МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ ДЛЯ ИСКАЖЁННОЙ СВЕРТКИ НА СФЕРЕ

В. С. Василянская, Вит. В. Волчков

Получен аналог классической теоремы о среднем для искажённой свёртки на сфере, при этом был подсчитан инвариантный оператор для данной искаженной свертки и найдены собственные функции этого оператора.

Ключевые слова: свёртка, теорема о среднем, сферическое преобразование.

Введение. Пусть G – связная группа Ли, K – её компактная подгруппа, G/K – однородное пространство левых смежных классов gK. Обозначим через $\mathbf{D}(G/K)$ алгебру дифференциальных операторов на G/K, инвариантных относительно всех сдвигов $xK \to gxK$ на G/K (см. [1, глава 2, §4]). Общей собственной функцией на G/K называется функция, собственная для любого из операторов $D \in \mathbf{D}(G/K)$. Для гомоморфизма $\kappa\colon \mathbf{D}(G/K) \to \mathbb{C}$ положим $E_\kappa = \{f \in C^\infty(G/K)\colon\ Df = \kappa(D)f$ для любого $D \in \mathbf{D}(G/K)\}$. Каждое общее собственное пространство $E_\kappa \neq \{0\}$ содержит ровно одну сферическую функцию φ. Элементы f пространства E_κ характеризуются тем, что они удовлетворяют уравнению

$$\int_K f(xkyK)dk = f(xK)\varphi(yK), \quad x, y \in G \tag{1}$$

(см. [1, глава 4, §2]). Соотношение (1) обобщается на распределения следующим образом. Пусть Φ – множество сферических функций на G/K, $\mathcal{E}'_\hbar(G/K)$ – пространство K-инвариантных распределений с компактными носителями, $\tilde{T}$ – сферическое преобразование распределения $T \in \mathcal{E}'_\hbar(G/K)$, то есть $\tilde{T}(\varphi) = \left\langle T, \overset{\vee}{\varphi} \right\rangle$, $\varphi \in \Phi$, где $\overset{\vee}{\varphi}(gK) = \varphi(g^{-1}K)$, $g \in G$. Тогда

$$f * T = \tilde{T}(\varphi) f, \tag{2}$$

где $*$ обозначает свертку распределений на G/K (см. [1, глава 2, §5]). Утверждения такого типа называют теоремами о среднем для собственных функций инвариантных дифференциальных операторов. Относительно различных частных случаев формулы (2) и их обобщений см., например, [2–5].

Постановка задачи. Теоремы о среднем играют важную роль в ряде вопросов анализа, дифференциальных уравнений, интегральной геометрии и других областях. Например, при изучении ядер различных свёрточных операторов возникает необходимость в обобщениях формулы (2) для других типов свёртки. В связи с теорией уравнений свёртки на сфере [5], представляют интерес теоремы о среднем для свёртки вида:

$$(f_1 * f_2)(z) = \int_G f_1(go) f_2(g^{-1}z) \left(\frac{1 + \langle go, z \rangle}{1 + \langle z, go \rangle} \right)^S dg, \tag{3}$$

где $G = PSU(2)$ (см. [6, лекция 27]), $\langle z, go \rangle = z \cdot \overline{go}$, $s \in \mathbb{R}$.

Ранее изучался лишь случай $s = 0$ [4, часть 2].

Построение решения задачи. Пусть $\overline{C}$ – расширенная комплексная плоскость со стандартной структурой многообразия и с римановой структурой, задаваемой на $\mathbb{C}$ метрическим тензором

$$g_{i,j} = \frac{\delta_{i,j}}{(1 + |z|^2)^2}$$

($\delta_{i,j}$ – символ Кронекера). Это риманово многообразие изометрично двумерной сфере постоянной секционной кривизны 4. Группа G действует на $\overline{C}$ посредством отображений

