

УДК 539.1:534.1

ИЗЛУЧЕНИЕ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ С ДАВЛЕНИЕМ ЗАДАННОГО ПРОФИЛЯ  
ТОЛСТОСТЕННЫМ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ПЬЕЗОПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕМ

Н. П. Подчасов, И. В. Янчевский

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, г. Киев

Представлен численно-аналитический метод решения задачи управления радиальными колебаниями бесконечно длинного пьезокерамического полого цилиндра, армированного сплошным тонким металлическим бандажом и погруженного в безграничную жидкую среду. Нестационарные процессы в рассматриваемой гидроэлектроупругой системе моделируются уравнениями линейной теории электроупругости, теории тонких оболочек и акустического приближения. Задача решена с использованием интегрального преобразования Лапласа. Представлены и проанализированы числовые результаты.

*Ключевые слова:* полый пьезокерамический цилиндр, акустическая среда, управление радиальными колебаниями, преобразование Лапласа, система интегральных уравнений Вольтерра.

**Введение.** К настоящему времени пьезокерамические элементы стали неотъемлемыми составляющими многих существующих технических устройств, и вместе с тем, имеют большой потенциал и для будущих приложений. Этим обусловлен повышенный интерес к исследованиям динамических процессов в пьезоэлементах. Длинные полые пьезокерамические цилиндры, будучи достаточно распространенной структурной формой пьезопреобразователей, изучаются достаточно интенсивно и к настоящему времени им посвящены многочисленные публикации.

При современном уровне развития технологий особую актуальность приобрели исследования поведения пьезопреобразователей при действии импульсных электромеханических нагрузок. Некоторые результаты работ в этом направлении, полученных на основании вариационно-разностного и конечно-разностного методов, можно найти в [1 – 4]. Аналитически, методом разделения переменных на квазистатическую и динамическую составляющие, нестационарные осесимметричные колебания полого пьезокерамического цилиндра при импульсном электромеханическом нагружении исследовались в публикации [5]. Эти результаты впоследствии были обобщены на цилиндры с эффектом связанности электромагнитоупругих процессов [6]. Нестационарные колебания многослойных цилиндров из пьезоэлектрически активных материалов изучались авторами [7 – 9] с помощью метода конечных элементов. Для прикладной гидроакустики актуальными являются результаты работ [10, 11], в которых для исследования переходных процессов в пьезопреобразователях цилиндрической формы, окруженных акустическими средами, привлекались численные подходы. Не менее эффективная методика решения задач нестационарной гидроэлектроупругости для электрически нагруженного полого пьезокерамического цилиндра, контактирующего с акустическими средами, изложены в [12, 13].

При электрическом возбуждении пьезокерамических преобразователей зачастую предполагается, что функция, определяющая изменение во времени электрической нагрузки, является известной. Однако в ряде практически важных случаев, в частности в гидроакустике, геофизике и медицине, возникает необходимость идентификации конфигурации электрического сигнала для управления упругими деформациями и механическими напряжениями преобразователей. Постановки таких задач сформулированы, например, в работах [14, 15], и получены соответствующие решения в случае преобразователей в виде тонкостенных цилиндрических оболочек. Однако изложенные в них результаты основаны на обобщенных гипотезах Кирхгофа-Лява [16], что не позволяет исследовать волновые процессы в преобразователе.

В настоящей работе рассматривается задача управления радиальными осесимметричными колебаниями полого цилиндра, изготовленного из радиально поляризованной пьезокерамики, с целью формирования акустической волны заданного профиля давления во внешней безграничной жидкой среде. При этом предполагается, что на внешней поверхности преобразователя имеется тонкий слой из упругого материала, используемого в качестве армирующего бандажа (для повышения механической прочности излучателя).

**Постановка задачи.** Рассматриваемая гидроэлектроупругая система состоит из погруженного в безграничную идеальную сжимаемую жидкую среду полого бесконечно длинного цилиндра из поляризованной вдоль радиуса пьезокерамики со сплошными токопроводящими покрытиями. Внешняя поверхность цилиндра соединена с тонким слоем из пьезоэлектрически пассивного упругого материала, а внутренняя поверхность жестко закреплена.

Геометрические параметры ( $R_1$  и  $R_2$  – внешний и внутренний радиусы цилиндра,  $h_m$  – толщина упругого слоя) и физико-механические характеристики материалов биморфного преобразователя и внешней среды ( $c_*^E$ ,  $e_*$ ,  $d_*$ ,  $\varepsilon_*^S$  – упругие, пьезоэлектрические и диэлектрические константы пьезоке-

рамики;  $E_m, \nu_m$  – упругие постоянные для тонкого слоя;  $\rho_*$  – плотности;  $c_w$  – скорость распространения акустических волн) считаются известными.

