

УДК 539.3

ПЛОСКА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ АНІЗОТРОПНОГО ТІЛА З ПЕРІОДИЧНИМИ СИСТЕМАМИ ТОНКИХ НЕОДНОРІДНОСТЕЙ

Я. М. Пастернак

Луцький національний технічний університет, м. Луцьк

У роботі побудовано систему інтегральних рівнянь методу граничних елементів для дослідження періодичних систем тонких включень в анізотропному тілі. На їхній основі отримано низку замкнутих розв'язків задач для періодичних систем тріщин і жорстких плівкових включень в анізотропному матеріалі. Реалізовано числові процедури запропонованого методу та отримано значення узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень для періодичних систем тонких пружних включень.

Ключові слова: тонке пружне включення, періодичний, анізотропний, метод граничних елементів, узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень

Вступ. Усі матеріали, зокрема й конструкційні, зазвичай, містять багато дефектів у формі тріщин та тонких включень. При дослідженні взаємодії таких дефектів, як правило, зосереджуються на вивченні регулярно розташованих неоднорідностей, що дає можливість оцінити з позицій механіки руйнування граничне навантаження тіла із системою дефектів. Доволі часто такі системи мають геометричну та силову періодичність.

Періодичні системи тріщин в ізотропному матеріалі розглянуто у численній кількості статей, основні результати яких відображено у монографіях [1 – 3]. Значно менше робіт стосується періодичних систем тріщин в анізотропному середовищі. Серед них можна відзначити праці [4 – 6].

Періодичні системи тонких жорстких включень розглянуті у роботах [7, 8]. Системи тонких пружних включень в ізотропному середовищі вивчені у працях [3, 9 – 11]. Періодичні задачі для глобулярних криволінійних включень в анізотропному тілі досліджені у монографії [12]. Тривимірна задача для періодичної системи включень розглянута за допомогою методу граничних елементів у праці [13]. Взаємодія регулярно розташованих тонких пружних включень в анізотропному середовищі мало вивчена і потребує додаткового дослідження.

Метою цієї роботи є побудова загального підходу, що дав би можливість розглядати періодичні системи тонких неоднорідностей в ізотропних та анізотропних тілах. Як засіб числового розв'язування сингулярних інтегральних рівнянь відповідних задач вибрано модифікацію [14, 15] методу граничних елементів, що засвідчила свою ефективність при вивченні тонких включень в анізотропних і п'єзоелектричних матеріалах, зокрема, й обчисленні коефіцієнтів інтенсивності напружень біля вістря включення.

Формулювання задачі. Розглянемо плоску задачу теорії пружності для безмежного анізотропного середовища із системою тонких пружних включень. Відповідно до принципу спряження континуумів різної вимірності [3] останні моделюватимемо лініями Γ_s ($s \in \mathbb{Z}$) розриву полів напружень та переміщень. У цьому випадку інтегральні рівняння задачі для тіла з лініями стрибків набудуть вигляду [14]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma u_i^k(\mathbf{y}) &= \sum_s \left[\text{RPV} \int_{\Gamma_s^+} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t_j^s(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{CPV} \int_{\Gamma_s^+} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta u_j^s(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \right] + u_i^\infty(\mathbf{y}), \\ \frac{1}{2} \Delta t_i^k(\mathbf{y}) &= n_j^+(\mathbf{y}) \sum_s \left[\text{CPV} \int_{\Gamma_s^+} D_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t_k^s(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{HPV} \int_{\Gamma_s^+} S_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta u_k^s(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \right] + \\ &+ n_j^+(\mathbf{y}) \sigma_{ij}^\infty, \end{aligned} \quad (1)$$

де $\mathbf{y} \in \Gamma_k$ ($k \in \mathbb{Z}$) – точка колокації; u_i, t_i – компоненти векторів переміщень та напружень; $\Delta u_i = u_i^+ - u_i^-, \Delta t_i = t_i^+ - t_i^-, \Sigma u_i = u_i^+ + u_i^-, \Sigma t_i = t_i^+ + t_i^-; t_i^\pm = \sigma_{ij}^\pm n_j^\pm$ (n_j^\pm – компоненти векторів зовнішніх нормалей \mathbf{n}^\pm до утворених розрізом Γ_s поверхонь Γ_s^\pm); σ_{ij} – компоненти тензора напружень; знаками «+» та «-» позначено величини, що стосуються поверхонь Γ_s^+ та Γ_s^- ; $\sigma_{ij}^\infty, u_i^\infty$ – задані на безмежності напруження та відповідне поле переміщень. Індeksi у позначеннях відповідають проєкціям векторів на осі глобальної системи координат Ox_1x_2 . У формулах прийняте правило Айнштайна підсумовування за індексом, що повторюється. Ядра інтегральних рівнянь для плоскої задачі теорії пружності анізотропного тіла відповідно до залежностей формалізму Stroh [16] мають вигляд [14]:

$$\begin{aligned}
 U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[A_{i\alpha} A_{j\alpha} \ln Z_{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right], \quad T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[A_{i\alpha} B_{j\alpha} \frac{(n_2 - n_1 p_{\alpha})}{Z_{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{y})} \right], \\
 D_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= C_{ijpm} \frac{\partial U_{pk}}{\partial y_m} = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[(\delta_{2j} - \delta_{1j} p_{\alpha}) B_{i\alpha} A_{k\alpha} \frac{1}{Z_{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{y})} \right], \\
 S_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= C_{ijpm} \frac{\partial T_{pk}}{\partial y_m} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[(\delta_{2j} - \delta_{1j} p_{\alpha}) B_{i\alpha} B_{k\alpha} \frac{n_2 - n_1 p_{\alpha}}{[Z_{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{y})]^2} \right], \quad Z_{\alpha}(\mathbf{x}) = x_1 + p_{\alpha} x_2.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Комплексні сталі p_{α} (із додатною уявною частиною) та матриці $\mathbf{A} \equiv [A_{i\alpha}] = [\mathbf{a}_{\alpha}]$, $\mathbf{B} \equiv [B_{i\alpha}] = [\mathbf{b}_{\alpha}]$ визначаються із таких рівнянь та умов нормування [16]:

$$\left\{ \mathbf{Q} + p_{\alpha} (\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) + p_{\alpha}^2 \mathbf{T} \right\} \mathbf{a}_{\alpha} = 0, \quad \mathbf{b}_{\alpha} = (\mathbf{R}^T + p_{\alpha} \mathbf{T}) \mathbf{a}_{\alpha}, \quad \mathbf{B}^T \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{B} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{A}} + \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{0}, \tag{3}$$

де $Q_{ik} = C_{i1k1}$, $R_{ik} = C_{i1k2}$, $T_{ik} = C_{i2k2}$; C_{ijklm} – компоненти симетричного тензора ($C_{ijklm} = C_{ijkm} = C_{kmij} = C_{ijmkl}$) жорсткості (пружні сталі), означені виразом закону Гука $\sigma_{ij} = C_{ijklm} u_{k,m}$:

$$C_{1111} = c_{11}, \quad C_{1122} = c_{12}, \quad C_{1121} = c_{16}, \quad C_{2222} = c_{22}, \quad C_{2212} = c_{26}, \quad C_{1212} = c_{66}.$$

Для плоского напруженого стану сталі $c_{ij} = c_{ji}$ дорівнюють

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= \frac{a_{22} a_{66} - a_{26}^2}{\Delta}, \quad c_{12} = \frac{a_{16} a_{26} - a_{12} a_{66}}{\Delta}, \quad c_{16} = \frac{a_{12} a_{26} - a_{16} a_{22}}{\Delta}, \\
 c_{22} &= \frac{a_{11} a_{66} - a_{16}^2}{\Delta}, \quad c_{26} = \frac{a_{16} a_{12} - a_{11} a_{26}}{\Delta}, \quad c_{66} = \frac{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}{\Delta};
 \end{aligned} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{vmatrix}.$$

Тут a_{ij} – коефіцієнти деформації (модулі податності) [17]. При вивченні плоскої деформації сталі a_{ij} необхідно замінити величинами [17]

$$\beta_{ij} = a_{ij} - a_{i3} a_{j3} / a_{33} \quad (i, j = 1, 2, 4, 5, 6).$$

Для розв'язування сформульованої задачі до інтегральних рівнянь (1) слід долучити співвідношення моделі тонкого включення

$$\Sigma u_i^k(\mathbf{y}) = F_{ik}^u(\mathbf{y}, \Delta u_j^k, \Sigma t_j^k), \quad \Delta t_i^k(\mathbf{y}) = F_{ik}^t(\mathbf{y}, \Delta u_j^k, \Sigma t_j^k), \tag{4}$$

які пов'язують між собою розриви (стрибки) та середні значення векторів напружень і переміщень на протилежних берегах неоднорідності. Конкретизацію виразів (4) можна знайти у роботах [14, 18].

Лінійна періодичність. У випадку періодичної системи ідентичних тонких включень чи їхніх груп, а також існування аналогічної повторюваності навантажувальних чинників, унаслідок трансляційної симетрії можна стверджувати, що розриви напружень Σt_i^s та переміщень Δu_i^s є однаковими для кожного включення. Тому систему рівнянь (1) можна записати у формі

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \Sigma u_i^0(\mathbf{y}) &= \operatorname{RPV} \int_{\Gamma_0^+} U_{ij}^p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t_j^0(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \operatorname{CPV} \int_{\Gamma_0^+} T_{ij}^p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta u_j^0(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + u_i^{\infty}(\mathbf{y}), \\
 \frac{1}{2} \Delta t_i^0(\mathbf{y}) &= n_j^+(\mathbf{y}) \left[\operatorname{CPV} \int_{\Gamma_0^+} D_{ijk}^p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t_k^0(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \operatorname{HPV} \int_{\Gamma_0^+} S_{ijk}^p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta u_k^0(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \sigma_{ij}^{\infty} \right],
 \end{aligned} \tag{5}$$

де ядра $\mathbf{K}^p = [U_{ij}^p, T_{ij}^p, D_{ijk}^p, S_{ijk}^p]$ мають такий загальний вигляд

$$\mathbf{K}^p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \mathbf{K}(\mathbf{x} + s\boldsymbol{\omega}, \mathbf{y}). \tag{6}$$

Тут $\boldsymbol{\omega} = (\omega_{x_1}, \omega_{x_2})$ – вектор періоду.