$$g(z)=\frac{az-\overline{b}}{bz+\overline{a}}, \quad |a|^2+|b|^2=1. \tag{4}$$

Риманова мера на $\mathbb{C}$ имеет вид

$$d\mu(z)=dm(z)\left(1+|z|^2\right)^{-2},$$

где $dm(z)$ – мера Лебега в $\mathbb{R}^2$. Считаем, что мера Хаара dg на G нормирована соотношением

$$\int_G f(go)dg=\int_C f(z)d\mu(z), \quad f\in L^1(\mathbb{C},d\mu). \tag{5}$$

Пусть $d(\cdot,\cdot)$ – функция расстояния на $\overline{C}$. Для $0<R\le \pi/2$ положим

$$B_R=\left\{z\in\overline{C}: d(0,z)<R\right\}, \quad \overline{B}_R=\left\{z\in\overline{C}: d(0,z)\le R\right\}.$$

Будем использовать следующие классы функций и распределений в B_R: $L^{1,loc}(B_R)$ – совокупность локально интегрируемых функций в B_R; $RA(B_R)$ – класс вещественно-аналитических функций; $\mathcal{E}'(B_R)$ – пространство распределений с компактным носителем; $\mathcal{E}'_\hbar(B_R)$ – множество радиальных распределений из $\mathcal{E}'(B_R)$.

Пусть $T\in\mathcal{E}'_\hbar(B_R)$. Введём чётную целую функцию $\boldsymbol{F}(T)$ с помощью равенства

$$\boldsymbol{F}(T)(\lambda)=\left\langle T,H_\lambda\right\rangle, \quad \lambda\in\mathbb{C}, \tag{6}$$

где

$$H_\lambda(z)=(1+|z|^2)^{-S}F\left(s+\frac{1+\lambda}{2},s+\frac{1-\lambda}{2};1;\frac{|z|^2}{|z|^2+1}\right),$$

$F(\alpha,\beta;\gamma;z)$ – аналитическое продолжение на $\mathbb{C}\setminus[1,+\infty)$ гипергеометрического ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\beta+k)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma+k)}\frac{z^k}{k!}, \quad |z|<1.$$

Кроме того, положим $r(T)=\inf\left\{r>0:\ \operatorname{supp}T\subset B_R\right\}$.

Для $f\in C^\infty(B_R)$, $0<R\le\pi/4$, определим свёртку

$$(f*T)(g^{-1}o)=\left\langle T, f(g^{-1}z)\left(\frac{1+\langle go,z\rangle}{1+\langle z,go\rangle}\right)^S\right\rangle, \quad g^{-1}o\in B_{R-r(T)}, \tag{7}$$

где ветвь степени выделяется условием $1^S=1$.Указанное определение корректно и когда функция T совпадает с (3) (см. лемму 1 ниже). Определим дифференциальный оператор $\boldsymbol{L}$ следующим образом:

$$\boldsymbol{L}=L_{\overline{C}}+A_1+A_2, \tag{8}$$

где $L_{\overline{C}}$ – оператор Лапласа-Бельтрами на $\overline{C}$,

$$A_1=-4s^2|z|^2 Id, \quad A_2=-4s\left(1+|z|^2\right)\left(z\frac{\partial}{\partial z}-\overline{z}\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\right), \tag{9}$$

Id – тождественный оператор.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $T\in\mathcal{E}'_\hbar(B_R)$, $0<R\le\frac{\pi}{4}$, и $\boldsymbol{L}(f)=\left(4s^2+1-\lambda^2\right)f$ в B_R при некотором $\lambda\in\mathbb{C}$. Тогда

$$f*T=\boldsymbol{F}(T)(\lambda)f \quad \text{в} \quad B_{R-r(T)} \tag{10}$$

Прежде всего, установим корректность определения (7). Обозначим, через $SO(2)$ группу вращений $\mathbb{R}^2$.

