

УДК 539.3:534.1

**НЕЛИНЕЙНОЕ АНГАРМОНИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ЛЯВА В АНИЗОТРОПНОМ СЛОЕ НА АНИЗОТРОПНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ**

*Н. В. Жоголева, В. И. Сторожев*

*Институт прикладной математики и механики НАН Украины, г. Донецк*

Получено численно-аналитическое решение задачи о нелинейном ангармоническом взаимодействии двух обобщенных поверхностных волн Лява в кристаллическом слое класса  $m\bar{3}m$  кубической системы на упругой кристаллической подложке этого же класса анизотропии. Проведены численно-аналитические исследования характеристик взаимодействия для пары волн с двух низших вервей дисперсионного спектра волн Лява в слое из монокристалла германия на полупространстве из монокристалла кремния.

*Ключевые слова:* слой монокристалла германия на кремниевой подложке, обобщенные поверхностные волны Лява, нелинейное взаимодействие, малые нелинейные ангармонические возмущения, численно-аналитическое определение вторых гармоник, расчеты амплитудно-частотных характеристик.

**Введение.** Задача исследования нелинейных ангармонических эффектов при распространении поверхностных упругих волн в течении длительного времени представляет фундаментальный и прикладной интерес как одна из актуальных проблем динамики деформируемого твердого тела. По достаточно широкому кругу аспектов она изучалась в работах [1 – 5]. Вместе с тем, при исследовании нелинейных ангармонических возмущений в монохроматических поверхностных сдвиговых волнах Лява учет фактора анизотропии упругого слоя и идеально контактирующего с ним упругого полупространства стал предметом анализа лишь в последние годы [6 – 7]. Вопрос же об исследовании эффектов нелинейного ангармонического взаимодействия для двух одновременно распространяющихся обобщенных поверхностных волн Лява в анизотропном слое на анизотропном полупространстве является открытой задачей и рассматривается в данной статье.

Используемый в работе подход ранее применялся при анализе нелинейных ангармонических возмущений для монохроматических обобщенных волн Лява в анизотропном слое на анизотропном полупространстве [6 – 9], а также при анализе нелинейных ангармонических возмущений для сдвиговых волн, локализованных в анизотропном слое между кристаллическими полупространствами [10].

**Постановка задачи.** Рассматривается составная волноводная структура, образуемая анизотропным кристаллическим слоем толщины  $\tilde{h}$  из материала класса  $m\bar{3}m$  кубической системы и идеально контактирующим с ним кристаллическим полупространством. В системе нормированных прямоугольных координат  $Ox_1x_2x_3$  слой занимает область  $V_1 = \{-\infty < x_1, x_2 < \infty, -h \leq x_3 \leq 0\}$ , а полупространство-подложка область  $V_2 = \{-\infty < x_1, x_2 < \infty, 0 < x_3 < \infty\}$ . Анизотропный материал полупространства относится к тому же классу, что и материал слоя. Упруго-эквивалентные направления этих материалов являются коллинеарными и ориентированы вдоль координатных осей  $Ox_j$ . Физико-механические свойства компоненты  $V_p$  волновода характеризуются упругими постоянными второго порядка  $\tilde{c}_{ij}^{(p)}$ , третьего порядка  $\tilde{c}_{ijk}^{(p)}$ , а также плотностью  $\tilde{\rho}_p$  ( $i, j, k = \overline{1,6}; p = \overline{1,2}$ ). Характеристиками динамического напряженно-деформированного состояния в составляющих  $V_p$  кусочно-однородного полупространства являются компоненты вектора динамических волновых перемещений  $\tilde{u}_j^{(p)}$  и тензора динамических напряжений  $\tilde{\sigma}_{ij}^{(p)}$ . В качестве нормирующего параметра для координатных переменных  $\tilde{x}_j$  взята величина  $R_*$ , а компоненты вектора волновых упругих перемещений  $\tilde{u}_j^{(p)}$  при переходе к безразмерным нормированным характеристикам  $u_j^{(p)}$  отнесены к амплитудному параметру  $u_* = \max_{\{x_1, x_2, x_3, t, j, p\}} \tilde{u}_j^{(p)}(x_1, x_2, x_3, t)$ . В свою очередь, механические напряжения и упругие постоянные в составляющих  $V_p$  отнесены к нормирующему параметру  $c_*$ . Таким образом,  $x_j = \tilde{x}_j R_*^{-1}$ ,  $u_j = \tilde{u}_j u_*^{-1}$ ,  $c_{ij}^{(p)} = \tilde{c}_{ij}^{(p)} / c_*$ ,  $c_{ijk}^{(p)} = \tilde{c}_{ijk}^{(p)} / c_*$ , а величина  $\delta = u_* / R_*$  для упругих волн малой интенсивности при выборе  $R_* = \tilde{h}$  является малым пара-

метром. На границе  $x_3 = -h$  составного волновода и в плоскости  $x_3 = 0$  идеального контакта слоя  $V_1$  с полупространством  $V_2$  задаются граничные условия

$$(\sigma_{32}^{(1)})_{x_3=-h} = 0, (\sigma_{32}^{(1)})_{x_3=0} = (\sigma_{32}^{(2)})_{x_3=0}, (u_2^{(1)})_{x_3=0} = (u_2^{(2)})_{x_3=0}, \quad (1)$$

а также условие локализации волновых движений  $(u_2^{(2)})_{x_3 \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ .

