УДК 531.38

ПРЕЦЕССИОННО–ИЗОКОНИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ ВТОРОГО ТИПА В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ГИРОСТАТА С ПЕРЕМЕННЫМ ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ

А. В. Мазнев, Г. А. Котов[*]
Донбасская национальная академия строительства и архитектуры, г. Макеевка

Получены условия существования прецессионно-изоконических движений второго типа в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом. Получены новые решения уравнений движения гиростата с заданным свойством.

Ключевые слова: гиростат, гиростатический момент, прецессии, изоконические движения.

Введение. Применение теоремы Пуансо прямого кинематического истолкования движения гиростата, основанного на уравнениях П.В. Харламова [1], позволило получить значительную информацию о свойствах движения [2, 3]. Одним из наглядных классов движения гиростата является класс изоконических движений, который характеризуется симметричностью подвижного и неподвижного годографов угловой скорости относительно касательной к ним плоскости.

Прецессионные движения, обладающие свойством постоянства угла между двумя прямыми, фиксированными соответственно в теле и в пространстве, имеют большое значение для приложений [4]. Весьма естественным является рассмотрение движений гиростата, характеризующихся двумя указанными выше свойствами. Такие движения называются прецессионно–изоконическими движениями [4, 5].

В случае, когда гиростатический момент [6] постоянен, получены многочисленные результаты [4, 5] по изучению условий существования прецессионно–изоконических движений. Поэтому актуальной задачей является задача исследования прецессионно–изоконических движений в случае переменного гиростатического момента. Отметим, что постановку задачи о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом рассматривали Ж. Лиувилль [7], В. Вольтерра [8], Н.Е. Жуковский [9], П.В. Харламов [6].

Условия существования простейших классов прецессионных движений неавтономного гиростата изучены в работах [10 – 12]. В работе [13] предложен общий метод исследования прецессионных движений гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил. Особенность этого метода состоит в том, что его применение позволяет получить замкнутую систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений относительно величины гиростатического момента и скоростей прецессии и собственного вращения.

В данной работе исследован класс прецессионно-изоконических движений гиростата, который характеризуется постоянством скорости собственного вращения. Получены новые решения уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил.

Постановка задачи. Пусть гиростат намагничен, несет на себе электрические заряды и находится под действием электрических, магнитных, ньютоновских и лоренцевых сил. Тогда уравнения движения гиростата можно записать в виде [6,14]

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega} - L\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega}\times\left(B\boldsymbol{\nu} - \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}\right) + \boldsymbol{\nu}\times\left(C\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{s}\right), \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\lambda} = L. \tag{2}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – угловая скорость тела-носителя; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей; L – проекция момента сил, действующих на носимые тела, относительно оси вращения; $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – единичный вектор, характеризующий направление вектора гиростатического момента $\lambda\boldsymbol{\alpha}$; $\lambda(t)$ – ограниченная, дифференцируемая функция времени; $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, сонаправленный с вектором обобщенного цента масс гиростата; $A = (A_{ij})$ – тензор инерции гиростата; $B = (B_{ij})$ и $C = (C_{ij})$ – симметричные постоянные матрицы третьего порядка; точка над переменными $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\omega}$, λ обозначает относительную производную по времени t.

Уравнения (1), (2) имеют два первых интеграла

$$\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1, \quad \left(A\boldsymbol{\omega} + \lambda\boldsymbol{\alpha}\right)\cdot\boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}\left(B\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}\right) = k, \tag{3}$$

где k – произвольная постоянная.

Рассмотрим класс прецессионных движений гиростата относительно вертикали ν для уравнений (1), (2), т.е. в процессе движения угол между единичным вектором $\boldsymbol{a}$, неизменно связанным с телом и единичным вектором ν, неизменным в пространстве постоянен и равен θ_0. Подвижную систему координат свяжем с вектором $\boldsymbol{a}$ таким образом, чтобы $\boldsymbol{a}=(0,0,1)$.