Лемма 1. Пусть $T\in\mathcal{E}'_\hbar(B_R)$, $f\in C^\infty(B_R)$, $0<R\le\pi/4$. Тогда функция

$$\Theta(g)=\left\langle T, f(g^{-1}z)\left(\frac{1+\langle go,z\rangle}{1+\langle z,go\rangle}\right)^S\right\rangle,\quad g\in G:\ g^{-1}o\in B_{R-r(T)}$$

постоянна на правых классах смежности группы G по подгруппе $SO(2)$ и является, таким образом, функцией от $g^{-1}o$. Кроме того, если $T\in(L^{1,loc}\cap\mathcal{E}'_\hbar)(B_R)$, то

$$\left(f*T\right)(z)=\int\limits_G f\left(go\right)T\left(g^{-1}z\right)\left(\frac{1+\langle go,z\rangle}{1+\langle z,go\rangle}\right)^S dg\,,\quad z\in B_{R-r(T)}\,. \tag{11}$$

Доказательство. Для $\tau\in SO(2)$ имеем

$$\Theta(\tau g)=\left\langle T, f(g^{-1}\tau^{-1}z)\left(\frac{1+\langle \tau go,z\rangle}{1+\langle z,\tau go\rangle}\right)^S\right\rangle=\left\langle T, f(g^{-1}\tau^{-1}z)\left(\frac{1+\langle go,\tau^{-1}z\rangle}{1+\langle \tau^{-1}z,go\rangle}\right)^S\right\rangle$$

Отсюда и из радиальности T получаем $\Theta(\tau g)=\Theta(g)$, что доказывает первое утверждение.

Пусть $T\in(L^{1,loc}\cap\mathcal{E}'_\hbar)(B_R)$, тогда

$$\left(f*T\right)\left(g^{-1}o\right)=\int\limits_{B_R} T\left(z\right)f\left(g^{-1}z\right)\left(\frac{1+\langle go,z\rangle}{1+\langle z,go\rangle}\right)^S d\mu(z)\,. \tag{12}$$

Прямое вычисление показывает, что

$$\frac{1+\langle go,z\rangle}{1+\langle z,go\rangle}=\frac{1+\left\langle g^{-1}z,g^{-1}o\right\rangle}{1+\left\langle g^{-1}o,g^{-1}z\right\rangle}\,. \tag{13}$$

Используя (12), (13), инвариантность $d\mu$ относительно G и (5), получаем

$$\left(f*T\right)\left(g^{-1}o\right)=\int\limits_{B_R} T(z)f\left(g^{-1}z\right)\left(\frac{1+\left\langle g^{-1}z,g^{-1}o\right\rangle}{1+\left\langle g^{-1}o,g^{-1}z\right\rangle}\right)^S d\mu(z)=$$

$$=\int\limits_{B_R} f(w)T(gw)\left(\frac{1+\left\langle w,g^{-1}o\right\rangle}{1+\left\langle g^{-1}o,w\right\rangle}\right)^S d\mu(w)=\int\limits_G f(ho)T(gho)\left(\frac{1+\left\langle ho,g^{-1}o\right\rangle}{1+\left\langle g^{-1}o,ho\right\rangle}\right)^S dh\,.$$

Учитывая, что $T(gho)=T(h^{-1}g^{-1}o)$, приходим к (11).

Далее установим инвариантность L относительно «искаженных сдвигов» (11). Доказательство этого факта удобно разбить на несколько лемм.

Лемма 2. Имеет место равенство

$$L_{\overline{C}}(f_1f_2)=f_1L_{\overline{C}}f_2+f_2L_{\overline{C}}f_1+4\left(1+|z|^2\right)^2\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial f_2}{\partial\overline{z}}+\frac{\partial f_1}{\partial\overline{z}}\frac{\partial f_2}{\partial z}\right).$$

Доказательство. Оператор $L_{\overline{C}}$ имеет вид

$$L_{\overline{C}}=\left(1+|z|^2\right)^2\Delta\,, \tag{14}$$

где Δ – лапласиан в $\mathbb{R}^2$ [5]. Отсюда следует

$$L_{\overline{C}}(f_1f_2)=f_1L_{\overline{C}}f_2+f_2L_{\overline{C}}f_1+2\left(1+|z|^2\right)^2\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial y}\right).$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}\,,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=i\left(\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}\right),$$

получаем требуемое.

