

УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ ВЫРАБОТКИ ВБЛИЗИ ЗАГРУЖЕННОЙ ДНЕВНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НА КОНЦЕНТРАЦИЮ НАПРЯЖЕНИЙ ОКОЛО НЕЕ

С. А. Калоеров, Е. В. Авдюшина, А. Б. Мироненко

С использованием методов комплексных потенциалов, интегралов типа Коши и наименьших квадратов исследовано напряженное состояние горного массива с выработками вблизи дневной поверхности. Исследовано влияние формы выработки на концентрацию напряжений около ее поверхности, длины разгрузочной щели в основании на уменьшение выпучивания породы.

Ключевые слова: подземная выработка, концентрация напряжений, метод комплексных потенциалов, интегралы типа Коши, разгрузочные щели

На стадии проектирования подземных выработок приходится учитывать их форму вблизи дневной поверхности, на которой расположены сооружения. Около поверхностей таких выработок могут возникать концентрации напряжений, приводящие к их разрушению, а следовательно, и наземных сооружений. К настоящему времени эффективные методы решения задач теории упругости, к которым приводится задача об определении напряженного состояния около криволинейных отверстий вблизи нагруженной границы, не разработаны. Для полуплоскости с отверстием достаточно широкие исследования проведены лишь для случая кругового отверстия [1, 2]. При этом использовался метод комплексных потенциалов Колосова-Мухелишвили [3] с привлечением метода рядов и аналитического продолжения функций через незагруженные участки прямолинейной границы. В работе [4] предложен другой подход решения задач для многосвязной изотропной пластинки с использованием комплексных потенциалов.

В настоящей статье предложен метод решения задачи теории упругости для полуплоскости с произвольным криволинейным контуром. Дано приложение подхода к расчету подземной выработки вблизи нагруженной прямолинейной границы. Описаны результаты исследования концентрации напряжений около выработки.

Постановка задачи. Рассмотрим горный массив с горизонтальной выработкой вблизи дневной поверхности. Будем считать, что поверхность выработки не подкреплена и не нагружена; на дневной поверхности массива располагается протяженное сооружение, действие которого можно заменить давлением по поверхности. Нужно определить концентрацию напряжений в массиве и выбрать оптимальную форму выработки по снижению концентрации напряжений.

Для исследования напряженного состояния рассматриваемого массива представим его изотропной полуплоскостью с криволинейным отверстием с заданными на прямолинейной границе распределенными усилиями. Криволинейный контур аппроксимируем совокупностью дуг эллипсов, т. е. будем решать задачу теории упругости для полуплоскости с эллиптическими отверстиями. Таким образом, рассматривается изотропная полуплоскость с прямолинейной границей

L^+ и конечным числом произвольно расположенных эллиптических отверстий с контурами L_l , полуосями a_l, b_l и центрами в точках x_{0l}, y_{0l} ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) (рис.1). Контур отверстия могут касаться, пересекаться, переходить в прямолинейные разрезы, своими дугами (берегами в случае прямолинейных трещин) образовывать контуры криволинейных отверстий и разрезов. На прямолинейной границе усилия действуют на ее конечной части L' и равны нулю на остальной части L'' . На бесконечности полуплоскость не нагружена.

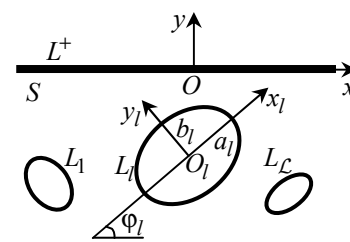


Рис. 1

Определение напряженно-деформированного состояния рассматриваемой полуплоскости сводится к нахождению производных комплексных потенциалов $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$, удовлетворяющих граничным условиям [4, 5]

$$\Phi(t) + \overline{\Omega(t)} = g(t) \text{ на } L^+; \tag{1}$$

$$\delta\Phi(t) + (\delta - \bar{\delta})\overline{\Phi(t)} + (t - \bar{t})\bar{\delta}\overline{\Phi'(t)} + \bar{\delta}\overline{\Omega(t)} = 0 \text{ на } L_l \text{ (} l = \overline{1, \mathcal{L}} \text{)}, \tag{2}$$

где

$$g(t) = -i(X_n + iY_n) \text{ на } L', \quad g(t) = 0 \text{ на } L'';$$

$\delta = dt/ds$; (X_n, Y_n) – усилия, действующие на L' .

