

УДК 539.374

**УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ИЗОТРОПНОЙ ПЛОСКОСТИ С ДВУМЯ КРУГОВЫМИ ВЫРЕЗАМИ ПРИ ДВУСТОРОННЕМ ВНЕШНЕМ СЖАТИИ**

*Н. И. Кодак, В. Н. Ложкин*

*Институт прикладной математики и механики НАН Украины, г. Донецк*

Методом последовательных конформных отображений и коллокации изучено упругопластическое равновесие неограниченной изотропной плоскости с двумя одинаковыми круговыми вырезами в случае идеальной пластичности. Плоскость сжимается равномерными усилиями вдоль и поперек линии центров вырезов. Контуры вырезов свободны от внешних воздействий. На неизвестной границе раздела упругой и пластических областей напряжения являются непрерывными. Определены условия, при которых имеет место начальный пластический охват контуров вырезов и при которых возможно наибольшее сближение пластических областей.

*Ключевые слова:* неограниченная изотропная плоскость, круговой вырез, упругопластическое равновесие, начальный пластический охват, упругая и пластическая области, неизвестная граница раздела, конформное отображение, коллокация.

**Введение.** Для плоской деформации или обобщенного плоского состояния многие упругопластические задачи для изотропных сред с круговыми вырезами при различных условиях пластичности ранее были решены с помощью аналитических функций. Две из этих функций характеризуют напряженное состояние упругой части среды, остальные конформно отображают внешности единичных окружностей на внешности неупругих областей, полностью охватывающих контуры вырезов и несоприкасающихся друг с другом. Коэффициенты разложений аналитических функций определяются из условия непрерывности упругих и пластических напряжений на границе их раздела методом малого параметра. Такой подход позволил получить удовлетворительные качественные результаты в случаях, когда контуры вырезов и внешние границы охватывающих их неупругих областей достаточно удалены друг от друга [1 – 6].

Анализ таких работ имеется в монографии [7]. Отметим, что метод, предложенный в статье [1], в работах [2 – 6] использован в случае, когда среда имеет два одинаковых круговых выреза.

Сегодня разработаны простые и эффективные приближенные методы решения двумерных упругопластических задач (для гибких сферических и цилиндрических оболочек с двумя круговыми вырезами) методом конечного элемента [8 – 10].

В настоящей работе предложен и использован метод последовательных конформных отображений для изучения возникновения и развития неупругих областей в изотропной плоскости с двумя одинаковыми круговыми вырезами от начального неупругого охвата их контуров в случае идеальной пластичности. В качестве исходного приближения берется конформное отображение, построенное методом малого параметра [4]. Из условий непрерывности упругих и пластических напряжений на подлежащей определению границе их раздела методом коллокации находятся коэффициенты разложений аналитических функций, характеризующих напряженное состояние упругой части плоскости, с последующим уточнением коэффициентов отображения для построения следующего приближения решения задачи.

**Постановка задачи.** Рассмотрим неограниченную изотропную плоскость с двумя одинаковыми круговыми вырезами радиуса  $R$ . Вырезы расположены на оси  $ox_1$  на расстоянии  $lR$  от центра координат  $ox_1x_2$ . Плоскость сжимается усилиями  $q_1$  вдоль оси  $ox_1$  и  $q_2$  – вдоль оси  $ox_2$ .

Контуры вырезов свободны от внешних воздействий. Расстояние между центрами вырезов и интенсивность усилий  $q_1$  и  $q_2$  таковы, что в плоскости возле вырезов возникают пластические области. Они полностью охватывают контуры вырезов, не соприкасаются и их внешние границы находятся на расстоянии  $hR > 0$  друг от друга по оси  $ox_1$  (рис. 1).

