

УДК 539.3:534.1

**НЕЛИНЕЙНОЕ АНГАРМОНИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ОСЕСИММЕРИЧНОЙ ПРОДОЛЬНО-СДВИГОВОЙ ВОЛНЫ И ВОЛНЫ КРУЧЕНИЯ В ЗАКРЕПЛЕННОМ ЦИЛИНДРЕ**

*А. В. Елагин*

Статья посвящена теоретическому численно-аналитическому исследованию нелинейных вторых гармоник, генерируемых при одновременном распространении осесимметричных нормальных упругих волн продольно-сдвиговой и крутильного типа вдоль осевого направления в изотропном цилиндре кругового сечения с закрепленной боковой поверхностью. Для цилиндра из дюралюминия проведен анализ форм волновых движений в нелинейной волне, генерируемой в результате взаимодействия нормальных волн этого типа с варьруемыми относительными длинами.

*Ключевые слова:* цилиндрический волновод, физическая и геометрическая нелинейность, нормальные продольно-сдвиговые и крутильные волны, нелинейные ангармонические возмущения, нелинейное взаимодействие.

**Введение.** Исследование нелинейных эффектов при распространении волн деформаций в упругих средах является современной актуальной задачей динамики деформируемого твердого тела, представляющей интерес для фундаментальной науки и для целого ряда приложений в акустоэлектронике, ультразвуковой дефектоскопии, геоакустике. В частности результаты исследований эффектов нелинейного взаимодействия при распространении нескольких волн в деформируемых волноводах применяются при проектировании и расчетах конструктивных параметров различных компонентов акустоэлектронных устройств [1]. При наличии достаточно широкого круга публикаций по вопросам нелинейных ангармонических эффектов применительно к объемным упругим волнам, анализ нелинейных возмущений при распространении нормальных волн в волноводах пространственного геометрического строения реализован далеко не в полной мере. Так, для упругих анизотропных волноводов в виде монокристаллического слоя кубической системы анализ различных задач описания нелинейных вторых гармоник проведен в работах [2, 3]. В ряде работ в различных вариантах анализировалась проблема распространения нелинейных упругих волн в волноводах цилиндрической формы [4–8]. В пространственной постановке вопросы о нелинейных ангармонических эффектах при распространении волн вдоль изотропного упругого цилиндра рассматривались в работах [5, 6]. Эффекты нелинейного ангармонического взаимодействия двух одновременно распространяющихся осесимметричных нормальных продольно-сдвиговых волн с различными частотами и относительными длинами исследованы в [7]. Вопрос о нелинейном ангармоническом взаимодействии осесимметричной продольно-сдвиговой волны и волны кручения в закрепленном цилиндре в рамках пространственной модели на основе представления упругого потенциала Мурнагана и теории конечных деформаций, ранее не рассматривался. Качественному и количественному анализу данных эффектов и посвящена данная статья.

**Постановка и основные соотношения задачи.** Рассматривается протяженный изотропный упругий цилиндр с жестко закрепленной боковой поверхностью, который отнесен к системе нормированных цилиндрических координат и занимает область

$$V = \{0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\infty < z < \infty\}$$

В цилиндре, по предположению, одновременно распространяются две осесимметричные нормальные упругие волны с различными частотами и относительными длинами, первая из которых принадлежит спектру линейных осесимметричных нормальных продольно-сдвиговых волн (волн Похгаммера-Кри) в закрепленном по боковой поверхности изотропном цилиндре [9], а вторая – спектру линейных осесимметричных нормальных волн кручения в рассматриваемом цилиндре. Характеристиками поля указанных волн являются компоненты комплексного вектора динамических упругих перемещений  $u_\alpha(r, \theta, z, t)$  ( $\alpha = r, \theta, z$ ). Исследованию подлежат нелинейные ангармонические эффекты, заключающиеся в генерировании вторых гармоник для суммарного поля указанных линейных волн.

Используемая в работе модель нелинейного динамического деформирования изотропных упругих сред с учетом эффектов геометрической и физической нелинейности основывается на тензорном представлении функции упругого потенциала  $U$  с квадратичными и кубическими членами по деформациям  $\epsilon_{ij}$ , а коэффициенты этого представления выражаются через компоненты тензоров упругих постоянных второго и третьего порядка.

