УДК 531.38

АСИМПТОТИЧЕСКИ–ПРЕЦЕССИОННЫЕ ДВИЖЕНИЯ ВТОРОГО ТИПА СФЕРИЧЕСКОГО ГИРОСТАТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

Ю. Ю. Пилпани

С помощью теории параметрического резонанса получены достаточные условия асимптотических прецессионных движений сферического гиростата, предельным движением которого служит прецессия второго типа относительно вертикали.

Ключевые слова: гиростат, гиростатический момент, прецессия второго типа, характеристичное число.

Введение. Прецессионные движения гиростата занимают важное место в классификации движений системы связанных твердых тел, поскольку они имеют наглядное геометрическое истолкование и находят применение в приложениях [1, 2]. К настоящему времени найдены многочисленные классы прецессионных движений гиростата не только в задаче о движении гиростата под действием силы тяжести, но и в её обобщении – задаче о движении гиростата под. действием потенциальных и гироскопических сил [2]. Исследование свойств асимптотичности движений позволило получить общий способ [3] изучения асимптотических прецессионных движений гиростата в обобщенной задаче динамики. Этот способ основывался на использовании достаточного условия А.М. Ляпунова [4] существования положительного характеристичного числа у уравнения класса Хилла и был применен, например, в работе [5]. В статье [6] анализ условий существования асимптотически – прецессионных движений гиростата проводился с помощью теории параметрического резонанса [7]. Данная статья посвящена исследованию свойств асимптотичности движения сферического гиростата в случае, когда предельное движение – прецессия второго типа гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил [8].

Постановка задачи. Рассмотрим задачу о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Используя обозначения, принятые в книге [9], запишем уравнения

$$\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\mathbf{A}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B}\boldsymbol{\nu} + \mathbf{s} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{C}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}, \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{2}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости тела – носителя; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор вертикали; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – гиростатический момент; $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс; $\mathbf{A} = (A_{ij})$ – тензор инерции гиростата; $\mathbf{B} = (B_{ij})$ и $\mathbf{C} = (C_{ij})$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными векторами обозначает относительную производную по времени.

Уравнения (1) и (2) допускают интегралы

$$\boldsymbol{A\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{2}(\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) + \boldsymbol{C\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 2E, \quad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \tag{3}$$

$$2(\boldsymbol{A\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{B\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 2k. \tag{4}$$

Положим в уравнениях (1), (2) и интегралах (3), (4) $\mathbf{A} = \mathrm{diag}(\mu_0, \mu_0, \mu_0)$, то есть предположим, что эллипсоид инерции гиростата является сферой. Тогда из (1) – (4) имеем

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mu_0^{-1}[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{B\nu} - \boldsymbol{\lambda}) + \boldsymbol{\nu} \times (\boldsymbol{C\nu} - \boldsymbol{s})], \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{5}$$

$$\mu_0 \boldsymbol{\omega}^2 + \boldsymbol{\nu} \cdot (\boldsymbol{C\nu} - \boldsymbol{2s}) = 2E, \quad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad \boldsymbol{2\mu_0}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu}) + 2\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\nu} - (\boldsymbol{B\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 2k. \tag{6}$$

В работе исследуется асимптотически-прецессионное движение, для которого предельным движением является полурегулярная прецессия второго типа, указанная в статье [8]. Выпишем решение с учетом равенств $A_{11} = A_{22} = A_{33} = \mu_0$

$$\boldsymbol{\omega}^* = n\boldsymbol{a} + \dot{\psi}\boldsymbol{\nu}^*, \quad \boldsymbol{\nu}^* = (a_0' \sin(nt + \varphi_0), a_0' \cos(nt + \varphi_0), a_0), \tag{7}$$

где $n, \dot{\psi}$ таковы

$$n = -\left[C_{13}\mu_0 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1 a_0 (B_{11} - B_{33})\right]\lambda_1^{-1}\mu_0^{-1} / 2,$$

$$\dot{\psi} = \gamma_0 + \gamma_1 \sin(nt + \phi_0), \ \gamma_0 = (C_{13}a_0 - s_1 - na_0\lambda_1)\lambda_1^{-1}, \quad \gamma_1 = -\lambda_1 a_0' \mu_0^{-1}. \tag{8}$$