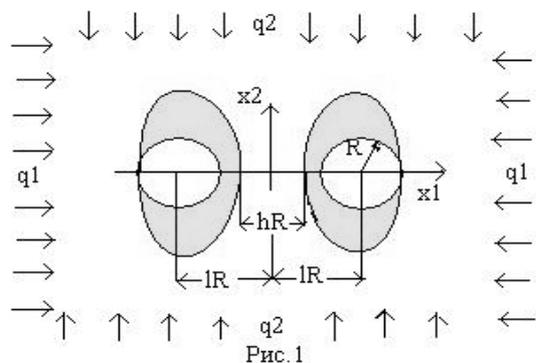


Рис. 1

Геометрическая и силовая симметрия равновесия плоскости позволяет исследовать возникновение и развитие пластической области около одного – правого выреза.

Введем безразмерные координаты

$$z = \xi_1 + i\xi_2 = R^{-1}(x_1 + ix_2), \quad z - l = r \exp(i\theta). \tag{1}$$

Напряжения в упругой части плоскости удовлетворяют уравнениям равновесия, соотношению совместности и условиям внешнего нагружения [11]

$$\begin{aligned} \partial\sigma_{11}^e / \partial\xi_1 + \partial\tau_{12}^e / \partial\xi_2 = 0, \quad \partial\tau_{12}^e / \partial\xi_1 + \partial\sigma_{22}^e / \partial\xi_2 = 0; \\ (\partial^2\partial\xi_1^2 + \partial^2 / \partial\xi_2^2)(\sigma_{11}^e + \sigma_{22}^e) = 0; \quad |z| \rightarrow \infty: \sigma_{11}^e = -q_1, \quad \sigma_{22}^e = -q_2, \quad \tau_{12}^e = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Напряжения в правой пластической области удовлетворяют уравнениям равновесия, соотношению Мизеса и условиям на контуре выреза [7]

$$\begin{aligned} r\partial\sigma_r^p / \partial r + \sigma_r^p - \sigma_\theta^p + \partial\tau_{r\theta}^p / \partial\theta = 0, \quad r\partial\tau_{r\theta}^p / \partial r + 2\tau_{r\theta}^p + \partial\sigma_\theta^p / \partial\theta = 0; \\ (\sigma_r^p - \sigma_\theta^p)^2 + (2\tau_{r\theta}^p)^2 = 4k^2; \quad |z-l|=r=1: \sigma_r^p = \tau_{r\theta}^p = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $k$  – постоянная, имеющая размерность напряжений. На границе раздела упругой и пластической областей напряжения являются непрерывными.

**Аналитическое решение задачи.** Напряженное состояние упругой части плоскости описывается функциями  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$ , являющимися решением задачи (2). С учетом геометрической и силовой симметрии задачи их можно представить так [12]

$$\Phi(z), \Psi(z) = -\alpha / 2, \beta + \sum_{n=1} (a_n, b_n)\psi(z), \quad (4)$$

$$\psi_n(z) = \zeta^{-(n+1)}(z-l) + (-1)^{n+1} \zeta_1^{-(n+1)}(z+l),$$

где

$$\alpha = (2k)^{-1}(q_1 + q_2), \quad \beta = (2k)^{-1}(q_1 - q_2). \quad (5)$$

Значения  $\zeta(z-l)$  и  $\zeta_1(z+l)$  находятся из равенств

$$\begin{aligned} z-l = r_0\omega(\zeta), \quad \omega(\zeta) = \sum_{n=-1} c_{n+2}\zeta^{-n}, \quad c_1 = 1; \quad \zeta = \rho \exp(i\phi); \\ z+l = r_0\omega_1(\zeta_1), \quad \omega_1(\zeta_1) = -\omega(-\zeta_1) = \sum_{n=-1} (-1)^{n+1} c_{n+2}\zeta_1^{-n}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь функции  $z-l = r_0\omega(\zeta)$  и  $z+l = r_0\omega_1(\zeta_1)$  конформно отображают внешности единичных окружностей  $|\zeta|=1$  и  $|\zeta_1|=1$  соответственно на внешности правой и левой пластических областей.