В качестве представления  $U$  рассматривается упругий потенциал Мурнагана [8] в форме

$$U = \frac{\lambda + 2\mu}{2} E_1^2 - 2\mu E_2 + \frac{l + 2m}{3} E_1^3 - 2m E_1 F_2 + n E_3.$$

Здесь  $\lambda, \mu$  – параметры Ламе линейной модели деформирования материала цилиндра;  $l, m, n$  – упругие постоянные третьего порядка соответствующей модели нелинейного деформирования;  $E_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – главные инварианты тензора деформаций Грина, которые связаны формулами

$$E_1 = I_1, \quad E_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - I_2), \quad E_3 = \frac{1}{6}(I_1^3 - 3I_1I_2 + 2I_3)$$

с алгебраическими инвариантами

$$I_1 = E_{rr} + E_{\theta\theta} + E_{zz}, \quad I_2 = E_{\theta\theta}E_{zz} - E_{\theta z}E_{z\theta} + E_{zz}E_{rr} - E_{rz}E_{zr} + E_{rr}E_{\theta\theta} - E_{r\theta}E_{\theta r}, \\ I_3 = E_{rr}E_{\theta\theta}E_{zz} - E_{rz}E_{\theta\theta}E_{zr}.$$

Для изотропного материала рассматриваемого цилиндрического волновода представления нормированных отнесенных к  $\mu$  компонент второго тензора напряжений Пиола-Кирхгофа на основных площадках цилиндрической системы координат имеют вид

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(l)} + \sigma_{ij}^{(n)}, \\ \sigma_{ij}^{(l)} = \frac{2\sigma}{1-2\sigma} I \delta_{ij} + 2\varepsilon_{ij}, \\ \sigma_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu} [lI_1^2 - (2m-n)I_2] \delta_{ij} + \frac{1}{\mu} (m-n)I_1 \varepsilon_{ij} + \frac{n}{\mu} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{kj} \quad (i, j = r, \theta, z).$$

Представления для компонент тензора напряжений Лагранжа (первого тензора напряжений Пиола-Кирхгофа) на основных площадках цилиндрической системы координат следуют из соотношения

$$\begin{bmatrix} S_{rr} & S_{r\theta} & S_{rz} \\ S_{\theta r} & S_{\theta\theta} & S_{\theta z} \\ S_{zr} & S_{z\theta} & S_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & 1 + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & 1 + \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

и, соответственно, могут быть представлены в форме

$$S_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}^{(l)} + S_{\alpha\beta}^{(n)} \quad (\alpha, \beta = r, \theta, z).$$

Краевые условия жесткого закрепления боковой поверхности волновода имеют вид

$$(u_r)_{r=R} = (u_\theta)_{r=R} = (u_z)_{r=R} = 0.$$

**Решение рассматриваемой задачи.** В работе используется методика [2-8], основанная на представлении компонент вектора упругих волновых перемещений  $u_j$  в виде суммы линейных составляющих  $u_j^{(l)}$  и соответствующих нелинейных ангармонических возмущений (вторых гармоник)  $u_j^{(n)}$ :

$$u_j = u_j^{(l)} + u_j^{(n)}, \quad |u_j^{(n)}| \sim \delta |u_j^{(l)}|,$$

где малый параметр  $\delta$  характеризует отношение амплитуды рассматриваемой упругой волны к ее длине. Характеристики  $u_j^{(l)}$  определяются из линейных краевых задач о спектре нормальных волн, а функции волновых перемещений  $u_j^{(n)}$  во вторых гармониках являются решениями неоднородных краевых задач, правые части которых выражаются через характеристики  $u_j^{(l)}$ . При этом [2 – 8] в случае, когда линейное волновое поле представлено суммой двух нормальных волн с различными частотами и относительными длинами, соответствующие ангармонические возмущения  $u_j^{(n)}$  являются суммами трех слагаемых – вторых гармоник для каждой из входящих в сумму линейных нормальных волн и возникающей вследствие нелинейного ангармонического взаимодействия второй гармоники “комбинационного типа” в виде волны с частотой, равной сумме частот линейных волн.