Відповідно до (2) та (6) у випадку періодичної задачі для системи тонких включень необхідно обчислити суми

$$S_{1\alpha}^p = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \ln(u_\alpha + s\omega_\alpha), \quad S_{2\alpha}^p = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{u_\alpha + s\omega_\alpha} = \frac{dS_{1\alpha}^p}{du_\alpha}, \quad S_{3\alpha}^p = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[u_\alpha + s\omega_\alpha]^2} = -\frac{dS_{2\alpha}^p}{du_\alpha}, \quad (7)$$

де $u_\alpha = Z_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, $\omega_\alpha = Z_\alpha(\boldsymbol{\omega})$.

Сума $S_{1\alpha}^p$ розходиться в звичайному сенсі. Проте її можна подати у вигляді головної частини та деякої безмежної сталої $C_{\infty\alpha}^p$. Тому запишемо суму $S_{1\alpha}^p$ у формі

$$S_{1\alpha}^p = \ln \left[\frac{u_\alpha \pi}{\omega_\alpha} \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{u_\alpha}{s\omega_\alpha} \right)^2 \right) \right] + C_{\infty\alpha}^p, \quad (8)$$

де

$$C_{\infty\alpha}^p = \ln \left(\frac{\omega_\alpha}{\pi} \right) + \sum_{s \in \mathbb{Z} \setminus 0} \ln(s\omega_\alpha).$$

Відповідно до формули (4.22.1) [19]

$$\sin z = z \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{z}{s\pi} \right)^2 \right),$$

тобто, вираз (8) можна записати так:

$$S_{1\alpha}^p = \ln \sin \left(\frac{u_\alpha \pi}{\omega_\alpha} \right) + C_{\infty\alpha}^p. \quad (9)$$

Диференціюючи двічі вираз (9) за змінною u_α , отримаємо

$$S_{2\alpha}^p = \frac{\pi}{\omega_\alpha} \operatorname{ctg} \left(\frac{u_\alpha \pi}{\omega_\alpha} \right), \quad S_{3\alpha}^p = \left(\frac{\pi}{\omega_\alpha} \right)^2 \operatorname{cosec}^2 \left(\frac{u_\alpha \pi}{\omega_\alpha} \right). \quad (10)$$

Отже, для розв'язування періодичних стосовно тонких включень задач в ядрах (2) для скінченної кількості включень необхідно зробити такі заміни:

$$\ln Z_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rightarrow S_{1\alpha}^p, \quad [Z_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{y})]^{-1} \rightarrow S_{2\alpha}^p, \quad [Z_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{y})]^{-2} \rightarrow S_{3\alpha}^p. \quad (11)$$

За виконання умови $\int_{\Gamma_s^+} \Sigma t_i^s d\Gamma = 0$ статично урівноваженого навантажування розрізів Γ_s (фак-

тично рівноваги кожного із відокремлених включень) відповідно до (5) стала $C_{\infty\alpha}^p$ не впливатиме на розв'язок задачі, тому при розрахунках її можна не брати до відома.

При числовому розв'язуванні інтегральних рівнянь (5) періодичної задачі можуть виникнути ускладнення із належним обчисленням ядра U_{ij}^p , які зумовлені багатозначністю логарифма комплексно-значної функції. Для уникнення подібних явищ слід зафіксувати вибір певної вітки функції логарифма і потім стежити, щоб аргумент функції під логарифмом за її неперервної зміни теж змінювався неперервно.

Розв'язування інтегральних рівнянь задачі за схемою методу граничних елементів. Систему крайових інтегральних рівнянь (5) розв'язуватимемо методом граничних елементів [14, 15, 20]. Для цього криву Γ_0 апроксимуємо за допомогою n прямолінійних відрізків – граничних елементів Γ_q . На кожному елементі виберемо по 3 вузлові точки: одну в центрі, а дві інші – на відстані $1/3$ довжини елемента по обидва боки від центральної (розривний тривузловий граничний елемент). Крайові функції Σt_j^0 та Δu_j^0 апроксимуємо на елементі за їхніми вузловими значеннями:

$$\left[\Sigma t_j^0, \Delta u_j^0 \right] (\xi) \approx \sum_{p=1}^3 \left[\Sigma t_j^{q,p}, \Delta u_j^{q,p} \right] \phi_p(\xi). \quad (12)$$

Тут ξ – параметр розташування точки на елементі, означений на проміжку $-1 \leq \xi \leq 1$ так: $d\Gamma_q = L_q/2 d\xi = J_q d\xi$, де J_q – модуль якобіана заміни змінних на елементі Γ_q .

У цей спосіб система сингулярних інтегральних рівнянь (5) сумісно з моделлю (4) тонкого включення зводиться до системи лінійних алгебричних рівнянь стосовно шуканих вузлових значень $\Sigma t_j^{q,p}$, $\Delta u_j^{q,p}$ крайових функцій Σt_j^0 та Δu_j^0 .