Задача состоит в определении конфигурации разности потенциалов  $U_p$ , которую следует подвести к электродам преобразователя для возбуждения во внешней акустической среде гидродинамического давления заданного профиля  $p_w$ .

**Исходные уравнения.** В рамках линейной теории электроупругости [16], теории изотропных оболочек и акустической теории [17] исходные уравнения осесимметричного движения пьезокерамического цилиндра, цилиндрической оболочки и внешней среды имеют вид [13]:

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - a_1 \frac{u_r}{r^2} + a_2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + a_3 \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = a_4 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}; \quad (1)$$

$$b_1 \frac{d^2 w}{dt^2} + b_2 w = q; \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 0, \quad (3)$$

где  $u_r(r,t)$ ,  $w(t)$  – перемещения точек в цилиндре и слое;  $\Psi$  – электростатический потенциал;  $q$  – нормальная к срединной поверхности тонкого слоя механическая нагрузка;  $\phi$  – потенциал акустической среды;  $r$  – радиальная координата цилиндрической системы координат;  $t$  – время.

Для электрической индукции  $D_r$ , нормального напряжения в радиальном направлении  $\sigma_r$ , давления  $p$  в акустической среде и скорости ее частиц  $v$  справедливы следующие зависимости [13]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r D_r) = 0; \quad D_r = a_5 \frac{u_r}{r} + a_6 \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{\partial \Psi}{\partial r}; \quad \sigma_r = a_7 \frac{\partial u_r}{\partial r} + a_8 \frac{u_r}{r} + a_9 \frac{\partial \Psi}{\partial r}; \quad (4)$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial r}; \quad p = -\frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (5)$$

Отметим, что соотношения (1) – (5) записаны с использованием безразмерных переменных:  $u_r, w, r, h_m, R_1$  и  $R_2$  отнесены к  $R_1$ ;  $p, q, \sigma_r$  – к  $\rho_w c_w^2$ ;  $D_r$  – к  $\epsilon_{33}^S / d_{33}$ ;  $\Psi, U_p$  – к  $R_1 / d_{33}$ ;  $v$  – к  $c_w$ ;  $\phi$  – к  $c_w R_1$ , а  $t$  – к  $R_1 / c_w$ . При этом расчетные выражения для постоянных коэффициентов следующие

$$a_1 = \frac{c_{11}^E}{c_{33}^E}, \quad a_2 = \frac{e_{33}}{c_{33}^E d_{33}}, \quad a_3 = \frac{e_{33} - e_{31}}{c_{33}^E d_{33}}, \quad a_4 = \frac{\rho_p c_w^2}{c_{33}^E}, \quad a_5 = \frac{e_{31} d_{33}}{\epsilon_{33}^S}, \quad a_6 = \frac{e_{33} d_{33}}{\epsilon_{33}^S},$$

$$a_7 = \frac{c_{33}^E}{\rho_w c_w^2}, \quad a_8 = \frac{c_{13}^E}{\rho_w c_w^2}, \quad a_9 = \frac{e_{33}}{d_{33} \rho_w c_w^2}; \quad b_1 = \frac{\rho_m h_m}{\rho_w}, \quad b_2 = \frac{1}{\rho_w c_w^2} \frac{E_m h_m}{1 - \nu_m^2}.$$

Дифференциальные уравнения (1) – (3) дополним нулевыми начальными условиями для механических величин и следующими граничными условиями:

$$u_r|_{r=R_1} = w; \quad \frac{dw}{dt} = v|_{r=R_1}; \quad q = -(p + \sigma_r)|_{r=R_1}; \quad u_r|_{r=R_2} = 0, \quad (6)$$

обеспечивающие жесткое соединение цилиндра с упругим слоем и постоянство контакта преобразователя с акустической средой ( $r = R_1$ ), а также неподвижность внутренней поверхности цилиндра ( $r = R_2$ ).

Рассматривая задачу управления, гидродинамическое давление на внешней поверхности ( $r = R_1$ ) излучателя считается заданным:

$$p|_{r=R_1} = p_w. \quad (7)$$

**Методика решения.** Задача решается с использованием интегрального преобразования Лапласа по времени ( $s$  – параметр преобразования,  $L$  – индекс, обозначающий соответствующие трансформанты). Общее решение трансформированного в пространство изображений волнового уравнения (3) с учетом за-

тухания возмущения среды на бесконечности ( $r \rightarrow \infty$ ) выражается через функцию Макдональда  $K_n$  :

$$\phi^L = D^L e^{-s(r-R_1)} g_{10}^L(s, r),$$

где  $D^L$  – произвольная функция параметра  $s$  ;  $g_{mn}^L(s, r) = s^{-m} e^{sr} K_n(sr)$ .

