УДК 517.928

ЗАДАЧА КОШІ НЕЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Г. В. Завізіон, І. Г. Ключник
Кіровоградський державний педагогічний університет ім. В. Винниченка, м. Кіровоград

Побудовано асимптотичний розв'язок нелінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь із запізненням.

Ключові слова: задача Коші, сингулярно збурена система диференціальних рівнянь, асимптотичний розв'язок, змінне запізнення.

Вступ. Сингулярно збурені системи диференціальних рівнянь із запізненням вивчаються в різних напрямках. Так в [1] пропонуються методи асимптотичного інтегрування лінійних сингулярно збурених систем із запізненням, а в [2] метод кроків з [1] застосовується до лінійних інтегро-диференціальних систем рівнянь з сталим запізненням і виродженою матрицю при похідній. Питання існування розв'язку і обґрунтування методу усереднення для багаточастотних крайових задач з сталим запізненням для сингулярно збурених систем вивчалися в [3]. В [4] досліджуються питання існування інтегральних многовидів в лінійних сингулярно збурених диференціально-різнецевих рівняннях. За допомогою примежових функцій в [5] інтегруються нелінійні диференціально-різнецеві рівняння з малим запізненням. Самі проміжкові функції задовольняють автономну нелінійну систему диференціальних рівнянь або лінійну неоднорідну систему диференціальних рівнянь.

В даній статті розглядається нелінійна сингулярно збурена система диференціальних рівнянь з змінним запізненням. Будуються асимптотичні розв'язки, вигляд яких залежить від кратності коренів характеристичного рівняння і метод дає можливість в явному вигляді записати потрібну кількість наближень розв'язку. Пропонується спосіб побудови асимптотичного розв'язку задачі Коші нелінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь із змінним запізненням у випадку простих коренів характеристичного рівняння.

Асимптотичний розв'язок. Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon\frac{dx}{dt} = f(t, x(t,\varepsilon), x(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon), \varepsilon), \tag{1}$$

з початковою умовою

$$x(0,\varepsilon) = x_0 \tag{2}$$

де $\varepsilon(0<\varepsilon\le\varepsilon_0)$ – малий параметр, $t\in[0;L], \Delta(t)$ – скалярна функція, $f(t,x,y,\varepsilon)$, $x(t,\varepsilon), y = x(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon), x_0 - n$ – вимірні вектори. Припускаємо виконання умов:

1) вектор $f(t,x,y,\varepsilon)$ має розвинення

$$f(t,x,y,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i f_i(t,x,y),$$

і вектори $f(t,x,y)\,(i=0,1...)$ мають нескінченну кількість частинних похідних за змінними t,x,y і функція $\Delta(t)\ge 0, t-\varepsilon\Delta(t)\ge 0, \forall t\in[0;L]$;

2) існує ізольований корінь $\vec{x}(t)$ рівняння

$$f_0(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t)) = 0,$$

при цьому функція $\bar{x}(t)$ нескінченно-диференційовна на відрізку $[0;L]$ і $x_0 - \bar{x}(0) = \varepsilon\beta(\varepsilon), \beta(\varepsilon)$ обмежена при $\varepsilon\to 0,$ а також $f'_{oy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t)) \equiv 0;$

3) корені $\lambda_i(t)\,(i=\overline{1,n})$ характеристичного рівняння

$$\det\left\| f'_{ox}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t)) - \lambda\cdot E\right\| = 0$$

різні, а також виконується нерівності $\operatorname{Re}\lambda_i(t) < -\beta < 0, \forall t\in[0;L]$, де $E - n\times n$ одинична матриця; $f'_{ox}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t)), f'_{ox}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))\,(\alpha=0,1...)$ матриці, які складені з частинних похідних від компонент вектора $f_\alpha(t,x,y)$ по компонентам відповідно векторів x і y, при $x=\bar{x}(t), y=\bar{y}(t)$.