Тогда имеет место инвариантное соотношение

$$\boldsymbol{a}\cdot\nu=a_0, \quad \left(a_0=\cos\theta_0\right). \tag{4}$$

Согласно методу исследования прецессий, указанному в [4] векторы ν и ω могут быть представлены в виде

$$\nu=\left(a_0'\sin\varphi,\ a_0'\cos\varphi,\ a_0\right), \quad \omega=\dot{\varphi}(t)\boldsymbol{a}+\dot{\psi}(t)\nu, \tag{5}$$

где $a_0'=\sin\theta_0$, φ и ψ – новые переменные. Поскольку уравнение Пуассона из (2) при подстановке в него равенств (5) дает тождество, то необходимо исследовать динамическое уравнение (1) при наличии соотношений (5). Для этой цели в уравнение (1) подставим выражение $L=\dot{\lambda}$ из системы (2) и ω из системы (5) и спроектируем обе части полученного равенства на независимые векторы $\boldsymbol{a}$, ν, $\boldsymbol{a}\times\nu$ [13]

$$\begin{gathered}\alpha_3\dot{\lambda}(t)-a_0'\left(\alpha_1\cos\varphi-\alpha_2\sin\varphi\right)\dot{\psi}\lambda(t)+A_{33}\ddot{\varphi}+\left(\beta_1\cos\varphi+\beta_1'\sin\varphi+\beta_0\right)\ddot{\psi}+\\+\left(A_2\sin2\varphi-A_2'\cos2\varphi+a_0\beta_1\sin\varphi-a_0\beta_1'\sin\varphi\right)\dot{\psi}^2+\left(B_2'\cos2\varphi-B_2\sin2\varphi+\right.\\\left.+a_0\gamma_1'\cos\varphi-a_0\gamma_1\sin\varphi\right)\dot{\psi}+\left(C_2'\cos2\varphi-C_2\sin2\varphi-\kappa_1'\cos\varphi+\kappa_1\sin\varphi\right)=0,\end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered}\left(\alpha_1a_0'\sin\varphi+\alpha_2a_0'\cos\varphi+a_0\alpha_3\right)\dot{\lambda}(t)+a_0'\left(\alpha_1\cos\varphi-\alpha_2\sin\varphi\right)\dot{\varphi}\lambda(t)+\\+\left(\beta_1\cos\varphi+\beta_1'\sin\varphi+\beta_0\right)\ddot{\varphi}+\left(\beta_1'\cos\varphi-\beta_1\sin\varphi\right)\dot{\varphi}^2+\left(A_2\cos2\varphi+A_2'\sin2\varphi+\right.\\\left.+2a_0\beta_1\cos\varphi+2a_0\beta_1'\sin\varphi+A_0\right)\ddot{\psi}+2\left(A_2'\cos2\varphi-A_2\sin2\varphi+a_0\beta_1'\cos\varphi-\right.\\\left.-a_0\beta_1\sin\varphi\right)\dot{\varphi}\dot{\psi}-\left(B_2'\cos2\varphi-B_2\sin2\varphi+a_0\gamma_1'\cos\varphi-a_0\gamma_1\sin\varphi\right)\dot{\varphi}=0,\end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered}a_0'\left(\alpha_1\cos\varphi-\alpha_2\sin\varphi\right)\dot{\lambda}(t)+a_0'\left[\left(\alpha_3a_0'-\alpha_1a_0\sin\varphi-\alpha_2a_0\cos\varphi\right)\dot{\psi}-\right.\\\left.-\left(\alpha_1\sin\varphi+\alpha_2\cos\varphi\right)\dot{\varphi}\right]\lambda(t)+\left(\beta_1'\cos\varphi-\beta_1\sin\varphi\right)\ddot{\varphi}+\left(A_2'\cos2\varphi-A_2\sin2\varphi+\right.\\\left.+a_0\beta_1'\cos\varphi-a_0\beta_1\sin\varphi\right)\ddot{\psi}-\left(2A_2\cos2\varphi+2A_2'\sin2\varphi+2a_0\beta_1\cos\varphi+2a_0\beta_1'\sin\varphi-\right.\\\left.-a_0'^2A_{33}\right)\dot{\varphi}\dot{\psi}-\left(a_0A_2\cos2\varphi+a_0A_2'\sin2\varphi+\kappa_0\beta_1\cos\varphi+\kappa_0\beta_1'\sin\varphi+a_0D_0\right)\dot{\psi}^2-\\-\left(\beta_1\cos\varphi+\beta_1'\sin\varphi\right)\dot{\varphi}^2+\left(B_2\cos2\varphi+B_2'\sin2\varphi+a_0\gamma_1\cos\varphi+a_0\gamma_1'\sin\varphi-B_0^*\right)\dot{\varphi}+\\+\left(a_0B_2\cos2\varphi+a_0B_2'\sin2\varphi+\kappa_0\gamma_1\cos\varphi+\kappa_0\gamma_1'\sin\varphi+a_0E_0\right)\dot{\psi}+\\+\left(a_0C_2\cos2\varphi+a_0C_2'\sin2\varphi+\delta_1\cos\varphi+\delta_1'\sin\varphi+G_0\right)=0.\end{gathered} \tag{8}$$