Базові функції для елементів, що не прилягають до торців неоднорідності, виберемо для (12) як і в [20] у вигляді поліномів Лагранжа для системи вузлів $\xi_p = [-2/3; 0; 2/3]$ тривузлового розривного граничного елемента:

$$\phi_1 = \xi \left(\frac{9}{8} \xi - \frac{3}{4} \right), \quad \phi_2 = \left(1 - \frac{3}{2} \xi \right) \left(1 + \frac{3}{2} \xi \right), \quad \phi_3 = \xi \left(\frac{9}{8} \xi + \frac{3}{4} \right). \quad (13)$$

Для підвищення точності методу та зручності визначення узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) згідно з [14, 15] введемо спеціальні тривузлові розривні граничні елементи, що моделюють приторцеві ділянки тонкого включення, а відповідні їм базові функції задамо у вигляді:

- для розривів переміщень

$$\phi_p^{\Delta u} = \Phi_{p1}^{\Delta u} \sqrt{\rho} + \Phi_{p2}^{\Delta u} \rho + \Phi_{p3}^{\Delta u} \rho^{3/2} \quad (p=1,2,3); \quad (14)$$

- для стрибків напружень

$$\phi_p^{\Sigma t} = \Phi_{p1}^{\Sigma t} \rho^{-1/2} + \Phi_{p2}^{\Sigma t} + \Phi_{p3}^{\Sigma t} \sqrt{\rho} \quad (p=1,2,3). \quad (15)$$

Тут $\rho = 1 \pm \xi$; $\Phi_{pj}^{\Delta u}$, $\Phi_{pj}^{\Sigma t}$ – матриці сталих, що визначаються з рівнянь

$$\phi_p(\xi_p) = 1, \quad \phi_p(\xi_{j \neq p}) = 0,$$

де ξ_p – координати вузлових точок на граничному елементі.

Запропоновані базові функції (14), (15) дають можливість безпосередньо та з великою точністю визначати узагальнені КІН за формулами [14]

$$\mathbf{k}^{(1)} = \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{8s}} \mathbf{L} \cdot \Delta \mathbf{u}(s), \quad \mathbf{k}^{(2)} = - \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi s}{2}} \mathbf{S}^T \cdot \Sigma \mathbf{t}(s), \quad (16)$$

де $\mathbf{k}^{(i)} = [K_{2i}, K_{1i}]^T$, $\Delta \mathbf{u} = [\Delta u_1, \Delta u_2]^T$, $\Sigma \mathbf{t} = [\Sigma t_1, \Sigma t_2]^T$; s – відстань до вершини лінії Γ_0 ; K_{ij} – узагальнені КІН, причому у випадку тріщини $K_{11} = K_I$, $K_{21} = K_{II}$, $K_{12} = K_{22} = 0$, а K_I , K_{II} – класичні КІН теорії тріщин; $\mathbf{L} = -2\sqrt{-1} \mathbf{B} \mathbf{B}^T$, $\mathbf{S} = \sqrt{-1} (2 \mathbf{A} \mathbf{B}^T - \mathbf{I})$ – дійсні тензори Barnett–Lothe [16], що залежать лише від властивостей матеріалу і при повертанні осей координат, в яких обчислюються пружні сталі, їхні компоненти теж змінюються за тензорним законом.

Оскільки при підсумовуванні ядер періодичної задачі їхні особливості не змінюються, то для числового визначення слабо-, сильно- і гіперсингулярних інтегралів у цих випадках також можна використовувати запропоновані у роботах [14, 15] квадратури та поліноміальні відображення, що згладжують підінтегральний вираз на кінцях проміжку інтегрування. Тоді результуюча система лінійних алгебричних рівнянь набуде вигляду

$$\begin{cases} \frac{1}{2} F_{i0}^u(\mathbf{x}^{s,r}) = \sum_{q=1}^n \sum_{p=1}^3 \sum_{j=1}^2 \left[\Sigma t_j^{q,p} U_{ij}^{qpsr} - \Delta u_j^{q,p} T_{ij}^{qpsr} \right] + u_i^\infty(\mathbf{x}^{s,r}), \\ \frac{1}{2} F_{i0}^t(\mathbf{x}^{s,r}) = \sum_{q=1}^n \sum_{p=1}^3 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 n_j^+(\mathbf{x}^{s,r}) \left[\Sigma t_k^{q,p} D_{ijk}^{qpsr} - \Delta u_k^{q,p} S_{ijk}^{qpsr} \right] + \sum_{j=1}^2 n_j^+(\mathbf{x}^{s,r}) \sigma_{ij}^\infty(\mathbf{x}^{s,r}), \end{cases} \quad (17)$$

де інтеграли $\{U_{ij}, T_{ij}, D_{ijk}, S_{ijk}\}^{qpsr} = \int_{-1}^1 \{U_{ij}^p, T_{ij}^p, D_{ijk}^p, S_{ijk}^p\}(\mathbf{x}^q(\xi), \mathbf{x}^{s,r}) \phi^p(\xi) J_q d\xi$ обчислюються за

описаною у працях [14, 15] методикою.

