УДК 531.38

ОДИН СЛУЧАЙ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА БАРНЕТТА-ЛОНДОНА

А. В. Зыза, К. С. Бородкина

В работе исследуется один случай полиномиальных решений класса Горячева-Стеклова-Ковалевского уравнений задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона. Условия существования решения этого класса получены в виде системы алгебраических уравнений на параметры задачи и коэффициенты решения. Построено одно новое частное решение уравнения движения гиростата, которое зависит от пяти независимых параметров.

Ключевые слова: гиростат, полиномиальное решение, первые интегралы, эффект Барнетта-Лондона, эллиптические функции времени, форма Лежандра.

Введение. Обобщением классической задачи динамики твердого тела [1] является задача о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона [2 – 5]. Гиромагнитные явления играют важную роль в исследовании движений приборов в магнитных полях. Поєтому при математическом моделировании движения тела в магнитном поле следует учитывать магнитный момент, возникающий в результате эффекта Барнетта-Лондона. Это обстоятельство приводит к тому, что уравнения движения тела в магнитном поле с учетом эффекта Барнетт-Лондона в отличие от классических уравнений движения тела в поле силы тяжести не допускают интеграл энергии. Поэтому для интегрирования уравнений движения недостаточно иметь дополнительный первый интеграл [1]. В связи с этим проводятся исследования по построению частных решений различных классов, в частности, полиномиальных [6 – 9].

В данной статье изучается один класс полиномиальных решений уравнений движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона, рассматриваемого в работах [6, 7].

Постановка задачи. Рассмотрим движение гиростата с неподвижной точкой в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона. Эффект Барнетта-Лондона состоит в том, что первоначально ненамагниченные и сверхпроводящие твердые тела при движении в магнитном поле намагничиваются вдоль оси вращения. Возникающая при вращении намагниченность линейно зависит от угловой скорости тела. Магнитный момент при взаимодействии с внешним магнитным полем будет стремиться к направлению вектора напряженности магнитного поля. Взаимодействие намагниченности, вызванной вращением тела с внешним магнитным полем, приводит к прецессии вектора кинетического момента тела вокруг вектора поля [2 – 5].

Уравнения движения рассматриваемой задачи запишем в виде [5]

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = \left(A\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda}\right)\times\boldsymbol{\omega} + B\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu}\times\left(C\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{s}\right), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega}. \tag{1}$$

Эти уравнения допускают только два первых интеграла

$$\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1, \quad \left(A\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda}\right)\cdot\boldsymbol{\nu} = k. \tag{2}$$

Изменение полной энергии гиростата определяется соотношением

$$\left[\left(A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}\right) - 2\left(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{\nu}\right) + \left(C\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}\right)\right]^{\bullet} = 2\left(B\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\nu}\right)\cdot\boldsymbol{\omega}, \tag{3}$$

поэтому уравнения (1) не имеют интеграла энергии. В уравнениях (1) – (3) обозначения таковы: $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость гиростата; $\boldsymbol{\nu}$ – единичный вектор, характеризующий направление магнитного поля; $\boldsymbol{\lambda}$ – гиростатический момент; $\boldsymbol{s}$ – вектор обобщенного центра масс; B и C – симметричные матрицы третьего порядка; k – постоянная интеграла площадей; точка над переменными обозначает относительную производную. Если же для динамического уравнения из (1) имеет место равенство $B = \lambda E$ (E – единичная матрица), то из соотношения (3) вытекает интеграл энергии для уравнений (1) и они будут относиться к уравнениям класса Кирхгофа.

Запишем уравнения (1) и первые интегралы (2) в скалярном виде при условиях, что матрицы A, B, C имеют диагональный вид $A = diag\left(A_1, A_2, A_3\right)$, $B = diag\left(B_1, B_2, B_3\right)$, $C = diag\left(C_1, C_2, C_3\right)$ и $\boldsymbol{\omega} = \left(p, q, r\right)$, $\boldsymbol{\nu} = \left(\nu_1, \nu_2, \nu_3\right)$, $\boldsymbol{s} = \left(s_1, s_2, s_3\right)$, $\boldsymbol{\lambda} = \left(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\right)$:

$$\begin{aligned}
&A_1\dot{p} = \left(A_2 - A_3\right)qr + B_2\nu_3 q - B_3\nu_2 r + \left(C_3 - C_2\right)\nu_2\nu_3 + \lambda_2 r - \lambda_3 q + \nu_3 s_2 - \nu_2 s_3,\\
&A_2\dot{q} = \left(A_3 - A_1\right)rp + B_3\nu_1 r - B_1\nu_3 p + \left(C_1 - C_3\right)\nu_1\nu_3 + \lambda_3 p - \lambda_1 r + \nu_1 s_3 - \nu_3 s_1,\\
&A_3\dot{r} = \left(A_1 - A_2\right)pq + B_1\nu_2 p - B_2\nu_1 q + \left(C_2 - C_1\right)\nu_1\nu_2 + \lambda_1 q - \lambda_2 p + \nu_2 s_1 - \nu_1 s_2;
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\dot{\nu}_1 = r\nu_2 - q\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = p\nu_3 - r\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = q\nu_1 - p\nu_2; \tag{5}$$

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \quad (A_1 p + \lambda_1)\nu_1 + (A_2 q + \lambda_2)\nu_2 + (A_3 r + \lambda_3)\nu_3 = k. \tag{6}$$

Следуя работам [6, 7], поставим задачу об исследовании условий существования у уравнений (4), (5) при $s_2 = 0,\ s_3 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0$ решений следующего вида

$$\begin{gathered} q^2 = Q(p) = \sum_{k=0}^{n} b_k p^k, \quad r^2 = R(p) = \sum_{i=0}^{m} c_i p^i, \quad \nu_1 = \varphi(p) = \sum_{j=0}^{l} a_j p^j, \\ \nu_2 = q\psi(p), \quad \nu_3 = r\kappa(p), \quad \psi(p) = \sum_{i=0}^{n_1} g_i p^i, \quad \kappa(p) = \sum_{j=0}^{m_1} f_j p^j, \end{gathered} \tag{7}$$

где n, m, l, n_1, m_1 – натуральные числа или нули; b_k, c_i, a_j, g_i, f_j – неизвестные параметры.

Подставим выражения (7) в уравнения (4), (5) и геометрический интеграл из (6)

$$\dot{p} = \mu(p)\sqrt{Q(p)R(p)}, \quad \mu(p) = (\psi(p) - \kappa(p))(\varphi'(p))^{-1}, \tag{8}$$

$$\left(Q(p)\psi^2(p)\right)'\mu(p) = 2\psi(p)(p\kappa(p) - \varphi(p)), \quad \left(R(p)\kappa^2(p)\right)'\mu(p) = 2\kappa(p)(\varphi(p) - p\psi(p)), \tag{9}$$

$$\begin{gathered} A_1\mu(p) = (C_3 - C_2)\psi(p)\kappa(p) + B_2\kappa(p) - B_3\psi(p) + A_2 - A_3, \\ A_2 Q'(p)\mu(p) = 2\left[(C_1 - C_3)\varphi(p)\kappa(p) - \kappa(p)(B_1 p + s_1) + B_3\varphi(p) + (A_3 - A_1)p - \lambda_1\right], \\ A_3 R'(p)\mu(p) = 2\left[(C_2 - C_1)\varphi(p)\psi(p) + \psi(p)(B_1 p + s_1) - B_2\varphi(p) + (A_1 - A_2)p + \lambda_1\right]; \end{gathered} \tag{10}$$

$$\varphi^2(p) - 1 + Q(p)\psi^2(p) + R(p)\kappa^2(p) = 0. \tag{11}$$

В уравнениях (8) – (10) символом штрих обозначена производная по независимой переменной p. Если функции $Q(p),\ R(p),\ \varphi(p),\ \psi(p),\ \kappa(p)$ определены, то зависимость p от времени устанавливается из дифференциального уравнения (8).