В дифференциальных уравнениях (6) – (8) введены следующие обозначения

$$\begin{gathered}\beta_0=a_0A_{33},\ \beta_1=a_0'A_{23},\ \beta_1'=a_0'A_{13},\ \gamma_0=a_0B_{33},\ \ \gamma_1=a_0'B_{23},\ \gamma_1'=a_0'B_{13},\varepsilon_0=a_0C_{33},\\\varepsilon_1=a_0'C_{23},\ \varepsilon_1'=a_0'C_{13},\ \ \kappa_0=a_0^2-a_0'^2,\ \kappa_1=a_0's_2-a_0\varepsilon_1,\ \kappa_1'=a_0's_1-a_0\varepsilon_1',\\\delta_1=\left(2a_0^2-1\right)\varepsilon_1-a_0a_0's_2,\ \delta_1'=\left(2a_0^2-1\right)\varepsilon_1'-a_0a_0's_1,\ A_2=a_0'^2\left(A_{22}-A_{11}\right)/2,\ A_2'=a_0'^2A_{12},\\A_0=\left[a_0'^2\left(A_{11}+A_{22}\right)+2a_0^2A_{33}\right]/2,\ B_2=a_0'^2\left(B_{22}-B_{11}\right)/2,\ B_2'=a_0'^2B_{12},\\B_0=\left[a_0'^2\left(B_{11}+B_{22}\right)+2a_0^2B_{33}\right]/2,\ \ C_2=a_0'^2\left(C_{22}-C_{11}\right)/2,\ C_2'=a_0'^2C_{12},\\D_0=a_0'^2\left(A_{11}+A_{22}-2A_{33}\right)/2,\ E_0=a_0'^2\left(B_{11}+B_{22}-2B_{33}\right)/2,\ B_0^*=-a_0'^2\left(B_{11}+B_{22}\right)/2.\\G_0=a_0'^2\left[2s_3+a_0\left(C_{11}+C_{22}-2C_{33}\right)\right]/2.\end{gathered}$$

Уравнения (6) – (8) допускают интеграл

$$
\begin{aligned}
&\left(\alpha_1 a_0' \sin\varphi + \alpha_2 a_0' \cos\varphi + a_0\alpha_3\right)\lambda(t) + \left(\beta_1 \cos\varphi + \beta_1' \sin\varphi + \beta_0\right)\dot{\varphi} + \\
&+\left(A_2 \cos 2\varphi + A_2' \sin 2\varphi + 2a_0\beta_1 \cos\varphi + 2a_0\beta_1' \sin\varphi + A_0\right)\dot{\psi} - \\
&-\left(B_2 \cos 2\varphi + B_2' \sin 2\varphi + 2a_0\gamma_1 \cos\varphi + 2a_0\gamma_1' \sin\varphi + B_0\right)/2 = k,
\end{aligned} \tag{9}
$$

который является следствием второго интеграла из системы (3) на инвариантном соотношении (4).

Предположим, что кроме свойства прецессионности движение гиростата обладает свойством изоконичности. То есть уравнения (1), (2) должны допускать инвариантные соотношения (4) и

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\left(\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{c}\right) = 0, \tag{10}$$

где $\boldsymbol{c}$ – единичный вектор, неизменный в гиростате. Рассмотрим класс прецессионно-изоконических движений в случае, когда прецессия гиростата является прецессией второго типа $(\dot{\varphi} = n)$. В работе [4] на основе (5), (10) показано, что для таких движений должны выполняться равенства

$$\boldsymbol{\omega} = n\boldsymbol{a} + \dot{\psi}\boldsymbol{\nu}, \quad \dot{\psi} = \frac{n}{\gamma_0 + \gamma_1 \sin\varphi}, \quad \varphi = nt + \varphi_0, \tag{11}$$

где γ_0, γ_1 – постоянные, удовлетворяющие условию $\gamma_0^2 = 1 + \gamma_1^2$. Пусть величина гиростатического момента во все время движения равна $\lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1 \sin\varphi$, где λ_0, λ_1 – некоторые постоянные.