Числовий аналіз прикладів

1. *Періодичні системи неоднорідностей в ізотропному матеріалі.* Для верифікації розробленого підходу розглянемо плоский напружений стан ізотропної пластини із системами тріщин та жорстких включень, для яких відомі точні чи наближені замкнуті розв'язки. При дослідженні ізотропного матеріалу засобами формалізму Stroh [16] необхідно враховувати, що при розв'язуванні рівнянь (3) отримуємо кратні корені [16] і ядра (2) вироджуються, внаслідок чого за допомогою формального підставлення у

побудовані залежності сталих ізотропного матеріалу належні числові результати отримати не вдається. Тому ізотропний матеріал моделюватимемо слабо анізотропним [6] із такими модулями податності:

$$a_{11} = a_{22} = 1/E, \quad a_{12} = -\nu/E, \quad a_{16} = 0, \quad a_{66} = 1/G, \quad a_{26} = 10^{-3}/G, \quad (18)$$

де $E = 2G(1+\nu)$ – модуль пружності; G – модуль зсуву; ν – коефіцієнт Пуассона. Ненульове, але й невелике порівняно з іншими сталими значення величини a_{26} забезпечує відмінність коренів p_α характеристичного рівняння (3), а також дає можливість вважати матеріал достатньо близьким до ізотропного.

1.1. *Періодична система співвісних тріщин.* У випадку періодичної системи співвісних тріщин (вектор періоду $\mathbf{w} = (d, 0)$ паралельний до осі неоднорідності), розташованих уздовж осі Ox_1 обраної системи координат, коефіцієнт інтенсивності напружень $K_{11} = K_I$ за навантаження $\sigma_{22}^\infty = p$, $\sigma_{11}^\infty = \sigma_{12}^\infty = 0$ означений залежністю (III.34) [1]

$$K_{11} = K_{11}^* p \sqrt{\pi a}, \quad K_{11}^* = \sqrt{\frac{d}{\pi a} \operatorname{tg} \frac{\pi a}{d}}, \quad (19)$$

де $2a$ – довжина тріщин; d – відстань між їхніми середніми точками. Зіставимо результати обчислення нормованого КІН K_{11}^* за формулою (19) та за допомогою розробленого підходу для різних значень параметра $\lambda = 2a/d$. У МГЕ при цьому використано 21 граничний елемент. Результати розрахунків подано в табл. 1.

Таблиця 1

Нормований КІН K_{11}^* для системи співвісних тріщин

λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
K_{11}^* , (19)	1,0041	1,01698	1,0398	1,0753	1,1284	1,2085	1,3360	1,56497	2,1133
K_{11}^* , МГЕ	1,0045	1,01734	1,0402	1,0757	1,1287	1,2089	1,3367	1,56705	2,1254

Табл. 1 засвідчує добру узгодженість результатів розрахунку КІН тріщини запропонованим підходом, оскільки навіть при настільки малій кількості граничних елементів відносна похибка обчислень не перевищує 0,6 %.

1.2. *Періодична система співвісних жорстких включень.* Відповідно до (VI.38) [7] у разі періодично розташованої уздовж осі Ox_1 системи жорстких плівкових включень узагальнений коефіцієнт інтенсивності напружень K_{12} дорівнює

$$K_{12} = \frac{\kappa - 1}{8\kappa} \left[(1 - \kappa) (\sigma_{22}^\infty + \sigma_{11}^\infty) + 2 (\sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty) \right] \sqrt{d \operatorname{tg} \frac{\pi a}{d}}, \quad (20)$$

де $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ – стала Мусхелішвілі для плоского напруженого стану. У формулі (20) враховано зв'язок між КІН k_1 [7] та узагальненим КІН K_{12} : $K_{12} = k_1 (\kappa - 1) \sqrt{\pi} / (2\kappa)$. Результати обчислень нормованого коефіцієнта інтенсивності напружень $K_{12}^* = K_{12} / (p \sqrt{\pi a})$ для навантаження $\sigma_{22}^\infty = p$, $\sigma_{11}^\infty = \sigma_{12}^\infty = 0$ та сталої Мусхелішвілі $\kappa = 2$ подано в табл. 2. Як і в попередньому прикладі, у МГЕ використано 21 граничний елемент.

Таблиця 2

Безрозмірний узагальнений КІН K_{12}^* для системи співвісних жорстких включень

λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
K_{12}^* , (20)	0,06276	0,06356	0,06499	0,06721	0,07052	0,07553	0,0835	0,0978	0,1321
K_{12}^* , МГЕ	0,06276	0,06357	0,06499	0,06721	0,07054	0,07556	0,0836	0,0981	0,1336

Табл. 2 засвідчує, що у випадку дослідження запропонованим підходом періодичних систем жорстких включень похибка обчислень не перевищує 1 %.