Всюду ниже считаем, что выполнено (4). Положим

$$\boldsymbol{g}(z)=g^{-1}(z)=\frac{\overline{a}z+\overline{b}}{-bz+a},\quad u_S(z)=\left(\frac{1+\langle go,z\rangle}{1+\langle z,go\rangle}\right)^S=\left(\frac{|a|^2-a\overline{b}\overline{z}}{|a|^2-\overline{a}bz}\right)^S.$$

Лемма 3. Имеет место равенство

$$L_{\overline{C}}(u_S)(z)=-4s^2|a|^2|b|^2\left(\frac{1+|z|^2}{|a|^2-\overline{a}bz}\right)^2u_{S-1}(z). \tag{15}$$

Доказательство. Имеем

$$\frac{\partial u_S}{\partial z}=\frac{s\overline{a}b}{|a|^2-\overline{a}bz}u_S(z),\quad \frac{\partial u_S}{\partial\overline{z}}=-\frac{sa\overline{b}}{|a|^2-\overline{a}bz}u_{S-1}(z). \tag{16}$$

Из (16) находим

$$\frac{\partial^2u_S}{\partial z\partial\overline{z}}=\frac{s\overline{a}b}{|a|^2-\overline{a}bz}\frac{\partial u_S}{\partial\overline{z}}=-\frac{s^2|a|^2|b|^2}{(|a|^2-\overline{a}bz)^2}u_{S-1}(z).$$

Отсюда и из (14) следует (15).

Лемма 4. Пусть $\Phi(z)=f(\boldsymbol{g}\,z)\,u_S(z)$. Тогда

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial z}(\boldsymbol{g}\,z)\frac{u_S(z)}{(a-bz)^2}+s\overline{a}bf(\boldsymbol{g}\,z)\frac{u_S(z)}{|a|^2-\overline{a}bz}, \tag{17}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\overline{z}}=\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}(\boldsymbol{g}\,z)\frac{u_S(z)}{(\overline{a}-\overline{b}\overline{z})^2}+sa\overline{b}f(\boldsymbol{g}\,z)\frac{u_S(z)}{|a|^2-\overline{a}bz}. \tag{18}$$

Доказательство. Поскольку $\boldsymbol{g}$ — голоморфное отображение**,**

$$\frac{\partial}{\partial z}(f\circ\boldsymbol{g})=\frac{\partial f}{\partial z}(\boldsymbol{g}\,z)\frac{\partial\boldsymbol{g}}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial z}(\boldsymbol{g}\,z)\frac{1}{(a-bz)^2}, \tag{19}$$

$$\frac{\partial}{\partial\overline{z}}(f\circ\boldsymbol{g})=\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}(\boldsymbol{g}\,z)\frac{\partial\overline{\boldsymbol{g}}}{\partial\overline{z}}=\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}(\boldsymbol{g}\,z)\frac{1}{(\overline{a}-\overline{b}\overline{z})^2}. \tag{20}$$

Из (19), (20) и (16) получаем (17), (18).

Лемма 5. Пусть $a_1(z)=-4s^2|z|^2$, $a_2(z)=-4s(1+|z|^2)$. Тогда

$$a_1(\boldsymbol{g}\,z)=a_1(z)-\frac{4s^2|a|^2(1+|z|^2)}{\left||a|^2-a\overline{b}\overline{z}\right|^2}\left(2|b|^2(1-|z|^2)+\overline{a}bz+a\overline{b}\overline{z}\right), \tag{21}$$

$$(a-bz)^2a_2(\boldsymbol{g}\,z)\boldsymbol{g}(z)=-\frac{4sa\overline{b}(1+|z|^2)^2}{|a|^2-a\overline{b}\overline{z}}+a_2(z)\cdot z, \tag{22}$$

$$(\overline{a}-\overline{b}\overline{z})^2a_2(\boldsymbol{g}\,z)\overline{\boldsymbol{g}}(z)=\frac{4s\overline{a}b(1+|z|^2)^2}{|a|^2-\overline{a}bz}+a_2(z)\cdot\overline{z}. \tag{23}$$

Доказательство. Соотношения (21) – (23) получаются непосредственными вычислениями с использованием равенства $|a|^2+|b|^2=1$.