Случай $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{a}$, $a_0 = 0,\ B \neq 0,\ C \neq 0.$ Рассмотрим движение гиростата, когда на него действуют потенциальные и гироскопические силы, векторы $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{a}$ совпадают, а собственная ось вращения горизонтальна. Тогда уравнения (6) – (8) примут вид

$$
\begin{aligned}
&\dot{\lambda}(t) + \left(\beta_1 \cos\varphi + \beta_1' \sin\varphi\right)\ddot{\psi} + \left(A_2 \sin 2\varphi - A_2' \cos 2\varphi\right)\dot{\psi}^2 + \left(B_2' \cos 2\varphi - B_2 \sin 2\varphi\right)\dot{\psi} + \\
&+C_2' \cos 2\varphi - C_2 \sin 2\varphi - \kappa_1' \cos\varphi + \kappa_1 \sin\varphi = 0,
\end{aligned} \tag{12}
$$

$$
\begin{aligned}
&n^2\left(\beta_1' \cos\varphi - \beta_1 \sin\varphi\right) + \left(A_2 \cos 2\varphi + A_2' \sin 2\varphi + A_0\right)\ddot{\psi} + \\
&+2n\left(A_2' \cos 2\varphi - A_2 \sin 2\varphi\right)\dot{\psi} - n\left(B_2' \cos 2\varphi - B_2 \sin 2\varphi\right) = 0,
\end{aligned} \tag{13}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lambda(t)\dot{\psi} + \left(A_2' \cos 2\varphi - A_2 \sin 2\varphi\right)\ddot{\psi} - n\left(2A_2 \cos 2\varphi + 2A_2' \sin 2\varphi - A_{33}\right)\dot{\psi} - \\
&-n^2\left(\beta_1 \cos\varphi + \beta_1' \sin\varphi\right) - \left(\kappa_0\beta_1 \cos\varphi + \kappa_0\beta_1' \sin\varphi\right)\dot{\psi}^2 + n\left(B_2 \cos 2\varphi + B_2' \sin 2\varphi - B_0^*\right) + \\
&+\left(\kappa_0\gamma_1 \cos\varphi + \kappa_0\gamma_1' \sin\varphi\right)\dot{\psi} + \left(\delta_1 \cos\varphi + \delta_1' \sin\varphi + G_0\right) = 0.
\end{aligned} \tag{14}
$$

Интеграл моментов из (9) представим в виде

$$n\left(\beta_1 \cos\varphi + \beta_1' \sin\varphi\right) + \left(A_2 \cos 2\varphi + A_2' \sin 2\varphi + A_0\right)\dot{\psi} - \left(B_2 \cos 2\varphi + B_2' \sin 2\varphi + B_0\right)/2 = k, \tag{15}$$

Легко видеть, что (15) является следствием равенства (13). Поэтому подставим в соотношения (12), (14), (15) второе равенство из (11) и потребуем, чтобы они были тождествами по φ. Из полученной системы равенств на параметры задачи вытекают условия существования прецессионно-изоконического движения второго типа в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом

$$
\begin{aligned}
&a_0 = 0,\ A_{12} = 0,\ A_{23} = 0,\ A_{13} = \sqrt{A_{11}\left(A_{22} - A_{11}\right)},\ B_{12} = 0,\ B_{23} = 0,\ C_{12} = C_{13} = C_{23} = 0, \\
&C_{11} = C_{22},\ \gamma_0 = \sqrt{A_{22}/A_{11}},\ \gamma_1 = \sqrt{\left(A_{22} - A_{11}\right)/A_{11}},\ \ 2k = -B_{22} + 2n\sqrt{A_{11}A_{22}}, \\
&s_2 = 0,\ \ \lambda_0 = n\left(A_{22} - A_{11} - A_{33}\right) - \left(s_3 + nB_{22}\right)\sqrt{A_{22}/A_{11}}/n,\ \ \lambda_1 = s_1/n, \\
&n = \sqrt{A_{22} - A_{11}}\left(s_1\sqrt{A_{11}} + s_3\sqrt{A_{22} - A_{11}}\right)\Big/\left[B_{22}\left(A_{11} - A_{22}\right) + B_{13}A_{13}\right],
\end{aligned} \tag{16}
$$

Можно показать, что четвертое условие не противоречит известным условиям на компоненты тензора инерции: $A_{11}A_{33} - A_{13}^2 > 0$ и $\left|A_{13}\right| \le A_{22}/2$.

Решение системы уравнений (1), (2) представимо в виде

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\omega} = n\boldsymbol{a} + \dot{\psi}\boldsymbol{\nu},\ \boldsymbol{\nu} = \left(\sin(nt + \varphi_0),\ \cos(nt + \varphi_0),\ 0\right), \\
&\lambda(\mathrm{t}) = \lambda_0 + \lambda_1 \sin(nt + \varphi_0), \quad \dot{\psi} = \frac{n}{\gamma_0 + \gamma_1 \sin\varphi},
\end{aligned} \tag{17}
$$

Если параметры задачи удовлетворяют условию $B_{22}\left(A_{11}-A_{22}\right)+B_{13}A_{13}\neq 0$, то скорость собственного вращения принимает фиксированное значение. Если левая часть этого неравенства равна нулю, то необходимо требовать равенства $s_1\sqrt{A_{11}}+s_3\sqrt{A_{22}-A_{11}}=0$. В этом случае n принимает произвольное значение. Следовательно, решение уравнения (1),(2) в первом случае зависят от одной произвольной постоянной φ_0, а во втором случае – от двух произвольных постоянных φ_0, n