2. *Періодичні системи співвісних тріщин та жорстких включень в анізотропному матеріалі.* Розглянемо періодичну систему розташованих уздовж осі Ox_1 на відстані d ($\omega = (d, 0)$) одне від одного співвісних тріщин (жорстких включень), що перебувають під впливом однорідного поля напружень на нескінченності. У цьому разі інтегральні рівняння (5) набудуть вигляду

- для системи тріщин

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \Delta u_{i,1} \left[\frac{\pi}{d} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi(x-\xi)}{d} \right) \right] dx = -2L_{ij}^{-1} \sigma_j^\infty, \quad (21)$$

- для системи жорстких плівкових включень

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \Delta t_i \left[\frac{\pi}{d} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi(x-\xi)}{d} \right) \right] dx = 2H_{ij}^{-1} c_j, \quad (22)$$

де $c_j = -\delta_{j2} \omega^0 - u_{j,1}^\infty$; $u_{j,1}^\infty$ – сталі деформації однорідного середовища без включень; ω^0 – малий кут повертання включення (додатний напрям вибрано за стрілкою годинника). Із умови рівності нулю головного момента випливає, що

$$\omega^0 = -H_{2j}^{-1} u_{j,1}^\infty / H_{22}^{-1}. \quad (23)$$

Відповідно до [7] розв’язок рівнянь типу (21), (22) має вигляд

$$k_i^{(1)} = \sigma_{i2} \sqrt{\pi a} K^0, \quad k_i^{(2)} = -\sqrt{\pi a} S^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c} K^0, \quad K^0 = \sqrt{\operatorname{tg}(z)/z}, \quad (24)$$

де $z = \pi \lambda / 2$; $\lambda = 2a/d$. Важливо наголосити, що за однорідного навантаження КІН періодичної системи співвісних тріщин не залежить від анізотропії пружних властивостей матеріалу і тотожний розв’язку (19).

3. *Періодичні системи тонких пружних включень в анізотропному матеріалі.* Розглянемо виготовлену зі склопластику анізотропну пластину з такими пружними характеристиками [21]: $E_1 = 48,26$ ГПа; $E_2 = 17,24$ ГПа; $\nu_{12} = 0,29$; $G_{12} = 6,89$ ГПа. У цій пластині наявна періодична система ізотропних тонких включень завдовжки $2a$ та завтовшки $2h$, причому $h = 0,01a$. Відносна жорсткість включень характеризується параметром $k = G^i / G_{12}$, де G^i – модуль зсуву матеріалу неоднорідності. Коефіцієнт Пуассона включень $\nu^i = \nu_{12}$. Нормовані значення $K_{ij}^* = K_{ij} / (p \sqrt{\pi a})$ узагальнених КІН K_{11} (вісь ординат ліворуч) та K_{12} (вісь ординат праворуч) для періодичних ($\omega = (d, 0)$) систем співвісних (орієнтованих уздовж осі Ox_1) та паралельних (орієнтованих уздовж осі Ox_2) тонких пружних включень за всебічного розтягу ($\sigma_{11}^\infty = \sigma_{22}^\infty = p$) зображено на рис. 1. Унаслідок використання на рисунках двох осей ординат для різних узагальнених КІН відповідні графіки зображені до місця виходу на асимптоту. У числовій реалізації схеми МГЕ розбиття серединної поверхні неоднорідності здійснено за допомогою 21 граничного елемента.

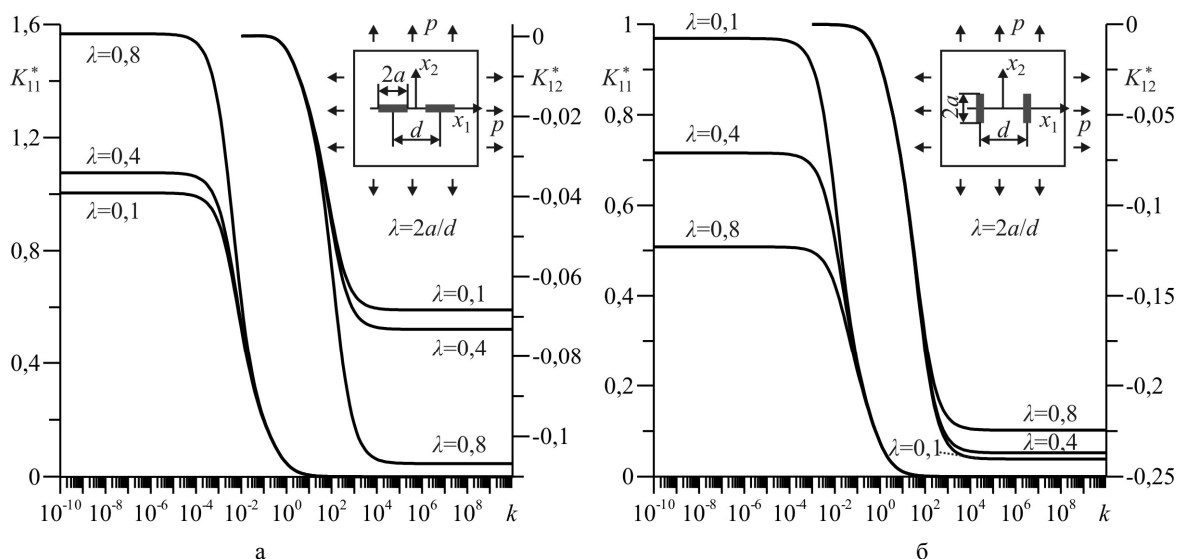


Рис. 1. Нормовані значення узагальнених КІН для періодичних систем тонких включень

У випадку співвісних включень за граничних значень відносної жорсткості k ($k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$) числовий розв'язок задачі відхилявся від заданого рівностями (24) точного не більше як на 0,3 %, що засвідчує високу ефективність розробленого варіанту методу граничних елементів і для класу періодичних задач.