Теорема. Якщо виконуються умови 1-3, то формальний розв'язок задачі Коші (1), (2) має вигляд

$$x(t,\varepsilon)=v(t,\varepsilon,\varepsilon)+\sum_{i=1}^{n}u_i(t,\varepsilon)\Pi_i(t,\varepsilon,\varepsilon) \tag{3}$$

де $v(t,\varepsilon,\varepsilon),u_i(t,\varepsilon)$ – n - вимірні вектори, $\Pi_i(t,\varepsilon,\varepsilon)$ - скалярні функції, які мають розвинення

$$u_i(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^{s+1}u_{is}(t),\ \Pi_i(t,\varepsilon,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^{s}\Pi_{is}(t,\varepsilon),v(t,\varepsilon,\varepsilon)=v_0(t)+\varepsilon v_1(t)+\sum_{s=2}^{\infty}\varepsilon^{s}v_s(t,\varepsilon), \tag{4}$$

$\Pi_i(t,\varepsilon,\varepsilon)$ задовольняють диференціальні рівняння

$$\varepsilon\Pi_{is}'(t,\varepsilon)=\lambda_i(t)\Pi_{is}(t,\varepsilon)+\xi_{is}(t,\varepsilon), \tag{5}$$

$\lambda_i(t),\xi_{is}(t,\varepsilon)$ – скалярні функції.

Доведення. Скориставшись (3), (4) розвинемо за степенями параметра ε вектор

$$f(t,v(t,\varepsilon,\varepsilon)+\sum_{i=1}^{n}u_i(t,\varepsilon)\Pi_i(t,\varepsilon,\varepsilon),v(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon,\varepsilon)+\sum_{i=1}^{n}u_i(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)\Pi_i(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon,\varepsilon),\varepsilon)=$$
$$=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\varepsilon^{\alpha}(f_\alpha(t,v_0(t),v_0(t-\varepsilon\Delta(t))+\sum_{s=0}^{\alpha-1}(f_{sx}'(t,v_0(t),v_0(t-\varepsilon\Delta(t))(v_{\alpha-s}(t)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\alpha-1-s}u_{ij}(t)\Pi_{i,\alpha-1-s-j}(t,\varepsilon))+f_{sy}'(t,v_0(t),v_0(t-\varepsilon\Delta(t)))(v_{\alpha-s}(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\alpha-1-s}u_{ij}(t-\varepsilon\Delta(t))\Pi_{i,\alpha-1-s-j}(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon))+g_{1\alpha}(t,\varepsilon)+g_{2\alpha}(t,e)), \tag{6}$$

де $g_{1\alpha}(t,\varepsilon)=g_{1\alpha}(t,v_l(t),v_l(t-\varepsilon\Delta(t))),\ g_{2\alpha}(t,\varepsilon)=g_{2\alpha}(t,v_l(t),v_l(t-\varepsilon\Delta(t)),p_{l1}(t,\varepsilon),p_{l1}(t-\varepsilon\Delta(t))$ – многочлени степеня α відносно вказаних аргументів, причому другий многочлен не містить одночлена нульового степеня відносно аргументів $p_{l1}(t,\varepsilon),\ p_{l1}(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)(l=\overline{1,\alpha},l_1=\overline{0,\alpha-2})$; під $p_{l1}(t,\varepsilon)$ розуміють аргументи вигляду $u_{ij}(t)\Pi_{i,l1-j}(t,\varepsilon)(j=\overline{0,l_1})$, а під $p_{l1}(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)$ розуміємо аргумент вигляду $u_{ij}(t-\varepsilon\Delta(t))\Pi_{i,l1-j}(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)$. Підставляючи (3)-(6) в (1) і зрівнюючи вирази, які містять $\Pi_i(t,\varepsilon,\varepsilon),\Pi_i(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon,\varepsilon)$, і які їх не містять, одержимо рівняння

$$\varepsilon v'(t,\varepsilon)=f_1(t,v(t,\varepsilon)+\sum_{i=1}^{n}u_i(t,\varepsilon)\Pi_i(t,\varepsilon,\varepsilon),v(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)+\sum_{i=1}^{n}u_i(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)\Pi_i(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon), \tag{7}$$