В рассматриваемой задаче о вторых гармониках осесимметричных волн в суммарном поле двух волн – волны продольно-сдвигового и волны крутильного типа в рассматриваемом цилиндре, поле линейных волновых перемещений в продольно-сдвиговой осесимметричной нормальной волне имеет

представление  $u_r^{(l)} = u_r^{(0,l)}(r)e^{-i(\omega t - k_1 z)}$ ,  $u_z^{(l)} = u_z^{(0,l)}(r)e^{-i(\omega t - k_1 z)}$ , а поле осесимметричных линейных нормальных волн кручения – представление  $u_\theta^{(l)}(r, z, t) = u_\theta^{(0,l)} e^{-i(\omega t - k_2 z)}$ . Решения линейных волновых уравнений относительно комплексных амплитудных функций  $u_\theta^{(0,l)}$  и  $u_r^{(0,l)}$ ,  $u_z^{(0,l)}$ , которые описывают первые гармоники нормальных осесимметричных волн кручения и нормальных продольно-сдвиговых волн в цилиндре, могут быть представлены в виде

$$u_\theta^{(0,l)} = A J_1(\beta r);$$

$$u_r = -A_1 \alpha J_1(\alpha R) + A_2 ik \alpha \beta J_1(\beta R) = 0, \quad u_z = A_1 ik J_0(\alpha R) - A_2 \beta J_0(\beta R) = 0, \quad (1)$$

Здесь  $A, A_1, A_2$  – произвольные амплитудные множители;  $J_n$  – цилиндрические функции Бесселя индекса  $n$ . Дисперсионные уравнения, которые описывают полные спектры линейных осесимметричных волн кручения и осесимметричных продольно-сдвиговых волн в закрепленном цилиндре соответственно имеют вид

$$\omega = \left( \left( \xi_p^2 / R^2 + k^2 \right) v_s^2 \right)^{1/2},$$

$$k^2 J_0(\beta R) J_1(\alpha R) + \alpha \beta J_0(\alpha R) J_1(\beta R) = 0, \quad \beta = (-k^2 + \Omega^2 / \zeta)^{1/2}, \quad \alpha = (-k^2 + \Omega^2)^{1/2},$$

где  $\xi_p$  ( $p = \overline{1, \infty}$ ) – корни уравнения  $J_1(\xi) = 0$ .

Проведенными в данной работе исследованиями в результате подстановки представлений (1) в правые части краевой задачи относительно вторых гармоник установлено, что соответствующие гармоники комбинационного типа являются осесимметричными волнами кручения с характеристиками, определяемыми из неоднородной граничной задачи

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial^2 u_\theta^{(n)}}{\partial t^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r S_{\theta r}^{(l)}(u_\theta^{(n)})) - \frac{\partial S_{\theta z}^{(l)}(u_\theta^{(n)})}{\partial z} - \frac{S_{\theta r}^{(l)}(u_\theta^{(n)})}{r} = \\ & = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r S_{\theta r}^{(n)}(u_r^{(l)}, u_z^{(l)}, u_\theta^{(l)})) + \frac{\partial S_{\theta z}^{(n)}(u_r^{(l)}, u_z^{(l)}, u_\theta^{(l)})}{\partial z} + \frac{S_{\theta r}^{(n)}(u_r^{(l)}, u_z^{(l)}, u_\theta^{(l)})}{r}, \quad (2) \\ & (u_\theta^{(n)})_{r=R} = 0. \end{aligned}$$

Решение неоднородной граничной задачи (11) получено в виде:

$$u_\theta^{(0,n)} = B J_1(2\beta r) + F_1(r), \quad F_1(r) = \sum_{p=1}^{\infty} a_p r^p,$$

где  $F_1(r)$  является частным решением входящего в (2) неоднородного волнового уравнения. Коэффициенты  $a_p$  в представлении  $F_1(r)$  рассчитываются на основе рекуррентных соотношений:

$$a_1 = \frac{\alpha_1}{\Delta_{13}^{(n)}}, \quad a_2 = \frac{\alpha_2 - b_1 \Delta_{14}^{(n)}}{\Delta_{12}^{(n)} + 2\Delta_{13}^{(n)} + 2\Delta_{15}^{(n)}}, \quad a_{p+2} = \frac{\alpha_{p+2} - \Delta_{11}^{(n)} a_p}{\Delta_{12}^{(n)} + \Delta_{13}^{(n)}(p+2) + \Delta_{14}^{(n)}(p+2)(p+1)} \quad (p = \overline{1, \infty}).$$

Удовлетворяя граничному условию краевой задачи (2), находим  $B = -F_1(R) / J_1(2\beta R)$  и окончательно получаем представление для комплексной амплитудной функции второй гармоники комбинационного типа.