Для упругих напряжений справедливы равенства [1, 12]

$$\sigma_{11}^e + \sigma_{22}^e = 2k[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \quad \sigma_{22}^e - \sigma_{11}^e + 2i\tau_{12}^e = 2k[(\bar{z}-z)\Phi'_z(z) + \Psi(z)] \quad (7)$$

В окрестности правой пластической области функции (4) принимают вид

$$\Phi(\zeta), \Psi(\zeta) = -\alpha / 2, \beta + \sum_{n=1} (a_n, b_n)\psi_n(\zeta), \quad \psi_n(\zeta) = \zeta^{-(n+1)} + (-1)^{n+1} \zeta_1^{-(n+1)}(\zeta), \quad (8)$$

где значения  $\zeta_1(\zeta)$  находятся из равенства

$$\zeta_1(\zeta) = 2l / r_0 + \zeta + \sum_{n=0} c_{n+2}[\zeta^{-n} + (-1)^n \zeta_1^{-n}(\zeta)]. \quad (9)$$

Соотношения (7) перепишутся так

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^e + \sigma_\phi^e = 2k[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}], \\ \sigma_\rho^e - i\tau_{\rho\phi}^e = k[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} - \Omega_1(\zeta, \bar{\zeta})\Phi'_\zeta(\zeta) - \Omega_2(\zeta, \bar{\zeta})\Psi(\zeta)], \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\Omega_1(\zeta, \bar{\zeta}) = \zeta[\overline{\omega(\zeta)} - \omega(\zeta)] / \bar{\zeta}\omega'(\zeta), \quad \Omega_2(\zeta, \bar{\zeta}) = \zeta\omega'(\zeta) / \bar{\zeta}\omega'(\zeta). \quad (11)$$

Решение задачи (3) для правой пластической области имеет вид [7,11]

$$\sigma_r^p = -2k \ln r, \quad \sigma_\theta^p = -2k(1 + \ln r), \quad \tau_{r\theta}^p = 0. \quad (12)$$

Тогда на ее внешней границе  $z-l = r_0\omega(\sigma)$  будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^p + \sigma_\phi^p = -2k[1 + 2 \ln r_0 + \ln |\omega(\sigma)|^2], \\ \sigma_\rho^p - i\tau_{\rho\phi}^p = -2k[1 + 2 \ln r_0 + \ln |\omega(\sigma)|^2 - \Omega_3(\sigma, \bar{\sigma})], \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\Omega_3(\zeta, \bar{\zeta}) = \zeta \omega'(\zeta) \overline{\omega(\zeta)} / \bar{\zeta} \overline{\omega'(\zeta)} \omega(\zeta), \quad \sigma = \exp(i\varphi). \quad (14)$$

Коэффициенты  $r_0, c_n, a_n, b_n$  разложений (6), (8) находятся из условия непрерывности упругих (10) и пластических (13) напряжений

$$\Phi(\sigma) + \overline{\Phi(\sigma)} = -1 - 2 \ln r_0 - \ln |\omega(\sigma)|^2, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma) + \overline{\Phi(\sigma)} - \Omega_1(\sigma, \bar{\sigma}) \Phi'_\zeta(\sigma) - \Omega_2(\sigma, \bar{\sigma}) \Psi(\sigma) = \\ = -1 - 2 \ln r_0 - \ln |\omega(\sigma)|^2 + \Omega_3(\sigma, \bar{\sigma}). \end{aligned} \quad (16)$$

В случае, когда расстояния между центрами вырезов и между внешними границами пластических областей достаточно велики, решение задачи, построенное методом малого параметра, приведено в работе [4]. В частности уточненное отображение (6) буде таким

$$z - l = r_0 \omega(\zeta), \quad \omega(\zeta) = \zeta + c_2 + c_3 \zeta^{-1} + c_4 \zeta^{-2} + c_5 \zeta^{-2} (\zeta - \zeta_0)^{-1}, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} r_0 &= r_p \exp\{-\beta \delta^2 + [(1 + \beta)^2 + (15/2)\beta^2] \delta^4\}, \\ r_p &= \exp(\alpha/2 - 1/2), \quad \delta = r_p / 2l - \beta(r_p / 2l)^3, \\ c_2 &= 2(1 - \beta)\beta \delta^3, \quad c_3 = -\beta + (1 + \beta^2)\delta^2 - [8(1 + \beta)^3 - 6(1 + \beta)]\delta^4, \\ c_4 &= -2(1 + \beta)(1 + 2\beta)\delta^3, \quad c_5 = 3(1 + \beta)(1 + 3\beta)\delta^4, \quad \zeta_0 = 2\beta \delta^3. \end{aligned} \quad (18)$$