При анализе нелинейных ангармонических эффектов в случае одновременного распространения двух сдвиговых поверхностных упругих волн Лява вдоль координатного направления  $Ox_1$  используется модель физически и геометрически нелинейного динамического деформирования упругого монокристаллического материала класса  $m3m$  кубической системы, базирующаяся на задании упругого потенциала  $\tilde{U}^{(p)}$  для компонентов волновода  $V_p$  в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{U}^{(p)} = & \left\{ \frac{1}{2} c_{11}^{(p)} \sum_{k=1}^3 u_{k,k}^2 + \frac{1}{2} c_{44}^{(p)} \sum_{k,l=1, k \neq l}^3 u_{k,l}^2 + c_{44}^{(p)} \sum_{k,l=1, k < l}^3 u_{k,l} u_{l,k} + c_{12}^{(p)} \sum_{k,l=1, k < l}^3 u_{k,k} u_{l,l} \right\} \delta^2 + \\ & + \left[ \frac{1}{6} \Delta_1^{(p)} \sum_{k=1}^3 u_{k,k}^3 + \sum_{k,l,m=1, k \neq l, m, l \neq m}^3 u_{k,l} u_{k,m} u_{m,l} + \frac{1}{2} \Delta_2^{(p)} \sum_{k,l=1, k \neq l}^3 u_{k,k} u_{k,l}^2 + \frac{1}{2} \Delta_3^{(p)} \sum_{k,l=1, k \neq l}^3 u_{k,k} u_{l,k}^2 + \right. \\ & + \frac{1}{2} \Delta_5^{(p)} \sum_{k,l=1, k \neq l}^3 u_{k,k} u_{l,l}^2 + \frac{1}{2} \Delta_7^{(p)} \sum_{k,l,m=1, k \neq l, m, l \neq m}^3 u_{k,k} u_{l,m}^2 + c_{144}^{(p)} \sum_{k,l,m=1, k \neq l, m, l < m}^3 u_{k,k} u_{l,m} u_{m,l} + \\ & \left. + \Delta_4^{(p)} \sum_{k,l=1, k < l}^3 u_{k,k} u_{k,l} u_{l,k} + \Delta_6^{(p)} \sum_{k,l,m=1, k \neq l, m, l < m}^3 u_{k,l} u_{k,m} (u_{l,m} + u_{m,l}) + c_{456}^{(p)} \sum_{l,m=2, l \neq m}^3 u_{1,l} u_{l,m} u_{m,1} \right\} \delta^3 \} c^*, \end{aligned} \quad (2)$$

а также на представлениях конечных деформаций, имеющих в тензорной форме записи вид

$$\varepsilon_{jk} = 1/2([u_{j,k} + u_{k,j}] \delta + [u_{l,j} u_{l,k}] \delta^2). \quad (3)$$

В выражениях (2), (3), записываемых для составляющей  $V_p$ , полагается

$$\begin{aligned} u_j = u_j^{(p)}; \quad \Delta_1^{(p)} = 3c_{11}^{(p)} + c_{111}^{(p)}; \quad \Delta_2^{(p)} = c_{12}^{(p)} + 2c_{44}^{(p)} + c_{155}^{(p)}; \quad \Delta_3^{(p)} = c_{11}^{(p)} + c_{155}^{(p)}; \quad \Delta_4^{(p)} = c_{44}^{(p)} + c_{155}^{(p)}; \\ \Delta_5^{(p)} = c_{12}^{(p)} + c_{112}^{(p)}; \quad \Delta_6^{(p)} = c_{44}^{(p)} + c_{456}^{(p)}; \quad \Delta_7^{(p)} = c_{12}^{(p)} + c_{144}^{(p)}; \quad u_{j,k} = \partial u_j / \partial x_k. \end{aligned}$$

Нормированные комплексные характеристики для элементов тензора напряжений при выборе  $\tilde{U}^{(p)}$  в виде (2) имеют вид

$$\sigma_{ij}^{(p)} = \partial \tilde{U}^{(p)} / \partial u_{i,j}^{(p)} = [\sigma_{ij}^{(p,l)}] \delta + [\sigma_{ij}^{(p,n)}] \delta^2, \quad (4)$$

где

$$\sigma_{jj}^{(p,l)} = c_{11}^{(p)} u_{j,j}^{(p)} + c_{12}^{(p)} (u_{l,l}^{(p)} + u_{k,k}^{(p)}) \quad (j = \overline{1,3}), \quad \sigma_{rj}^{(p,l)} = c_{44}^{(p)} (u_{r,j}^{(p)} + u_{j,r}^{(p)}) \quad (r, j = \overline{1,3}, \quad r \neq j); \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{jj}^{(p,n)} = & \frac{1}{2} \Delta_1^{(p)} (u_{j,j}^{(p)})^2 + \frac{1}{2} \Delta_2^{(p)} \left( (u_{j,l}^{(p)})^2 + (u_{j,k}^{(p)})^2 \right) + \frac{1}{2} \Delta_3^{(p)} \left( (u_{l,j}^{(p)})^2 + (u_{k,j}^{(p)})^2 \right) + \\ & + \Delta_4^{(p)} (u_{j,l}^{(p)} u_{l,j}^{(p)} + u_{j,k}^{(p)} u_{k,j}^{(p)}) + \frac{1}{2} \Delta_5^{(p)} \left( 2u_{j,j}^{(p)} u_{l,l}^{(p)} + u_{j,j}^{(p)} u_{k,k}^{(p)} + (u_{l,l}^{(p)})^2 + (u_{k,k}^{(p)})^2 \right) + \\ & + \frac{1}{2} \Delta_7^{(p)} \left( (u_{l,k}^{(p)})^2 + (u_{k,l}^{(p)})^2 \right) + c_{144}^{(p)} u_{l,k}^{(p)} u_{k,l}^{(p)} + c_{123}^{(p)} u_{l,l}^{(p)} u_{k,k}^{(p)} \quad (j = \overline{1,3}), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rj}^{(p,n)} = & \Delta_2^{(p)} u_{r,r}^{(p)} u_{r,j}^{(p)} + \Delta_3^{(p)} u_{j,j}^{(p)} u_{r,j}^{(p)} + \Delta_4^{(p)} \left( u_{r,r}^{(p)} u_{j,r}^{(p)} + u_{j,j}^{(p)} u_{r,r}^{(p)} \right) + \Delta_6^{(p)} (u_{r,m}^{(p)} u_{m,j}^{(p)} + u_{m,r}^{(p)} u_{m,j}^{(p)} + \\ & + u_{r,m}^{(p)} u_{j,m}^{(p)}) + \Delta_7^{(p)} u_{r,j}^{(p)} u_{m,m}^{(p)} + c_{144}^{(p)} u_{r,j}^{(p)} u_{m,m}^{(p)} + c_{456}^{(p)} u_{j,m} u_{m,r} \quad (r, j = \overline{1,3}, \quad r \neq j); \end{aligned}$$

$$l = \begin{cases} 1, & j = 2, 3; \\ 2, & j = 1; \end{cases} \quad k = \begin{cases} 2, & j = 3; \\ 3, & j = 1, 2; \end{cases} \quad m = \begin{cases} 1, & (r, j) = (2, 3), (3, 2); \\ 2, & (r, j) = (1, 3), (3, 1); \\ 3, & (r, j) = (1, 2), (2, 1). \end{cases}$$