С учетом соотношений (5) выражения для скорости и давления в акустической среде

$$v^L = -D^L e^{-s(r-R_1)} g_{01}^L(s, r); \quad p^L = -D^L e^{-s(r-R_1)} g_{00}^L(s, r),$$

в совокупности с условием управления (7) и вторым условием системы (6) позволяют определить как трансформанту скорости  $v_w$  радиального перемещения активной поверхности излучателя ( $v_w = v|_{r=R_1}$ ),

так и трансформанту функции  $w$  ( $w^L = v_w^L/s$ ):

$$v_w^L \cdot g_{00}^L|_{r=R_1} = p_w^L \cdot g_{01}^L|_{r=R_1}; \quad w^L \cdot g_{00}^L|_{r=R_1} = p_w^L \cdot g_{11}^L|_{r=R_1}.$$

Последующая инверсия этих равенств приводит к интегральным уравнениям Вольтерра относительно  $v_w(t)$  и  $w(t)$  :

$$\begin{aligned} \int_0^t v_w(\tau) g_{00}(t-\tau, R_1) d\tau &= \int_0^t p_w(\tau) g_{01}(t-\tau, R_1) d\tau; \\ \int_0^t w(\tau) g_{00}(t-\tau, R_1) d\tau &= \int_0^t p_w(\tau) g_{11}(t-\tau, R_1) d\tau, \end{aligned} \tag{8}$$

подынтегральные функции  $g_{mn}(t, r)$  которых получены аналитически [13] с использованием таблиц операционного исчисления [18].

На основании представленных в работах [12, 13] результатов трансформанты перемещения  $u_r$ , напряжения  $\sigma_r$  и разности потенциалов  $U_p$  могут быть выражены через функции  $A^L$ ,  $B^L$  и  $C^L$  параметра преобразования  $s$

$$\begin{aligned} u_r^L &= A^L e^{-s\lambda(R_1-r)} f_{1V}^L(s, \lambda r) + B^L e^{-s\lambda(r-R_2)} g_{1V}^L(s, \lambda r) - \\ &\quad - C^L \beta [V^L(s, r) g_{1V}^L(s, \lambda r) + W^L(s, r) f_{1V}^L(s, \lambda r)]; \\ \sigma_r^L &= A^L e^{-s\lambda(R_1-r)} F^L(s, r) + B^L e^{-s\lambda(r-R_2)} G^L(s, r) - \\ &\quad - C^L \left\{ \beta [V^L(s, r) G^L(s, r) + W^L(s, r) F^L(s, r)] + \frac{\mu}{r} \frac{1}{s} \right\}; \\ U_p^L &= A^L \Phi_1^L(s) + B^L \Phi_2^L(s) + C^L \left( \Phi_3^L(s) - \frac{1}{s} \ln \frac{R_1}{R_2} \right). \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$f_{mv}^L(s, r) = \frac{e^{-sr}}{s^m} I_v(sr); \quad V^L(s, r) = \int_{R_2}^r \frac{e^{-s\lambda x}}{x} I_v(s\lambda x) dx; \quad W^L(s, r) = \int_r^{R_1} \frac{e^{s\lambda x}}{x} K_v(s\lambda x) dx;$$

$$F^L(s, r) = \xi f_{0v+1}^L(s, \lambda r) + \frac{\zeta}{r} f_{1V}^L(s, \lambda r); \quad G^L(s, r) = -\xi g_{0v+1}^L(s, \lambda r) + \frac{\zeta}{r} g_{1V}^L(s, \lambda r);$$

$$\Phi_1^L = a_6 f_{1V}^L(s, \lambda R_1) + a_5 \frac{1}{s} V^L(s, R_1) - a_6 e^{-s\lambda(R_1-R_2)} f_{1V}^L(s, \lambda R_2);$$

$$\Phi_2^L = -a_6 g_{1V}^L(s, \lambda R_2) + a_5 \frac{1}{s} W^L(s, R_2) + a_6 e^{-s\lambda(R_1-R_2)} g_{1V}^L(s, \lambda R_1);$$

$$\Phi_3^L = -a_6 \beta [V^L(s, R_1) g_{1V}^L(s, \lambda R_1) - W^L(s, R_2) f_{1V}^L(s, \lambda R_2)] - a_5 \beta \frac{1}{s} Z^L;$$

$$Z^L = \int_{R_2}^{R_1} \frac{1}{x} I_V(s\lambda x) \int_x^{R_1} \frac{1}{y} K_V(s\lambda y) dy dx + \int_{R_2}^{R_1} \frac{1}{x} K_V(s\lambda x) \int_{R_2}^x \frac{1}{y} I_V(s\lambda y) dy dx;$$