Следующее утверждение даёт отмеченную выше инвариантность $\boldsymbol{L}$ относительно «искаженных сдвигов».

Лемма 6. Оператор L обладает обобщенным свойством инвариантности относительно группы G:

$$\mathrm{L}\,(f(\boldsymbol{g}\,z)\,u_S(z))=(\mathrm{L}f)(\boldsymbol{g}\,z)\,u_S(z). \tag{24}$$

Доказательство. На основании леммы 2 имеем

$$L_{\overline{C}}((f\circ\boldsymbol{g})\,u_S)=(f\circ\boldsymbol{g})\,L_{\overline{C}}(u_S)+u_SL_{\overline{C}}(f\circ\boldsymbol{g})+(f\circ4\left(1+|z|^2\right)^2\left(\frac{\partial u_S}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\overline{z}}(f\circ\boldsymbol{g})+\frac{\partial}{\partial z}(f\circ\boldsymbol{g})\frac{\partial u_S}{\partial\overline{z}}\right).$$

Поскольку $\boldsymbol{g}$ является движением $\overline{C}$, то $L_{\overline{C}}(f\circ\boldsymbol{g})=(L_{\overline{C}}f)\circ\boldsymbol{g}$.

Тогда из (15) – (18) находим

$$L_{\overline{C}}((f\circ \boldsymbol{g})\,u_S)=u_S(L_{\overline{C}}f)\circ \boldsymbol{g}-4s^2|a|^2|b|^2\left(\frac{1+|z|^2}{|a|^2-\overline{a}bz}\right)^2 u_{S-1}(z)f(\boldsymbol{g}\,z)+$$

$$+4(1+|z|^2)^2\left(\frac{s\overline{a}bu_S(z)}{(|a|^2-\overline{a}bz)(\overline{a}-\overline{b}\overline{z})^2}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(\boldsymbol{g}\,z)-\frac{\partial f}{\partial z}(\boldsymbol{g}\,z)\frac{sa\overline{b}\,u_{S-1}(z)}{(|a|^2-\overline{a}bz)(a-bz)^2}\right). \qquad (25)$$

Используя (9) и лемму 3, получаем

$$A_1((f\circ \boldsymbol{g})\,u_S)(z)=a_1(z)u_S(z)f(\boldsymbol{g}\,z)\,, \qquad (26)$$

$$A_2((f\circ \mathrm{g})\,u_S)(z)=a_2(z)\left(\frac{zu_S(z)}{(a-bz)^2}\frac{\partial f}{\partial z}(\mathrm{g}\,z)-\frac{\overline{z}u_S(z)}{(\overline{a}-\overline{b}\overline{z})^2}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(\mathrm{g}\,z)+\right.$$

$$\left.+\left(\overline{a}bzu_S(z)+a\overline{b}\overline{z}u_{S-1}(z)\right)f(\boldsymbol{g}\,z)\frac{s}{|a|^2-\overline{a}bz}\right). \qquad (27)$$

Соотношения (25) — (27) дают

$$\mathrm{L}\,(f\circ \mathrm{g})\,u_S)=u_S(L_{\overline{C}}f)\circ \mathrm{g}+C_1(z)f(\mathrm{g}\,z)+C_2(z)\frac{\partial f}{\partial z}(\mathrm{g}\,z)+C_3(z)\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(\mathrm{g}\,z)\,, \qquad (28)$$