**Численно-аналитическое решение задачи.** Используемый в работе подход основывается на концепции определения характеристик нелинейного волнового поля как первых двух членов в представлениях вектор-функций напряженности волны в компоненте  $V_p$  рядом по степеням малого параметра  $\delta$ :

$$u_j^{(p)} = u_j^{(p,l)} + \delta u_j^{(p,n)} \quad (j = \overline{1,3}), \quad (7)$$

где в рассматриваемом случае

$$u_2^{(p,l)} = u_2^{(p,l,1)} + u_2^{(p,l,2)}, \quad u_1^{(p,l)} \equiv u_3^{(p,l)} \equiv 0.$$

При подстановке представления (7) в уравнения движения

$$\sigma_{ij,j}^{(p)} - \delta(\rho_p R_*^2 / c_*) \ddot{u}_i^{(p)} = 0$$

и краевые условия (1), а также при последующем выделении членов одного порядка малости по параметру  $\delta$ , возникает двухэтапная задача определения составляющих в представлении (7).

На первом этапе строится решение задач о распространении двух линейных волн Лява различной частоты, то есть рассматриваются однородные спектральные задачи для нормированных комплексных функций напряженности  $u_2^{(p,l,m)}$  ( $m = 1, 2$ ) двух линейных волн Лява в рассматриваемой структуре:

$$\sigma_{2j,j}^{(p,l,m)} - (\rho_p R_*^2 / c_*) \ddot{u}_2^{(p,l,m)} = 0, \quad (8)$$

$$(\sigma_{32}^{(1,l,m)})_{x_3=-h} = 0, \quad (\sigma_{32}^{(1,l,m)})_{x_3=0} = (\sigma_{32}^{(2,l,m)})_{x_3=0}, \quad (u_2^{(1,l,m)})_{x_3=0} = (u_2^{(2,l,m)})_{x_3=0} \quad (9)$$

$$(p = 1, 2; m = 1, 2).$$

На втором этапе при определении характеристик нелинейных вторых гармоник строится решение неоднородной краевой задачи с правой частью, выражаемой через сумму характеристик линейных волн, то есть неоднородной краевой задачи определения компонент  $u_j^{(p,n)}$  нормированной вектор-функции напряженности для соответствующих нелинейных ангармонических возмущений (вторых гармоник для суммы волн Лява):

$$(\sigma_{ij,j}^{(p,l)})_{u_j^{(p)}=u_j^{(p,n)}} - (\rho_p R_*^2 / c_*) \ddot{u}_i^{(p,n)} = -(\sigma_{ij,j}^{(p,n)})_{u_j^{(p)}=u_j^{(p,l,1)}+u_j^{(p,l,2)}}; \quad (10)$$

$$\left[ (\sigma_{3i}^{(1,l)})_{u_j^{(1)}=u_j^{(1,n)}} + (\sigma_{3i}^{(1,n)})_{u_j^{(1)}=u_j^{(1,l,1)}+u_j^{(1,l,2)}} \right]_{x_3=-h} = 0,$$

$$\left[ (\sigma_{3i}^{(1,l)})_{u_j^{(1)}=u_j^{(1,n)}} + (\sigma_{3i}^{(1,n)})_{u_j^{(1)}=u_j^{(1,l,1)}+u_j^{(1,l,2)}} \right]_{x_3=0} = \left[ (\sigma_{3i}^{(2,l)})_{u_j^{(2)}=u_j^{(2,n)}} + (\sigma_{3i}^{(2,n)})_{u_j^{(2)}=u_j^{(2,l,1)}+u_j^{(2,l,2)}} \right]_{x_3=0}, \quad (11)$$

$$\left[ u_j^{(2,n)} \right]_{x_3=0} = \left[ u_j^{(1,n)} \right]_{x_3=0} \quad (i, j = \overline{1,3}).$$

Из спектральных задач (8), (9) находятся представления для нормированных комплексных функций напряженности двух линейных волн Лява  $\bar{u}_2^{(p,l,m)}$  с безразмерными амплитудными параметрами  $u_{2m}^{(0)}$  и круговыми частотами  $\omega_m$  ( $\omega_1 \neq \omega_2$ ), принадлежащих одной или различным действительным модам дисперсионного спектра поверхностных волн Лява в рассматриваемой волноводной структуре:

$$u_{2m}^{(1,l)} = u_{2m}^{(0)} (\cos(\alpha_m^{(1)} x_3) + i c_{44}^{(2)} \alpha_m^{(2)} \sin(\alpha_m^{(1)} x_3) / (c_{44}^{(1)} \alpha_m^{(1)})) E_1, \quad x_3 \in [-h; 0]; \quad (12)$$

$$u_{2m}^{(2,l)} = u_{2m}^{(0)} e^{i \alpha_m^{(2)} x_3} E_1, \quad x_3 \in [0; \infty);$$

$$\alpha_m^{(p)} = ((-c_{44}^{(p)} k_m^2 + \Omega_{pm}^2) / c_{44}^{(p)})^{1/2}, \quad \Omega_{pm} = (\rho_p \omega_m^2 R_*^2 / c_*)^{1/2}, \quad E_1 = e^{-i(\omega_m t - k_m x_1)} \quad (m = \overline{1,2}). \quad (13)$$