$$\xi = \lambda \frac{c_{33}^E \epsilon_{33}^S + e_{33}^2}{\rho_w c_w^2 \epsilon_{33}^S}; \quad \zeta = v \frac{c_{33}^E \epsilon_{33}^S + e_{33}^2}{\rho_w c_w^2 \epsilon_{33}^S} + \frac{c_{13}^E \epsilon_{33}^S + e_{33} e_{31}}{\rho_w c_w^2 \epsilon_{33}^S}; \quad \mu = \frac{e_{33}}{\rho_w c_w^2 d_{33}};$$

$$v = \sqrt{\frac{c_{11}^E \epsilon_{33}^S + e_{31}^2}{c_{33}^E \epsilon_{33}^S + e_{33}^2}}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\rho_p c_w^2 \epsilon_{33}^S}{c_{33}^E \epsilon_{33}^S + e_{33}^2}}, \quad \beta = \frac{-e_{31} \epsilon_{33}^S}{(c_{33}^E \epsilon_{33}^S + e_{33}^2) d_{33}}.$$

Входящие в соотношения (9) неизвестные  $A^L$ ,  $B^L$  и  $C^L$  определяются из механических граничных условий (6), которые после исключения нагрузки  $q$  ( $q^L = b_1 s^2 w^L + b_2 w^L$ , см. (2)) в пространстве изображений могут быть записаны следующим образом:

$$\sigma_r^L|_{r=R_1} = -(p_w^L + b_1 s v_w^L + b_2 w^L); \quad s u_r^L|_{r=R_1} = v_w^L; \quad u_r^L|_{r=R_2} = 0. \quad (10)$$

В результате подстановки формул (9) в равенства (10) получим систему трех алгебраических уравнений относительно указанных неизвестных:

$$A^L \cdot F^L|_{r=R_1} - C^L \cdot \left( \beta V^L G^L + \frac{\mu 1}{r s} \right) \Big|_{r=R_1} =$$

$$= -(p_w^L + b_1 s v_w^L + b_2 w^L) - e^{-s\lambda(R_1-R_2)} B^L \cdot G^L|_{r=R_1};$$

$$A^L \cdot f_{0v}^L|_{r=R_1} - C^L \cdot (\beta V^L g_{0v}^L) \Big|_{r=R_1} = v_w^L - e^{-s\lambda(R_1-R_2)} B^L \cdot g_{0v}^L|_{r=R_1}; \quad (11)$$

$$B^L \cdot g_{1v}^L|_{r=R_2} = C^L \cdot (\beta W^L f_{1v}^L) \Big|_{r=R_2} - e^{-s\lambda(R_1-R_2)} A^L \cdot f_{1v}^L|_{r=R_2}.$$

Последующий переход в пространство оригиналов на основании теорем о запаздывании и свертке двух функций:

$$L^{-1}\{e^{-sx} X^L\} = H(t-x) X(t-x); \quad L^{-1}\{X^L Y^L\} = \int_0^t X(\tau) Y(t-\tau) d\tau;$$

и представленных в работе [13] выражений для  $f_{mn}$ ,  $V$  и  $W$  не вызывает принципиальных математических затруднений. Такая методика позволяет свести рассматриваемую задачу к системе интегральных уравнений Вольтерра с запаздывающими аргументами [12], которая для сокращения изложения в настоящей статье не приводится. Располагая значениями  $A(t)$ ,  $B(t)$  и  $C(t)$  легко получить как конфигурацию управляющего сигнала  $U_p(t)$  через обращение последнего равенства системы (9):

$$U_p = \int_0^t A(\tau) \Phi_1(t-\tau) d\tau + \int_0^t B(\tau) \Phi_2(t-\tau) d\tau + \int_0^t C(\tau) \left[ \Phi_3(t-\tau) - \ln \frac{R_1}{R_2} \right] d\tau, \quad (12)$$

так и другие физические характеристики исследуемого переходного процесса.

Отметим, что при отсутствии упругого слоя достаточно положить  $h_m = 0$ , что соответствует  $b_1 = b_2 \equiv 0$  в расчетных выражениях. Если внутренняя поверхность цилиндра свободна от механических нагрузок ( $\sigma_r^L|_{r=R_2} = 0$ ), то последнее соотношение в системе (11) следует заменить на

$$B^L \cdot G^L|_{r=R_2} = C^L \cdot \left( \beta W^L F^L + \frac{\mu 1}{r s} \right) \Big|_{r=R_2} - e^{-s\lambda(R_1-R_2)} A^L \cdot F^L|_{r=R_2},$$

что принципиально не меняет процедуру решения задачи.

