Негашов. – М.: Экономика, 2008. – 371 с.
19. Thorani Y. L. P. Ordering generalized trapezoidal fuzzy numbers / Y. L. P. Thorani, P. P. V. Rao, N. R. Shankar // Int. J. Contemp. Math. Sciences. – 2012. – Vol. 7, No 12. – P. 555–573.

*Поступила в редакцію 28.04.2014 г.*

## РЕЗЮМЕ

Реалізовано побудову нечітко-інтервальної модифікації узагальненого критерію песимізму-оптимізму Гурвіца і нечітко-інтервальної модифікації критерію Шеремета, що представляють собою можливі інструменти вирішення завдань селективного відбору оптимізованих локальних стратегій в умовах повної невизначеності реакції середовища їх реалізації, а також нечіткості вихідних статистичних та експертних даних. Представлені приклади чисельної реалізації побудованих нечітко-інтервальних підходів до визначення оптимізованих локальних стратегій. Описані методики можуть бути застосовані в моделях технологічних, фінансово-інвестиційних та соціально-економічних процесів.

*Ключові слова:* узагальнений критерій песимізму-оптимізму Гурвіца, критерій Шеремета, нечітко-інтервальні модифікації, селективний відбір оптимізованих нечітких стратегій, моделі технологічних, фінансово-інвестиційних та соціально-економічних процесів.

## SUMMARY

Fuzzy interval modification of the generalized of criterion of pessimism-optimism Hurwitz and fuzzy-interval modification of criterion Sheremet are generated. It is one of possible tools for solving of problems of selection of optimized local strategies in total uncertainty the reactions of medium of their realization and the fuzzy basic statistical and expert data. The examples of numerical realization of fuzzy interval approaches to determining the optimized local strategies are constructed. The described approaches are useful for evaluating strategies in models of technological, financial, investment and socio-economic processes with fuzzy data.

*Keywords:* generalized criterion of pessimism-optimism Hurwitz criterion Sheremet, fuzzy interval modification, selective choice of optimized fuzzy strategies, models of technological, financial, investment and socio-economic processes.