Функции $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ представим в виде

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z), \quad \Omega(z) = \Omega_0(z) + \Omega_1(z), \quad (3)$$

в котором $\Phi_0(z)$, $\Omega_0(z)$ – функции, голоморфные в нижней полуплоскости; $\Phi_1(z)$, $\Omega_1(z)$ – функции, голоморфные вне контуров отверстий L_l .

Используя конформные отображения внешности единичного круга на внешность эллипсов [6]

$$z = z_{0l} + R_l \left(\zeta_l + \frac{m_l}{\zeta_l} \right); \quad (4)$$

$$z_{0l} = x_{0l} + iy_{0l}, \quad R_l = R_{0l} e^{i\varphi_l}, \quad R_{0l} = \frac{a_l + b_l}{2}, \quad m_l = \frac{a_l - b_l}{a_l + b_l},$$

для функций $\Phi_1(z)$, $\Omega_1(z)$ получаем выражения

$$\Phi_1(z) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{ln}(z) a_{ln}, \quad \Omega_1(z) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} (\psi_{ln}(z) a_{ln} + \phi_{ln}(z) \bar{b}_{ln}); \quad (5)$$

в которых

$$\begin{aligned} \varphi_{ln}(z) &= -\frac{n}{\zeta_l^{n-1} R_l (\zeta_l^2 - m_l)}; \\ \psi_{ln}(z) &= -\frac{n}{\zeta_l^{n-1} R_l (\zeta_l^2 - m_l)^3} \left\{ c_{l3} \zeta_l^3 + c_{l2} \zeta_l^2 + \right. \\ &\quad \left. + c_{l1} \zeta_l + n \left[d_{l4} \zeta_l^4 + c_{l3} \zeta_l^3 + d_{l2} \zeta_l^2 - c_{l1} \zeta_l + d_{l0} \right] \right\}; \\ c_{l3} &= \bar{r}_{l1}, \quad c_{l2} = 2(\bar{r}_{l0} + \bar{r}_{l2} m_l), \quad c_{l1} = \bar{r}_{l1} m_l, \\ d_{l4} &= \bar{r}_{l2}, \quad d_{l2} = \bar{r}_{l0} - \bar{r}_{l2} m_l, \quad d_{l0} = -\bar{r}_{l0} m_l, \\ r_{l0} &= \frac{R_l - \bar{R}_l m_l}{\bar{R}_l}, \quad r_{l1} = \frac{z_{0l} - \bar{z}_{0l}}{\bar{R}_l}, \quad r_{l2} = \frac{m_l R_l - \bar{R}_l}{\bar{R}_l}; \end{aligned} \quad (6)$$

φ_l – угол между положительными направлениями осей Ox и осью эллипса a_l , отсчитываемый против часовой стрелки.

Подставив выражения (3), (4) в граничные условия (1) и применяя метод интегралов типа Коши, будем иметь

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \varphi_0(z) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\varphi_{ln}(z) a_{ln} + \frac{1}{s} \bar{\psi}_{ln}(z) \bar{a}_{ln} + \frac{1}{s} \bar{\phi}_{ln}(z) \bar{b}_{ln} \right]; \\ \Omega(z) &= \psi_0(z) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\psi_{ln}(z) a_{ln} + s \bar{\phi}_{ln}(z) \bar{a}_{ln} + \phi_{ln}(z) \bar{b}_{ln} \right], \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L'} \frac{g(t) dt}{t-z}, \quad \psi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L'} \frac{\bar{g}(t) dt}{t-z}. \quad (8)$$

Комплексные потенциалы (7) точно удовлетворяют граничным условиям на прямолинейной границе L^+ , а к граничным условиям (2) на контурах отверстий удовлетворим методом наименьших квадратов.

Исходя из (2), составим функционал

$$J = \sum_{m=1}^M \left| \delta \Phi(t_m) + (\delta - \bar{\delta}) \overline{\Phi(t_m)} + (t_m - \bar{t}_m) \bar{\delta} \overline{\Phi'(t_m)} + \bar{\delta} \overline{\Omega(t_m)} \right|^2 \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}). \quad (9)$$