где

$$C_1(z)=a_1(z)u_S(z)-4s^2|a|^2|b|^2\left(\frac{1+|z|^2}{|a|^2-\overline{a}bz}\right)^2 u_{S-1}(z)+\frac{s}{|a|^2-\overline{a}bz}(\overline{a}bzu_S(z)+a\overline{b}\overline{z}u_{S-1}(z)),$$

$$C_2(z)=-\frac{4sa\overline{b}\,u_{S-1}(z)(1+|z|^2)^2}{(|a|^2-\overline{a}bz)(a-bz)^2}+\frac{a_2(z)zu_S(z)}{(a-bz)^2}\,,\quad C_3(z)=\frac{4s\overline{a}bu_S(z)(1+|z|^2)^2}{(|a|^2-\overline{a}bz)(\overline{a}-\overline{b}\overline{z})^2}-\frac{a_2(z)\overline{z}u_S(z)}{(\overline{a}-\overline{b}\overline{z})^2}.$$

С другой стороны

$$\begin{gathered}(\mathrm{L}f)(\mathrm{g}\,z)\,u_S(z)=u_S(L_{\overline{C}}f)(\mathrm{g}\,z)+u_S(z)\,a_1(\mathrm{g}\,z)f(\mathrm{g}\,z)+\\ +u_S(z)\,a_2(\mathrm{g}\,z)\mathrm{g}(z)\frac{\partial f}{\partial z}(\mathrm{g}\,z)-u_S(z)\,a_2(\mathrm{g}\,z)\overline{\mathrm{g}}(z)\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(\mathrm{g}\,z).\end{gathered} \qquad (29)$$

Сравнивая (28) с (29), из леммы 5 видим, что имеет место соотношение (24).

Найдем радиальные собственные функции оператора L .

Лемма 7. Пусть $\lambda\in\mathbb{C}$ и радиальная функция $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ является гладким решением уравнения

$$\mathrm{L}f=(4s^2+1-\lambda^2)f\,. \qquad (30)$$

Тогда

$$f(z)=f(0)H_\lambda(z)\,. \qquad (31)$$

Доказательство. Полагая $f(z)=\varphi(\rho)$, где $\rho=|z|$, имеем

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\frac{\varphi'(\rho)}{\rho}\overline{z}\,,\quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}\frac{\varphi'(\rho)}{\rho}z\,,\quad (L_{\overline{C}}f)(z)=\left(1+\rho^2\right)^2\left(\varphi'(\rho)+\frac{\varphi'(\rho)}{\rho}\right).$$

Отсюда

$$(\mathrm{L}f)(z)=(1+\rho^2)^2\left(\varphi''(\rho)+\frac{\varphi'(\rho)}{\rho}\right)-4s^2\rho^2\varphi(\rho)\,.$$

Следовательно уравнение (30) можно переписать в виде

$$\left(1+\rho^2\right)^2(\varphi''(\rho)+\varphi'(\rho)/\rho)-\varphi(\rho)\left(4s^2\rho^2+4s^2+1-\lambda^2\right)=0\,. \qquad (32)$$

Обозначим $\nu=(1-\lambda)/2$. Из (31) для функции $\psi(\rho)=(1+\rho^2)^\nu\varphi(\rho)$ получаем уравнение

$$\rho(1+\rho^2)\psi''(\rho)+\psi'(\rho)(1+\rho^2(4\nu+1))+4\rho(\nu^2-s^2)\psi(\rho)=0\,. \qquad (33)$$

С другой стороны гипергеометрическая функция $h(\rho)=F(\alpha,\beta;\gamma;-\rho^2)$ удовлетворяет уравнению

$$\rho(1+\rho^2)h''(\rho)+h'(\rho)(2\gamma-1+\rho^2(2\alpha+2\beta+1))+4\alpha\beta\rho h(\rho)=0\,. \qquad (34)$$

(см. [7, глава 2, формула 2.1.1(1)]). Сравнивая (33) и (34) и учитывая гладкость ψ в нуле, заключаем, что

$$f(z)=f(0)\left(1+\rho^2\right)^{\nu}F\left(-s+\nu,s+\nu;1;-\rho^2\right). \tag{35}$$

Равенство (35) и формула

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z)=(1-z)^{-\beta}F\left(\gamma-\alpha,\beta;\gamma;\frac{z}{z-1}\right).$$

(см. [7, глава 2, формула 2.9(4)]) дают (31).