Условия существования прецессии (7), (8) имеют вид

$$B_{12} = B_{13} = B_{23} = 0, \quad B_{11} = B_{22}, \quad C_{12} = C_{23} = 0, \quad s_2 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_1^2 = \mu_0 (C_{22} - C_{11}),$$

$$s_3 = \left(\left(C_{13}a_0 - s_1\right)\lambda_1^{-1} - na_0\right)\left(B_{33}a_0 - B_{11}a_0 - \lambda_3 - n\mu_0\right) + a_0\left(C_{33} - C_{22}\right) - nB_{11}. \tag{9}$$

Отметим свойства исследуемого решения. Поскольку из (7) вытекает, что $\boldsymbol{v}^* \cdot \boldsymbol{a} = a_0$, то угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{v}^*$ в течении времени остаётся постоянен. Выражение для $\boldsymbol{\omega}^*$ из (7) показывает, что скорость собственного вращения гиростата постоянна. Получим условий асимптотических движений гиростата, предельным движением которых является прецессия (7), (8).

Уравнения в вариациях. Для исследования асимптотических движений введем возмущения $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\gamma}$ по формулам

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^* + \boldsymbol{\Omega}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}^* + \boldsymbol{\gamma}. \tag{10}$$

Внесем выражения (10) в уравнения (5) и учтем то обстоятельство, что функции $\boldsymbol{\omega}^* = \boldsymbol{\omega}^*(t)$, $\mathbf{v}^* = \mathbf{v}^*(t)$ являются решением уравнения (5). Тогда получим систему двух векторных дифференциальных уравнений, из которых вытекает следующая система в вариациях

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \mu_0^{-1}\left[\boldsymbol{\Omega}\times\left(\mathbf{B}\mathbf{v}^* - \boldsymbol{\lambda}\right) + \boldsymbol{\omega}^*\times\mathbf{B}\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{s}\times\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{v}^*\times\mathbf{C}\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{C}\mathbf{v}^*\right], \tag{11}$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{v}^*\times\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}^*\times\boldsymbol{\gamma}. \tag{12}$$

Выпишем первые интегралы линейной системы (11), (12), порожденные интегралами (3), (4)

$$\mu_0\left(\boldsymbol{\omega}^*\cdot\boldsymbol{\Omega}\right) + \gamma\left(\mathbf{C}\mathbf{v}^* - \mathbf{s}\right) = c_1, \quad \mathbf{v}^*\cdot\boldsymbol{\gamma} = c_2, \quad \mu_0\left(\mathbf{v}^*\cdot\boldsymbol{\Omega}\right) + \left(\mu_0\boldsymbol{\omega}^* - \mathbf{B}\mathbf{v}^* + \boldsymbol{\lambda}\right)\cdot\boldsymbol{\gamma} = c_3. \tag{13}$$

В силу периодичности решения (7), система первого приближения (11), (12) является правильной. Поскольку она имеет три первых интеграла (13), то четыре характеристичных числа этой системы равны нулю. Для нахождения остальных характеристичных чисел необходимо с помощью интегралов (13) провести редукцию линейной системы (11), (12) к системе третьего порядка.

На основе [3] эту редукцию осуществим следующим образом. Вначале, вместо $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ и $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, введем новые переменные u_i

$$\begin{gathered} u_1 = \mu_0\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{a}, \quad u_2 = \mu_0\left(\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{v}^*\right), \quad \mathrm{u}_3 = \mu_0\left[\Omega\cdot\left(\mathbf{a}\times\mathbf{v}^*\right)\right], \\ u_4 = \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{a}, \quad u_5 = \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{v}^*, \quad u_6 = \boldsymbol{\gamma}\cdot\left(\mathbf{a}\times\mathbf{v}^*\right), \end{gathered} \tag{14}$$

в которых первые интегралы (13) принимают вид

$$nu_1 + \dot{\psi}u_2 - a_0'^{-2}\left[\boldsymbol{\tau}_4\cdot\left(u_4\boldsymbol{\tau}_1 + u_5\boldsymbol{\tau}_2 + u_6\boldsymbol{\tau}_3\right)\right] = c_1, \quad u_5 = c_2, \quad \mathbf{b}\cdot\left(u_4\boldsymbol{\tau}_1 + u_5\boldsymbol{\tau}_2 + u_6\boldsymbol{\tau}_3\right) = c_3. \tag{15}$$

