

УДК 539.3

**КОНЦЕНТРАЦИЯ ТЕРМОНАПРЯЖЕНИЙ НА ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ
ЦИЛИНДРИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА**

Т. А. Васильев

Рассмотрена осесимметричная стационарная смешанная задача термоупругости для цилиндрического тела. Проведен асимптотический анализ бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Установлена главная часть асимптотического представления ее решения. Бесконечная система сведена к конечной. В рядах для напряжений выделена сингулярная часть. Проведен анализ напряженного состояния в цилиндрическом теле.

Ключевые слова: цилиндрическое тело, термоупругое деформирование, смешанная задача, сингулярность напряжения.

Введение. Деформирование неравномерно нагретого сплошного цилиндра рассматривалось с помощью методов суперпозиции [1] и однородных решений [2]. В работах [3, 4] исследовалось термонапряженное состояние цилиндра, на боковых поверхностях которого задавалось распределение температур, а на торцах – однородные условия. В статье [5] рассматривалась осесимметричная задача термоупругого деформирования короткого цилиндра. В указанных работах боковая поверхность цилиндра была свободна от напряжений. Однако тело может являться составной частью конструкции, и его расширение ограничивается соседними элементами. Тогда следует рассматривать задачу термоупругого деформирования тела, контактирующего с остальной частью конструкции. Такая проблема моделируется смешанной граничной задачей [6]. Решение смешанной задачи термоупругости требует проведения асимптотического анализа решения бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.

Данная работа посвящена исследованию концентрации напряжений, возникающей вблизи жестко защемленной поверхности короткого цилиндра при его осесимметричном тепловом расширении, приводящем к изгибу. Качество решения достигается за счет применения методов асимптотического анализа.

Постановка и решение задачи. Рассмотрим изотропный цилиндр радиуса \tilde{R} и высоты $2\tilde{H}$. Начало цилиндрической системы координат поместим в центре цилиндра, а ось $O\tilde{z}$ направим по оси цилиндра. Введем в рассмотрение безразмерные характеристики (тильда стоит над размерными величинами) $r = \tilde{r}/\tilde{R}$, $z = \tilde{z}/\tilde{H} = \tilde{z}/h\tilde{R}$, $h = \tilde{H}/\tilde{R}$, $u = \tilde{u}/\tilde{R}$, $w = \tilde{w}/\tilde{R}$, $\sigma_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij}/2\tilde{G}$, $\theta = \alpha_T \tilde{\theta}/T_0$ [4]. В теле задано распределение температуры

$$\theta(r, z) = \sum_k B_k I_0(\delta_k^* r) \sin(\delta_k^* z) / I_0(\delta_k^*), \quad B_k = 2 \int_0^1 \tau_0(z) \sin(\delta_k^* z) dz, \quad \delta_k = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

определяемое из решения краевой задачи теплопроводности

$$\nabla^2 \theta = 0, \quad \theta(r, \pm 1) = 0, \quad \theta(1, z) = \tau_0(z).$$

Для определения термонапряженного состояния в цилиндре под действием неравномерного распределения температуры $\theta(r, z)$ необходимо решить граничную задачу

$$u_{r,zz} / h^2 + (\mu + 1)(u_{r,r} + u_r / r)_{,r} + \mu u_{z,rz} / h = 2k(1 + \nu)\theta_{,r}, \quad \mu = 1 / (1 - 2\nu), \tag{1}$$

$$(\mu + 1)u_{z,zz} / h^2 + \mu(u_{r,r} + u_r / r)_{,z} / h + u_{z,rr} + u_{r,r} / r = 2\mu(1 + \nu)\alpha_T \theta_{,z} / h;$$

$$\sigma_{rz}(r, \pm 1) = \sigma_{zz}(r, \pm 1) = 0, \quad u_r(1, z) = u_z(1, z) = 0. \tag{2}$$

