

УДК 539.213; 530.1

**ОСОБЕННОСТИ СТАТИСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПОЛЯ ДЕФОРМАЦИИ  
ФРАКТАЛЬНОЙ ДИСЛОКАЦИИ***В. С. Абрамов**Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина НАН Украины, г. Донецк*

Объектом исследования является фрактальная дислокация. Рассматривается модельный образец конечных размеров с объемной решеткой в виде прямоугольного параллелепипеда. Строится двухточечная модель на основе ранее предложенной одноточечной модели, в которой использовалась теория дробного исчисления и концепция фрактала. Исследуются особенности поведения поля деформации фрактальной дислокации и возможные корреляционные связи. Установлено ярко выраженное стохастическое поведение амплитуд и фазы у усредненных функций. Методом численного моделирования показано изменение статистики с типа Ферми-Дирака на статистику типа Бозе-Эйнштейна для отдельных внутренних узловых плоскостей. Это подтверждает теоретический вывод о наличии смешанной статистики.

*Ключевые слова:* фрактальная дислокация, комплексное поле деформации, двухточечная модель, статистические свойства, смешанная статистика.

**Введение.** Новым направлением квантовой информатики являются квантовые информационные технологии [1, 2]. В этих технологиях в качестве носителя информации (единиц, битов) используются кванты света – фотоны. Используя принципы квантовой оптики [3], запись и последующее считывание квантовой информации (кодированной в состояниях поляризации фотонов) осуществляется на квантовых состояниях одиночных атомов или на коллективных квантовых состояниях атомного ансамбля. Для реализации оптических квантовых вычислений необходимы источники и детекторы одиночных фотонов (одnofотонных фоковских состояний моды излучения). Такие источники можно получать на основе микрорезонаторов различных форм (микроторроиды, микросферы, микродиски, фотонные нанокристаллы), в которых с помощью литографии созданы активные квантовые точки. Также разработаны источники пар перепутанных фотонов (белловские пары), которые получают, например, с помощью оптических волноводов в кристаллах, микроструктурированных периодически поляризованными доменами. В настоящее время имеются фотодетекторы, способные откликаться на однофотонные состояния поля: лавинные фотодиоды, работающие на гейгеровской моде; полупроводниковый счетчик фотонов видимого света; туннельные фотодиоды на квантовых точках. Отмечена основная трудность при обработке квантовой информации: результаты фотодетектирования являются случайными.

В качестве другого носителя информации можно использовать кванты колебательных возбуждений решетки – фононы. Ранее в работах [4-6] были введены фрактоны – колебательные возбуждения на фрактале. В работе [7] было исследовано неупругое рассеяние света на фрактальных колебательных модах в полимерах. В рамках фрактонного описания локализованных колебаний определена фрактонная (спектральная) размерность, найдена характерная частота колебаний, при которой происходит переход от фрактонного к фононному спектру, сделана оценка размеров фрактальных областей. Фрактонные колебательные возбуждения локализованы из-за фрактальной геометрии среды. Их надо отличать от локальных фононов, которые локализованы в андерсоновском смысле из-за рассеяния колебаний на статических несовершенствах решетки. Локализация колебаний и фрактальность геометрии проявляются только на малых масштабах. Для достаточно больших длин волн колебательные возбуждения в любой среде должны вести себя как обычные фононы. Существует характерная длина  $L$ . Колебательные возбуждения с длинами волн  $\lambda > L$  – это обычные фононы, а с  $\lambda < L$  – фрактоны или локальные фононы (в зависимости от того является ли геометрия фрактальной или евклидовой).

Возможны различные механизмы связей и взаимных преобразований одних носителей информации (фотонов) в другие (фононы) на активных наноструктурных элементах. Так в работе [8] получены и проанализированы инфракрасные и рамановские спектры стеклообразного полиметилметакрилата в области  $10-150 \text{ см}^{-1}$ . Авторы отнесли низкочастотную аномалию спектров («бозонный пик») к либрационным колебаниям на участке основной цепи полимера соизмеримым с ее статистическим сегментом. Установлена связь этих когерентных либрационных возбуждений с релаксационными процессами в полимере. Отмечено, что низкочастотная динамика стеклообразных твердых тел отличается от характерной для кристаллов и обладает рядом универсальных особенностей, которые обусловлены избыточной (относительно дебаевской) плотностью колебательных состояний (ПКС). Появление «бозонного пика» в инфракрасных и рамановских спектрах связывается с избыточной ПКС. Полагают, что избыточная ПКС

вызвана существованием квазилокальных колебательных мод. В настоящее время природа этих мод широко обсуждается. Ряд авторов полагают, что указанные моды представляют собой локальные колебания структурных образований: фракталов, доменов, нанонеоднородностей. Другие приписывают их коррелированным колебаниям молекулярных кластеров или молекул.