**Результаты численных исследований.** В ходе численных исследований проведен анализ распределений по радиальной координате для безразмерных нормированных амплитуд волновых смещений в комбинационных вторых гармониках, генерируемых при одновременном распространении осесимметричной волны кручения 1 из первой моды и осесимметричных волн продольно-сдвигового типа 2, 3 из второй моды соответствующего дисперсионного спектра, имеющих одинаковые амплитудные множители  $u^{(0)}$ . Расчеты ангармонических эффектов были проведены для волновода из дюралюминия со следующими физико-механическими параметрами:  $\rho = 2,79 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ;  $\sigma = 0,31$ ;  $\mu = 2,6 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ ;  $\lambda = 2\sigma\mu / (1 - 2\sigma) = 4,2 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ ;  $l = -26,46 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ ;  $m = 38,22 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ ;  $n = 36,26 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ .

Фрагменты дисперсионных спектров, на которых точками отмечены взаимодействующие осесимметричные крутильная и продольно-сдвиговая волны, представлены на рис. 1, 2 соответственно.

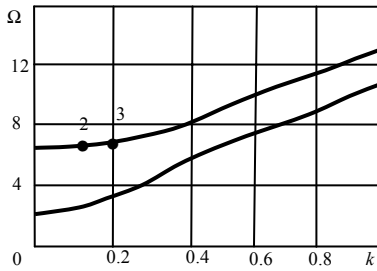


Рис. 1

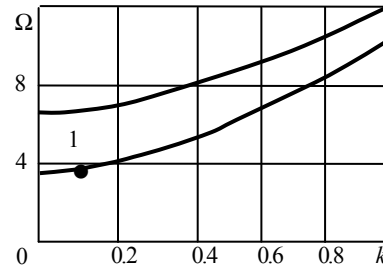


Рис. 2

Результаты расчетов, приведенных на рис. 3, 4, позволяют дать оценку уровней амплитуд в различных вторых гармониках монохроматического и комбинационного типа при взаимодействии крутильной волны 1 и продольно-сдвиговой волны

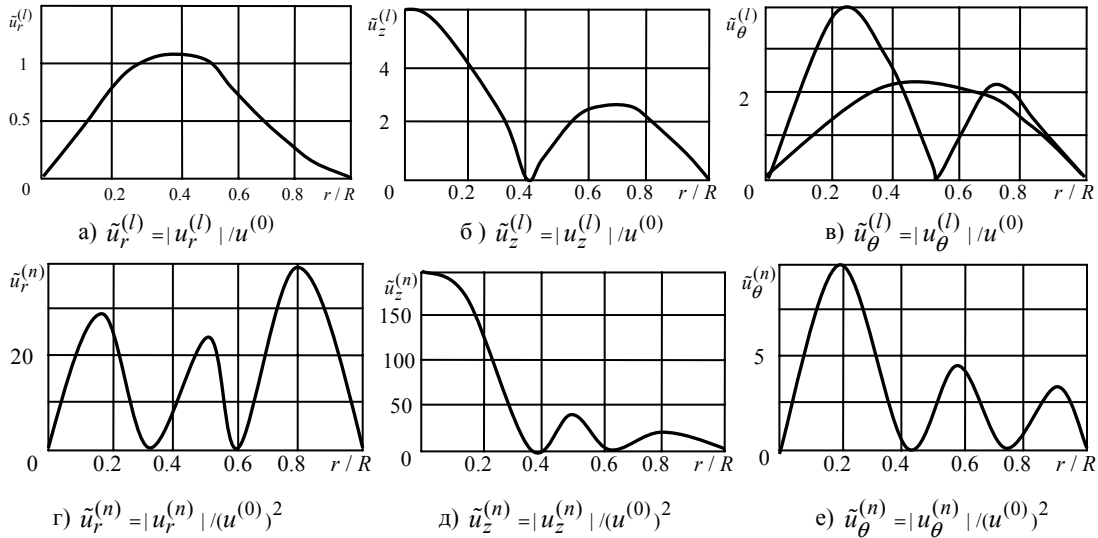


Рис.3. Радиальные распределения относительных амплитуд в линейных нормальных волнах 1 и 2, второй гармонике волны 2 и комбинационной второй гармонике.