Соответственно соотношения неоднородной граничной задачи для определения компонент нормированного комплексного вектора напряженности ангармонического возмущения для суммы двух волн Лява в составляющих  $V_p$  рассматриваемой кусочно-однородной волноводной структуры имеют вид:

$$(\rho_p R_*^2 / c_*) \ddot{u}_1^{(p,n)} - c_{11}^{(p)} u_{1,11}^{(p,n)} - c_{44}^{(p)} u_{1,33}^{(p,n)} - \Delta_8^{(p)} u_{3,31}^{(p,n)} = [\Delta_3^{(p)} u_{2,1}^{(p,l,1)} u_{2,11}^{(p,l,1)} +$$

$$\begin{aligned}
 & +\Delta_6^{(p)} u_{2,1}^{(p,l,1)} u_{2,33}^{(p,l,1)} + \left( \Delta_6^{(p)} + \Delta_7^{(p)} \right) u_{2,3}^{(p,l,1)} u_{2,31}^{(p,l,1)} + [\Delta_3^{(p)} u_{2,1}^{(p,l,2)} u_{2,11}^{(p,l,2)} + \\
 & +\Delta_6^{(p)} u_{2,1}^{(p,l,2)} u_{2,33}^{(p,l,2)} + \left( \Delta_6^{(p)} + \Delta_7^{(p)} \right) u_{2,3}^{(p,l,2)} u_{2,31}^{(p,l,2)}] + [\Delta_3^{(p)} (u_{2,1}^{(p,l,1)} u_{2,11}^{(p,l,2)} + u_{2,1}^{(p,l,2)} u_{2,11}^{(p,l,1)}) + \\
 & +\Delta_6^{(p)} (u_{2,33}^{(p,l,1)} u_{2,1}^{(p,l,2)} + u_{2,33}^{(p,l,2)} u_{2,1}^{(p,l,1)}) + \left( \Delta_6^{(p)} + \Delta_7^{(p)} \right) (u_{2,3}^{(p,l,1)} u_{2,13}^{(p,l,2)} + u_{2,3}^{(p,l,2)} u_{2,13}^{(p,l,1)})], \\
 & (\rho_p R_*^2 / c_*) \ddot{u}_2^{(p,n)} - c_{44}^{(p)} u_{2,11}^{(p,n)} - c_{44}^{(p)} u_{2,33}^{(p,n)} = 0, \\
 & (\rho_p R_*^2 / c_*) \ddot{u}_3^{(p,n)} - c_{11}^{(p)} u_{3,33}^{(p,n)} - c_{44}^{(p)} u_{3,11}^{(p,n)} - \Delta_8^{(p)} u_{1,13}^{(p,n)} = [\Delta_3^{(p)} u_{2,3}^{(p,l,1)} u_{2,33}^{(p,l,1)} + \\
 & +\Delta_6^{(p)} u_{2,3}^{(p,l,1)} u_{2,11}^{(p,l,1)} + \left( \Delta_6^{(p)} + \Delta_7^{(p)} \right) u_{2,1}^{(p,l,1)} u_{2,13}^{(p,l,1)}] + [\Delta_3^{(p)} u_{2,3}^{(p,l,2)} u_{2,33}^{(p,l,2)} + \Delta_6^{(p)} u_{2,3}^{(p,l,2)} u_{2,11}^{(p,l,2)} + \\
 & + \left( \Delta_6^{(p)} + \Delta_7^{(p)} \right) u_{2,1}^{(p,l,2)} u_{2,13}^{(p,l,2)}] + [\Delta_3^{(p)} (u_{2,3}^{(p,l,1)} u_{2,33}^{(p,l,2)} + u_{2,3}^{(p,l,2)} u_{2,33}^{(p,l,1)}) + \\
 & +\Delta_6^{(p)} (u_{2,3}^{(p,l,1)} u_{2,11}^{(p,l,2)} + u_{2,3}^{(p,l,2)} u_{2,11}^{(p,l,1)}) + \left( \Delta_6^{(p)} + \Delta_7^{(p)} \right) (u_{2,1}^{(p,l,1)} u_{2,13}^{(p,l,2)} + u_{2,1}^{(p,l,2)} u_{2,13}^{(p,l,1)})]; \\
 & c_{44}^{(1)} \left( u_{1,3}^{(1,n)} + u_{3,1}^{(1,n)} \right)_{x_3=-h} = -\Delta_6^{(1)} \left( \left( u_{2,1}^{(1,l,1)} u_{2,3}^{(1,l,1)} \right) + \left( u_{2,1}^{(1,l,2)} u_{2,3}^{(1,l,2)} \right) + \right. \\
 & \left. + \left( u_{2,1}^{(1,l,1)} u_{2,3}^{(1,l,2)} + u_{2,1}^{(1,l,2)} u_{2,3}^{(1,l,1)} \right) \right)_{x_3=-h}, \\
 & \left( c_{12}^{(1)} u_{1,1}^{(1,n)} + c_{11}^{(1)} u_{3,3}^{(1,n)} \right)_{x_3=-h} = -\left[ \left( \frac{1}{2} \Delta_7^{(1)} \left( u_{2,1}^{(1,l,1)} \right)^2 + \frac{1}{2} \Delta_3^{(1)} \left( u_{2,3}^{(1,l,1)} \right)^2 \right) + \right. \\
 & \left. + \left( \frac{1}{2} \Delta_7^{(1)} \left( u_{2,1}^{(1,l,2)} \right)^2 + \frac{1}{2} \Delta_3^{(1)} \left( u_{2,3}^{(1,l,2)} \right)^2 \right) + \left( \Delta_7^{(1)} u_{2,1}^{(1,l,1)} u_{2,1}^{(1,l,2)} + \Delta_3^{(1)} u_{2,3}^{(1,l,1)} u_{2,3}^{(1,l,2)} \right) \right]_{x_3=-h}, \\
 & c_{44}^{(1)} \left( u_{1,3}^{(1,n)} + u_{3,1}^{(1,n)} \right)_{x_3=0} - c_{44}^{(2)} \left( u_{1,3}^{(2,n)} + u_{3,1}^{(2,n)} \right)_{x_3=0} = \Delta_6^{(2)} \left[ \left( u_{2,1}^{(2,l,1)} u_{2,3}^{(2,l,1)} \right) + \right. \\
 & \left. + \left( u_{2,1}^{(2,l,2)} u_{2,3}^{(2,l,2)} \right) + \left( u_{2,1}^{(2,l,1)} u_{2,3}^{(2,l,2)} + u_{2,1}^{(2,l,2)} u_{2,3}^{(2,l,1)} \right) \right]_{x_3=0} - \Delta_6^{(1)} \left[ \left( u_{2,1}^{(1,l,1)} u_{2,3}^{(1,l,1)} \right) + \right. \\
 & \left. + \left( u_{2,1}^{(1,l,2)} u_{2,3}^{(1,l,2)} \right) + \left( u_{2,1}^{(1,l,1)} u_{2,3}^{(1,l,2)} + u_{2,1}^{(1,l,2)} u_{2,3}^{(1,l,1)} \right) \right]_{x_3=0}, \\
 & \left( c_{12}^{(1)} u_{1,1}^{(1,n)} + c_{11}^{(1)} u_{3,3}^{(1,n)} \right)_{x_3=0} - \left( c_{12}^{(2)} u_{1,1}^{(2,n)} + c_{11}^{(2)} u_{3,3}^{(2,n)} \right)_{x_3=0} = \left[ \left( \frac{1}{2} \Delta_7^{(2)} \left( u_{2,1}^{(2,l,1)} \right)^2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{2} \Delta_3^{(2)} \left( u_{2,3}^{(2,l,1)} \right)^2 \right) + \left( \frac{1}{2} \Delta_7^{(2)} \left( u_{2,1}^{(2,l,2)} \right)^2 + \frac{1}{2} \Delta_3^{(2)} \left( u_{2,3}^{(2,l,2)} \right)^2 \right) + \left( \Delta_7^{(2)} u_{2,1}^{(2,l,1)} u_{2,1}^{(2,l,2)} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \Delta_3^{(2)} u_{2,3}^{(2,l,1)} u_{2,3}^{(2,l,2)} \right) \right]_{x_3=0} - \left[ \left( \frac{1}{2} \Delta_7^{(1)} \left( u_{2,1}^{(1,l,1)} \right)^2 + \frac{1}{2} \Delta_3^{(1)} \left( u_{2,3}^{(1,l,1)} \right)^2 \right) + \left( \frac{1}{2} \Delta_7^{(1)} \left( u_{2,1}^{(1,l,2)} \right)^2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{2} \Delta_3^{(1)} \left( u_{2,3}^{(1,l,2)} \right)^2 \right) + \left( \Delta_7^{(1)} u_{2,1}^{(1,l,1)} u_{2,1}^{(1,l,2)} + \Delta_3^{(1)} u_{2,3}^{(1,l,1)} u_{2,3}^{(1,l,2)} \right) \right]_{x_3=0}, \\
 & \left( u_j^{(1,n)} \right)_{x_3=0} - \left( u_j^{(2,n)} \right)_{x_3=0} = 0 \quad (j = \overline{1,3}), \quad \Delta_8^{(p)} = c_{12}^{(p)} + c_{44}^{(p)}.
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Структура соотношений (14), (15) показывает, что вторыми гармониками для поля, образуемого суммой двух поверхностных линейных волн Лява, являются упругие волны P-SV типа. Решение неоднородной задачи (14), (15), определяющее вид ангармонического возмущения для суммы двух линейных поверхностных SH-волн с разными частотами и длинами, в данном случае включает составляющие, отвечающие вторым гармоникам с частотами  $2\omega_m$  ( $m = \overline{1,2}$ ) для каждой из одновременно распространяющихся волн Лява круговой частоты  $\omega_m$ , рассматриваемых как отдельно взятые монохроматические волны, и составляющую "комбинационного" типа в виде волны с частотой  $\omega_1 + \omega_2$ .