В работе [9] исследована статистика мезоскопических ансамблей бозонов и фермионов с ограниченным числом частиц, найдены равновесные функции распределения. Показано, что указанные функции распределения чисел частиц в разных квантовых состояниях являются статистически зависимыми и только при большом числе частиц в ансамбле эта зависимость исчезает. При высокой температуре найденные распределения переходят в распределение Больцмана, а при большом числе частиц в ансамбле – в распределения Бозе-Эйнштейна и Ферми-Дирака. Отмечено, что ансамбль с небольшим числом частиц в настоящее время привлекает к себе особый интерес в связи с большими надеждами, возлагаемыми на применение запутанных состояний (например, для двух атомов, захваченных в ловушку или квантовую точку) в различных областях квантовой информации – квантовой криптографии, квантовой телепортации и при квантовых вычислениях [10, 11].

В качестве активных наноструктурных элементов обычно выбирают примесные кристаллы с активными рабочими атомами (или группой атомов, агрегатов, кластеров [12]). Одним из неклассических структурных объектов в наноструктурном материале является фрактальная дислокация, которая возникает на дискретной прямоугольной решетке [13, 14]. Под действием внешних воздействий в наноструктурном материале возможно изменение структуры активных наноразмерных элементов, а при некоторых критических значениях параметров – существенная перестройка структуры и возникновение квантового хаоса [15]. В работе [14] показано, что имеет место эффект ветвления, наличие квантовых и необычных статистических свойств поля деформации фрактальной дислокации. Для теоретического описания структурных изменений и особенностей статистических свойств нанобъектов строятся различные математические модели. Одним из наиболее эффективных методов анализа поведения таких нелинейных моделей является использование усредненных функций и числовых характеристик.

Целью данной работы является дальнейшее исследование поведения структурных состояний и особенностей статистических свойств поля деформации фрактальной дислокации. Описание структурных состояний фрактальной дислокации основывается на теории дробного исчисления и концепции фрактала. Поле деформации фрактальной дислокации, в общем случае, является комплексным, стохастическим и дискретным [13, 14]. Наличие дискретности тесно связано с появлением квантовых свойств и квантового хаоса [15], что приводит к существенному изменению поведения поля деформации, усредненных функций и других характеристик фрактальной дислокации.

**Постановка задачи.** Анализ поведения комплексного поля деформации удобно проводить в терминах усредненных функций. Для этого рассмотрим образец конечных размеров с объемной решеткой  $N_1 \times N_2 \times N_3$  в виде прямоугольного параллелепипеда. Отклонения узлов этой решетки от состояния покоя описывается оператором смещения  $\hat{u}(z)$ . Безразмерная координата  $z$  вдоль оси  $Oz$  зависит от целочисленного индекса  $j = \overline{1, N_3}$ . Этому оператору ставится в соответствие прямоугольная матрица с матричными элементами  $u_{nm}(z)$ , где  $n = \overline{1, N_1}$ ;  $m = \overline{1, N_2}$ . В работе [14] были получены нелинейные уравнения для оператора  $\hat{u}(z)$ . Для каждого дискретного значения  $z$  элементы  $u_{nm}(z)$  находятся при решении этих нелинейных уравнений методом итераций. Сама итерационная процедура моделирует стохастический процесс на прямоугольной дискретной решетке  $N_1 \times N_2$ . Элементы  $u_{nm}(z)$  в общем случае являются случайными комплексными функциями от действительной переменной  $z$ , а также зависят от фрактальной размерности  $\alpha$  вдоль оси  $Oz$  и ряда других внутренних, внешних управляющих параметров. Поэтому для описания комплексного поля деформации фрактальной дислокации используются элементы теории случайных матриц [15] и вводятся усредненные функции в рамках статистического подхода, где усреднение выполняется по узловым индексам  $n, m$  [14]. Отметим, что при этом усреднение по  $z$  отсутствует. В работе [14] была использована одноточечная модель (на основе теории дробного исчисления и концепции фрактала), в рамках которой координата  $z$  определялась зависимостью  $z = 0.053 + 0.1(j-1)$ , где  $j = \overline{1; 67}$ . Значения  $z \in [0.053; 6.653]$  и изменялись с шагом  $z_h = 0.1$ .