Изложенные в публикациях [14, 15] материалы позволяют записать решение рассматриваемой задачи в случае, когда электроупругий слой цилиндрического преобразователя является тонким ( $h_p = R_1 - R_2 \ll R_1$ ) и при моделировании связанных электроупругих процессов допускается привлече-

ние уравнений теории тонких электроупругих оболочек [16]. С использованием принятых ранее обозначений для разности потенциалов, подведение к сплошным электродам биморфной (металл-пьезокерамика) оболочки которого обеспечивает заданное осесимметричное движение  $w$  (8) ее поверхности приведения, окончательно получим:

$$U_p(t) = -\frac{d}{dt} \left( \frac{b_3}{b_5} p_w + \int_0^t p_w(\tau) \tilde{U}_p(t-\tau) d\tau \right), \quad (13)$$

где  $\tilde{U}_p$  является решением интегрального уравнения Вольтерра I-го рода:

$$\int_0^t \tilde{U}_p(\tau) g_{10}(t-\tau, R_1) d\tau = \left( \frac{1}{b_5} g_{20} + \frac{b_3}{b_5} (g_{11} - g_{10}) + \frac{b_4}{b_5} g_{31} \right) \Big|_{r=R_1},$$

а постоянные коэффициенты равны:

$$b_3 = \frac{\rho_m h_m + \rho_p h_p}{\rho_w}; \quad b_4 = \frac{1}{\rho_w c_w^2} \left( \frac{E_m h_m}{1 - \nu_m^2} + \frac{h_p}{s_{11}^E (1 - \nu_p^2)} \right); \quad b_5 = \frac{d_{31}/d_{33}}{\rho_w c_w^2 s_{11}^E (1 - \nu_p^2)},$$

где  $s_{11}^E$ ,  $\nu_p$  – упругая податливость и коэффициент Пуассона пьезокерамики.

Отметим, что равенство (13) записано в предположении, что функция  $p_w$ , описывающая профиль давления излучаемой во внешнюю акустическую среду волны, известна (7), а другие, внешние к оболочке механические воздействия, отсутствуют.

**Числовые результаты.** Числовые результаты получены для погруженных в воду ( $c_w=1500$  м/с;  $\rho_w=1000$  кг/м<sup>3</sup>) преобразователей, составленных из слоя пьезокерамики марки PZT-5 и слоя титанового сплава ВТ-6 с относительной толщиной  $h_m=0.02$ , физические свойства которых следующие:  $\rho_p=7600$  кг/м<sup>3</sup>;  $c_{11}^E=10.3 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $c_{13}^E=5.9 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $c_{33}^E=10.2 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $s_{11}^E=15.4 \cdot 10^{-12}$  м<sup>2</sup>/Н;  $e_{31}=-7.78$  Кл/м<sup>2</sup>,  $e_{33}=15.2$  Кл/м<sup>2</sup>,  $d_{31}=-178 \cdot 10^{-12}$  Кл/Н,  $d_{33}=3.56 \cdot 10^{-10}$  Кл/Н;  $\epsilon_{33}^S=7.91 \cdot 10^{-9}$  Ф/м;  $\rho_m=4450$  кг/м<sup>3</sup>,  $E_m=11.3 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\nu_m=0.31$ . При этом для толстостенного излучателя принято  $R_1 - R_2 = 0.4$  ( $R_1=1.0$ ), для тонкостенного –  $h_p=0.04$ .

При численном решении интегральных уравнений и их систем методом квадратур временной интервал разбивался на равные отрезки  $\Delta t=1/415$ , что обеспечило приемлемую погрешность счета (в пределах 2 % для максимальных значений по сравнению с  $\Delta t=1/625$ ).

Конкретные вычисления проведены для задач возбуждения в акустической среде гидродинамического давления продолжительности 0.4 с одночастотным заполнением на частоте  $10\pi$  (рис. 1, кривая А) и давления знакопеременного прямоугольного профиля (рис. 1, кривая В). Отметим, что при выборе профилей были учтены рекомендации [19] на предмет их практической реализации (не приводящие к разрушению излучателя).