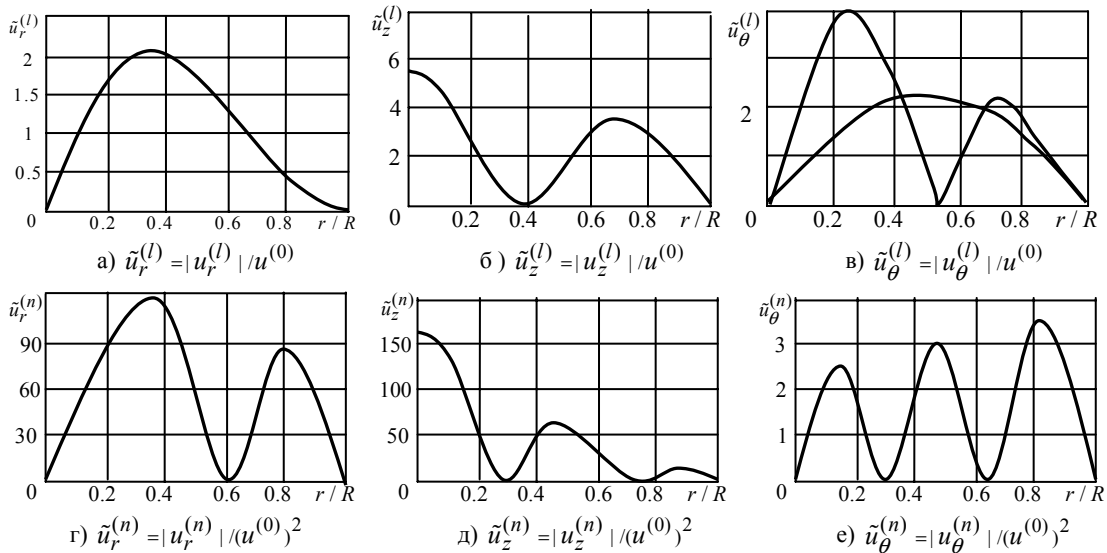


Рис.4. Радиальные распределения относительных амплитуд в линейных нормальных волнах 1 и 3, второй гармонике волны 3 и комбинационной второй гармонике.

Приведенные результаты анализа кинематических характеристик линейных волн и их нелинейных вторых гармоник показывают, что в рассмотренных случаях мера нелинейного взаимодействия крутильной и продольно-сдвиговой нормальной волны является относительно невысокой. Так, максимум амплитуд нормированных волновых перемещений  $\tilde{u}_\theta^{(n)}$  во второй гармонике комбинационного типа составляет порядка 4,76 % от максимума амплитуд нормированных перемещений во второй гармонике монохроматиче-

ского типа для волны 2 и 2,15 % от максимума амплитуд нормированных перемещений во второй гармонике монохроматического типа для волны 3. Вместе с тем, характер радиальных распределений интенсивности амплитуд  $\tilde{u}_\theta^{(n)}$  в рассматриваемых случаях отличается. Если для случая одновременного распространения волн 1 и 2 указанная интенсивность затухает при удалении от центра волновода к границе (рис. 3,е), то при синхронном распространении волн 1 и 3 тенденция в изменениях максимумов амплитуд нормированных волновых перемещений вдоль радиальной координаты качественно изменяется на нарастающую при увеличении радиальной координаты (рис. 4,е). Сопоставление рис. 3,е с рис. 3,а, 3,б, 3,в, а также рис.4,е с рис. 4,а, 4,б, 4,в позволяет констатировать уменьшение величины максимума нормированных волновых перемещений в комбинационной второй гармонике по отношению к максимуму нормированных волновых перемещений в линейных волнах в случаях одновременного распространения волн 1 и 2 в сравнении со случаем одновременного распространения волн 1 и 3.