$$\varepsilon\sum_{i=1}^{n}((f_{ox}'(t,v_0(t),v_0(t-\varepsilon\Delta(t)))u_{i0}(t)-u_{i0}(t)\lambda_i(t))\Pi io(t,\varepsilon))+$$
$$\sum_{s=2}^{\infty}\varepsilon^{s}[\sum_{i=1}^{n}[(f_{0x}'(t,v_0(t),v_0(t-\varepsilon\Delta(t))u_{i,s-1}(t)-u_{i,s-1}(t)\lambda_i(t))+$$
$$+f_{1x}'(t,v_0(t),v_0(t-\varepsilon\Delta(t))u_{i,s-2}(t)+u_{i,s-2}'(t))+\sum_{j=2}^{s-1}f_{jx}'(t,v_0(t),v_0(t-\varepsilon\Delta(t))u_{i,s-1-j}(t))\Pi_{i0}(t,\varepsilon)+$$
$$+[f_{1y}'(t,v_0(t),v_0(t-\varepsilon\Delta(t))u_{i,s-2}(t-\varepsilon\Delta(t)))+$$
$$+\sum_{j=2}^{s-1}f_{j,y}'(t,v_0(t),v_0(t-\varepsilon\Delta(t))u_{i,s-1-j}(t-\varepsilon\Delta(t)))\Pi_{i0}(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)+\sum_{j=0}^{s-1}u_{ij}(t)\xi_{i,s-1-j}(t,\varepsilon)])+$$
$$+g_{2s}(t,\varepsilon)]]+\sum_{s=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{s-1}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^{s}[\sum_{k=0}^{s-1-j}f_{kx}'\left(t,v_0(t),v_0(t-\varepsilon\Delta(t))u_{i,s-1-k-j}(t)+u_{i,s-2-j}'(t)\right)\Pi_{ij}(t,\varepsilon)+$$
$$+\sum_{k=0}^{s-1-j}f_{kx}'\left(t,v_0(t),v_0(t-\varepsilon\Delta(t))u_{i,s-1-k-j}(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)\right)\Pi_{ij}(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)]=0, \tag{8}$$

де

$$f_1(t,v(t,\varepsilon)+\sum_{i=1}^{n}u_1(t,\varepsilon)\prod_i(t,\varepsilon,\varepsilon),v(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)+\sum_{i=1}^{n}u_i(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)\prod_i(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon))=$$

$$=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\varepsilon^{\alpha}[f_{\alpha}(t,v_0(t),v_0(t-\varepsilon\Delta(t)))+\sum_{s=0}^{\alpha-1}f'_{sx}(t,v_0(t),v_0(t-\varepsilon\Delta(t)))v_{\alpha-s}(t)+$$

$$+\sum_{s=1}^{\alpha-1}f'_{sy}(t,v_0(t),v_0(t-\varepsilon\Delta(t)))v_{\alpha-s}(t-\varepsilon\Delta(t))]+\sum_{\alpha=2}^{\infty}\varepsilon^{\alpha}g_{1\alpha}(t,\varepsilon).$$

Розвинемо за степенями параметра ε наступні функції

$$v_s(t-\varepsilon\Delta(t))=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j\bar{v}_{sj}(t),u_{is}(t-\varepsilon\Delta(t))=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j\bar{u}_{isj}(t),$$

$$\exp(\varepsilon^{-1}\int_{t}^{t-\varepsilon\Delta(t)}\lambda_i(\tau)d\tau)=\exp(-\Delta(t)\lambda_i(t))(1+\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j\bar{\lambda}_{ij}(t)),\tag{9}$$

$$f_s(t,v_0(t),v_0(t-\varepsilon\Delta(t)))=f_s(t,v_0(t),v_0(t))+\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j(f'_{sy}(t,v_0(t),v_0(t))\bar{v}_{0j}(t)+\bar{g}_{sj1}(t)),$$

де

$$\bar{v}_{s0}(t)=v_s(t),\bar{u}_{is0}(t)=u_{is}(t),\bar{v}_{sj}(t)=(-1)^j v_s^{(j)}(t)\Delta^j(t),\bar{u}_{isj}(t)=(-1)^j u_{is}^{(j)}(t)\Delta^j(t);$$

$$\bar{\lambda}_{i1}(t)=\Delta^2(t)\lambda'(t),\bar{\lambda}_{i2}(t)=\frac{\Delta^3(t)}{2!}(\frac{1}{4}\Delta'(t)(\lambda'(t))^2-\frac{1}{3}\lambda''(t));\bar{g}_{sj1}(t)=0,$$