Из равенств (16),(17) видно, что решение уравнений движения тяжелого гиростата при отсутствии потенциальных и гироскопических сил $\left(B=0,\ C=0\right)$, которое характеризуется прецессионно-изоконическим движением второго типа при условии совпадения векторов $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{a}$ и горизонтальности оси собственного вращения можно представить в виде (17), а условиями существования такого решения служат соотношения

$$a_0=0,\ A_{12}=0,\ A_{23}=0,\ A_{13}=\sqrt{A_{11}\left(A_{22}-A_{11}\right)},\ \gamma_0=\sqrt{A_{22}/A_{11}},\ \gamma_1=\sqrt{\left(A_{22}-A_{11}\right)/A_{11}},\ n=k\big/\sqrt{A_{11}A_{22}},$$
$$\lambda_0=k\left(A_{22}-A_{11}-A_{33}\right)\big/\sqrt{A_{11}A_{22}}-s_3A_{22}/k,\ \ \lambda_1=s_1\sqrt{A_{11}A_{22}}\big/k,\ s_1\sqrt{A_{11}}+s_3\sqrt{A_{22}-A_{11}}=0,\ \ s_2=0. \tag{18}$$

Поскольку k – произвольная постоянная, то решение (17) при условиях (18) зависят от двух произвольных постоянных φ_0, k. В этом состоит отличие построенных решений.

Дальнейшие исследования показали, что если ось собственного вращения гиростата не горизонтальна или векторы $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{a}$ не совпадают, то прецессионно-изоконические движения второго типа в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом динамически невозможны.

РЕЗЮМЕ

Отримані умови існування прецесійно-ізоконічних рухів другого типу в задачі про рух гіростата зі змінним гіростатичним моментом. Отримані нові розв’язки рівнянь руху гіростата із заданою властивістю.

Ключові слова: гіростат, гіростатичний момент, прецесії, ізоконічні рухи.

SUMMARY

The conditions of existence of precession-isoconic motions of a rigid body with variable gyrostatic moment are investigated. The new solutions of equation of gyrostat’s motions with pre-set property are obtained.

Keywords: gyrostat, gyrostatic moment, precessions, isoconic motions.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Харламов П. В. Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку / П.В. Харламов // Прикладная математика и механика. – 1964. – Т.28, – Вып. 3. – С. 158-159.
2. Харламов П. В. Лекции по динамике твердого тела / П.В. Харламов. – Новосибирск: Изд–во Новосиб. университета. – 1965. – 221 с.
3. Горр Г.В. Классические задачи динамики твердого тела / Г.В. Горр, Л.В. Кудряшова., Л.А. Степанова // – К.: Наук. думка. – 1978. – 296 с.
4. Горр Г.В. Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связных твердых тел / Г.В. Горр, А.В. Мазнев, Е.К. Щетинина. – Донецк: ДонНУ, 2009. – 222 с.
5. Горр Г.В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку / Г.В. Горр, А.В. Мазнев // – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.
6. Харламов П. В. Об уравнениях движения системы твердых тел / П.В. Харламов // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52-73.
7. Liouville J. Dèveloppements sur un chapitre de la Mècanique de Poisson / J. Liouville // J. math. pures et appl. – 1858. – V.3. – P. 1-25.
8. Volterra V. Sur la théorie des variations des latitudes / V. Volterra // Acta. Math. – 1899. – Vol. 22. – P. 201-358.
9. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью / Н.Е. Жуковский. // Собр. соч. М.;Л.: Гостехиздат. – 1949. – Т. 2. – С.152-309.
10. Волкова О.С. Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела, несущего маховик / О.С. Волкова // Механика твердого тела. – 2008. – Вып. 38. – С.80-86.
11. Волкова О.С. Регулярные прецессии тяжелого гиростата вокруг вертикальной оси / О.С. Волкова // Труды ин-та прикладной математики и механики НАН Украины. – 2009. – Т. 19. – С.30-35.
12. Волкова О.С. Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом / О.С. Волкова, И.Н. Гашененко // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С.42-49.
13. Мазнев А.В. Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил / А.В. Мазнев // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 91–104.
14. Yehia H.M. On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces, I: The equations of motion and their transformations / H.M. Yehia // J. Mecan. Theor. Appl. – 1986. – Vol. 5, No 5. – P. 742-745.

Поступила в редакцию 03.11.2011 г.