где

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\tau}_1 = \boldsymbol{a} - a_0\boldsymbol{v}^*, \quad \boldsymbol{\tau}_2 = \boldsymbol{v}^* - a, \quad \boldsymbol{\tau}_3 = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{v}^*, \quad \boldsymbol{\tau}_4 = \boldsymbol{s} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{v}^*, \\ \boldsymbol{\tau}_5 = \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{v}^*, \quad \boldsymbol{b} = a_0'^{-2}\left[\mu_0\left(n\boldsymbol{a} + \dot{\psi}\boldsymbol{v}^*\right) + \boldsymbol{\tau}_5\right]. \end{gathered} \tag{16}$$

Затем в силу (15), (16) выполняется преобразование

$$\boldsymbol{x} = m(t)\boldsymbol{u}. \tag{17}$$

Здесь

$$\begin{gathered} \boldsymbol{u} = \left(u_1,\ldots,u_6\right)^T, \quad m(t) = \left\|m_{ij}(t)\right\|, \\ m_{11} = m_{12} = 0, \quad m_{13} = 1, \quad m_{14} = m_{15} = m_{16} = 0, \quad m_{21} = m_{22} = m_{23} = 0, \\ m_{24} = 1, \quad m_{25} = m_{26} = 0, \quad m_{31} = m_{32} = m_{33} = m_{34} = m_{35} = 0, \quad m_{36} = 1, \\ m_{41} = n, \quad m_{42} = \dot{\psi}, \quad m_{43} = 0, \quad m_{44} = -a_0'^{-2}\left(\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_4\right), \quad m_{45} = -a_0'^{-2}\left(\boldsymbol{\tau}_4\cdot\boldsymbol{\tau}_2\right), \\ m_{46} = -a_0'^{-2}\left(\boldsymbol{\tau}_4\cdot\boldsymbol{\tau}_3\right), \quad m_{51} = m_{52} = m_{53} = m_{54} = 0, \quad m_{55} = 1, \quad m_{56} = 0, \\ m_{61} = 0, \quad m_{62} = 1, \quad m_{63} = 0, \quad m_{64} = \left(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\tau}_1\right), \quad m_{65} = \left(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\tau}_2\right), \quad m_{66} = \left(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\tau}_3\right). \end{gathered} \tag{18}$$

Выпишем обратное к (17) преобразование

$$u_1 = n^{-1}\left[x_4 - \dot{\psi}\left(x_6 - \left(\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\tau}_1\right)x_2 - \left(\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\tau}_2\right)x_5 - \left(\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\tau}_3\right)x_3\right) + \left(a_0'\right)^{-2}\left(\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_4\right)x_2 + \right.$$

$$+\left(a_0'\right)^{-2}\left(\boldsymbol{\tau}_4\cdot\boldsymbol{\tau}_2\right)x_5+\left(a_0'\right)^{-2}\left(\boldsymbol{\tau}_4\cdot\boldsymbol{\tau}_3\right)x_3\Big],$$

$$u_2=x_6-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\tau}_1)x_2-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\tau}_2)x_5-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\tau}_3)x_3,\quad u_3=x_1,\quad u_4=x_2,\quad u_5=x_5,\quad u_6=x_3.$$

Используя соотношения (14), получим зависимость исходных переменных

$$\boldsymbol{\Omega}=\mu_0^{-1}\left(a_0'\right)^{-2}\left(u_1\boldsymbol{\tau}_1+u_2\boldsymbol{\tau}_2+u_3\boldsymbol{\tau}_3\right),\quad \boldsymbol{\gamma}=\left(a_0'\right)^{-2}\left(u_4\boldsymbol{\tau}_1+u_5\boldsymbol{\tau}_5+u_6\boldsymbol{\tau}_3\right).$$

На основании замен переменных (14), (17) с учетом соотношений (15), (18), найдем уравнения

$$\dot{x}_i=\sum_{j=1}^{6}h_{ij}(t)x_j\quad\left(i=\overline{1,3}\right),\quad \dot{x}_4=0,\quad \dot{x}_5=0,\quad \dot{x}_6=0. \tag{19}$$