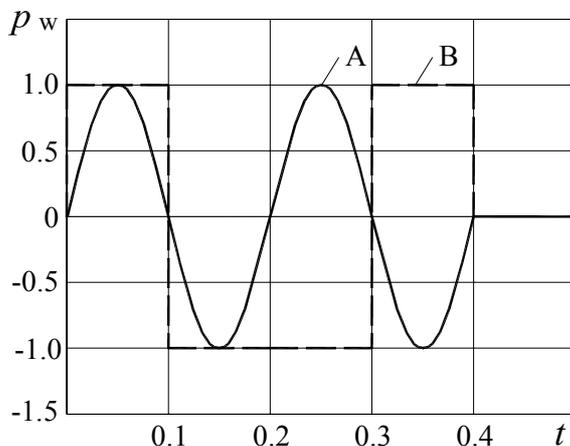


Рис. 1. Профили гидродинамического давления

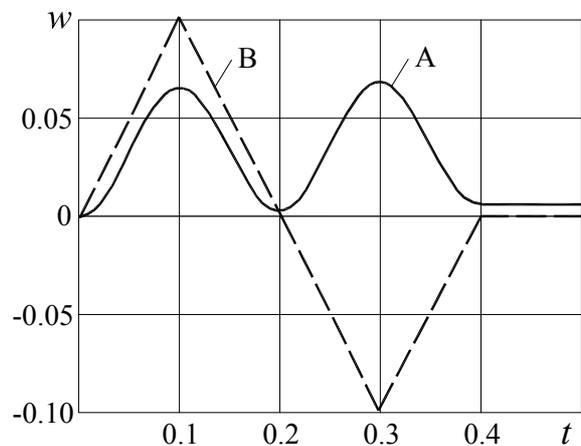


Рис. 2. Перемещения излучающей поверхности

На рис. 2 изображены соответствующие указанным профилям законы изменения во времени движения излучающей поверхности преобразователя, вычисленные из второго интегрального уравнения (8). Характерной особенностью профиля «А» является то, что после прекращения формирования заданной акустической волны ( $t > 0.4$ ) поверхность принимает некоторое постоянное положительное значение радиального перемещения. Этого недостатка лишен профиль «В», для которого как полный импульс давления, так и импульс колебательной скорости активной поверхности, равны нулю, и при  $t > 0.4$  эта поверхность возвращается в исходное (недеформированное) состояние. Отметим, что под импульсом физической величины подразумевается интеграл этой величины (переменная интегрирования –  $t$ ) на временном отрезке  $[0; 0.4]$ , на котором задан профиль давления.

Чтобы обеспечить перемещение  $w$  по закону «А» (рис. 2) необходимо, в соответствии с формулой (12), приложить к сплошным электродам толстостенного пьезокерамического излучателя разность потенциалов  $U_p$ , конфигурация которого представлена на рисунке 3,а сплошной кривой. Тонкая кривая на этом рисунке иллюстрирует результаты решения задачи управления (13) в случае тонкостенного излучателя.

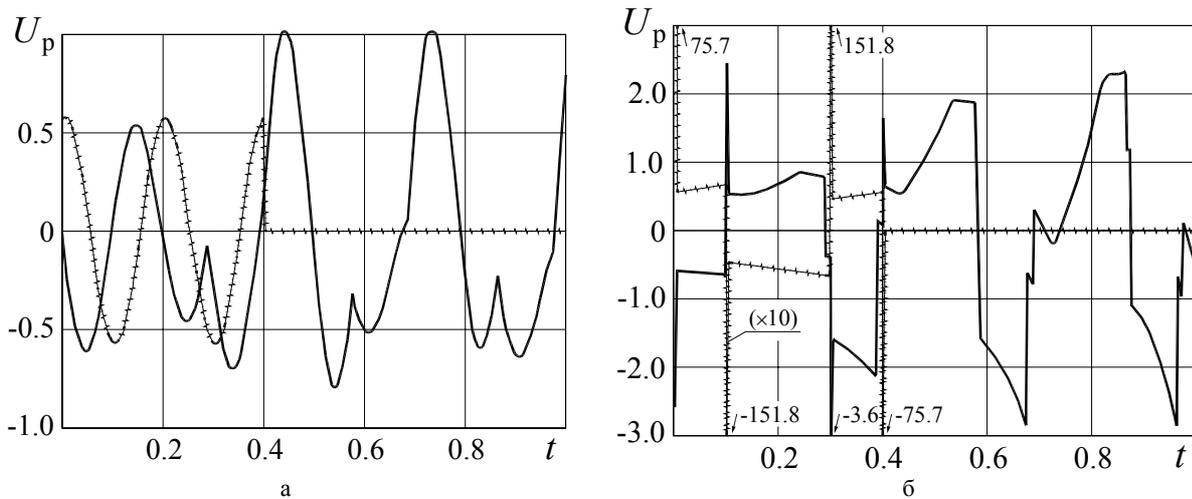


Рис. 3. Конфигурация управляющего электрического сигнала

Согласно рис. 3,а конфигурация подводимого к толстостенному преобразователю электрического сигнала на начальном этапе подобна профилю радиальной скорости его излучающей поверхности. В моменты времени  $t = 2nT$  ( $n = 1, 2, \dots$ ;  $T = \lambda(R_1 - R_2) \approx 0.289$  – время пробега волной толщины стенки цилиндра), когда отраженная от неподвижной цилиндрической поверхности ( $r = R_2$ ) упругая волна достигает внешнюю поверхность ( $r = R_1$ ), график  $U_p$  имеет точки излома. Из рисунка также видно, что и после завершения формирования волны заданного профиля ( $t > 0.4$ ) необходимо электрическое возбуждение преобразователя для поддержания постоянного уровня перемещения внешней поверхности (рис. 2, кривая А), что обусловлено волновым характером деформирования электроупругого слоя. При этом полученные максимальные значения функции  $U_p$  ( $t > 0.4$ ) несколько больше, чем на этапе управления ( $t \leq 0.4$ ). В то же время, по уравнениям теории тонких оболочек для сохранения неподвижности поверхности приведения излучателя при  $t > 0.4$  достаточно прикладывать некоторое постоянное значение управляющей разности потенциалов (ввиду малости значения, тонкая кривая практически сливается с осью абсцисс).