Для решения задачи (1), (2) используем предложенный в работе [4] метод. С этой целью решение задачи представим в виде

$$u_i = u_i^* + u_i^0,$$

где u_i^* – частное решение уравнений равновесия, обусловленное температурным потенциалом Φ ; u_i^0 – общее решение однородной системы (1). Величины u_i^* определяются соотношениями [7]

$$u_r^* = \Phi_{,r}, \quad u_z^* = -\Phi_{,z} / h.$$

Термоупругий потенциал $\Phi(r, z)$ имеет вид [4]

$$\Phi(r, z) = (1 + \nu) \sum_k B_k I_0(\delta_k^* r) \sin(\delta_k z) / \delta_k^{*2} I_0(\delta_k^*).$$

В результате перемещения имеют вид:

$$\begin{aligned} u_r &= \Phi_{,r} + 2arz + 2 \operatorname{Re} \sum_p A_p n_p(z) P_0^-(\gamma_p^* r) I_0(\gamma_p^* r) / I_0(\gamma_p^*), \\ u_z &= -\Phi_{,z} / h - ar^2 / h + 4ahk_1(1 - \nu z^2 / 2) - b / h + 2 \operatorname{Re} \sum_p A_p q_p(z) I_0(\gamma_p^* r) / I_0(\gamma_p^*). \end{aligned} \quad (3)$$

После подстановки соотношений (3) в граничные условия (2) и использования метода Бубнова-Галеркина [4] получим систему линейных уравнений относительно неизвестных A_p

$$\begin{aligned} a + \operatorname{Re} \sum_p n_{mp} P_0^+(\gamma_p^*) A_p &= - \sum_k (-1)^{k+1} B_k (1 + \nu) \varepsilon_m^2 \delta_k h^2 P_0^-(\delta_k^*) / 6 (\delta_k^2 - \varepsilon_m^2); \\ \omega_m a + 2 \operatorname{Re} \sum_p q_{mp} A_p &= - \sum_k (-1)^{k+1} B_k (1 + \nu) \varepsilon_m^2 \delta_k h / 6 (\delta_k^2 - \varepsilon_m^2), \quad m = \overline{1, \infty}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \omega_m &= 1/h - 4hk_1 + 2h\nu(1 - 2/\varepsilon_m^2), \quad q_{mp} = a_{mp} \varepsilon_m^2 [(\mu + 1) \varepsilon_m^2 - (3\mu + 1) \gamma_p^2] = q(\varepsilon_m; \gamma_p), \\ n_{mp} &= ha_{mp} \varepsilon_m^2 [(\mu - 1) \gamma_p^2 + (\mu + 1) \varepsilon_m^2] = n(\varepsilon_m; \gamma_p), \quad a_{mp} = \cos^2 \gamma_p / (\gamma_p^2 - \varepsilon_m^2)^2, \\ \varepsilon_m &= \pi(m + 1/2), \quad P_0^-(\gamma_p^* r) = \gamma_p^* I_1(\gamma_p^* r) / I_0(\gamma_p^* r), \end{aligned}$$

γ_p – корни уравнения $\sin 2\gamma = 2\gamma$, $\gamma_p^* = \gamma_p/h$, остальные обозначения введены в работе [4].

Решение системы (4) получено методом редукции, позволяющим с приемлемой точностью получить значения неизвестных. Вблизи граничных поверхностей значение напряжений определяется суммой всего ряда. В связи с этим возникает необходимость проведения асимптотического анализа системы (4). Для неизвестных системы (4) зададим асимптотическое представление [2]

$$A_p \approx Ah^{1/2} \lambda_p (\beta + 1/2) I_0(\gamma_p^*), \quad \lambda_p(\beta) = \gamma_p^{\beta-1} e^{-\gamma_p^*} / \sin^2 \gamma_p \quad (5)$$

и придем к однородной системе уравнений относительно $A_1^* = \operatorname{Re} A$, $A_2^* = \operatorname{Im} A$

$$A_1^* (\mu\beta + 1) \operatorname{tg}(\pi\beta / 2) + A_2^* (\mu\beta + \mu + 1) = 0, \quad A_1^* (\mu\beta - \mu - 1) \operatorname{ctg}(\pi\beta / 2) - A_2^* (\mu\beta - 1) = 0. \quad (6)$$

Из условия равенства нулю определителя системы (6) получаем известное [2] уравнение $(3 - 4\nu) \sin^2(\pi\beta / 2) + \beta^2 - 4(1 - \nu)^2 = 0$ для показателя β . В результате система (4) может быть сведена к конечной путем замены неизвестных соотношениями (5).