**Численное решение задачи.** В случае, когда плоскость имеет один круговой вырез (задача Л.А.Галина), в работе [13] установлено, что начальный пластический охват его контура возможен при следующих ограничениях внешних усилий

$$0,65006 < (\alpha + \beta) / (\alpha - \beta) < 1,53581, \quad |\beta| < 0,57581. \quad (19)$$

Решение задачи строится методом последовательных конформных отображений. Для фиксированного расстояния  $l$  и фиксированного значения параметра  $\beta$ , удовлетворяющего второму ограничению (19), в качестве исходного приближения берется отображение (17). Уточняется значение параметра  $\alpha_n$ , при котором возможен начальный пластический охват контура правого выреза.

Строится упругое решение для полученного отображения. Из условия (16) методом коллокации находятся коэффициенты  $a_n, b_n$  разложений (8). Для этого его распишем так

$$\begin{aligned} \sum_{n=1} a_n [2 \operatorname{Re} \psi_n(\sigma) - \operatorname{Re} \Omega_1(\sigma, \bar{\sigma}) \operatorname{Re} \psi'_n(\sigma) + \operatorname{Im} \Omega_1(\sigma, \bar{\sigma}) \operatorname{Im} \psi'_n(\sigma)] - \\ - \sum_{n=1} b_n [\operatorname{Re} \Omega_2(\sigma, \bar{\sigma}) \operatorname{Re} \psi_n(\sigma) - \operatorname{Im} \Omega_2(\sigma, \bar{\sigma}) \operatorname{Im} \psi_n(\sigma)] = \\ = \alpha + \beta \operatorname{Re} \Omega_2(\sigma, \bar{\sigma}) - 1 - 2 \ln r_0 - \ln |\omega(\sigma)|^2 + \Omega_3(\sigma, \bar{\sigma}), \\ \sum_{n=1} a_n [\operatorname{Im} \Omega_1(\sigma, \bar{\sigma}) \operatorname{Re} \psi'_n(\sigma) + \operatorname{Re} \Omega_1(\sigma, \bar{\sigma}) \operatorname{Im} \psi'_n(\sigma)] + \\ + \sum_{n=1} b_n [\operatorname{Im} \Omega_2(\sigma, \bar{\sigma}) \operatorname{Re} \psi_n(\sigma) + \operatorname{Re} \Omega_2(\sigma, \bar{\sigma}) \operatorname{Im} \psi_n(\sigma)] = \\ = -\beta \operatorname{Im} \Omega_2(\sigma, \bar{\sigma}) - \operatorname{Im} \Omega_3(\sigma, \bar{\sigma}). \end{aligned} \quad (20)$$

Для уточнения коэффициентов  $r_0$  и  $c_n$  используем преобразованное условие (15)

$$\ln |r_0 \omega(\sigma)|^2 = (1 + \mu)^{-1} [\alpha - 1 - 2 \sum_{n=1} a_n \operatorname{Re} \psi_n(\sigma) + \mu \ln |r_0 \omega(\sigma)|^2]. \quad (21)$$

Здесь  $\mu$  – произвольная постоянная. Отображение (6) представим так

$$r_0 \omega(\zeta) = \omega_0(\zeta) + \omega_h(\zeta), \quad \omega_0(\zeta) = \sum_{n=-1} t_{n+2} \zeta^{-n}, \quad t_n = r_0 c_n, \quad \omega_h(\zeta) = \sum_{n=-1} h_{n+2} \zeta^{-n}. \quad (22)$$