при $j=0,1$ і $\bar{g}_{sj1}(t)=\bar{g}_{sj}(t)$ при $j\ge 2$; $v_s^{(j)}(t)$ означає j похідну від $v_s(t);\bar{g}_{sj}(t)=\bar{g}_{sj}(\bar{v}_{01}(t)...\bar{v}_{0j}(t))$ многочлен від вказаних аргументів. Позначимо

$$\bar{f}_{sx}(t,v_0(t),v_0(t-\varepsilon\Delta(t)))=\frac{1}{\varepsilon}(f'_{sx}(t,v_0(t),v_0(t-\varepsilon\Delta(t)))-f'_{sx}(t,v_0(t),v_0(t)),$$

$$\bar{f}_{sy}(t,v_0(t),v_0(t-\varepsilon\Delta(t)))=\frac{1}{\varepsilon}(f'_{sy}(t,v_0(t),v_0(t-\varepsilon\Delta(t)))-f'_{sy}(t,v_0(t),v_0(t)))).\tag{10}$$

Підставляючи (4), (9), (10) в (7) і зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε, маємо

$$f_0(t,v_0(t),v_0(t))=0,\tag{11}$$

$$v'_0(t)=f'_{0x}(t,v_0(t),v_0(t))v_1(t)+f_1(t,v_0(t),v_0(t)),\tag{12}$$

$$v'_{\alpha-1}(t)=f_{\alpha}(t,v_0(t),v_0(t))+(\sum_{s=1}^{\alpha-1}f'_{sy}\bar{v}_{0,\alpha-s}(t)+\sum_{s=0}^{\alpha-1}\bar{g}_{s,\alpha-s,1}(t))+f'_{0x}(t,v_0(t),v_0(t))v_{\alpha}(t)+$$

$$+\sum_{s=1}^{\alpha-1}f'_{sx}(t,v_0(t),v_0(t))v_{\alpha-s}(t)+\sum_{s=0}^{\alpha-2}\bar{f}_{sx}(t,v_0(t),v_0(t-\varepsilon\Delta(t))v_{\alpha-1-s}(t)+\sum_{s=1}^{\alpha-1}\sum_{j=0}^{\alpha-1-s}\Big[f'_{sy}(t,v_0(t),v_0(t))\times$$

$$\times\bar{v}_{\alpha-s,\alpha-1-s-j}(t)\Big]+\sum_{s=1}^{\alpha-2}\sum_{j=0}^{\alpha-2-s}\bar{f}_{sy}(t,v_0(t),v_0(t-\varepsilon\Delta(t)))\bar{v}_{\alpha-s,\alpha-2-s-j}(t)+g_{1\alpha}(t,\varepsilon)).\tag{13}$$

Згідно умови 2, покладемо в (11)

$$v_0(t)=\bar{x}(t).$$

Тоді використовуючи умову 3 з рівнянь (12), (13) знаходимо $v_{\alpha}(t),\alpha=1,2...$ Із рівнянь (5) знайдемо, що

$$\prod_{i0}(t,\varepsilon)=\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^t\lambda_i(\tau)d\tau)c_{i0},\quad \prod_{is}(t,\varepsilon)=\exp\left(\varepsilon^{-1}\int_0^t\lambda_i(\tau)d\tau\right)c_{is}+\overline{\prod}_{is}(t,\varepsilon),\tag{14}$$

де

$$\overline{\prod}_{is}(t,\varepsilon)=\varepsilon^{-1}\int_0^t\exp(\varepsilon^{-1}\int_{t_1}^t\lambda_i(\tau)d\tau)\xi_s(t_1,\varepsilon)dt_1,s=1,2...,i=\overline{1,n}.$$

Врахувавши (3), (4) і початкову умову (2) величини $c_{is}, i=\overline{1,n}, s=0,1,...,$ однозначно знаходимо з рівнянь

$$v_0(0)+\varepsilon\sum_{i=1}^{n}u_{i0}\,\Pi_{i0}(0,\varepsilon)+\varepsilon v_1(0)=x_0,\quad v_s(0)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=0}^{s-1}u_{ir}(0)\Pi_{i,s-1-r}(0,\varepsilon)=0, s=2,3,.... \quad (15)$$