Перейдем к доказательству теоремы 1. Поскольку L является эллиптическим оператором (см. (9), (15)), то $f\in RA(B_R)$. Зафиксируем $g\in G$, такое что $g\overline{B}_{r(T)}\subset B_R$. Пусть $\varepsilon_0=\sup\{\varepsilon>0:$ $g\overline{B}_{r(T)}\subset B_{R-\varepsilon}\}$. Для $z\in B_{r(T)+\varepsilon_0}$ положим

$$f_g(z)=\int\limits_{SO(2)}f(g^{-1}\tau z)\left(\frac{1+\langle go,z\rangle}{1+\langle z,go\rangle}\right)^S d\tau, \tag{36}$$

где $d\tau$ — мера Хаара на $SO(2)$, нормированная соотношением

$$\int\limits_{SO(2)}d\tau=1. \tag{37}$$

Определение f_g показывает, что

$$f_g\in RA_h(B_{r(T)+\varepsilon_0}) \text{ и } f_g(0)=f(g^{-1}o). \tag{38}$$

Кроме того,

$$f_g(z)=\int\limits_{SO(2)}f(g^{-1}z)\left(\frac{1+\langle \tau^{-1}go,z\rangle}{1+\langle z,\tau^{-1}go\rangle}\right)^S d\tau. \tag{39}$$

Из (39) и леммы 6 получаем

$$(\mathrm{L}f_g)(z)=(4s^2+1-\lambda^2)f_g(z).$$

Тогда (см. (6), (38) и лемму 7) $f_g(z)=f(g^{-1}o)H_\lambda(z)$ и $\langle T,f_g\rangle=f(g^{-1}o)\mathrm{F}(T)(\lambda)$. Теперь из (36), (37), (7) и радиальности T следует (10). Таким образом, теорема 1 доказана.

При $s=0$ свёртка (3) совпадает со свёрткой на сфере $\mathbb{S}^2$. В этом случае утверждение теоремы 1 является известным (см. [1, глава 4, §2]). В общем случае свёртку (3) можно рассматривать как аналог искаженного уравнения свёртки на $\mathbb{C}$ [5, глава 12]. Теорема 1 является одним из ключевых инструментов для получения указанных результатов.

РЕЗЮМЕ

Отримано аналог класичної теореми про середнє для викривленої згортки на сфері, при цьому було підраховано інваріантний оператор для даної викривленої згортки та знайдені власні функції цього оператора.
Ключові слова: згортка, теорема про середнє, сферичне перетворення.

SUMMARY

An analogue of the classical mean value theorem for distorted convolution on a sphere is obtained, the invariant operator for the given distorted convolution has been thus counted up and eigen functions of this operator are found.
Keywords: convolution, mean value theorem, spherical transform.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ / С. Хелгасон // Интегральная геометрия. – М.: Мир, 1987. – 763 с.
2. Willmore T.J. Mean value theorem in harmonic Riemann spaces / T.J. Willmore. – London, 1950. – V.25. – P. 54-57.
3. Godement R. Une generalization du theoreme de la moyenne pour les fonctions harmoniques / R. Godement. – Paris, 1952. – V.234. – P. 2137-2139.
4. Volchkov V.V. Integral geometry and convolution equations/ V.V.Volchkov. – Dordrecht: Kluwer, 2003. – 454 p.
5. Volchkov V.V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group / V.V. Volchkov, Vit.V. Volchkov. – London: Springer, 2009. – 671 p.
6. Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр 1 / М.М. Постников // Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1986. – 415 с.
7. Беймен Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Беймен, А. Эрдгейи. – М.: Наука, 1973. – Т.1 – 294 с.

Поступила в редакцию 26.01.2012 г.