В табл. 1 приведены значения $\operatorname{Re} A_p$ и $\operatorname{Im} A_p$ для двух распределений температуры вдоль боковой поверхности. При этом значения параметров $h = 0,5$, $\nu = 0,25$.

Таблица 1

$\tau_0(z)$	z		$z(1 - z^2)$	
p	$\operatorname{Re} A_p$	$\operatorname{Im} A_p$	$\operatorname{Re} A_p$	$\operatorname{Im} A_p$
1	-0,077012255	-0,04582502	-0,03989828	-0,02696534
2	0,567265987	2,16741204	0,47999331	1,63510132
3	0,181407154	1,83562219	-0,32337731	0,52859569
4	0,006559032	1,62260413	-0,36040971	0,20077994
5	-0,091909222	1,47502267	-0,33207044	0,06941120
6	-0,153942674	1,36621583	-0,29973510	0,00665443
7	-0,195962384	1,28231919	-0,27154627	-0,02638150
8	-0,225923538	1,21543264	-0,24801019	-0,04464590
9	-0,248128235	1,16073358	-0,22842219	-0,05487019
10	-0,265121191	1,11501718	-0,21200146	-0,06044283

Анализ данных таблицы показывает, что значения A_p с ростом номера стремятся к константе.

Для нахождения напряжений получаем соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = & -\Phi_{,r} / r + S(r, z) + 2(1+\nu)az / (1-\nu) + 2\operatorname{Re} \sum_{p=1}^{P-1} (A_p - A) \gamma_p^{*1/2} \left[I_p(z) - P_0^* (\gamma_p^* r) n_p(z) / r \right] I_0(\gamma_p^* r) \lambda_p(\beta) + \\ & + 2\operatorname{Re} A \sum_{p=1}^{+\infty} \left\{ \mu \cos \gamma_p \sin \gamma_p z I_0(\gamma_p^* r) - I_1(\gamma_p^* r) n_p(z) / r \right\} \gamma_p^{*3/2} \lambda_p(\beta), \quad \sigma_{zz} = -S(r, z) + \\ & + 2\operatorname{Re} A \sum_{p=1}^{+\infty} \mu \gamma_p^{*3/2} \cos \gamma_p \sin \gamma_p z I_0(\gamma_p^* r) \lambda_p(\beta) + 2\operatorname{Re} \sum_{p=1}^{P-1} (A_p - A) t_p(z) \gamma_p^{*1/2} I_0(\gamma_p^* r) \lambda_p(\beta), \\ \sigma_{rz} = & S_1(r, z) + 2\operatorname{Re} \sum_{p=1}^{P-1} (A_p - A) r_p(z) \gamma_p^{*3/2} I_1(\gamma_p^* r) \lambda_p(\beta), \quad \sigma_{\theta\theta} = -\Phi_{,rr} + S_2(r, z) + 2(1+\nu)az / (1-\nu) + \\ & + 2\operatorname{Re} A \sum_{p=1}^{+\infty} n_p(z) I_1(\gamma_p^* r) \lambda_p(\beta + 3/2) / rh\sqrt{h} + 2\operatorname{Re} \sum_{p=1}^{P-1} (A_p - A) \left(s_p(z) + n_p(z) P_0^* (\gamma_p^* r) / r \right) I_0(\gamma_p^* r) \lambda_p(\beta + 1/2) / \sqrt{h} \\ S(r, z) = & -\operatorname{Re} \psi(\beta, r, z) - 4\mu \int_1^{+\infty} \left\{ \chi(x, z) \xi_0(\beta + 1, x, r) + \operatorname{Re} \zeta(\beta + 1, x, r, z) \right\} dx + (1-z)\mu \operatorname{Re} \phi(\beta + 