Компоненты  $u_j^{(p,n,m)}$  ( $m = 1, 2; j = \overline{1,3}$ ) комплексного вектора напряженности вторых гармоник монохроматических волн с частотами  $2\omega_m$  ( $m = \overline{1,2}$ ) определяются из соотношений краевой задачи (14), (15) в аналитической форме методами компьютерной алгебры. При условии, что вторая гармоника в

виде упругой волны P-SV типа с частотой  $2\omega_m$  и волновым числом  $2k_m$  не принадлежит дисперсионному спектру обобщенных поверхностных волн релеевского типа в рассматриваемом волноводе, представления для  $u_j^{(p,n,m)}$  имеют структуру:

$$\begin{aligned} u_{1m}^{(1,n)} &= (\lambda_{11m} \cos(\zeta_{1m}^{(1)} x_3) + \lambda_{12m} \cos(\zeta_{2m}^{(1)} x_3) + \mu_{11m} \sin(\zeta_{1m}^{(1)} x_3) + \mu_{12m} \sin(\zeta_{2m}^{(1)} x_3) + \\ &\quad + A_{11m1} + A_{11m2} \cos(2\alpha_m^{(1)} x_3) + A_{11m3} \sin(2\alpha_m^{(1)} x_3)) E_2; \\ u_{3m}^{(1,n)} &= (\lambda_{31m} \sin(\zeta_{1m}^{(1)} x_3) + \lambda_{32m} \sin(\zeta_{2m}^{(1)} x_3) + \mu_{31m} \cos(\zeta_{1m}^{(1)} x_3) + \mu_{32m} \cos(\zeta_{2m}^{(1)} x_3) + \\ &\quad + A_{31m1} + A_{31m2} \sin(2\alpha_m^{(1)} x_3) + A_{31m3} \cos(2\alpha_m^{(1)} x_3)) E_2; \\ u_{1m}^{(2,n)} &= (\beta_{11m} \exp(\zeta_{1m}^{(2)} x_3) + \beta_{12m} \exp(\zeta_{2m}^{(2)} x_3) + A_{12m1} \exp(2i\alpha_m^{(2)} x_3)) E_2; \\ u_{3m}^{(2,n)} &= (\beta_{31m} \exp(\zeta_{1m}^{(2)} x_3) + \beta_{32m} \exp(\zeta_{2m}^{(2)} x_3) + A_{32m1} \exp(2i\alpha_m^{(2)} x_3)) E_2. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь  $E_2(t, x_1, \omega_m, k_m) = \exp(-2i(\omega_m t - k_m x_1))$ ;  $A_{jlmq}$  – коэффициенты в слагаемых, соответствующих частному решению системы дифференциальных уравнений (13);  $\lambda_{jlm}$ ,  $\mu_{jlm}$ ,  $\beta_{jlm}$  – коэффициенты в слагаемых, описывающих общее решение для соответствующей (12) однородной системы дифференциальных уравнений;  $\zeta_{jm}^{(p)}$  – корни характеристических полиномов для соответствующих (12) однородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений в случае распространения монохроматических продольно-сдвиговых волн частоты  $2\omega_m$ .