Підставивши (14) в (8) і зробивши спрощення маємо рівняння

$$\sum_{i=1}^{n}\varepsilon\left((f'_{0x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i0}(t)-u_{i0}(t)\lambda_i(t))\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^t\lambda_i(\tau)d\tau)c_{i0}\right)+$$
$$+\varepsilon^2[\left(f'_{0x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i1}(t)-u_{i1}(t)\lambda_i(t)+f'_{1x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i0}(t)+u'_{i0}(t)\right)\times$$
$$\times\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^t\lambda_i(\tau)d\tau)c_{i0}+f'_{1y}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i0}(t)\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^{t-\varepsilon\Delta(t)}\lambda_i(\tau)d\tau)c_{i0}]+$$
$$+\sum_{s=3}^{\infty}\varepsilon^s[[f'_{0x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i,s-1}(t)-u_{i,s-1}(t)\lambda_i(t)+f'_{1x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i,s-2}(t)+u'_{i,s-2}(t)+$$
$$+\sum_{j=2}^{s-1}f'_{jx}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i,s-1-j}(t)]\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^t\lambda_i(\tau)d\tau)c_{i0}+[f'_{1y}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i,s-2}(t)$$
$$+\sum_{j=2}^{s-1}f'_{jy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i,s-1-j}+\sum_{j=1}^{s-2}\sum_{l=1}^{s-2-j}f'_{jy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))\overline{u}_{i,s-2-j,l}]\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^{t-\varepsilon\Delta(t)}\lambda_i(\tau)d\tau)c_{i0}+$$
$$+\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{s=l+1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^s[[f'_{0x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i,s-l-1}(t)-u_{i,s-l-1}(t)\lambda_i(t)+f'_{1x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i,s-l-2}(t)+$$
$$+u'_{i,s-l-2}(t)+\sum_{j=2}^{s-1}f'_{jx}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i,s-1-j}]\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^t\lambda_i(\tau)d\tau)c_{il}+f'_{1y}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i,s-l-2}(t)+$$
$$+\sum_{j=2}^{s-1}[f'_{jy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i,s-1-l-j}(t)+\sum_{j=1}^{s-2}\sum_{r=1}^{s-2-j}f'_{jy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))\overline{u}_{i,s-2-j-l,r}]\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^{t-\varepsilon\Delta(t)}\lambda_i(\tau)d\tau)c_{il}+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^2[u_{i0}(t)\xi_{i1}(t,\varepsilon)+g_{22}(t,\varepsilon)+\overline{f}_{0x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t-\varepsilon\Delta(t)))u_{i0}(t)\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^t\lambda_i(\tau)d\tau)c_{i0}+$$
$$+[f'_{0x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i0}(t)-u_{i0}(t)\lambda_i(t)]\overline{\Pi}_{i1}(t,\varepsilon)]+\sum_{k=3}^{\infty}\varepsilon^k[u_{i0}(t)\xi_{i,k-1}(t,\varepsilon)+$$
$$+\sum_{j=1}^{k-2}u_{i,j}(t)\xi_{i,k-1-j}(t,\varepsilon)+g_{2k}(t,\varepsilon)+\left(f'_{0x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i0}(t)-u_{i0}(t)\lambda_i(t)\right)\overline{\Pi}_{i,k-1}(t,\varepsilon)+$$
$$+\sum_{s=0}^{k-2}\sum_{j=0}^{k-2-s}\overline{f}_{sx}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t-\varepsilon\Delta))u_{ij}(t)\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^t\lambda_i(\tau)d\tau c_{i,k-2-s-j}+$$
$$+\sum_{s=0}^{k-2}\sum_{j=0}^{k-2-s}\sum_{l=0}^{k-2-s-j}\overline{f}_{sx}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t-\varepsilon\Delta))\overline{u}_{ijl}(t)\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^{t-\varepsilon\Delta(t)}\lambda_i(\tau)d\tau c_{i,k-2-s-j}+$$
$$+\sum_{s=2}^{k}[\sum_{j=0}^{s-1}f'_{jx}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i,s-1-j}(t)-u_{i,s-1-j}(t)\lambda_i(t)+u'_{i,s-2}]\overline{\Pi}_{i,k-s}(t,\varepsilon)+$$
$$+\sum_{s=0}^{k-2}\sum_{j=0}^{k-s-2}\sum_{j=1}^{k-s-j-2}f'_{jy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))\overline{u}_{isl}(t)\overline{\Pi}_{i,k-s-2-j-l}(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon))] \quad (16)$$