Новое частное решение. Рассмотрим случай, когда в (7) $m = l = 2$, а $n = n_1 = m_1 = 1$. Тогда

$$\begin{gathered} q^2 = Q(p) = b_1 p + b_0, \quad r^2 = R(p) = c_2 p^2 + c_1 p + c_0, \quad \nu_1 = \varphi(p) = a_2 p^2 + a_1 p + a_0, \\ \nu_2 = \psi(p) q, \quad \nu_3 = \kappa(p) r, \quad \psi(p) = g_1 p + g_0, \quad \kappa(p) = f_1 p + f_0. \end{gathered} \tag{12}$$

Подставим выражения (12) в уравнения (9) – (11). Требование того, чтобы полученные равенства были тождествами по p, приводит к следующей системе уравнений на параметры задачи и коэффициенты решения (12):

$$\begin{gathered} C_1 = C_2 = C_3, \quad B_2 f_1 - B_3 g_1 = 0, \quad \mu_0 = (B_2 f_0 - B_3 g_0 + A_2 - A_3)A_1^{-1}, \\ g_1 - f_1 - 2a_2\mu_0 = 0, \quad g_0 - f_0 - a_1\mu_0 = 0, \quad f_1 - a_2 = 0, \\ 3b_1 g_1\mu_0 - 2(f_0 - a_1) = 0, \quad (b_1 g_0 + 2b_0 g_1)\mu_0 + 2a_0 = 0, \quad 2c_2 f_1\mu_0 - a_2 + g_1 = 0, \\ (2c_2 f_0 + 3c_1 f_1)\mu_0 - 2(a_1 - g_0) = 0, \quad (c_1 f_0 + 2c_0 f_1)\mu_0 - 2a_0 = 0, \\ B_3 a_2 - B_1 f_1 = 0, \quad f_1 s_1 + B_1 f_0 - B_3 a_1 + A_1 - A_3 = 0, \\ A_2 b_1\mu_0 + 2[f_0 s_1 - B_3 a_0 + \lambda_1] = 0, \quad A_3 c_2\mu_0 - g_1 s_1 - B_1 g_0 + B_2 a_1 - A_1 + A_2 = 0, \\ B_1 g_1 - B_2 a_2 = 0, \quad A_3 c_1\mu_0 + 2[B_2 a_0 - g_0 s_1 - \lambda_1] = 0, \quad a_0^2 + b_0 g_0^2 + c_0 f_0^2 - 1 = 0. \end{gathered} \tag{13}$$

Решение системы (13) представим в виде

$$C_1 = C_2 = C_3, \quad A_1 = A_3, \quad B_1 = B_3, \quad \mu_0 = (B_2 - B_3)(2B_3)^{-1}, \quad b_1 = \frac{4B_3 s_1}{3B_2(B_3 - B_2)},$$

$$b_0 = \frac{\left[(B_2 - B_3)(B_2 - 5B_3)A_3 + 8B_3^2(A_2 - A_3)\right]s_1 + 12(B_2 - B_3)B_2 B_3^2 a_0}{3(B_3 - B_2)B_2 \cdot \delta} s_1^2,$$

$$c_1 = 2(B_2 - 3B_3)s_1 \big/ \left(3B_3(B_3 - B_2)\right), \quad c_2 = -1,$$

$$c_0 = \frac{\left(B_2^2 - B_3^2\right)(3B_3 A_2 - B_2 A_3) + 8B_2 B_3^2(A_3 - A_2)}{3(B_3 - B_2)B_3^2 \cdot \delta} s_1^3 + \frac{(B_2 + 3B_3)B_2 a_0}{\delta} s_1^2,$$

$$\delta=\left[\left(3B_2-B_3\right)B_3A_2-2B_2^2A_3\right]s_1+3\left(B_2-B_3\right)B_2B_3^2a_0,\quad a_2=B_3B_2^{-1}g_1,$$

$$a_1=\frac{\left(B_2-B_3\right)B_2A_3+2B_3\left(B_3A_2-B_2A_3\right)}{3\left(B_3-B_2\right)B_2B_3}+\frac{2B_3a_0}{s_1},$$

$$g_1=\frac{2B_2\left(B_3A_2-B_2A_3\right)+\left(B_2-B_3\right)B_3A_2}{3\left(B_2-B_3\right)B_3s_1}+\frac{B_2B_3a_0}{s_1^2},$$

$$g_0=\frac{\left(B_2-6B_3\right)B_2A_3+B_3^2\left(8A_2-3A_3\right)}{6\left(B_3-B_2\right)B_3^2}+\frac{B_2a_0}{s_1},\quad f_1=a_2,$$

$$f_0=\frac{\left(3B_2+B_3\right)B_3A_2-\left(B_2+3B_3\right)B_2A_3}{3\left(B_3-B_2\right)B_2B_3}+\frac{B_3a_0}{s_1},\quad \lambda_1=\frac{\left[B_3\left(4A_2-3A_3\right)-B_2A_3\right]s_1}{3B_3\left(B_2-B_3\right)}. \tag{14}$$