Із рис. 1 видно, що у разі співвісних включень їхнє взаємне зближення сприяє збільшенню значень узагальнених КІН, натомість для системи паралельних податних включень, так само як і для тріщин, за їхнього зближення узагальнені КІН зменшуються (екранувальний ефект). Для доволі розрідженої системи ($\lambda = 0,1$) узагальнені КІН паралельних тріщин відрізняються від розв'язку для одної ізольованої тріщини приблизно на 4 %. Натомість для жорсткого включення таке відхилення не перевищує 0,1 %.

На рис. 2 зображено залежність від відносної жорсткості включень узагальнених КІН системи тонких пружних включень у тому разі, коли вектор періоду не є ані паралельним, ані перпендикулярним до осі включення. Зокрема, рис. 2, а стосується включень, розташованих під кутом $\alpha = 45^\circ$ до осі Ox_1 та вектором періоду $\omega = (d, 0)$, а рис. 2, б – паралельних до осі Ox_1 включень, зміщених одне відносно одного у двох ортогональних напрямках ($\omega = (d, a)$). Суцільні лінії відповідають узагальненим КІН K_{1j} моди I, а штрихові – КІН K_{2j} моди II.

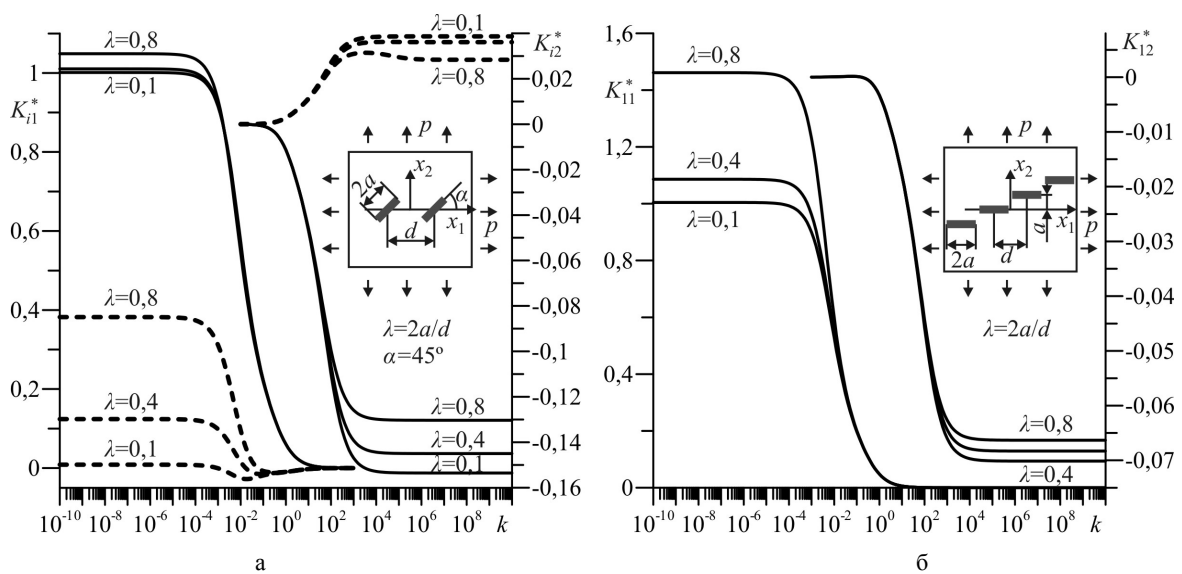


Рис. 2. Нормовані узагальнені КІН паралельних включень

Із рис. 2, а видно, що для податних ($k < 1$) включень, розташованих під кутом $\alpha = 45^\circ$ до осі Ox_1 , на якій лежать їхні центри, зміна параметра λ мало впливає на КІН K_{11} . Натомість істотних значень набуває узагальнений КІН K_{21} , причому для випадку тріщини ($k = 10^{-10}$) при $\lambda = 0,8$ він приблизно в 1,2 рази, а при $\lambda = 0,4$ – в 1,7 разів більший від відповідного, обчисленого для ізотропного середовища із дефектами. Тобто, анізотропія властивостей середовища істотно впливає на коефіцієнти інтенсивності напружень.

Для другої схеми (рис. 2, б) цікавим є поведіння узагальненого КІН K_{12} , який на відміну від випадку співвісних включень ($\omega = (d, 0)$) зі збільшенням λ спочатку збільшується, а потім зменшується за абсолютною величиною, що може бути зумовлене анізотропією матеріалу середовища та повертанням включення як жорсткого цілого, оскільки обчислений кут повертання зі зміною λ змінює знак.

Висновки. Побудовані у роботі числові та аналітичні підходи дослідження періодичних задач теорії пружності для систем тонких пружних включень у необмеженому анізотропному тілі дають можливість з високою точністю розрахувати напружено-деформований стан, а також, що дуже важливо для механіки руйнування, надійно оцінити локальний напружений стан біля вершин тонких неоднорідностей за допомогою високоточного обчислення КІН. Це дає можливість здійснювати оптимальний вибір геометричних і механічних параметрів складових композитних матеріалів, напряму армування та об'ємної частки арматури, а також обчислювати граничне навантаження на матеріал із періодичними системами неоднорідностей. Результати роботи можуть бути використані при дослідженні впливу на напружений стан періодичних систем дефектів в геоматеріалах, регулярних систем дефектів чи підкріплень у елементах конструкцій із анізотропних матеріалів.