Підставляючи розвинення функції $\exp(\varepsilon^{-1}\int_t^{t-\varepsilon\Delta(t)}\lambda_i(\tau)d\tau)$ в степеневий ряд по ε в рівняння (16) і в одержаному рівнянні згрупуємо вирази при степенях ε, маємо рівняння для знаходження функцій $u_{is}(t)$

$$\varepsilon(f'_{0x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i0}(t)-u_{i0}(t)\lambda_i(t))++\varepsilon^2\Big[f'_{0x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i1}(t)-u_{i1}(t)\lambda_i(t)+$$
$$+f'_{1x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i0}(t)+u'_{i0}(t)+f'_{1y}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i0}(t)\exp(-\Delta(t)\lambda_i(t))\Big]+$$
$$+\sum_{k=3}^{\infty}\varepsilon^k[f'_{0x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i,k-1}(t)-u_{i,k-1}(t)\lambda_i(t)+f'_{1x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i,k-2}(t)+u'_{i,k-2}(t)+$$
$$+\sum_{j=2}^{k-1}f'_{jx}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i,k-1-j}(t)+f'_{1y}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i,k-2}(t)+\sum_{j=2}^{k-1}f'_{jy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i,k-1-j}(t)+$$
$$+\sum_{j=1}^{k-2}\sum_{l=1}^{k-2-j}f'_{jy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))\bar{u}_{i,k-2-j,l}(t)\exp(-\Delta(t)\lambda_i(t))+\sum_{m=1}^{k-1}\left(\sum_{j=1}^{m-1}f'_{jy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i,m-1-j}(t)+\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{m-2}\sum_{l=1}^{m-2-j}f'_{jy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))\bar{u}_{i,m-2-j,l}(t)\right)\times\exp(-\Delta(t)\lambda_i(t))\bar{\lambda}_{i,k-m}(t)]=0 \quad (17)$$

З рівняння випливає, що $\xi_{is}(t,\varepsilon)$ $(s=0,1...)$ задовольняє рівняння

$$\varepsilon^2[g_{22}(t,\varepsilon)+\sum_{i=1}^{n}[u_{i0}(t)\xi_{i1}(t,\varepsilon)+\bar{f}_{0x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t-\varepsilon\Delta(t)))u_{i0}(t)\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^t\lambda_i(\tau)d\tau)c_{i0}+$$
$$+[f'_{0x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i0}(t)-u_{i0}(t)\lambda_i(t)]\overline{\Pi}_{i1}(t,\varepsilon)]]+\sum_{k=3}^{\infty}\varepsilon^k[g_{2k}(t,\varepsilon)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}[u_{i0}(t)\xi_{i,k-1}(t,\varepsilon)+\sum_{j=1}^{k-2}u_{ij}(t)\xi_{i,k-1-j}(t,\varepsilon)+\left(f'_{0x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i0}(t)-u_{i0}(t)\lambda_i(t)\right)\overline{\Pi}_{i,k-1}(t,\varepsilon)+$$
$$+\sum_{s=0}^{k-2}\sum_{j=0}^{k-2-s}\bar{f}_{sx}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t-\varepsilon\Delta(t)))u_{ij}(t)\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^t\lambda_i(\tau)d\tau)c_{i,k-2-s-j}+\sum_{s=0}^{k-2}\sum_{j=0}^{k-2-s}\sum_{l=0}^{k-2-s-j}\bar{f}_{sx}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t-$$
$$-\varepsilon\Delta(t)))\bar{u}_{ijl}(t)\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^{t-\varepsilon\Delta(t)}\lambda_i(\tau)d\tau)c_{i,k-2-s-j-l}+\sum_{s=2}^{k}[\sum_{j=0}^{s-1}(f'_{jx}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t)))u_{i,s-1-j}(t)-$$
$$-u_{i,s-1-j}(t)\lambda_i(t)]+u'_{i,s-2}(t)]\overline{\Pi}_{i,k-s}(t,\varepsilon)+$$
$$+\sum_{s=0}^{k-2}\sum_{j=1}^{k-s-2}\sum_{l=0}^{k-s-j-2}f'_{jy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))\bar{u}_{isl}(t)\overline{\Pi}_{i,k-s-2-j-l}(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)]=0\,. \quad (18)$$

Зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε в рівняннях (17) і (18), одержимо

$$C(t,\lambda_i)u_{i0}(t)=0, \quad (19)$$
$$C(t,\lambda_i)u_{i1}(t)=-u'_{i0}(t)+F_i(t)u_{i0}(t), \quad (20)$$
$$C(t,\lambda_i)u_{i,k-1}(t)=-u'_{i,k-2}(t)+F_i(t)u_{i,k-2}(t)+F_{i1k}(t), i=\overline{1,n}, k=3,4..., \quad (21)$$
$$\sum_{i=1}^{n}u_{i0}(t)\xi_{i1}(t,\varepsilon)=-\sum_{i=1}^{n}((f'_{0x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i0}(t)-u_{i0}(t)\lambda_i(t))\overline{\Pi}_{i1}(t,\varepsilon)+F_{22}(t,\varepsilon), \quad (22)$$
$$\sum_{i=1}^{n}u_{i0}(t)\xi_{i,k-1}(t,\varepsilon)=-\sum_{i=1}^{n}((f'_{0x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i0}(t)-u_{i0}(t)\lambda_i(t))\overline{\Pi}_{i,k-1}(t,\varepsilon)+F_{2k}(t,\varepsilon), \quad (23)$$

де

$$C(t,\lambda(t))=f'_{0x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))-\lambda(t)E,$$
$$F_i(t)=-f'_{1x}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))-f'_{1y}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))\exp(-\Delta(t)\lambda_i(t)),$$
$$F_{i1k}(t)=-\sum_{j=2}^{k-1}f'_{jx}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i,k-1-j}(t)-[\sum_{j=2}^{k-1}f'_{jy}(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t))u_{i,k-1-j}(t)+$$

$$+\sum_{j=1}^{k-2}\sum_{l=1}^{k-2-j} f'_{jy}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))\overline{u}_{i,k-2-j,l}(t)]\exp(-\Delta(t)\lambda_i(t)) - \sum_{m=1}^{k-1}[\sum_{j=1}^{m-1} f'_{jy}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))u_{i,m-1-j} +$$

$$+\sum_{j=1}^{m-2}\sum_{l=1}^{m-2-j} f'_{jy}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))\overline{u}_{i,m-2-j,l}(t)]\exp(-\Delta(t)\lambda_i(t))\overline{\lambda}_{i,k-m}(t),$$

$$F_{22}(t,\varepsilon) = -g_{22}(t,\varepsilon) - \sum_{i=1}^{n}\overline{f}_{0x}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t-\varepsilon\Delta(t))u_{i0}(t)\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^t \lambda_i(\tau)d\tau)c_{i0},$$

$$F_{2k}(t,\varepsilon) = -g_{2k}(t,\varepsilon) - \sum_{i=1}^{n}[\sum_{j=1}^{k-2} u_{ij}(t)\xi_{i,k-1-j}(t,\varepsilon) + \sum_{s=0}^{k-2}\sum_{l=0}^{k-2-s}\overline{f}_{sx}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t-\varepsilon\Delta(t)))u_{ij}(t)\times$$

$$\times\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^t \lambda_i(\tau)d\tau)c_{i,k-2-s-j} + \sum_{s=0}^{k-2}\sum_{j=0}^{k-2-s}\sum_{l=0}^{k-2-s-j}\overline{f}_{sx}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t-\varepsilon\Delta(t)))\overline{u}_{ijl}(t)\times$$

$$\times\exp(\varepsilon^{-1}\int_0^{t-\varepsilon\Delta(t)} \lambda_i(\tau)d\tau)c_{i,k-2-s-j-l} + \sum_{s=0}^{k}[\sum_{j=0}^{s-1}\left(f'_{jx}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))u_{i,s-1-j}(t) - u_{i,s-1-j}(t)\lambda_i(t)\right) +$$

$$+u'_{i,s-2}(t)]\overline{\Pi}_{i,k-s}(t,\varepsilon) + \sum_{s=0}^{k-2}\sum_{j=1}^{k-s-2}\sum_{l=0}^{k-s-j-2} f'_{jy}(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t))\overline{u}_{isl}(t)\overline{\Pi}_{i,k-s-2-j-l}(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon] = 0$$