Поскольку $h_{ij}(t)$ в уравнении (19) – периодические функции с периодом $2\pi/n$, а x_4,x_5,x_6 – постоянные, то на основании теории Ляпунова [4] необходимо исследовать характеристичные числа однородной системы третьего порядка относительно переменных x_1,x_2,x_3, вытекающей из (13). С помощью перехода к сопряженной системе изучение характеристичных чисел данной системы сведем к изучению характеристичных чисел уравнения Хилла. Здесь выпишем его в случае $B_{ij}=0\quad\left(i,j=\overline{1,3}\right),\quad s_1=0$

$$\ddot{y}+p(t)y=0, \tag{20}$$

где

$$p(t)=\beta_0+\beta_1\sin(nt+\varphi_0)+\beta_2\sin^2(nt+\varphi_0), \tag{21}$$

$$\beta_0=\frac{\mu^2}{4\mu_0^2}\left[\lambda_3^2-\frac{2C_{13}\mu_0\lambda_3}{\lambda_1}-\frac{15C_{13}^2\mu_0}{C_{22}-C_{11}}+4\mu_0(C_{33}-C_{22})\right]+\frac{4C_{13}^2}{\mu_0(C_{22}-C_{11})},$$

$$\beta_1=\mu\left(\varepsilon_0+\mu^2\varepsilon_2+\mu^4\varepsilon_4+\ldots\right),\quad \beta_2=-\mu^2\varepsilon_2'',\quad \mu=a_0', \tag{22}$$

$$\varepsilon_0=-\mu_0^{-1}\left(9C_{13}+\lambda_1\mu_0^{-1}\lambda_3\right),\quad \varepsilon_2=-\frac{\varepsilon_0}{2},\quad \varepsilon_4=-\frac{\varepsilon_0}{8},\quad \varepsilon_2''=4\mu_0^{-1}(C_{11}-C_{22}).$$

Ранее [3] уравнение (20) изучалось на основе достаточного условия Ляпунова [4] существования у него решения с положительным характеристичным числом, которое состояло в том, что предполагалось $p(t)\le 0\quad(p(t)\ne 0)$. Здесь к данному уравнению применим теорию параметрического резонанса [7]. Для этой цели необходимо в (20) – (22) ввести малый параметр и решение уравнения (20) искать в виде ряда по этому малому параметру. В силу свойства прецессионности движения малым параметром может служить параметр a_0', который обозначен через μ. Поскольку в общем случае при таком способе введения малого параметра при вычислениях сталкиваемся со значительными трудностями, то положим

$$\lambda_3^2-2C_{13}\mu_0\lambda_1^{-1}\lambda_3+4\mu_0(C_{33}+3C_{22}-4C_{11})-15C_{13}^2\mu_0(C_{22}-C_{11})^{-1}=0. \tag{23}$$

Для существования действительных решений уравнения (23) относительно λ_3 считаем, что выполнены неравенства

$$4C_{13}^2-(C_{33}+3C_{22}-4C_{11})(C_{22}-C_{11})>0,\quad C_{22}-C_{11}>0.$$

Используя в уравнении (20) указанные выше условия, а также равенство $a_0'=\mu$, заменой $\tau=nt+\varphi_0$ приведем его к стандартному виду

$$y''+\lambda^2\left[1+\mu\left(\kappa_1\sin\tau+\mu\kappa_2\cos\tau+\mu^2\kappa_2'\sin\tau+\mu^4\kappa_4\cos2\tau+\ldots\right)\right]y=0, \tag{24}$$

где

$$\lambda^2=\frac{\eta}{n^2},\quad \kappa_1=\frac{\varepsilon_0}{\eta},\quad \kappa_2'=-\frac{\kappa_1}{2},\quad \kappa_2=\frac{\varepsilon_2''}{\eta},\quad \kappa_4=\frac{\varepsilon_4}{\eta},\quad \eta=\frac{4C_{13}^2}{\lambda_1^2}.$$