**Двухточечная модель.** В данной работе с целью установления возможных корреляционных связей строится двухточечная модель, в рамках которой координата  $z$  принимает два значения  $z_1$  и  $z_2$ , зависимости которых от индекса  $j$  определяются соотношениями

$$z_1 = 0.053 + 0.1(j-1); \quad z_2 = 6.653 - 0.1(j-1); \quad j = \overline{1; 67}. \quad (1)$$

При  $j=1$  из (1) следуют граничные значения  $z_1 = 0.053$ ,  $z_2 = 6.653$  и при  $j=67$  значения  $z_1 = 6.653$ ,  $z_2 = 0.053$ . Выбор такой схемы для  $z_1$  и  $z_2$  соответствует прямой и обратной волнам сме-

щений  $u_{nm}(z_1)$  и  $u_{nm}(z_2)$  внутри объемной решетки  $N_1 \times N_2 \times N_3$ .

Отклонения узлов решетки от состояния покоя в отдельной плоскости  $N_1 \times N_2$  при фиксированных значениях  $z_1$  и  $z_2$  теперь описывается операторами смещений  $\hat{u}(z_1)$  и  $\hat{u}(z_2)$ , которым соответствуют прямоугольные матрицы с размерами  $N_1 \times N_2$ . Операторам  $\hat{u}^+(z_1)$ ,  $\hat{u}^+(z_2)$  соответствуют прямоугольные матрицы с размерами  $N_2 \times N_1$ , где значок «+» означает операцию эрмитового сопряжения. В общем случае элементы этих матриц являются случайными комплексными функциями от целочисленных индексов  $n, m, j$ . С целью описания поля деформации фрактальной дислокации в терминах квадратных матриц вводим операторы

$$\hat{M}_1 = \hat{u}(z_1) \hat{u}^+(z_1); \quad \hat{M}_3 = \hat{u}(z_2) \hat{u}^+(z_2); \quad \hat{M}_5 = \hat{u}(z_1) \hat{u}^+(z_2); \quad \hat{M}_5^+ = \hat{u}(z_2) \hat{u}^+(z_1); \quad (2)$$

$$\hat{M}_2 = \hat{u}^+(z_2) \hat{u}(z_2); \quad \hat{M}_4 = \hat{u}^+(z_1) \hat{u}(z_1); \quad \hat{M}_6 = \hat{u}^+(z_2) \hat{u}(z_1); \quad \hat{M}_6^+ = \hat{u}^+(z_1) \hat{u}(z_2). \quad (3)$$

Операторам из (2) и (3) соответствуют квадратные матрицы с размерами  $N_1 \times N_1$  и  $N_2 \times N_2$ . Выполнив усреднение по узловым индексам  $n, m$  с помощью операции вычисления следа  $Sp$  квадратных матриц, получим усредненные функции  $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$

$$M_1 = Sp \hat{M}_1; \quad M_3 = Sp \hat{M}_3; \quad M_5 = M_5' + iM_5'' = Sp \hat{M}_5; \quad M_5^* = M_5' - iM_5'' = Sp \hat{M}_5^+; \quad (4)$$

$$M_2 = Sp \hat{M}_2; \quad M_4 = Sp \hat{M}_4; \quad M_6 = M_6' + iM_6'' = Sp \hat{M}_6; \quad M_6^* = M_6' - iM_6'' = Sp \hat{M}_6^+, \quad (5)$$