Компоненты комплексного вектора напряженности  $u_{j+}^{(p,n)}$  ( $j=1;3$ ) второй гармоники "комбинационного" типа с частотой  $\omega_1 + \omega_2$  также определяется из соотношений (12),(13) в аналитической форме методами компьютерной алгебры. При условии, что ангармоническое возмущение в виде упругой волны P-SV типа с частотой  $\omega_1 + \omega_2$  и волновым числом  $k_1 + k_2$  не принадлежит дисперсионному спектру обобщенных поверхностных волн релеевского типа в рассматриваемом волноводе, представления для  $u_{j+}^{(p,n)}$  имеют структуру:

$$\begin{aligned} u_{1+}^{(1,n)} &= (\lambda_{11+} \cos(\zeta_{1+}^{(1)} x_3) + \lambda_{12+} \cos(\zeta_{2+}^{(1)} x_3) + \mu_{11+} \sin(\zeta_{1+}^{(1)} x_3) + \mu_{12+} \sin(\zeta_{2+}^{(1)} x_3) + \\ &\quad + A_{1131} \cos((\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)}) x_3) + A_{1132} \sin((\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)}) x_3) + A_{1133} \cos((\alpha_1^{(1)} - \alpha_2^{(1)}) x_3) + \\ &\quad + A_{1134} \sin((\alpha_1^{(1)} - \alpha_2^{(1)}) x_3)) E_{12}; \\ u_{3+}^{(1,n)} &= (\lambda_{31+} \sin(\zeta_{1+}^{(1)} x_3) + \lambda_{32+} \sin(\zeta_{2+}^{(1)} x_3) + \mu_{31+} \cos(\zeta_{1+}^{(1)} x_3) + \mu_{32+} \cos(\zeta_{2+}^{(1)} x_3) + \\ &\quad + A_{3131} \sin((\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)}) x_3) + A_{3132} \cos((\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)}) x_3) + A_{3133} \sin((\alpha_1^{(1)} - \alpha_2^{(1)}) x_3) + \\ &\quad + A_{3134} \cos((\alpha_1^{(1)} - \alpha_2^{(1)}) x_3)) E_{12}; \\ u_{1+}^{(2,n)} &= (\beta_{11+} \exp(\zeta_{1+}^{(2)} x_3) + \beta_{12+} \exp(\zeta_{2+}^{(2)} x_3) + A_{1231} \exp(2i(\alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)}) x_3)) E_{12}; \\ u_{3+}^{(2,n)} &= (\beta_{31+} \exp(\zeta_{1+}^{(2)} x_3) + \beta_{32+} \exp(\zeta_{2+}^{(2)} x_3) + A_{3231} \exp(2i(\alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)}) x_3)) E_{12}. \end{aligned} \quad (17)$$

где  $E_{12}(t, x_1, \omega_m, k_m) = \exp(-i((\omega_1 t + \omega_2 t) - (k_1 x_1 + k_2 x_1)))$ . Для коэффициентов  $A_{jlmq}$ ,  $\lambda_{jlm}$ ,  $\mu_{jlm}$ ,  $\beta_{jlm}$  и корней  $\zeta_{j+}^{(p)}$  характеристических полиномов для соответствующих (12) однородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений в выражениях (16) и (17) в случае распространения продольно-сдвиговых волн частоты  $\omega_1 + \omega_2$  также получены развернутые аналитические представления. Построенные решения позволяют провести численное исследование ряда характеристик, описывающих меру нелинейного взаимодействия обобщенных поверхностных волн Лява. При этом оценке, прежде всего, подлежат характеристики второй гармоники комбинационного типа, генерируемой именно вследствие нелинейного взаимодействия двух рассматриваемых поверхностных волн.

**Результаты численных исследований.** Численные исследования кинематических характеристик нелинейных вторых гармоник комбинационного типа реализованы применительно к волноводу в виде слоя  $V_1$  из монокристалла германия, идеально контактирующего по нижней грани с полупространством

$V_2$  из монокристалла кремния. Компоненты волновода характеризуются такими наборами независимых физико-механических постоянных [11]:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 5.32\rho_*; c_{11}^{(1)} = 12,92c_*; c_{12}^{(1)} = 4,79c_*; c_{44}^{(1)} = 6,70c_*, \\ c_{111}^{(1)} &= -71,00c_*; c_{112}^{(1)} = -38,90c_*; c_{123}^{(1)} = -1,80c_*; c_{144}^{(1)} = -2,30c_*; c_{456}^{(1)} = -5,30c_*; c_{155}^{(1)} = -29,20c_*; \\ \rho_2 &= 2.33\rho_*; c_{11}^{(2)} = 16,70c_*; c_{12}^{(2)} = 7,90c_*; c_{44}^{(2)} = 6,50c_*; \\ c_{111}^{(2)} &= -82,50c_*; c_{112}^{(2)} = -45,10c_*; c_{123}^{(2)} = -6,40c_*; c_{144}^{(2)} = 1,20c_*; c_{456}^{(2)} = -6,40c_*; c_{155}^{(2)} = -31,00c_*; \\ c_* &= 10^{10} \text{ Pa}, \rho_* = 10^3 \text{ kg/m}^3. \end{aligned}$$

Результаты расчетов частотных распределений для величин безразмерных нормированных амплитудных характеристик  $|u_{1+}^{(n)}|/u_0^2$  и  $|u_{3+}^{(n)}|/u_0^2$  комбинационных вторых гармоник в плоскости контакта слоя и полупространства в предположении  $u_{21}^{(0)} = u_{22}^{(0)} = u^{(0)}$  представлены на рис. 1 – 4 в виде тонированных изображений, на которых увеличению значений исследуемых характеристик соответствует переход от темных тонов к светлым.

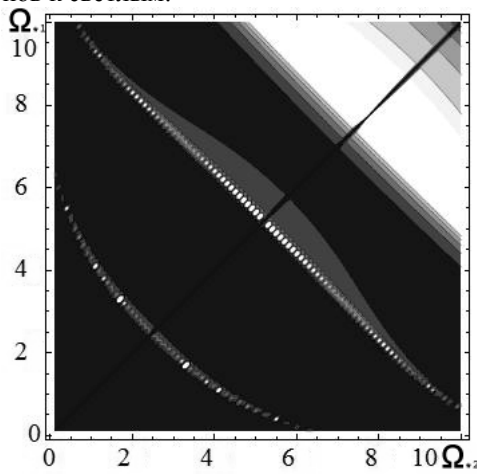


Рис. 1.