Результаты решения рассматриваемой задачи с исходным прямоугольным профилем (рис. 1, кривая В) представлены на рисунке 3,б сплошной (для толстостенного излучателя) и волнистой (для тонкостенного) кривыми. Для удобства чтения волнистая кривая построена с масштабным коэффициентом 10. Анализ этих кривых позволяет сделать вывод, что всякое скачкообразное изменение давления в излучаемой волне требует приложения к электродам армированного излучателя электрического напряжения, которое содержит дельта-функцию (при численном счете дельта-функция аппроксимировалась прямоугольником с малым основанием  $\Delta t$  и высотой  $1/\Delta t$ ). При этом скачкообразному изменению радиальных перемещений (рис. 2, кривая В) препятствуют инерционные свойства преобразователей. Отметим, что для неармированного толстостенного излучателя ( $h_m = 0$ ) конфигурация управляющего сигнала практически не отличается от приведенной за тем исключением, что резкие всплески значений  $U_p$  отсутствуют. Из рис. 3, б также видно, что максимальные значения разности потенциалов для цилиндриче-

скої оболочки суттєво вище по порівнянню з необхідним управлінням для толстостінного пьезокерамічного излучателя. Однак після закінчення формування заданного акустичного імпульса і повертання поверхні приведення в початковий стан ( $t > 0.4$ ) в тонкостінному преобразователі достатньо закоротити електроди ( $U_p|_{t>0.4} = 0$ ). Складний характер змінення сплошної кривої обумовлен

як наявністю скачків значень в функції  $p_w(t)$ , так і необхідністю управління хвилями деформацій, багаторазово відбиваються від граничних поверхностей преобразователя.

Із отриманих числових результатів слідує, що осцилограма підведеного до електродів толстостінного циліндричного преобразователя управляючого сигналу визначається не тільки конфігурацією гідродинамічного тиску випромінюваної во зовнішню середу хвилі, але і товщиною коливаннями електроупругого циліндра. По тому навіть після закінчення формування заданої епюри тиску необхідно прикладувати управляючий сигнал з достатньо складним характером змінення во змєні. Сприяють скорішому подавленню електроупругих коливань циліндра могли бє слєдуєчі підходи: урахування диссипативних властивостей матеріалів преобразователя, внесення доповільних критерієв управління і примєнієня неоднородних по товщинє матеріалів.

**Заклюєніє.** В роботє представлено рєшенє нестационарної задаєі, постановка котрої состоїт в определєнні конфігураєі управляюєго електриєкого напруженія, підведеного к сплошним електродам циліндриєкого толстостінного пьезокерамієкого преобразователя с вєнєшнім арміруюєім тонким упругим слоєм, для излучєнія акустичєской хвилі тиску заданного профіля. С іспользованием інтегрального преобразования Лапласа рассматриваемая задача сведєна к сїстєме інтегральных уравнєний Вольтєрра с запаздываюєими аргументами. Конкрєтнєе расєеты і анализ рєзултатов выполнєны для синусоїдального і знакопеременного прямоугольного акустичєских імпульсов. Изложенная методика позволяет расєчитывать характеристики переходного процесса в полом электроупругом циліндре і при других вариантах граниєных условий.

## РЕЗЮМЕ

Представлен численно-аналитический метод решения задачи управления радиальными колебаниями бесконечно длинного пьезокерамического полого цилиндра, армированного сплошным тонким металлическим биндажом и погруженного в безграничную жидкую среду. Нестационарные процессы в рассматриваемой гидроэлектроупругой системе моделируются уравнениями линейной теории электроупругости, теории тонких оболочек и акустического приближения. Задача решена с использованием интегрального преобразования Лапласа. Представлены и проанализированы числовые результаты.

*Ключевые слова:* полый пьезокерамический цилиндр, акустическая среда, управление радиальными колебаниями, преобразование Лапласа, система интегральных уравнений Вольтерра.

## SUMMARY

The numerically-analytical solution of problem of radial vibration control for infinitely long piezoceramic hollow cylinder which is reinforced by solid thin metal bandage and submerged in boundless liquid environment is presented. Non-stationary processes in the considered hydroelectroelastic system are modelled by equations of linear theory of electroelasticity, the theory of thin shells and acoustic approach. The problem is solved using Laplace integral transform. Numerical results are presented and analysed.