где  $M' = \text{Re } M$ ,  $M'' = \text{Im } M$  соответствующей комплексной усредненной функции  $M$ ;  $\text{Re}$ ,  $\text{Im}$  – операции выделения реальной, мнимой частей;  $i$  – мнимая единица; значок «\*» означает операцию комплексного сопряжения. Отметим, что операторы  $\hat{M}_1, \hat{M}_2, \hat{M}_3, \hat{M}_4$  из (2), (3) являются эрмитовыми операторами, т.е. удовлетворяют условиям

$$(\hat{M}_1)^+ = \hat{M}_1^+ = \hat{M}_1; \quad \hat{M}_3^+ = \hat{M}_3; \quad \hat{M}_2^+ = \hat{M}_2; \quad \hat{M}_4^+ = \hat{M}_4. \quad (6)$$

Выполнив операцию перестановки операторов под знаком  $Sp$  в выражениях (4), (5), находим связи для усредненных функций  $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$

$$M_1 = Sp[\hat{u}(z_1) \hat{u}^+(z_1)] = Sp[\hat{u}^+(z_1) \hat{u}(z_1)] = Sp \hat{M}_4 = M_4; \quad M_3 = M_2; \\ M_5 = Sp[\hat{u}(z_1) \hat{u}^+(z_2)] = Sp[\hat{u}^+(z_2) \hat{u}(z_1)] = Sp \hat{M}_6 = M_6; \quad M_5^* = M_6^*. \quad (7)$$

На основе выражений (7) вводим матрицы

$$\hat{A}_1 = \begin{pmatrix} M_1 & M_5 \\ M_5^* & M_3 \end{pmatrix}; \quad \hat{A}_2 = \begin{pmatrix} M_2 & M_6 \\ M_6^* & M_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_3 & M_5 \\ M_5^* & M_1 \end{pmatrix}; \quad \hat{A}_1^+ = \hat{A}_1; \quad \hat{A}_2^+ = \hat{A}_2. \quad (8)$$

Из выражений (8) следует, что для описания комплексного поля деформации фрактальной дислокации вместо шести усредненных функций (4), (5) достаточно использовать только три  $M_1, M_3, M_5$ . Далее на основе операторов (2), (3) находим усредненные функции  $S_1 = S_4; S_3 = S_2; S_5, S_6$

$$S_1 = Sp(\hat{M}_1 \hat{M}_1) = Sp(\hat{M}_1^2); \quad S_3 = Sp(\hat{M}_3 \hat{M}_3) = Sp(\hat{M}_3^2); \quad S_5 = Sp(\hat{M}_5 \hat{M}_5^+); \\ S_6 = Sp(\hat{M}_6 \hat{M}_6^+); \quad S_1^+ = S_1^* = Sp\left((\hat{M}_1 \hat{M}_1)^+\right) = Sp(\hat{M}_1^2) = S_1; \quad S_3^* = S_3; \quad S_5^* = S_5. \quad (9)$$

С учетом выражений (7), (9) вводим корреляционные функции

$$K_1 = S_1 - M_1^2; \quad K_3 = S_3 - M_3^2; \quad K_5 = S_5 - M_5 M_5^* = S_5 - |M_5|^2; \\ K_6 = S_6 - |M_6|^2; \quad |M_5|^2 = (M_5')^2 + (M_5'')^2 = |M_6|^2. \quad (10)$$

Введенные усредненные функции (7), (9) и корреляционные функции (10) зависят от целочисленного индекса  $j$ . Отметим, что в нашем случае функции  $S_1(j), S_3(j), S_5(j), S_6(j)$  являются положительными; функции  $K_1(j), K_3(j)$  являются отрицательными, а функции  $K_5(j), K_6(j)$  – знакопеременными внутри отрезка  $j \in [1; N_3]$ . Выполнив нормировку указанных функций, получим

$$f_1'(j) = M_1^2(j) / S_1(j); \quad f_{11} = f_1(j) = -K_1(j) / S_1(j); \quad f_1'(j) - f_1(j) = 1; \quad (11)$$

$$f'_3(j) = M_3^2(j)/S_3(j); \quad f_{22} = f_3(j) = -K_3(j)/S_3(j); \quad f'_3(j) - f_3(j) = 1; \quad (12)$$

$$f'_5(j) = |M_5(j)|^2/S_5(j); \quad r_{12} = r_5(j) = K_5(j)/S_5(j); \quad f'_5(j) + r_5(j) = 1; \quad (13)$$

$$f'_6(j) = |M_6(j)|^2/S_6(j); \quad r_{21} = r_6(j) = K_6(j)/S_6(j); \quad f'_6(j) + r_6(j) = 1. \quad (14)$$