РЕЗЮМЕ

В работе построена система интегральных уравнений метода граничных элементов для исследования периодических систем тонких включений в анизотропном теле. На их основе получен ряд замкнутых решений задач для периодических систем трещин и жестких включений в анизотропном материале. Реализованы числовые процедуры предложенного метода и получены значения обобщенных коэффициентов интенсивности напряжений для периодических систем тонких упругих включений.

Ключевые слова: тонкое упругое включение, периодический, анизотропный, метод граничных элементов, обобщенные коэффициенты интенсивности напряжений

SUMMARY

This paper develops the system of integral equations of the boundary element method for studying periodic systems of thin inclusions in the anisotropic solid. Based on these equations some closed-form solutions are obtained for periodic systems of cracks and rigid line inclusions in anisotropic medium. The numerical procedures of the proposed approach are developed and the numerical values of generalized stress intensity factors for periodic systems of thin inclusions are obtained.

Keywords: thin elastic inclusion, periodic, anisotropic, boundary element method, generalized stress intensity factors

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М.П. Саврук. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
2. Линьков А.М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости / А.М. Линьков. – СПб.: Наука, 1999. – 382 с.
3. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / Г.Т. Сулим. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
4. Фильштинский Л.А. Двоякопериодическая задача теории упругости для анизотропной среды с криволинейными разрезами / Л.А. Фильштинский // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1977. – № 6. – С. 116-124.
5. Choi H.J. A periodic array of cracks in a functionally graded nonhomogeneous medium loaded under in-plane normal and shear / H.J. Choi // Int. J. Fract. – 1997. – Т. 88. – Р. 107-128.
6. Божидарнік В.В. Пружна та гранична рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами / В.В. Божидарнік, О.В. Максимович. – Луцьк: ЛДТУ, 2003. – 228 с.
7. Бережницкий Л.Т. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле / Бережницкий Л.Т., Панасюк В.В., Сташук Н.Г. – К.: Наук. думка, 1983. – 288 с.
8. Chen Y.Z. Periodic rigid line problem in an infinite plate / Y.Z. Chen // Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv). – 1993. – Vol. 63, No. 7. – P. 464-471.
9. Грилицкий Д.В. Периодическая задача для упругой плоскости с тонкостенными включениями / Д.В. Грилицкий, Г.Т. Сулим // Прикладная математика и механика. – 1975. – Т. 39, № 3. – С. 520-529.
10. Мартыняк Р.М. Периодическая задача для системы линейных компланарных включений в изотропной плоскости / Р.М. Мартыняк, Г.Т. Сулим // Мат. методы и физ.-мех. поля. – Киев: Наук. думка, 1982. – Вып. 15. – С. 113-117.
11. Опанасович В.К. Периодическая система параллельных тонких упругих включений в плоскости / В.К. Опанасович, М.С. Драган // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. – 1985. – Вып. 23. – С. 83-89.
12. Космодамианский А.С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями / А.С. Космодамианский. – К.: Вища школа, 1976. – 200 с.
13. Clouteau D. Periodic BEM and FEM-BEM coupling / D. Clouteau, M.L. Elhabre, D. Aubry // Comp. Mech. – 2000. – Vol. 25, No. 6. – P. 567-577.
14. Pasternak Ia. Coupled 2D electric and mechanical fields in piezoelectric solids containing cracks and thin inhomogeneities / Ia. Pasternak // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2011. – Vol. 35, No. 4. – P. 678-690.
15. Pasternak Ia.M. Thin inclusions theory integral equations numerical solution using the boundary element method procedure / Ia.M. Pasternak, H.T. Sulym // Proc. Int. Conf. "Integral Equations – 2010", 25-27 August 2010 (Lviv). – Lviv: PAIS, 2010. – P. 104-108.
16. Ting T.C.T. Anisotropic elasticity: theory and applications / T.C.T. Ting. – New York: Oxford University Press. – 1996. – 567 p.
17. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
18. Пастернак Я.М. Дуальный метод граничных элементов для задач теории тонких включений / Я.М. Пастернак, Г.Т. Сулим // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2010. – Т. 53. – № 2. – С. 46-57.
19. NIST Handbook of Mathematical Functions / F.W. Olver, D.W. Lozier, R.F. Boisvert, C.W. Clark. – New York: Cambridge University Press, 2010. – 951 p.
20. Portela A. The dual boundary element method: Effective implementation for crack problems / Portela A., Aliabadi M.H., Rooke D.P. // Int. J. Numer. Meth. Engng. – 1992. – Vol. 33. – P. 1269-1287.
21. Pan E. A general boundary element analysis of 2D linear elastic fracture mechanics / E. Pan // Int. J. Fract. – 1997. – Vol. 88. – P. 41-59.

Надійшла до редакції 21.07.2011 р.