**Заключение.** В результате проведенных исследований предложена методика теоретического анализа степени нелинейного ангармонического взаимодействия пары осесимметричных нормальных волн продольно-сдвигового и крутильного типа, синхронно распространяющихся вдоль изотропного упругого цилиндра с жестко закрепленной боковой поверхностью. Дана количественная оценка для уровней и характера радиальных распределений функции нормированных амплитуд волновых перемещений в нелинейных вторых гармониках комбинационного типа, генерируемых в следствие нелинейного взаимодействия линейных нормальных волн.

## РЕЗЮМЕ

Стаття присвячена теоретичному чисельно-аналітичному дослідженню нелінійних других гармонік, що генеруються при одночасному поширенні осесиметричних нормальних пружних хвиль поздовжньо-зсувного типу і хвиль крутіння вздовж вісьового напрямку в ізотропному циліндрі кругового перерізу із закріпленою бічною поверхнею. Для циліндра з дюралюмінію проведено аналіз форм хвильових рухів в нелінійній хвилі, що генерується в результаті взаємодії нормальних хвиль цього типу з варійованими відносними довжинами.

*Ключові слова:* циліндричний хвилевід, фізична та геометрична нелінійність, нормальні поздовжньо-зсувні і крутильні хвилі, нелінійні ангармонічних збурення, нелінійна взаємодія.

## SUMMARY

This article is devoted to theoretical numerical and analytical study of nonlinear second harmonics generated at the same time spreading of axisymmetric normal longitudinal elastic waves and the torsional shear type along the axial direction in an isotropic cylinder of circular cross section with a fixed lateral surface. The forms of wave motion in nonlinear wave generated by the interaction of normal waves of this type of waves with variable relative lengths were analyzed for a cylinder made of duralumin.

*Keywords:* cylindrical waveguide, the physical and geometric nonlinearity, the normal longitudinal- shear and torsional waves, nonlinear anharmonic perturbation, the nonlinear interaction.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Речицкий В.И. Акустоэлектронные радиокомпоненты: схемы, типология, конструкции / В.И. Речицкий. – М.: Радио и связь, 1987. – 192 с.
2. Куренная К. И. Ангармонические эффекты при распространении нелинейных нормальных P-SV волн в анизотропном упругом слое / К. И. Куренная, В. И. Сторожев // Теорет. и прикл. механика. – 2002. – Вып. 36. – С. 116-124.
3. Kurennaia K. I., Analyses of nonlinear ultraacoustic wave properties in germanium monocrystal layer / K. I. Kurennaia, V. I. Storozhev // Journal of Computational and Applied Mechanics. – 2005. – Vol. 6, No 1. – P. 67-82.
4. Kurennaia K. I. Nonlinear acoustic effects while spreading of the normal waves in anisotropic elastic layer / K. I. Kurennaia, V. I. Storozhev // Proceedings of the Tenth International Congress on Sound and Vibration (Stockholm, Sweden, 7-10 July 2003). – Stockholm, IIAV, 2003. – P. 3605-3612.
5. Sugimoto N. Nonlinear mode coupling of elastic waves / N. Sugimoto, M. Hirao // J. Acoust. Sos. Am. – 1977. – Vol. 62, No 1. – P. 23-32.
6. Sugimoto N. Numerical investigation of nonlinear mode coupling of elastic waves / N. Sugimoto // J. Acoust. Sos. Am. – 1978. – Vol. 64, No 4. – P. 1190-1195.
7. Елагин А.В. Нелинейное ангармоническое взаимодействие двух осесимметричных продольно-сдвиговых волн в закрепленном цилиндре / А.В. Елагин, В.И. Сторожев // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2011. – Вип. 16. – С. 266 -272.
8. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях / А.Н. Гузь. – К.: Наук. думка, 1973. – 271 с.
9. Комиссарова Г. Л. Дисперсия осесимметричных нормальных волн в упругом жесткозакрепленном цилиндре / Г. Л. Комиссарова // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – № 9. – С. 39-43.

*Поступила в редакцию 23.09.2011 г.*