Здесь t_m – система точек, выбираемых на всех контурах отверстий L_l . Удовлетворяя условиям минимума функционала (9), для определения неизвестных постоянных, входящих в (7), получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^M \sum_{r=1}^{\mathcal{L}} \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ \left[r_{iln1} \Phi_{rp}(t_m) + r_{iln2} \Phi'_{rp}(t_m) - r_{iln3} \overline{\Psi_{rp}(t_m)} - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - r_{iln4} \overline{\Psi'_{rp}(t_m)} + r_{iln5} \Psi_{rp}(t_m) - r_{iln6} \overline{\Phi_{rp}(t_m)} \right] a_{rp} - \right. \\ & \quad \left. - \left[r_{iln1} \overline{\Psi_{rp}(t_m)} + r_{iln2} \overline{\Psi'_{rp}(t_m)} - r_{iln3} \overline{\Phi_{rp}(t_m)} - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - r_{iln4} \overline{\Phi'_{rp}(t_m)} + r_{iln5} \overline{\Phi_{rp}(t_m)} - r_{iln6} \overline{\Psi_{rp}(t_m)} \right] \bar{a}_{rp} + \right. \\ & \quad \left. - \left[r_{iln1} \overline{\Phi_{rp}(t_m)} + r_{iln2} \overline{\Phi'_{rp}(t_m)} - r_{iln3} \overline{\Psi_{rp}(t_m)} \right] b_{rp} - \right. \\ & \quad \left. - \left[r_{iln3} \overline{\Phi_{rp}(t_m)} + r_{iln4} \overline{\Phi'_{rp}(t_m)} - r_{iln5} \overline{\Psi_{rp}(t_m)} \right] \bar{b}_{rp} \right\} = \\ & = - \sum_{m=1}^M \left\{ r_{iln1} \Phi_0(t_m) + r_{iln2} \Phi'_0(t_m) + r_{iln3} \overline{\Phi_0(t_m)} + \right. \\ & \quad \left. + r_{iln4} \overline{\Phi'_0(t_m)} + r_{iln5} \Psi_0(t_m) + r_{iln6} \overline{\Psi_0(t_m)} - \Psi_{iln} g_l(t_m) - \right. \\ & \quad \left. - \Phi_{iln} \overline{g_l(t_m)} \right\} \quad (i = \overline{1, 2}, \quad l = \overline{1, \mathcal{L}}, \quad n = 1, 2, \dots), \quad (10) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} r_{iln1} &= (\delta - \bar{\delta}) \Phi_{iln} - \delta \Psi_{iln}, \quad r_{iln2} = \delta (t_m - \bar{t}_m) \Phi_{iln}, \quad r_{iln3} = -\bar{\delta} \Phi_{iln} - (\delta - \bar{\delta}) \Psi_{iln}, \\ r_{iln4} &= -\bar{\delta} (t_m - \bar{t}_m) \Psi_{iln}, \quad r_{iln5} = -\delta \Phi_{iln}, \quad r_{iln6} = -\bar{\delta} \Psi_{iln}; \\ \Phi_{1ln}(t) &= -\delta \Phi_{ln}(t) + (\delta - \bar{\delta}) \overline{\Psi_{ln}(t)} + \bar{\delta} (t - \bar{t}) \overline{\Psi'_{ln}(t)} + \bar{\delta} \overline{\Phi_{ln}(t)}, \\ \Psi_{1ln}(t) &= \bar{\delta} \overline{\Psi_{ln}(t)} - (\delta - \bar{\delta}) \Phi_{ln}(t) - \delta (t - \bar{t}) \Phi'_{ln}(t) - \delta \Psi_{ln}(t), \\ \Phi_{2ln}(t) &= (\delta - \bar{\delta}) \overline{\Phi_{ln}(t)} + \bar{\delta} (t - \bar{t}) \overline{\Phi'_{ln}(t)}, \quad \Psi_{2ln}(t) = \bar{\delta} \overline{\Phi_{ln}(t)} - \delta \Phi_{ln}(t). \end{aligned}$$

После решения системы (10) комплексные потенциалы (7) становятся известными, что позволяет вычислять напряжения по формулам

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re} \Phi(z), \quad \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2 \left[(\bar{z} - z) \Phi'(z) - \Phi(z) + \Omega(z) \right]. \quad (11)$$

Численные исследования были проведены для полуплоскости с одним отверстием круговым (рис. 2, а) радиуса a , квадратным (рис. 2, б) со стороной $2a$ и сводчатым (рис. 2, в) с длиной прямолинейных участков $2a$ и радиусом круговой крышки a . Приложенные на прямолинейной границе воздействия моделировались равномерным давлением интенсивности p по отрезку $[-a, a]$. Все приводимые ниже значения величин даны с точностью до множителя p , причем эти величины даны для точек правых половин контуров отверстий (для левых половин в силу геометрической и силовой симметрии они такие же).