*Key words:* hollow piezoceramic cylinder, acoustic environment, radial vibration control, Laplace integral transform, system of Volterra integral equation.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Gautier F. Vibroacoustics of cylindrical pipes: internal radiation modal coupling / F. Gautier, N. Tahani // J. Sound Vibration. – 1998. – Vol. 215. – P. 1165-1179.
2. Melnik R.V.N. Computational analysis of coupled physical fields in piezothermoelastic media / R.V.N. Melnik // Computer Physics Communications. – 2001. – Vol. 142. – P. 231-237.
3. Шульга Н.А. Радиальные электромеханические нестационарные колебания полого пьезокерамического цилиндра при электрическом возбуждении / Н.А. Шульга, Л.О. Григорьева // Прикл. механика. – 2009. – Т. 45, № 2. – С. 30-35.
4. Шульга Н.А. Радиальные упругоэлектрические нестационарные колебания пьезокерамического цилиндра при механическом нагружении / Н.А. Шульга, Л.О. Григорьева // Прикл. механика. – 2009. – Т. 45, № 4. – С. 66-71.
5. Ding H.J. The transient responses of piezoelectric hollow cylinders for axisymmetric plane stress problems / H.J. Ding, H.M. Wang, P.F. Hou // Int. J. Sol. and Str. – 2003. – Vol. 40. – P. 105-123.
6. Dai H.L. Dynamic responses of piezoelectric hollow cylinders in an axial magnetic field / H.L. Dai, X. Wang // Int. J. Sol. and Str. – 2004. – Vol. 41. – P. 5231-5246.
7. Chen Y. Double-layered piezo-thermoelastic hollow cylinder under some coupled loadings / Y. Chen, Zh. Shi // Appl. Mech. – 2006. – Vol. 75, No 6-7. – P. 326-337.
8. Saviz M.R. Electroelastic fields in a layered piezoelectric cylindrical shell under dynamic load / M.R. Saviz, M. Shakeri, M.H. Yas // Smart Materials and Structures. – 2007. – Vol. 16, No 5. – P. 1683-1695.

9. Taciroglu E. Analysis of laminated piezoelectric circular cylinders under axisymmetric mechanical and electrical loads with a semi-analytic finite element method / E. Taciroglu, C.W. Liu, S.B. Dong, C.K. Chu // Int. J. Sol. and Str. – 2004. – Vol. 41, Iss. 18-19. – P. 5185-5208.
10. Melnik R.V.N. Numerical analysis of dynamic characteristics of coupled piezoelectric systems in acoustic media / R.V.N. Melnik // Mathematics and Computers in Simulation. – 2003. – Vol. 61. – P. 497-507.
11. Kamath H. Vibration of piezoelectric elements surrounded by fluid media / H. Kamath, M. Willatzen, R.V.N. Melnik // Ultrasonics. – 2006. – Vol. 44. – P. 64-72.
12. Бабаев А.Э. Излучение нестационарных акустических волн радиально поляризованным цилиндрическим пьезопреобразователем / А.Э. Бабаев, В.Г. Савин // Прикл. механика. – 1994. – Т. 31, № 4. – С. 41-48.
13. Бабаев А.Э. Излучение нестационарных акустических волн электроупругим цилиндром с проводной цепью / А.Э. Бабаев, И.В. Янчевский // Теор. и прикл. механика. – 2010. – Вып. 1 (47). – С. 114-125.
14. Бабаев А.Э. Излучение акустических импульсов заданного профиля электроупругой цилиндрической оболочкой / А.Э. Бабаев, В.Г. Савин, Ю.В. Кожемяка // Теор. и прикл. механика. – 2001. – Вып. 33. – С. 186-191.
15. Подчасов Н.П. Управление нестационарными колебаниями цилиндрической полупассивной оболочки при секционированном электродировании пьезослоя / Н.П. Подчасов, И.В. Янчевский // Теор. и прикл. механика. – 2011. – № 3 (49). – С. 93-101.
16. Гринченко В.Т. Механика связанных полей в элементах, конструкций. Т. 5. Электроупругость. / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга. – К.: Наук. думка, 1989. – 280 с.
17. Гузь А.Н. Методы расчета оболочек. Т. 5. Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек. / А.Н. Гузь, В.Д. Кубенко. – К.: Наук. думка, 1982. – 400 с.
18. Диткин В.А. Справочник по операционному исчислению. / В.А. Диткин, А.П. Прудников. – М.: Высшая школа, 1965. – 466 с.
19. Моргун И.О. Возбуждение акустических импульсов заданной формы сферическим пьезопреобразователем / И.О. Моргун, В.Г. Савин, А.А. Бабаев // Электроника и связь. – 2007. – №4 (39). – С. 78-85.

*Поступила в редакцию 12.12.2011 р.*