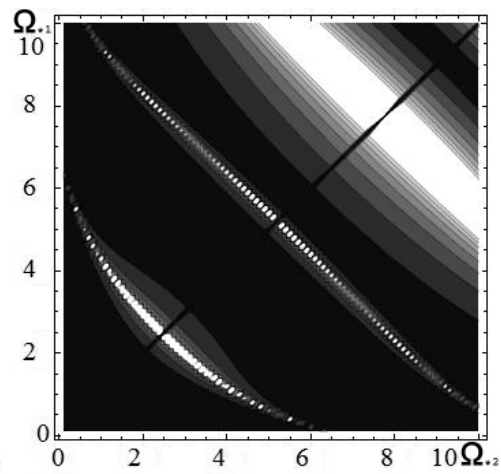


Рис. 2.

Рис. 1, 2 описывают распределения амплитудных показателей функций  $|u_{1+}^{(n)}|/u_0^2$  и  $|u_{3+}^{(n)}|/u_0^2$  в зависимости от сочетаний нормированных безразмерных частотных параметров  $\Omega_{*m} = (\rho_*\omega_m^2\tilde{h}^2/c_*)^{1/2}$  для двух волн Лява с круговыми частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , принадлежащих первой (нижней) моде соответствующего дисперсионного спектра. Рис.3 – 4, в свою очередь, описывают распределения амплитудных характеристик  $|u_{1+}^{(n)}|/u_0^2$  и  $|u_{3+}^{(n)}|/u_0^2$  для двух волн Лява, первая из которых имеет приведенную круговую частоту  $\Omega_{*1}$  и принадлежит первой моде дисперсионного спектра, а вторая – приведенную круговую частоту  $\Omega_{*2}$  и принадлежит второй моде дисперсионного спектра поверхностных волн Лява.

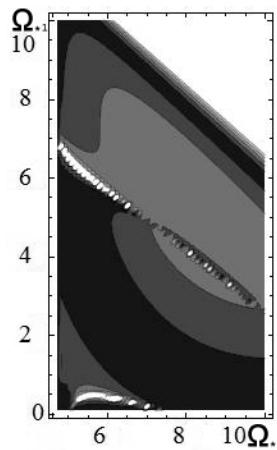


Рис.3

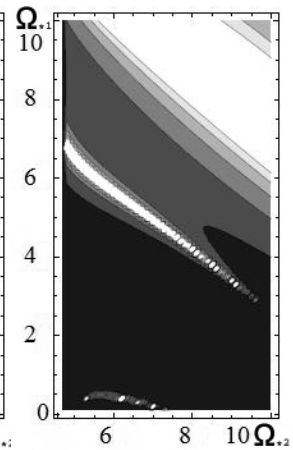


Рис.4

На рис. 5 – 8 приведены распределения нормированных значений  $|u_{jm}^{(n)}|/u_0^2$  для вторых гармоник, образующих исследуемое линейное волновое поле волн Лява и рассматриваемых как отдельно взятые монохроматические волны с частотами  $\tilde{\Omega}_{*m}$ . Для указанных на рис. 5 – 8 значениях частотного параметра  $\tilde{\Omega}_{*m}$  эффекты возрастания интенсивности волновых перемещений в ангармонических возмущениях соответствуют случаям, когда вторая гармоника в виде упругой волны P-SV типа с частотой  $2\omega_m$  и

волновим числом  $2k_m$  належить дисперсійному спектру обобщених поверхневих волн релеевського типу в розглянутому волноводі, то єсть випадкам, які виключені з розгляду. Розподілення на рис. 1, 2, характеризують взаємодію волн однієї моди, природно євляються симетричними відносно діагоналі  $\Omega_{*1} = \Omega_{*2}$ .