Функции  $f_1(j)$ ,  $f_3(j)$  и  $f'_1(j)$ ,  $f'_3(j)$  являются положительными, допускают интерпретацию типа функций распределения Бозе-Эйнштейна в основном и возбужденном состояниях, соответственно. Для тех областей изменения  $j \in [1; N_3]$ , где функции  $K_5(j)$ ,  $K_6(j)$  являются положительными, функции  $r_5(j)$ ,  $r_6(j)$ ,  $f'_5(j)$ ,  $f'_6(j)$  – положительны и допускают интерпретацию типа функций распределения Ферми-Дирака. При изменении знаков у функций  $K_5(j)$ ,  $K_6(j)$  функции  $r_5(j)$ ,  $r_6(j)$  становятся отрицательными, функции  $f'_5(j)$ ,  $f'_6(j)$  остаются положительными, что допускает интерпретацию их как функций распределения типа Бозе-Эйнштейна. Таким образом, функции  $r_5(j)$ ,  $r_6(j)$ ,  $f'_5(j)$ ,  $f'_6(j)$  описывают состояния со смешанной статистикой внутри отрезка  $j \in [1; N_3]$ .

Далее находим статистические суммы  $f_{1c}, f_{3c}, f_{5c}, f_{6c}$

$$f_{1c} = \sum_{j=1}^{N_3} f'_1(j); \quad f_{3c} = \sum_{j=1}^{N_3} f'_3(j); \quad f_{5c} = \sum_{j=1}^{N_3} f'_5(j); \quad f_{6c} = \sum_{j=1}^{N_3} f'_6(j) \quad (15)$$

и определяем соответствующие вероятности

$$p_{11}(j) = f'_1(j)/f_{1c}; \quad p_{12}(j) = f'_5(j)/f_{5c}; \quad p_{21}(j) = f'_6(j)/f_{6c}; \quad p_{22}(j) = f'_3(j)/f_{3c}. \quad (16)$$

По найденным собственным значениям  $M_1(j)$ ,  $|M_5(j)|$ ,  $|M_6(j)|$ ,  $M_3(j)$  и соответствующих им вероятностям  $p_{11}(j)$ ,  $p_{12}(j)$ ,  $p_{21}(j)$ ,  $p_{22}(j)$  можно найти математические ожидания  $M_{1c}, M_{5c}, M_{6c}, M_{3c}$  и среднеквадратические отклонения  $\sigma_{1c}, \sigma_{5c}, \sigma_{6c}, \sigma_{3c}$ , используя стандартные формулы теории вероятностей, например

$$M_{1c} = \sum_{j=1}^{N_3} M_1(j)p_{11}(j); \quad D_{1c} = \sum_{j=1}^{N_3} M_1^2(j)p_{11}(j) - M_{1c}^2; \quad \sigma_{1c} = (D_{1c})^{1/2}. \quad (17)$$

Аналогично находим математические ожидания  $J_{1c}, J_{5c}, J_{6c}, J_{3c}$  и среднеквадратические отклонения  $\delta_{1c}, \delta_{5c}, \delta_{6c}, \delta_{3c}$  для переменной  $j$ , например

$$J_{1c} = \sum_{j=1}^{N_3} j p_{11}(j); \quad \Delta_{1c} = \sum_{j=1}^{N_3} j^2 p_{11}(j) - J_{1c}^2; \quad \delta_{1c} = (\Delta_{1c})^{1/2}. \quad (18)$$

**Численное моделирование и анализ результатов.** В работе [14] получены решения нелинейного уравнения для двух ветвей безразмерной комплексной функции смещения  $u(z)$ . В данной работе исследуется только первая ветвь, для которой явное выражение имеет вид

$$u(z) = u_{\epsilon 1}(z) = (g_1 - g_2 + g_4)/2; \quad g_4 = [(g_1 + g_2)^2 - g_3]^{1/2}. \quad (19)$$