Здесь s_1 – корень кубического уравнения

$$\Delta_1s^3+\Delta_2s^2+\Delta_3s+\Delta_4=0,$$

в котором

$$\Delta_1=4B_3A_2\Big\{\Big(9B_2^2\left(B_2-B_3\right)+B_3^2\left(B_3-33B_2\right)\Big)B_3^2A_2^2+3\Big(B_3^2\left(13B_3+27B_2\right)-$$

$$-B_2^2\left(5B_3+3B_2\right)\Big)B_2B_3A_2A_3+3\Big(B_2^3\left(B_2+5B_3\right)-B_3^2\Big(6B_3^2+21B_2B_3+11B_2^2\Big)\Big)B_3A_3^2\Big\}+$$

$$+\Big(9B_3^3\left(B_2+B_3\right)\left(6B_2+B_3\right)-B_2^3\Big(B_2^2+15B_2B_3-18B_3^2\Big)\Big)B_2A_3^2,$$

$$\Delta_2=-12B_2B_3^2\left(B_2-B_3\right)a_0\left[A_2B_3\left(3B_2+B_3\right)-A_3B_2\left(B_2+3B_3\right)\right]^2,$$

$$\Delta_3=36B_2^2B_3^4\left(B_2-B_3\right)^2\left[B_3\left(3B_2-B_3\right)A_2-2B_2^2A_3\right],\quad \Delta_4=108B_2^3B_3^6\left(B_2-B_3\right)^3a_0.$$

Решение (12) при условиях (14) будет действительным, если

$$\delta\neq 0,\quad b_0\geq 0,\quad c_0>0. \tag{15}$$

Зависимость p от времени устанавливаем из (8)

$$\dot p=\mu_0\sqrt{\left(b_1p+b_0\right)\left(c_2p^2+c_1p+c_0\right)}. \tag{16}$$

Тем самым найдено новое частное решение класса Горячева-Стеклова-Ковалевского задачи о движении гиростата в магнитном поле. Полученное решение выражается через эллиптические функции и зависит от параметров A_2, A_3, B_2, B_3, a_0. Это решение также можно найти из уравнений, указанных в [10].

Рассмотрим численный пример решения (12), (14) – (16) уравнений (4), (5). Пусть

$$C_1=C_2=C_3,\quad A_1=A_3,\quad A_2=7A_3/4,\quad A_3=a,\quad B_1=B_3,\quad B_2=3B_3,$$

$$B_3=b,\quad a_0=1,\quad s_1=-36b^2/a,\quad \lambda_1=-6b\quad \left(a>0,\ b>0\right).$$

Тогда из (14) – (16) следует

$$q^2=Q(p)=8\xi p,\quad r^2=R(p)=144\xi^2-p^2,$$

$$\nu_1=\varphi(p)=\frac{1}{144\xi^2}p^2-\frac{1}{4\xi}p+1,\quad \nu_2=\left(\frac{1}{48\xi^2}p-\frac{1}{4\xi}\right)\sqrt{8\xi p},\quad \nu_3=\frac{1}{144\xi^2}p\sqrt{144\xi^2-p^2}; \tag{17}$$

$$\dot p=\sqrt{8\xi p\left(144\xi^2-p^2\right)}, \tag{18}$$

где $\xi=a/b,\quad 0\leq p\leq 12\xi$. В этом решении остался свободный параметр ξ, который можно устранить переходом к безразмерным величинам.