Согласно теории параметрического резонанса в окрестности натуральных значений λ появляются интервалы, для которых определяющее уравнение $\rho^2-2A\rho+1=0$ имеет действительные корни ρ_1 и ρ_2, где $A=\left(y_1(\pi)+y_2'(\pi)\right)/2$, а $y_1(t),y_2(\pi)$ – независимые частные решения уравнения (24). Этим корням соответствуют два решения уравнения (24)

$$y_1 = \phi_1(\tau)e^{-\beta_1\tau}, \quad y_2 = \phi_2(\tau)e^{-\beta_2\tau} \tag{25}$$

с различными знаками характеристичных чисел $\beta_1 = -\mathrm{Re}\,\sigma_1$, $\beta_2 = -\mathrm{Re}\,\sigma_2$ $\left(\sigma_i = \pi^{-1}\ln\rho_i\right)$. Здесь $\varphi_1(\tau), \varphi_1(\tau)$ – периодические функции τ. Так как $\beta_2 = \beta_1$, то в силу (25) система (17) имеет 4 нулевых характеристичных числа, одно положительное и одно отрицательное характеристичное число. Следовательно, к системе уравнений в вариациях, линейной системой которой является (11), (12) применима теорема Ляпунова [4] о существовании у неё решения, которое при $t \to \infty$ стремится к нулю. То есть для этого решения движение гиростата будет асимптотически – прецессионным.

Для применения указанных результатов положим в уравнении (24)

$$\lambda^2 = N^2 + \alpha_1\mu + \alpha_2\mu^2 + \ldots, \quad y(\tau) = \xi_0(\tau) + \mu\xi_1(\tau) + \ldots, \tag{26}$$

где $\xi_i(\tau)$ – периодические функции с периодом π, $N = 1, 2\ldots$.

После подстановки выражений (26) в уравнение (24), полагая $N = 1$, получим систему дифференциальных уравнений, из которой следует

$$\xi_0(\tau) = A_0\cos\tau + B_0\sin\tau, \tag{27}$$

$$\begin{gathered}\ddot{\xi}_1(\tau) + \xi_1(\tau) = \kappa_1\left(B_0\cos 2\tau - A_0\sin 2\tau - B_0\right)/2 - \alpha_1\left(A_0\cos\tau + B_0\sin\tau\right),\\ \ddot{\xi}_2(\tau) + \xi_2(\tau) = -\xi_1(\tau)\left(\kappa_1\sin\tau + \alpha_1\right) - \xi_0(\tau)\left(\alpha_1\kappa_1\sin\tau + \kappa_2\cos 2\tau\right) - \alpha_2\xi_0(\tau),\end{gathered} \tag{28}$$

где A_0, B_0 – произвольные постоянные. Согласно теории параметрического резонанса приравниваем к нулю коэффициенты при $\cos\tau$ и $\sin\tau$ в правой части уравнения для $\xi_1(\tau)$. Так как $A_0^2 + B_0^2 \neq 0$, то

$$\alpha_1 = 0. \tag{29}$$

Связь между A_0, B_0 устанавливается при рассмотрении дальнейших приближений. Вычислим эти приближения, используя уравнения (28). На основании условия (29) из уравнения для $\xi_1(\tau)$ имеем:

$$\xi_1(\tau) = \kappa_1\left(A_0\sin 2\tau - B_0\cos 2\tau - 3B_0\right)/6. \tag{30}$$

Подставим $\xi_0(\tau)$ и $\xi_1(\tau)$ из (27), (30) в уравнение для $\xi_2(\tau)$ из системы (28)

$$\begin{gathered}12\left(\ddot{\xi}_2(\tau) + \xi_2(\tau)\right) = \left(\kappa_1^2 - 6\kappa_2\right)\left(B_0\sin 3\tau + A_0\cos 3\tau\right) -\\ - A_0\cos\tau\left(\kappa_1^2 + 6\kappa_2 + 12\alpha_2\right) + B_0\sin\tau\left(5\kappa_1^2 + 6\kappa_2 - 12\alpha_2\right).\end{gathered} \tag{31}$$

Требование периодичности решения уравнения (31) приводит к равенствам

$$A_0\left(\kappa_1^2 + 6\kappa_2 + 12\alpha_2\right) = 0, \quad B_0\left(5\kappa_1^2 + 6\kappa_2 - 12\alpha_2\right) = 0.$$