1, r, z) + \\ & + \operatorname{Re} 4\mu i^{\beta+1/2} \int_1^{+\infty} \left[\chi(ix, z) \eta_0(\beta + 1, x, r) + (1-z)\kappa(\beta + 1, x, r, z) \right] dx + \operatorname{Re} 4\mu A / A_2^* \int_0^{\pi/2} e^{i\varphi} \chi(e^{i\varphi}, z) \xi_0(\beta + 1, e^{i\varphi}, r) d\varphi + \\ & + \operatorname{Re} \varpi(\beta, r, z) - 2(1-z) \operatorname{Re} \mu i^\beta \omega(\beta + 1, r, z), \quad S_1(r, z) = \operatorname{Im} \psi(\beta, r, z) + (1-z)\mu \operatorname{Im} \phi(\beta + 1, r, z) - \operatorname{Im} \varpi(\beta, r, z) - \\ & - 4\mu \int_1^{+\infty} \left[\chi_1(x, z) \xi_1(\beta + 1, x, r) - \operatorname{Im} \zeta(\beta + 1, x, r, z) \right] dx + \operatorname{Re} 4\mu A / A_2^* \int_0^{\pi/2} e^{i\theta} \chi_1(e^{i\theta}, z) \xi_1(\beta + 1, e^{i\theta}, r) d\theta + \\ & + \operatorname{Re} 4\mu i^{\beta+3/2} \int_1^{+\infty} \left[\chi_1(ix, z) \eta_1(\beta + 1, x, r) - (1-z)\kappa(\beta + 1, x, r, z) \right] dx + (1-z) \operatorname{Re} \mu i^{\beta+1/2} (1+i) \omega(\beta + 1, r, z), \\ S_2(r, z) = & \operatorname{Re} 4(\mu - 1) A / A_2^* \int_0^{\pi/2} e^{i\theta} \chi_2(e^{i\theta}, z) \xi_0(\beta, e^{i\theta}, r) d\theta - 4(\mu - 1) \int_1^{+\infty} \chi_2(x, z) \xi_0(\beta, x, r) dx - \\ & - (\mu - 1) \operatorname{Im} \phi(\beta, r, z) - \operatorname{Re} 4(\mu - 1) i^{\beta+3/2} \int_1^{+\infty} \left[\chi_2(ix, z) \eta_0(\beta, x, r) - i\kappa(\beta, x, r, z) \right] dx + \\ & + \operatorname{Re} (\mu - 1) i^{\beta+1/2} (1-i) \omega(\beta, r, z), \quad \zeta = (1-z) + i(1-r) / h, \\ \xi_{0,1}(\beta + 1, x, r) = & A_2^* x^{\beta+3/2} I_{0,1}(xr/h) e^{-x/h} / \pi h^{3/2} (\sin 2x - 2x), \quad \chi_2(x, z) = \cos x \sin xz, \\ \zeta(\beta + 1, x, r, z) = & A_2^* x^\beta (1+z) e^{ix\zeta} / 4\pi h \sqrt{2\pi r}, \quad \chi(x, z) = \sin x \sin xz + z \cos x \cos xz \\ \eta_{0,1}(\beta + 1, x, r) = & Ax^{\beta+3/2} J_{0,1}(xr/h) e^{-ix/h} / \pi h^{3/2} (\sinh 2x - 2x), \quad \chi_1(x, z) = \sin x \cos xz - z \chi_2(x, z), \\ \phi(\beta) = & -Ai^{\beta+1/2} (i+1) \int_0^1 x^\beta e^{-\zeta x} dx / \pi^{3/2} hr^{1/2}, \quad \psi(\beta) = \mu(1+z) A_2^* \int_0^1 x^\beta e^{ix\zeta} dx / \pi h \sqrt{2\pi r}, \\ \omega(\beta, r, z) = & A\Gamma(\beta + 1) \zeta^{-(\beta+1)} / \pi h \sqrt{\pi r}, \quad \varpi(\beta, r, z) = \mu(1+z) A_2^* \Gamma(\beta + 1) \bar{\zeta}^{-(\beta+1)} / \pi h \sqrt{2\pi r}. \end{aligned}$$