В случае (17), (18) сведем задачи к квадратурам. С этой целью в эллиптическом интеграле, полученном из дифференциального уравнения (18) при $y=\sqrt{p}$

$$\int\frac{12dy}{\sqrt{144-y^4/\xi^2}}=12\xi\sqrt{2\xi}\left(t-t_0\right),$$

произведем замену $hy = \sqrt{1-u^2}$, где $0 \le u \le 1, \quad h = 1/\left(2\sqrt{3\xi}\right)$. Тогда

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{\left(1-u^2\right)\left(1-\tilde{k}^2u^2\right)}} = \tilde{h}\left(t-t_0\right), \tag{19}$$

где $\tilde{k} = \sqrt{2}/2, \quad \tilde{h} = -2\sqrt{6}\xi$. Если положить $u = \sin\varphi, \ \left(\varphi \in [0; \pi/2]\right)$, то интеграл (19) примет вид

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-0,5\sin^2\varphi}} = \theta, \quad \theta = \tilde{h}\left(t-t_0\right) \tag{20}$$

В результате обращения (20) получим значение для угла φ: $\varphi = \mathrm{am}\theta$, $u = \mathrm{sn}\theta$. Так как $y = \sqrt{p}$, то полученное значение для y дает зависимость переменной p от времени, с помощью которой из (17) можно получить выражение всех переменных от t.

Выводы. Таким образом, в статье найдено новое частное решение полиномиального вида дифференциальных уравнений, описывающих задачу о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона. Полученное решение зависит от пяти свободных параметров задачи и выражается через эллиптические функции времени.

РЕЗЮМЕ

У роботі досліджується один випадок поліноміальних розв’язків класу Горячева-Стєклова-Ковалевського рівнянь задачі про рух гіростата у магнітному полі з урахуванням ефекту Барнетта-Лондона. Умови існування розв’язка цього класу отримані у вигляді системи алгебраїчних рівнянь на параметри задачі та коефіцієнти розв’язка. Побудовано один новий частинний розв’язок рівнянь руху гіростата, який залежить від п’яти незалежних параметрів.

Ключові слова: гіростат, поліноміальний розв’язок, перші інтеграли, ефект Барнетта-Лондона, еліптичні функції часу, форма Лєжандра.

SUMMARY

In the paper one case of polynomial Goriachev-Steklov-Kovalevsky class solutions to the equations of the task about the gyrostat movement in the magnetic field with the allowance for the Barnett-London effect is studied. The conditions of existence of this class are obtained in the form of algebraic equations for the task parameters and coefficients of the solution. A new separate solution to the equation of the gyrostat movement which depends on five independent parameters has been worked out.

Keywords: gyrostat, polynomial solution, first integrals, the Barnett-London effect, elliptic functions of time, Legandre form

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Харламов П.В. Лекции по динамике твердого тела / П.В. Харламов. – Новосибирск: Изд-во Новосибир. ун-та, 1965. – 221 с.
2. Самсонов В.А. О вращении твердого тела в магнитном поле / В.А. Самсонов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1984. – № 4. – С. 32-34.
3. Козлов В.В. К задаче о вращении твердого тела в магнитном поле / В.В. Козлов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1985. – № 6. – С. 28-33.
4. Урман Ю.Н. Динамические эффекты, обусловленные вращательным движением сверхпроводника в магнитном подвесе / Ю.Н. Урман // Докл. АН СССР. – 1984. – Т. 276, № 6. – С. 1402-1404.
5. Горр Г.В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку / Г.В. Горр, А.В. Мазнев. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.
6. Миронова Е.Н. О решении уравнений движения тела в магнитном поле на основе полиномиальных решений/ Е.Н. Миронова // Прикладная механика. – 2001. – Т. 37, № 2. – С. 105-113.
7. Зыза А.В. О полиномиальных решениях уравнений движения гиростата в магнитном поле / А.В. Зыза // Механика твердого тела. – 2003. – Вып. 33. – С. 61-70.
8. Зыза А.В. О новом классе полиномиальных решений уравнений движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона / А.В. Зыза // Вісник Донецького університету. Сер. А: Природничі науки. – 2010. – № 1. – С. 52-56.
9. Зыза А.В. Об одном классе полиномиальных решений движения тела в магнитном поле / А.В. Зыза // Вісник Донецького університету. Сер. А: Природничі науки. – 2010. – № 2. – С. 19-23.
10. Горр Г.В. О резукции дифференциальных уравнений в двух задачах динамики твердого тела / Г.В. Горр, А.В. Зыза// Тр. ин-та прикладной математики и механики НАН Украины. – 2009. – Т. 18. – С. 29-36.

Поступила в редакцию 27.12.2011 г.