Величины  $h_n$  предполагаются малыми. Учитывая, что

$$\ln |r_0 \omega(\sigma)|^2 \approx \ln |\omega_0(\sigma)|^2 + |\omega_0(\sigma)|^{-2} [\overline{\omega_0(\sigma)} \omega_h(\sigma) + \omega_0(\sigma) \overline{\omega_h(\sigma)}],$$

условие (21) принимает вид

$$2 \sum_{n=-1} h_{n+2} [\operatorname{Re} \omega_0(\sigma) \cos n\phi + \operatorname{Im} \omega_0(\sigma) \sin n\phi] = (23)$$

$$= (1 + \mu)^{-1} |\omega_0(\sigma)|^2 [\alpha - 1 - 2 \sum_{n=1} a_n \operatorname{Re} \psi_n(\sigma) - \ln |\omega_0(\sigma)|^2].$$

Из него методом коллокации найдем постоянные  $h_n$ . Новые коэффициенты  $r_0$  и  $c_n$  подсчитываются так

$$r_0 = t_1 + h_1, \quad c_n = (t_1 + h_1)^{-1} (t_n + h_n). \quad (24)$$

При построении приближений возможно пересечение оси  $ox_2$  внешней границей правой пластической области. Поэтому параметр  $r_0$  уточняется следующим образом

$$l + r_0 \omega(-1) \geq 0: r_0 = t_1 + h_1; \quad l + r_0 \omega(-1) < 0: r_0 = -l / \omega(-1). \quad (25)$$

Точки коллокации ( $0 \leq \phi \leq \pi$ ) выбираются на контуре  $z - l = r_0 \omega(\sigma)$  не симметрично относительно прямой  $x_1 = l$ . Значения функции  $\zeta_1(\zeta)$  вычисляются из уравнения (9) методом Вегстейна. Сходимость приближений обеспечивается подбором произвольной постоянной  $\mu$ .

Построение приближений заканчивается при совпадении двух последних внешних границ правой пластической области с заданной точностью. Затем осуществляется переход с заданным шагом к новому значению параметра  $\alpha$ , вычисляется коэффициент  $r_0$  по формулам (18), постоянные  $c_n$  сохраняются от предыдущего шага. Определяющим критерием решения задачи является точность выполнения условия непрерывности напряжений (10), (13) на границе их раздела

$$z - l = r_0 \omega(\sigma): \sigma_\rho^e = \sigma_\rho^p, \quad \sigma_\phi^e = \sigma_\phi^p, \quad \tau_{\rho\phi}^e = \tau_{\rho\phi}^p. \quad (26)$$

С увеличением параметра  $\alpha$  и фиксированном значении  $\beta$  последующая пластическая область полностью охватывает предыдущую.

Результаты численных исследований сведены в таблице. В ней для различных расстояний  $l$  между началом координат и центрами вырезов и различных значений параметра  $\beta$  приведены:

- значения параметра  $\alpha_n$ , при котором происходит начальный пластический охват контуров вырезов;
- значение параметра  $\alpha_k$ , до которого предложенный метод позволил довести вычисления;
- значения параметра  $h$  (рис.1), характеризующего расстояние между внешними границами пластических областей и соответствующего величинам  $\alpha_k$  и  $\beta$ .