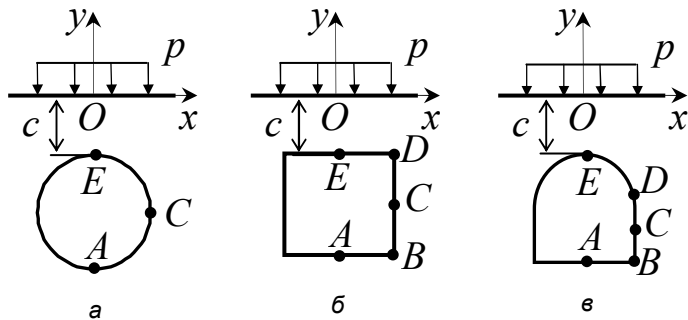


Рис. 2

На рис. 3 для полуплоскости с круговым отверстием при различных значениях отношения c/a длины перемычки к радиусу отверстия a приведены графики распределения нормальных напряжений

σ_s / p на площадках, перпендикулярних к контуру отверстия. Аналогичные графики распределения напряжений σ_s / p для случаев полуплоскости с квадратным и сводчатым отверстием приведены соответственно на рис. 4, 5.

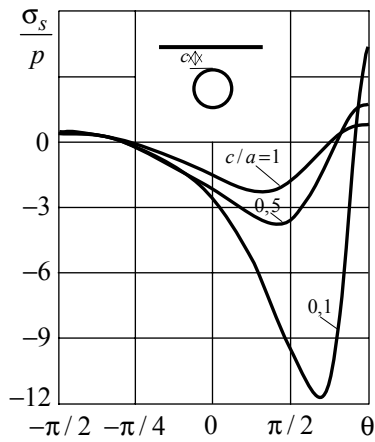


Рис. 3

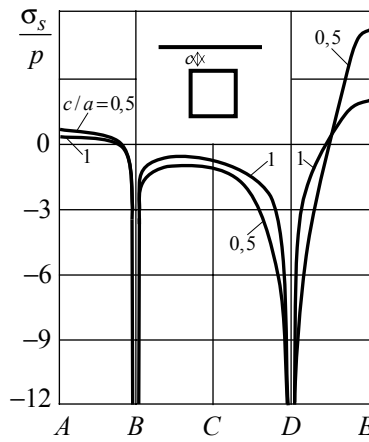


Рис. 4

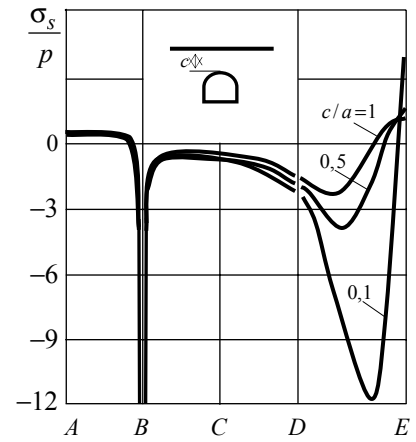


Рис. 5

Из приведенных выше результатов следует, что наименьшая концентрация напряжений имеет место в выработке в форме свода. Более того, создавать выработки кругового или эллиптического сечений неудобно. В случае выработок квадратного или прямоугольного сечений вблизи угловых точек возникает весьма высокая концентрация напряжений, а в центрах крышки и основания выработки – положительные (растягивающие) напряжения, которые могут приводить к выпучиванию породы и разрушению. Высокая концентрация напряжений вблизи угловых точек возникает и в случае сводчатого отверстия, но она меньше, чем в случае квадратного и прямоугольного, а указанные положительные напряжения вблизи центра крышки и основания значительно меньше, причем около основания их можно значительно уменьшить проведением разгрузочных щелей.

Проведенными ранее исследователями установлено, что концентрацию напряжений около свода можно существенно уменьшить проведением разгрузочных щелей из углов основания и боковых сторон. При этом щели из углов основания следует проводить [7] под углом $\pi/4$ к горизонту, отклонение от этого угла на $\pm\pi/18$ практически не влияет на значения максимальных напряжений. Горизонтальные разрезы следует проводить через середины прямолинейных вертикальных сторон свода. Однако для подземных выработок вблизи границы такие разгрузочные разрезы проводить нецелесообразно. Что же касается уменьшения положительных (выпучивающих) напряжений вблизи основания, то этого можно добиться проведение вертикальных щелей из центра основания (рис. 6). Как влияет длина этой разгрузочной щели l на значения напряжений, видно из данных таблицы, где для различных значений отношения l/a длины щели к полудлине основания приведены значения нормальных напряжений σ_s / p в точках 1(0,01a; -3,5a), 2(0,5a; -3,5a), 3(0,998a; -3,5a), 4(a; -3,499a), 5(a; -3a), 6(a; -2,5a), 7(a; -2a), 8(a; -1,501a), 9(a/√2; -1,5a + a/√2), 10(0; -0,5a). Из данных таблицы видно, что наличие щели существенно снижает положительные (выпучивающие) напряжения вблизи основания выработки, незначительно меняя их в других зонах. При этом, чем больше длина щели, тем меньше значения напряжений. Аналогичные результаты получаются в анизотропном массиве [8].