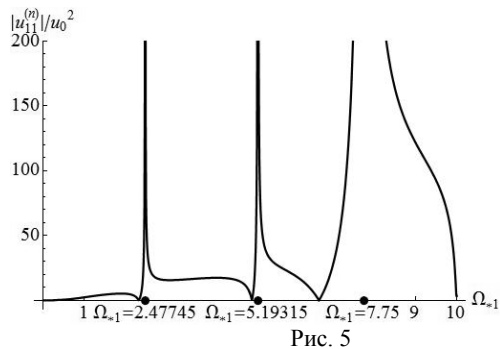


Рис. 5

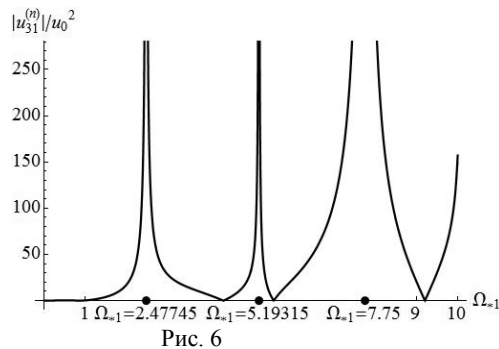


Рис. 6

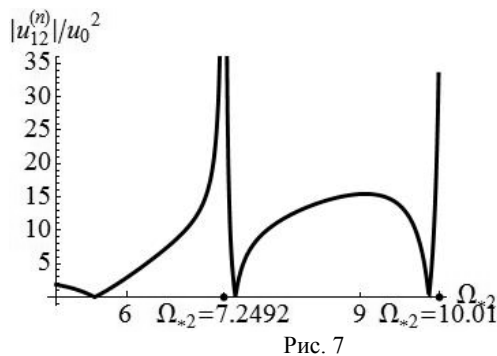


Рис. 7

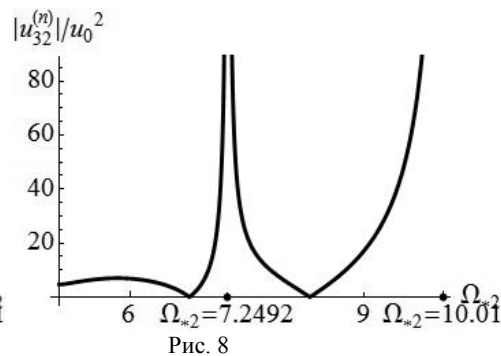


Рис. 8

Представленные частотные распределения дают представление о мере интенсивности и частотных областях разноуровневого нелинейного ангармонического взаимодействия обобщенных поверхностных волн Лява. Можно заключить, что степень взаимодействия увеличивается, когда  $\Omega_{*1} = \Omega_{*2} > 4.5$ , а в случае взаимодействия волн из двух соседних низших мод – при  $\Omega_{*1} = \Omega_{*2} > 6.0$ . Вместе с тем, в областях более низких частот имеются локализованные области значений  $(\Omega_{*1}, \Omega_{*2})$ , в которых также наблюдаются эффекты интенсивного ангармонического взаимодействия. Особо следует отметить интенсивное взаимодействие волн разных мод в зоне  $\Omega_{*1} \ll 1, \Omega_{*2} \approx 7$ , в которой частота комбинационной гармоники предельно близка к частоте  $\Omega_{*2}$  одной из взаимодействующих волн, а следовательно, появление интенсивной волны с практически идентичной частотой может интерпретироваться как эффект нелинейного усиления для относительно высокочастотной поверхностной волны.

**Выводы.** В рамках модели геометрически и физически нелинейного динамического деформирования кристаллической среды класса  $m3m$  кубической системы получено численно-аналитическое решение задачи о нелинейном ангармоническом взаимодействии двух обобщенных поверхностных волн Лява в слое монокристалла германия на подложке в виде полупространства монокристалла кремния. Проанализированы амплитудные характеристики нелинейного взаимодействия для пар волн одной и той же первой (нижней) моды линейного дисперсионного спектра обобщенных волн Лява и для пары волн, соответственно принадлежащих первой и второй модам указанного дисперсионного спектра. Отмечены частотные эффекты возрастания степени нелинейного взаимодействия в рассматриваемом волновом процессе. Теоретические результаты работы могут найти применение в технологиях ультразвуковой дефектоскопии и при конструировании акустоэлектронных устройств.

## РЕЗЮМЕ

Отримано чисельно-аналітичний розв'язок задачі про нелінійну ангармонічну взаємодію двох узагальнених поверхневих хвиль Лява в кристалічному шарі класу  $m3m$  кубічної системи на пружному кристалічному півпросторі цього ж класу анізотропії. Проведено чисельне дослідження характеристик взаємодії для пари хвиль з двох нижчих гілок дисперсійного спектру хвиль Лява в шарі з монокристалу германію на півпросторі з монокристалу кремнію.

*Ключові слова:* шар монокристалу германію на кремнієвому півпросторі, узагальнені поверхневі хвилі Лява, нелінійна взаємодія, малі нелінійні ангармонічні збурення, чисельно-аналітичне визначення других гармонік, розранки амплітудно-частотних характеристик.

**SUMMARY**

The numerical and analytical solve of the problem of two generic surface Love waves nonlinear anharmonic interaction in a crystal layer of m3m class of cubic system on the elastic crystal halfspace of the same anisotropy class has been received. The numerical research of interaction characteristics of the wave pair from Love wave dispersion spectrum two lowest branches in a germanium monocrystal layer on the silicon monocrystal halfspace has been carried out.

*Keywords:* germanium monocrystal layer on a silicon halfspace, generic surface Love waves, nonlinear interaction, nonlinear small anharmonic perturbations, numerical and analytical second harmonics definition, amplitude-frequency characteristics calculations.

**СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ**

1. Красильников В. А. Нелинейное взаимодействие упругих волн в кристаллах и обработка сигнальной информации / В. А. Красильников, В. Е. Лямов // Акустический журнал. – 1973. – Т. 19, Вып. 5. – С. 801-804.
2. Ferreira E. R. Large amplitude Love waves. / R. E. Ferreira, Ph. Boulanger, M. Destrade // The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. – 2008. – Vol. 61, No 3. – P. 353-371.
3. Harvey A. P. Propagation of anisotropic elastic and piezoelectric nonlinear surface acoustic waves / A. P. Harvey, G. E. Topholme // Wave Motion. – 1992. – Vol. 16. – P. 125-135.
4. Kalyanasundaram N. Nonlinear mixing of surface acoustic waves propagation in opposite directions / N. Kalyanasundaram // J. Acoust. Sos. Am. – 1973. – Vol. 73, No 6. – P. 1956-1965.
5. Kumon R. E. Directional dependence of nonlinear surface acoustic waves in the (001) plane of cubic crystals / R. E. Kumon, M. F. Hamilton // J. Acoust. Sos. Am. – 2002. – Vol. 111, No 1. – P. 2060-2069.
6. Storozhev V. I. Nonlinear anharmonic effects for Love waves in structure “anisotropic layer on the anisotropic halfspace” / V. I. Storozhev, N. V. Scherbak // Works of the second international conference “Nonlinear Dynamics–2007”. – Kharkov: 2007. – P. 283 - 288.
7. Щербак Н. В. Энергетические характеристики нелинейных вторых гармоник поверхностных волн Лява в волноводе с кристаллическими компонентами кубической системы. / Н. В. Щербак, В. И. Сторожев // Труды XI Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, 26-29 ноября 2007г.) – Ростов-на-Дону, 2007. – Т. 2. – С. 173-177.
8. Жоголева Н. В. Комбинационные вторые гармоники нелинейных волн Лява в кристаллическом слое на кристаллическом полупространстве. / Н. В. Жоголева // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела: матер. VI междунар. науч. конф. – Донецк: Юго-Восток, 2010. – С 149-153.
9. Щербак Н. В. Нелинейные вторые гармоники обобщенных волн Лява в анизотропном слое на анизотропном полупространстве / Н. В. Щербак, В. И. Сторожев // Вісник Донецького університету, Сер.А: Природничі науки. – 2008. – Вип.2. – С. 75-80.
10. Сторожев В. И. Анализ нелинейных ангармонических возмущений для упругих SH-волн, локализованных в кристаллическом слое между анизотропными полупространствами. / В. И. Сторожев, Н. В. Щербак // Труды ин-та прикладной математики и механики. – 2009. – Т. 19. – С. 234 – 243.
11. Блистанов А. А. Акустические кристаллы / А. А. Блистанов, В. С. Бондаренко, В. В. Чкалова / Под ред. М. П. Шашкольской. – М.: Наука, 1982. – 632 с.

*Поступила в редакцию: 28.02.2012 г.*