Анализ численных результатов. Проведем анализ термонапряженного состояния в случае, когда температура распределена по боковой поверхности по закону $\tau_0(z) = z(1-z^2)$. На рис. 1 представлено распределение напряжений σ_{rr} , на рис. 2 – $\sigma_{\theta\theta}$ на боковой поверхности.

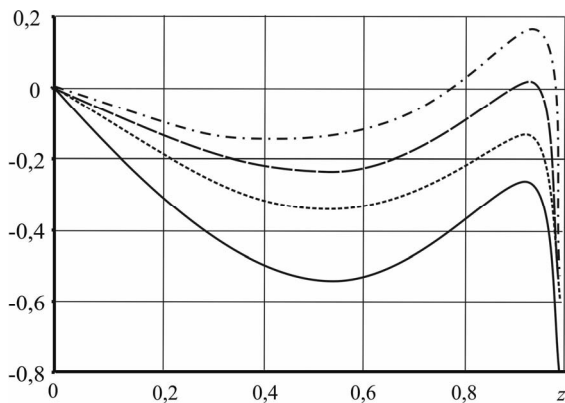


Рис. 1

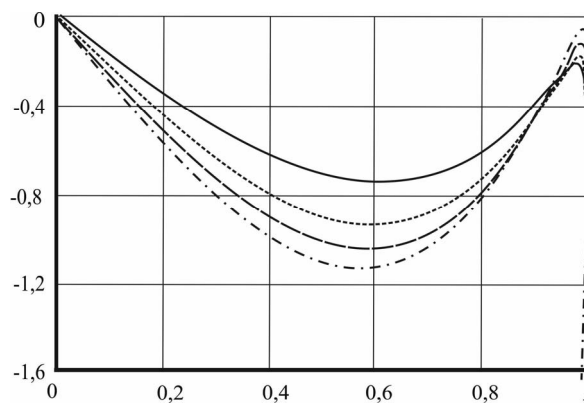


Рис. 2

Сплошная кривая на рисунках соответствует короткому цилиндру ($h=2, \nu=0,25$), точечная – кубообразному цилиндру ($h=1, \nu=0,25$), пунктирная – толстой плите ($h=0,5, \nu=0,25$) и штрихпунктирная – тонкой плите ($h=0,1, \nu=0,25$). На рис. 3 представлено распределение напряжения σ_{rr} внутри толстой плиты ($h=0,5, \nu=0,25$), когда температура распределена по боковой поверхности по закону $\tau_0(z) = z$.