Таблица

1	1.75			2.0			3.0			4.0		
	$\beta$	$\alpha_n$	$\alpha_k$	$h$	$\alpha_n$	$\alpha_k$	$h$	$\alpha_n$	$\alpha_k$	$h$	$\alpha_n$	$\alpha_k$
-0,35							1,93	2,1068	0,087	1,89	2,6830	0,074
-0,30							1,78	2,1600	0,093	1,76	2,7360	0,096
-0,25							1,64	2,2140	0,085	1,61	2,7900	0,078
-0,20							1,51	2,2680	0,086	1,54	2,8440	0,087
-0,15				1,45	1,510	0,086	1,38	2,3227	0,081	1,35	2,8983	0,094
-0,10				1,34	1,565	0,083	1,28	2,3770	0,097	1,25	2,9532	0,094
-0,05	1,29	1,352	0,089	1,24	1,620	0,088	1,17	2,4328	0,081	1,15	3,0088	0,078
0,0	1,21	1,408	0,085	1,15	1,676	0,085	1,07	2,4880	0,095	1,00	3,0644	0,086
0,05	1,16	1,464	0,087	1,08	1,732	0,086	1,06	2,5444	0,089	1,08	3,1208	0,071
0,10	1,16	1,520	0,094	1,14	1,788	0,096	1,16	2,6010	0,092	1,17	3,1770	0,096
0,15	1,18	1,578	0,084	1,26	1,846	0,082	1,26	2,6580	0,098	1,26	3,2342	0,094
0,20	1,31	1,635	0,092	1,32	1,903	0,093	1,38	2,7160	0,092	1,38	3,2920	0,090
0,25	1,42	1,693	0,095	1,44	1,961	0,097	1,50	2,7740	0,097	1,52	3,3501	0,099
0,30	1,54	1,752	0,094	1,56	2,020	0,095	1,62	2,8330	0,094	1,65	3,4090	0,099
0,35				1,68	2,080	0,088	1,75	2,8928	0,085	1,78	3,4685	0,098

На рис. 2 – 5 в системе безразмерных координат  $o\xi_1\xi_2$  изображены внешние границы правых пластических областей, соответствующие  $\alpha_n$  и  $\alpha_k$ , для таких значений параметров  $l$  и  $\beta$ :

$$l = 1,75, \quad \beta = -0,05, \quad \beta = 0,30, \quad (\text{рис.2});$$

$$l = 2,0, \quad \beta = -0,15, \quad \beta = 0,35, \quad (\text{рис.3});$$

$$l = 3,0, \quad \beta = -0,35, \quad \beta = 0,35, \quad (\text{рис.4});$$

$$l = 4,0, \quad \beta = -0,35, \quad \beta = 0,35, \quad (\text{рис.5}).$$

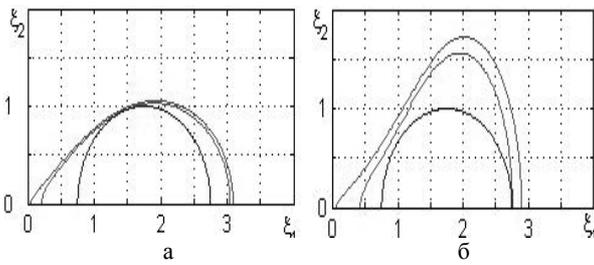


Рис.2

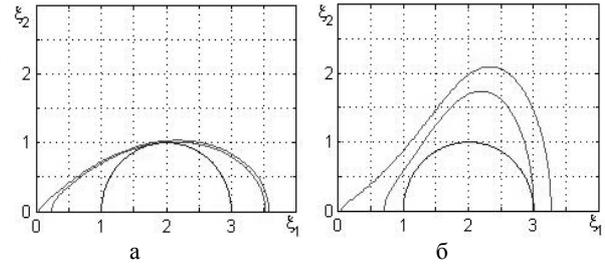


Рис.3

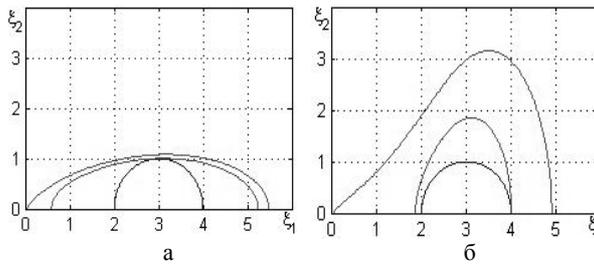


Рис.4

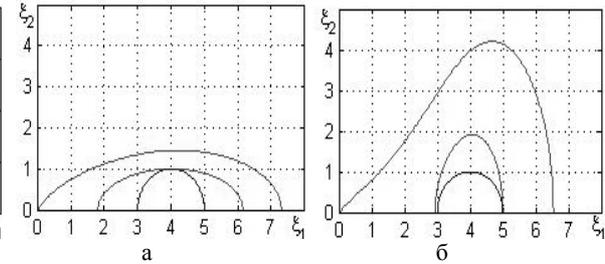


Рис.5

Установлено, что при выполнении условий

$$l = 1,75; \beta < -0,05; \quad l = 2,0; \beta < -0,15; \quad l = 3,0; \beta < -0,35 \quad (27)$$