Так как $A_0^2 + B_0^2 \neq 0$, то в случае $N = 1$ для α_2 получаем два различных значения. Для первого значения

$$\alpha_2 = -\left(\kappa_1^2 + 6\kappa_2\right)/12, \quad A_0 = 1, \quad B_0 = 0, \tag{32}$$

для второго значения

$$\alpha_2 = \left(5\kappa_1^2 + 6\kappa_2\right)/12, \quad A_0 = 0, \quad B_0 = 1. \tag{33}$$

Аналогично подсчитываются дальнейшие приближения.

Таким образом, в силу (32), (33) с точностью до величин второго порядка относительно μ, найденную область неустойчивости, расположенную вблизи $N = 1$ можно охарактеризовать условием

$$1 - \left(\kappa_1^2 + 6\kappa_2\right)\mu^2/12 + \ldots \leq \lambda^2 \leq 1 + \left(5\kappa_1^2 + 6\kappa_2\right)\mu^2/12 + \ldots. \tag{34}$$

Второй пример существования у уравнения (24) решения относится к случаю $N = 2$. Полагаем $\lambda^2 = 4 + \alpha_1\mu + \alpha_2\mu^2 + \ldots$. Задавая решение в виде (26), из уравнения (24) получим

$$\xi_0(\tau) = A_0\cos 2\tau + B_0\sin 2\tau, \tag{35}$$

$$\begin{gathered}\ddot{\xi}_1(\tau) + 4\xi_1(\tau) = -\xi_0(\tau)\left(4\kappa_1\sin\tau + \alpha_1\right) = 2\kappa_1\left(B_0\left(\cos 3\tau - \cos\tau\right) + A_0\left(\sin\tau - \sin 3\tau\right)\right),\\ \ddot{\xi}_2(\tau) + 4\xi_2(\tau) = -\xi_1(\tau)\left(4\kappa_1\sin\tau + \alpha_1\right) - \xi_0(\tau)\left(\alpha_1\kappa_1\sin\tau + 4\kappa_2\cos 2\tau + \alpha_2\right),\\ \ddot{\xi}_3(\tau) + 4\xi_3(\tau) = -\xi_2(\tau)\left(4\kappa_1\sin\tau + \alpha_1\right) - \xi_1(\tau)\left(\alpha_2 + \alpha_1\kappa_1\sin\tau + 4\kappa_2\cos 2\tau\right) -\end{gathered}$$

$$-\xi_0(\tau)(\alpha_2\kappa_1\sin\tau+\alpha_1\kappa_2\cos 2\tau+4\kappa_2'\sin\tau+\alpha_3), \tag{36}$$

$$\ddot{\xi}_4(\tau)+4\xi_4(\tau)=-\xi_3(\tau)(4\kappa_1\sin\tau+\alpha_1)-\xi_2(\tau)(\alpha_2+\alpha_1\kappa_1\sin\tau+4\kappa_2\cos 2\tau)-$$
$$-\xi_1(\tau)(\alpha_3+\alpha_2\kappa_1\sin\tau+\alpha_1\kappa_2\cos 2\tau+4\kappa_2'\sin\tau)-$$
$$-\xi_0(\tau)(\alpha_3\kappa_1\sin\tau+\alpha_2\kappa_2\cos 2\tau+\alpha_1\kappa_2'\sin\tau+\alpha_4).$$

В силу теории параметрического резонанса, с учетом $A_0^2+B_0^2\neq 0$, (35) из системы (36) получим $\alpha_1=0$, аналогично равенству (29). На основании равенства $\alpha_1=0$ решение уравнения для $\xi_1(\tau)$ из системы (36) таково

$$\xi_1(\tau)=2\kappa_1(3B_0\cos 3\tau+3A_0\sin 3\tau-5B_0\cos\tau+5A_0\sin\tau)/15. \tag{37}$$

Подставим $\alpha_1=0$ и равенства (37) во второе равенство из системы (36)

$$15\left(\ddot{\xi}_2(\tau)+4\xi_2(\tau)\right)=6\left(2\kappa_1^2-5\kappa_2\right)(A_0\cos 4\tau+B_0\sin 4\tau)+$$
$$+\left(8\kappa_1^2-15\alpha_2\right)(A_0\cos 2\tau+B_0\sin 2\tau)-10A_0\left(2\kappa_1^2+3\kappa_2\right).$$