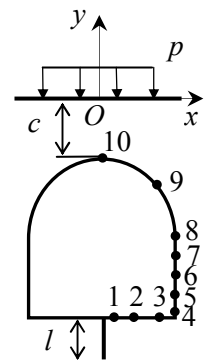


Рис. 6

Точки	l/a					
	0	0,1	0,2	0,3	0,5	1,0
1	0,226	0,146	0,008	0,007	-0,001	-0,001
2	0,241	0,227	0,168	0,125	0,064	0,046
3	-0,421	-0,473	-0,618	-0,703	-0,865	-1,151
4	-2,008	-1,887	-2,002	-1,972	-2,120	-2,400
5	-0,585	-0,570	-0,579	-0,575	-0,575	-0,585
6	-0,685	-0,666	-0,678	-0,675	-0,678	-0,686
7	-0,921	-0,893	-0,914	-0,906	-0,910	-0,924
8	-3,036	-0,168	-1,409	-1,421	-1,086	-2,422
9	-3,588	-3,590	-3,597	-3,602	-3,598	-3,594
10	1,551	1,559	1,546	1,549	1,558	1,529

Выводы. Таким образом, исследованиями установлено, что наиболее удобной в плане уменьшения концентрации напряжений около выработки вблизи дневной поверхности является сводчатая форма. Для предотвращения выпучивания вблизи основания надо проводить из центра основания разгрузочные щели, хотя бы небольшой длины.

РЕЗЮМЕ

З використанням методів комплексних потенціалів, інтегралів типу Коші і найменших квадратів досліджено напружений стан гірничого масиву з виробками поблизу денної поверхні. Досліджено вплив форми вироблення на концентрацію напружень біля її поверхні, довжини розвантажувальної щілини в основі на зменшення випинання породи.

Ключові слова: підземна виробка, концентрація напружень, метод комплексних потенціалів, інтеграли типу Коші, розвантажувальні щілини.

SUMMARY

With the use of complex potentials, the integrals of Cauchy type and least squares investigated the stress state of rock mass in near the daily workings of the surface. The effect of shape on the development of stress concentration near the surface, the length of unloading cracks at the bottom to reduce buckling of the breed.

Keywords: underground development, stress concentration, the method of complex potentials, the integrals of Cauchy type, unloading cracks.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Космодамианский А.С. Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами / А.С.Космодамианский. – К.: Вища школа, 1975. – 228 с.
2. Шерман Д.И. Упругая весомая полуплоскость, ослабленная отверстиями эллиптической формы, достаточно близко расположенным от ее границы / Д.И. Шерман // Проблемы механики сплошной среды. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – С. 527-563.
3. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И.Мусхелишвили. – М.: Наука, 1969. – 708 с.
4. Калоеров С.А. Об общих представлениях комплексных потенциалов для изотропных пластинок с отверстиями, трещинами и включениями / С.А.Калоеров, С.В.Вакуленко // Теорет. и прикладная механика. – 2001. – Вып. 32. – С.79-93.
5. Вакуленко С.В. Первая основная задача для многосвязной изотропной полуплоскости отверстиями и трещинами / С.В.Вакуленко // Теорет. и прикладная механика. – 2001. – Вып. 33. – С.91-99.
6. Калоеров С.А. Двумерное напряженное состояние многосвязного анизотропного тела с полостями и трещинами / С.А.Калоеров, Е.С.Горянская // Теорет. и прикладная механика. – 1995. – Вып.25. – С. 45-56.
7. Управление напряженным состоянием породного массива и устойчивостью горных пород / В.А.Полухин, С.А.Калоеров, Ю.Б.Грядущий, Е.С.Горянская. – Донецк: Юго-Восток, 2002. – 304 с.
8. Калоеров С.А. Напряженное состояние горного массива с выработками вблизи загруженной дневной поверхности / С.А.Калоеров, Е.В.Авдюшина // Наук. праці Донец. нац. техн. ун-ту. Сер. Гірнично-електромеханічна. – Вип. 83. – Донецк: ДонНТУ, 2004. – С.129-134.

Поступила в редакцію 17.02.2012 г.