раздельный начальный пластический охват контуров вырезов отсутствует. В этих случаях соприкосновение пластических областей происходит до полного охвата ими своих контуров вырезов.

Согласно обозначений (5) внешние усилия  $q_1, q_2$  через параметры  $\alpha, \beta$  выражаются так

$$q_1 = (\alpha + \beta)k, \quad q_2 = (\alpha - \beta)k. \quad (28)$$

**Выводы.** Проанализировав данные, приведенные в таблице, можно утверждать, что метод последовательных конформных отображений совместно с методом коллокации позволил изучить упругопластическое равновесие неограниченной изотропной плоскости с двумя одинаковыми круговыми вырезами для расстояний между их контурами от полутора радиуса и сблизить внешние границы охватывающих эти контуры пластических областей до расстояний, меньших одной десятой радиуса выреза. Определены значения геометрических и силовых параметров рассмотренной задачи, при которых раздельный пластический охват контуров вырезов отсутствует, а соприкосновение пластических областей происходит до полного охвата ими своих контуров вырезов.

Следует отметить вычислительные особенности, возникшие при использовании предложенного метода. С одной стороны с расширением пластических областей в плоскости (с ростом значений параметра  $\alpha$ ) необходимо было увеличивать количество коэффициентов разложений аналитических функций (6), (8). С другой стороны, для их определения из равенств (20), (23) следовало брать больше точек колокации, что не всегда приводило к улучшению результатов. Поэтому при сближении внешних границ пластических областей приходилось снижать точность удовлетворения условиям непрерывности напряжений (26). Так при начальном пластическом охвате контуров вырезов она составляла  $10^{-4}$ , а в конце счета только  $10^{-2}$ . Кроме того, чтобы при построении конформных отображений (6) для близко расположенных пластических областей не происходило пересечение их внешних границ, необходимо было ввести правило уточнения (25) основного коэффициента отображений. Все выше сказанное обеспечило сходимость метода последовательных конформных отображений.

Предположим, что сжатие плоскости поперек линии центров является наибольшим:  $q_1 < q_2, \beta < 0$ . После анализа графиков, приведенных на рис. 2–4, а, можно заключить, что внешние границы пластических областей сохраняют свою гладкость вплоть до соприкосновения.

Пусть сжатие плоскости вдоль линии центров является наибольшим:  $q_1 > q_2, \beta > 0$ . После анализа графиков, приведенных на рис. 2–4, б, можно сделать вывод, что внешние границы пластических областей при соприкосновении в начале координат имеют точку возврата, в которой отображения (6), теряют свою конформность.

Следует отметить, что метод последовательных конформных отображений в сочетании с методом коллокации можно использовать при замене в задаче (3) условия Мизеса другим условиям пластичности [13, 14].

## РЕЗЮМЕ

Методом послідовних конформних відображень і колокації вивчено пружнопластичну рівновагу необмеженої ізотропної площини з двома однаковими круговими вирізами у випадку ідеальної пластичності. Площина стискається рівномірними зусиллями вздовж і впоперек лінії центрів вирізів. Контури вирізів вільні від зовнішніх впливів. На невідомій границі розділу пружної і пластичних областей напруження є неперервними. Знайдено зусилля, при яких має місце початкове пластичне охоплення контурів вирізів та при яких можливо найбільше зближення непружних областей.