Из условия периодичности решения (26) следует $A_0\left(8\kappa_1^2-15\alpha_2\right)=0,\quad B_0\left(8\kappa_1^2-15\alpha_2\right)=0.$
То есть, для обоих вариантов имеем

$$\alpha_2=8\kappa_1^2/15,\quad A_0=1,\quad B_0=0,\quad \alpha_2=8\kappa_1^2/15,\quad A_0=0,\quad B_0=1. \tag{38}$$

С учетом (29), (38) решение для $\xi_2(\tau)$ системы (36) примет вид

$$30\xi_2(\tau)=\left(5\kappa_2-2\kappa_1^2\right)(A_0\cos 4\tau+B_0\sin 4\tau)-5A_0\left(2\kappa_1^2+3\kappa_2\right). \tag{39}$$

Подставляя (29), (37) – (39) в третье уравнение системы (36), имеем

$$\ddot{\xi}_3(\tau)+4\xi_3(\tau)=\frac{\kappa_1}{15}\left(17\kappa_2-2\kappa_1^2\right)(B_0\cos 5\tau-A_0\sin 5\tau)+$$
$$+\left(\kappa_1\kappa_2+46\kappa_1^3/75+2\kappa_2'\right)(B_0\cos 3\tau-A_0\sin 3\tau)+\frac{2B_0}{45}\left(2\kappa_1^3+48\kappa_1\kappa_2-45\kappa_2'\right)\cos\tau+ \tag{40}$$
$$+\frac{2A_0}{45}\left(45\kappa_2'-2\kappa_1^3-12\kappa_1\kappa_2\right)\sin\tau-A_0\alpha_3\cos 2\tau-\frac{B_0}{6}\alpha_3\sin 2\tau+A_0\left(2\kappa_1^2+3\kappa_2\right).$$

Приравниваем коэффициенты при $\cos 2\tau, \sin 2\tau$ в уравнении (40). Тогда получим $\alpha_3=0$, то есть

$$\xi_3(\tau)=\frac{\kappa_1}{315}\left(2\kappa_1^2-17\kappa_2\right)(B_0\cos 5\tau-A_0\sin 5\tau)-\frac{1}{375}\left(75\kappa_1\kappa_2+46\kappa_1^3+150\kappa_2'\right)\times$$
$$\times(B_0\cos 3\tau-A_0\sin 3\tau)+\frac{2B_0}{135}\left(2\kappa_1^3+48\kappa_1\kappa_2-45\kappa_2'\right)\cos\tau+$$
$$+\frac{2A_0}{135}\left(45\kappa_2'-2\kappa_1^3-12\kappa_1\kappa_2\right)\sin\tau+\frac{A_0}{24}\left(2\kappa_1^2+3\kappa_2\right).$$

С учетом найденных значений $\xi_i(\tau)$ $\left(i=\overline{0,3}\right)$, α_i $\left(i=\overline{1,3}\right)$, четвертое уравнение из (36) примет вид

$$\ddot{\xi}_4(\tau)+4\xi_4(\tau)=A_0Q\cos 6\tau+B_0Q\sin 6\tau+A_0P\cos 4\tau+B_0P\sin 4\tau+$$
$$+A_0\left(R+4\kappa_1^3\kappa_2/3+2\kappa_2^2-\alpha_4\right)\cos 2\tau+B_0\left(R-16\kappa_1^2\kappa_2/15\right)\sin 2\tau+ \tag{41}$$
$$+8A_0\kappa_1\left(3\kappa_1^4-2\kappa_1^3+6\kappa_1\kappa_2-40\kappa_2'\right)/135,$$

где

$$Q=\left(76\kappa_1^2\kappa_2-4\kappa_1^4-105\kappa_2^2\right)/315,\quad P=\kappa_1^2\left(2837\kappa_1^2-500\kappa_2\right)/7875,$$
$$R=\left(2550\kappa_1^2\kappa_2-788\kappa_1^4-1125\kappa_2^2+3600\kappa_1\kappa_2'\right)/3375. \tag{42}$$