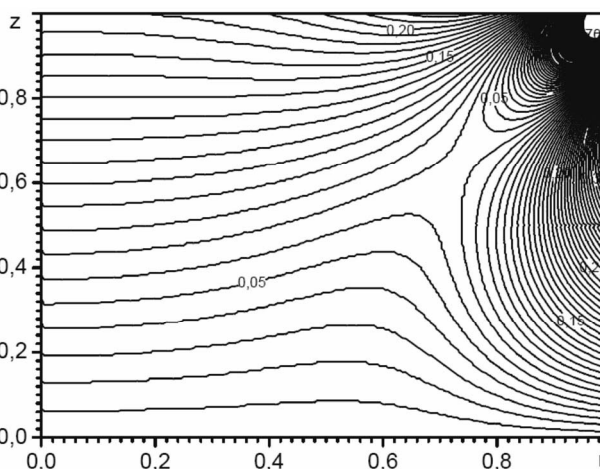


Рис. 3

Данные рисунков свидетельствуют о том, что сжимающие напряжения имеют минимум. При этом с ростом относительной высоты h напряжение σ_{rr} в целом по боковой поверхности убывает. В тонкой плите возникает зона положительных напряжений σ_{rr} , которая вблизи угловой линии сменяется сжимающими напряжениями. Напряжение $\sigma_{\theta\theta}$ возрастет с ростом относительной высоты h , но вблизи угловой линии наблюдается обратный эффект. Вблизи линии излома наблюдается область концентрации отрицательных напряжений σ_{rr} . На боковой поверхности напряжения σ_{rr} остаются отрицательными. В то время как на торцах напряжения положительны. Внутри цилиндра напряжения плавно меняются от отрицательных значений на боковой поверхности к положительным на торце.

Выводы. В данной работе было установлено, что с ростом относительной высоты h напряжение σ_{rr} в целом по боковой поверхности убывает так, что в тонкой плите возникает зона растягивающих напряжений, которая вблизи угловой линии сменяется сжимающими напряжениями. В то же время напряжение $\sigma_{\theta\theta}$ возрастет с ростом относительной высоты h , но в малой области вблизи угловой линии наблюдается обратный эффект.

Выводы. В данной работе было установлено, что с ростом относительной высоты h напряжение σ_{rr} в целом по боковой поверхности убывает так, что в тонкой плите возникает зона растягивающих напряжений, которая вблизи угловой линии сменяется сжимающими напряжениями. В то же время напряжение $\sigma_{\theta\theta}$ возрастет с ростом относительной высоты h , но в малой области вблизи угловой линии наблюдается обратный эффект.

РЕЗЮМЕ

Розглянуто осесиметричну стаціонарну змішану задачу термопружності для циліндричного тіла. Проведено асимптотичний аналіз нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь і встановлено головну частину асимптотичного представлення його розв'язку. Нескінченна система лінійних алгебраїчних рівнянь зведена до скінченної, а в рядках для напружень виокремлена сингулярна частина. Проведено аналіз напруженого стану, що виникає в циліндричному тілі.

Ключові слова: циліндричне тіло, термопружне деформування, змішана задача, сингулярність напруження.

SUMMARY

Axissymmetric mixed stationary thermoelastic problem for cylindrical body was considered. Asymptotic analysis of infinite system of linear algebraic equations was provided. The main term in the asymptotic expression for solution of system of linear algebraic equations was obtained. Infinite system was reduced to a finite one and singular part of stresses was determined. The analysis of stress state in cylindrical body was investigated.

Keywords: cylindrical body, thermoelastic deformation, mixed boundary value problem, stress singularity.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Прокопов В.К. Применение однородных решений к осесимметричной задаче термоупругости для цилиндров конечной длины / В.К. Прокопов, М.Е. Бабешко, В.К. Стрюк // Прикладная механика. – 1977. – Т. 13, № 12. – С. 3-8.
2. Гринченко В.Т. Задачи термоупругости для областей, ограниченных перпендикулярными граничными поверхностями / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1969. – № 8. – С. 110-125.
3. Алтухов Е.В. Осесимметричные задачи термоупругости для сред, обладающих поперечной анизотропией / Е.В. Алтухов, А.С. Космодамианский, В.А. Шалдырван // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1978. – № 4. – С. 316-319.
4. Космодамианский А.С. Толстые многосвязные пластины / А.С. Космодамианский, В.А. Шалдырван. – К.: Наук. думка, 1980. – 240 с.
5. Мелешко В.В. Осесимметричні температурні напруження у пружному ізотропному циліндрі скінченої довжини / В.В. Мелешко, Ю.В. Токовий, Дж.Р. Барбер // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – Т. 53, № 1. – С. 120-137.
6. Шалдырван В.А. Аналитические методы в смешанных задачах теории упругости / В.А. Шалдырван, Т.А. Васильев // Актуальные аспекты физико-механических исследований. Механика. – К.: Наук. думка, 2007. – С. 329-347.
7. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости / А.И. Лурье – М.: ГИТТЛ, 1955. – 492 с.

Поступила в редакцию 18.01.2012 г.