*Ключові слова:* необмежена ізотропна площина, круговий виріз, пружнопластична рівновага, початкове непружне охоплення, пружна і пластична області, невідома границя розділу, конформне відображення, колокація.

## SUMMARY

By method of successive conformal mappings and by method of collocation elastoplastic equilibrium of an infinite isotropic plane with two the same circular cut outs in the case of an ideal plasticity is studied. The plane by a uniform load along and across the line of centers of the cut outs is compressed. Their contours from external force are free. Stress on an unknown border of separating of the elastic and plastic domains are continuous. Efforts, at which the initial plastic inclusion of contours of the cut outs take place and at which the maximum convergence of plastic domains is possible, are determined.

*Keywords:* infinite isotropic plane, circular cut out, elastoplastic equilibrium, initial plastic inclusion, elastic and plastic domains, unknown border of separating, conformal mapping, collocation.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Космодамианский А.С. Упругопластическая задача для изотропного массива, ослабленного бесконечным рядом одинаковых круговых вырезов / А.С.Космодамианский // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1961. – №4. – С. 187-188.
2. Аннин Б.Д. Упругопластическое распределение напряжений в плоскости, ослабленной двумя круговыми отверстиями / Б.Д.Аннин // Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1969. – № 1. – С. 234-241.
3. Остросаблин Н.И. Упругопластическая задача для плоскости с двумя одинаковыми круговыми отверстиями / Н.И.Остросаблин // Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1970. – № 4. – С. 114-118.
4. Иванов Г.М. Упругопластическая задача для изотропного массива, ослабленного двумя круговыми вырезками / Г.М.Иванов, А.Н.Семенихина // Прикладная механика. – 1973. – Т. 9, № 3. – С. 131-133.
5. Мирсалимов В.М. Об одной упругопластической задаче для массива, ослабленного двумя одинаковыми круговыми вырезками / В.М.Мирсалимов // Физ-техн. проблемы разработки полезных ископаемых. – 1975. – № 5. – С. 142-146.
6. Остросаблин Н.И. Упругопластическое распределение напряжений в плоскости, ослабленной конечным числом круговых отверстий / Н.И.Остросаблин // Прикладная механика. – 1973. – Т. 9, № 10. – С. 124-128.
7. Аннин Б.Д. Упругопластическая задача / Б.Д.Аннин, Г.П.Черепанов. – Новосибирск: Наука, 1983. – 238 с.
8. Гузь А.Н. Неупругое деформирование гибких сферических оболочек, ослабленных двумя круговыми отверстиями / А.Н.Гузь, Е.А.Сторожук, И.С.Чернышенко // Прикладная механика. – 2004. – Т. 40, № 6. – С. 90-98.
9. Гузь А.Н. Упругопластическое состояние цилиндрических оболочек с двумя круговыми отверстиями / А.Н.Гузь, Е.А.Сторожук, И.С.Чернышенко // Прикладная механика. – 2004. – Т. 40, № 10. – С. 107-112.
10. Сторожук Е.А. Упругопластическое деформирование гибких цилиндрических оболочек с двумя круговыми вырезами при осевом растяжении / Е.А.Сторожук, И.С.Чернышенко // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, № 5. – С. 52-57.
11. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий / Г.Н.Савин. – Киев: Наук. думка, 1968. – 878 с.
12. Ворович И.И. Упругое равновесие изотропной плоскости, ослабленной бесконечным рядом одинаковых криволинейных отверстий / И.И.Ворович, А.С.Космодамианский // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1959. – № 4. – С. 69-76.
13. Ложкин В.Н. Условия пластического охвата контура кругового отверстия в задаче Л.А.Галина и ее обобщениях / В.Н.Ложкин, Н.И.Кодак // Доп. НАН України. – 2003. – № 3. – С. 42-46.
14. Космодамианский А.С. Определение пластической области около кругового отверстия с учетом объемных и сдвиговых деформаций / А.С.Космодамианский, В.Н.Ложкин // Доп. НАН України. – 1995. – № 11. – С. 49-51.

*Поступила в редакцию 15.12.2011 г.*