С учетом требования периодичности решения уравнения (41), приравниваем коэффициенты при $\cos 2\tau$, $\sin 2\tau$ в правой части уравнения (41) к нулю. Получим два различных значения для α_4

$$\alpha_4=R+4\kappa_1^3\kappa_2/3+2\kappa_2^2,\quad A_0=1,\quad B_0=0,\ \text{или}\ \alpha_4=R-16\kappa_1^2\kappa_2/15,\quad A_0=0,\quad B_0=1.$$

Аналогично подсчитываются следующие приближения. Таким образом, с точностью до величин четвертого порядка относительно μ область неустойчиивости, расположенная вблизи $N = 2$, может быть охарактеризована условием

$$4 + \frac{8}{15}\kappa_1^2\mu^2 + \left(R - \frac{16}{15}\kappa_1^2\kappa_2\right)\mu^4 + \ldots \leq \lambda^2 \leq 4 + \frac{8}{15}\kappa_1^2\mu^2 + \left(R + \frac{4}{3}\kappa_1^3\kappa_2 + 2\kappa_2^2\right)\mu^4 + \ldots, \quad (43)$$

где полагаем $10\kappa_1^3 + 15\kappa_2 + 8\kappa_1^2 > 0$.

Итак, если параметры задачи удовлетворяют одному из условий (34), (43), то уравнение (24) допускает решение вида (25).

Вывод. Если параметры задачи удовлетворяют условиям $B_{ij} = 0$, (23), (34), (43), то существует такое начальное положение гиростата и начальная скорость, при которых движение гиростата будет обладать свойством асимптотичности движения. Предельным движением гиростата будет служить прецессия второго типа (7). Асимптотически-прецессионное движение будет описываться однопараметрическими рядами Ляпунова.

РЕЗЮМЕ

За допомогою теорії параметричного резонансу отримані достатні умови асимптотичних прецесійних рухів сферичного гіростату, граничним рухом якого є прецесія другого типу відносно вертикалі.

*Ключові слова***:** гіростат, гіростатичний момент, прецесія другого типу, характеристичне число.

SUMMARY

Using the theory of parametric resonance, sufficient terms for asymptotically – precessional motions of a spherical gyrostat were got. Limiting movement of gyrostat is the precession of second type, concerning a vertical.

Keywords: gyrostat, gyrostat moment, precession of second type, characteristic number.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горр Г.В. Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел / Г.В.Горр // Прикл. математика и механика. – 2003. – Т. 67. – Вып. 4. – С. 573-587.
2. Горр Г.В. Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных тел / Г.В.Горр, А.В. Мазнев, Е.К. Щетинина – Донецк: ДонНУ, 2009. – 222 с.
3. Горр Г.В.Об асимптотически прецессионных движениях гиростата в обобщенной задаче динамики / Г.В.Горр, Д.И. Думбай // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 9-15.
4. Ляпунов А.М. Собрание сочинений: в 5 т / А.М. Ляпунов. – М.: Изд-во АН СССР, 1956. – Т. 2: Общая задача об устойчивости движения. – 264 с.
5. Горр Г.В. Об асимптотически-прецессионных движениях сферического гиростата / Г.В.Горр, Е.М. Миронова // Механика твердого тела. – 2008. – Вып. 38. – С. 56-62.
6. Пилпани Ю.Ю. Об одном классе асимптотически – прецессионных движений сферического гиростат под действием потенциальных и гироскопических сил / Ю.Ю.Пилпани // Тр. ин-та прикл. матем. и мех. НАН Украины. – 2011. – Т. 22. – С. 177-183.
7. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения / И.Г. Малкин – М.: Наука, 1966. – 530 с.
8. Горр Г.В. Новые решения обобщенной задачи динамики твердого тела с неподвижной точкой / Г.В. Горр, Е.В. Верховод, А.В. Мазнев // Докл. НАН Украины. Сер. А. Физ.-мат. и техн. наук. – 1992. – № 5. – С. 50-54.
9. Горр Г.В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку / Г.В.Горр, А.В.Мазнев. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.

Поступила в редакцию 23.01.2012 г.