Розглянемо метод розв'язування рівнянь (19)-(21). В зв'язку з умовою 3 покладемо в (19):

$$u_{i0}(t) = \alpha_{i0}(t)\varphi_i(t), i = \overline{1,n}, \tag{24}$$

де $\varphi_i(t)$ власні вектора матриці $C(t,\lambda_i), \alpha_{i0}(t)$ - довільні функції. Умова існування рівняння (20) прийме вигляд

$$(\varphi_i(t),\psi_i(t))\alpha'_{i0}(t) + (\varphi'_i(t) + F_i(t)\varphi_i(t),\psi_i(t))\alpha_{i0}(t) = 0, \tag{25}$$

де $\psi_i(t)$ власні вектора матриці $C^*(t,\lambda_i)$, спряженої до матриці $C(t,\lambda_i)$. При виконані умови в [1], виберемо вектора $\varphi_i(t),\psi_i(t)$ так, щоб виконувалася рівність $(\varphi_i(t),\psi_i(t)) = 1, \forall t \in [0;L]$, що дає можливість однозначного знаходження $\alpha_{i0}(t), u_{i0}(t)$ відповідно з рівнянь (25), (24). Припустимо, що $u_{is}(t)$ знайдені при $s < k-2$, і що

$$u_{is}(t) = \alpha_{i,k-2}(t)\varphi_i(t) + C^+(t,\lambda_i)(u'_{i,k-3}(t) + F_i(t)u_{i,k-3}(t) + F_{i1,k-1}(t)),\ i = \overline{1,n}, k = 3,4.... \tag{26}$$

Враховуючи (26) і умову існування розв'язку рівняння (21), функції $\alpha_{i,k-2}(t)$ знаходимо з рівняння

$$(\varphi_i(t),\psi_i(t))\alpha'_{i,k-2}(t) + ((\varphi'_i(t) + F_i(t)\varphi_i,\psi_i(t))\alpha_{i,k-2}(t) +$$

$$+(\frac{d}{dt}(C^+(t,\lambda_i)(u'_{i,k-3}(t) + F_i(t)u_{i,k-3}(t) + F_{i1,k-1}(t)) + F_{i1,k}(t),\psi_i(t)) = 0,$$

де $C^+(t,\lambda)$ – узагальнено обернена матриця до матриці $C(t,\lambda), i = \overline{1,n}, k = 3,4....$

Рівняння (22), (23) перепишемо у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n} u_{i0}(t)\xi_{i,k-1}(t,\varepsilon) = -\sum_{i=1}^{n} C(t,\lambda_i)u_{i0}(t)\overline{\Pi}_{i,k-1}(t,\varepsilon) + F_{2k}(t,\varepsilon), k = 2,3... \tag{27}$$

Враховуючи рівняння (19), з рівняння (27) знайдемо

$$\xi_{k-1}(t,\varepsilon) = -U_0^{-1}(t)F_{2k}(t,\varepsilon)),\ k = 2,3...,$$

де $\xi_{k-1}(t,\varepsilon) - n$ вимірний вектор з координатами $\xi_{i,k-1}(t,\varepsilon),\ U_0(t) - n\times n$ матриця, стовбцями, якої є вектора $u_{i0}(t)\ \ (i = \overline{1,n})$. Теорема доведена.

РЕЗЮМЕ

Построено асимптотическое решение нелинейной сингулярно возмущённой системы дифференциальных уравнений из запаздыванием.

Ключевые слова: задача Коши, сингулярно возмущённая система дифференциальных уравнений, асимптотическое решение, переменное запаздывание.

SUMMARY

We construct asymptotic solution of a nonlinear of singularly perturbed system of differential equations with a delay.

Key words: the problem of Cauchy, singularly perturbed system of differential equations, asymptotic solution, variable delay.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Пидченко Ю. П., Сотниченко Н. А. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – Киев: Наук. думка, 1981. – 196с.
2. Завизион Г. В. Линейная система интегро-дифференциальных уравнений с запаздыванием // Известие вузов.- 2003. – Т. 494, № 7. – С. 64-69.
3. Бігун Я. Й. Усереднення коливних систем із запізненням та інтегральними крайовими умовами // Укр. мат. журн. – 2004. – Т. 56, № 2. – С. 257-263.
4. Perestyuk M.O., Cherevko I.M. Decomposition of linear singularly perturbed functional differential equations // Nonlinear Oscillations. – 2011. – Т. 4, № 3. – P.345-353.
5. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973. – 272с.

Надійшло до редакції 18.04.2011 р.