Функции  $g_1, g_2, g_3$  по аналогии с работами [13, 14] моделируем выражениями

$$\begin{aligned} g_1(u, \alpha) &= (1 - \alpha)(1 - 2sn^2(u - u_0, k))/(p_0 - p_1n - p_2m - p_3j); \\ g_2(z, \alpha) &= 2^{-2\alpha} 3^{3\alpha-1/2} |z - z_c|^{-\alpha} \Gamma(\alpha + 1/3)\Gamma(\alpha + 2/3)/\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha + 1/2); \\ g_3(z, \alpha) &= 3^{3\alpha-1/2} 2 |z - z_c|^{-2\alpha} \Gamma(\alpha + 1/3)\Gamma(\alpha + 2/3)/\pi. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь  $p_0, p_1, p_2, p_3$  – некоторые управляющие параметры,  $\Gamma$  – гамма функция,  $k$  – модуль эллиптического синуса  $sn$ . Значения исходных данных:  $k = 0.5$ ;  $\alpha = 0.5$ ;  $u_0 = 29.537$ ;  $p_0 = 0.01$ ;  $p_1 = 0.00075$ ;  $p_2 = p_3 = 0$ ;  $z_c = 2.813$ . Указанный выбор параметров  $p_0, p_1, p_2, p_3$  соответствует состоянию прямоугольной решетки с фрактальной дислокацией, локализованной внутри области  $nOm$

параллельно оси  $Om$ . Начальное условие  $u_{1,1} = 0 + 0 \cdot i$ ;  $n = \overline{1;30}$ ;  $m = \overline{1;40}$ . Заполнение матрицы  $\hat{u}$  осуществляется по строкам. Решение нелинейных уравнений (19), (20) находится методом итераций по индексу  $m$  при  $z = z_1$  и  $z = z_2$ , определяемых выражениями (1). Далее находим искомые матрицы  $\hat{u}(z_1)$  и  $\hat{u}(z_2)$  с элементами  $u_{\varepsilon 1}(z_1) = u_{nm}(z_1)$  и  $u_{\varepsilon 1}(z_2) = u_{nm}(z_2)$ . Характерное поведение функций  $\text{Re}u_{\varepsilon 1}(z_1)$ ,  $\text{Im}u_{\varepsilon 1}(z_1)$  и  $\text{Re}u_{\varepsilon 1}(z_2)$ ,  $\text{Im}u_{\varepsilon 1}(z_2)$  от целочисленных индексов  $n, m$  на граничной узловой плоскости  $j = 1$  отражено на рис. 1 и рис. 2, соответственно.

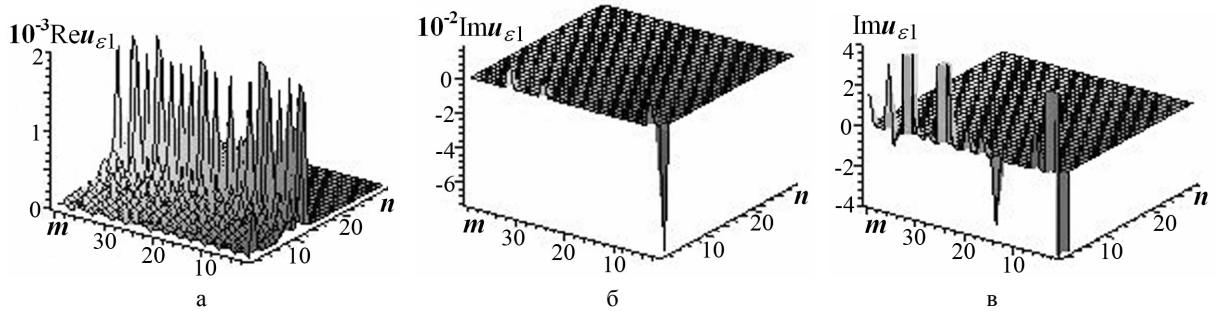


Рис. 1. Зависимости реальной (а)  $\text{Re}u_{\varepsilon 1}(z_1)$  и мнимой (б, в)  $\text{Im}u_{\varepsilon 1}(z_1)$  частей безразмерной функции смещения от целочисленных индексов  $n, m$  при  $j = 1$ ; в) фрагмент  $\text{Im}u_{\varepsilon 1}(z_1) \in [-4, 4]$ .

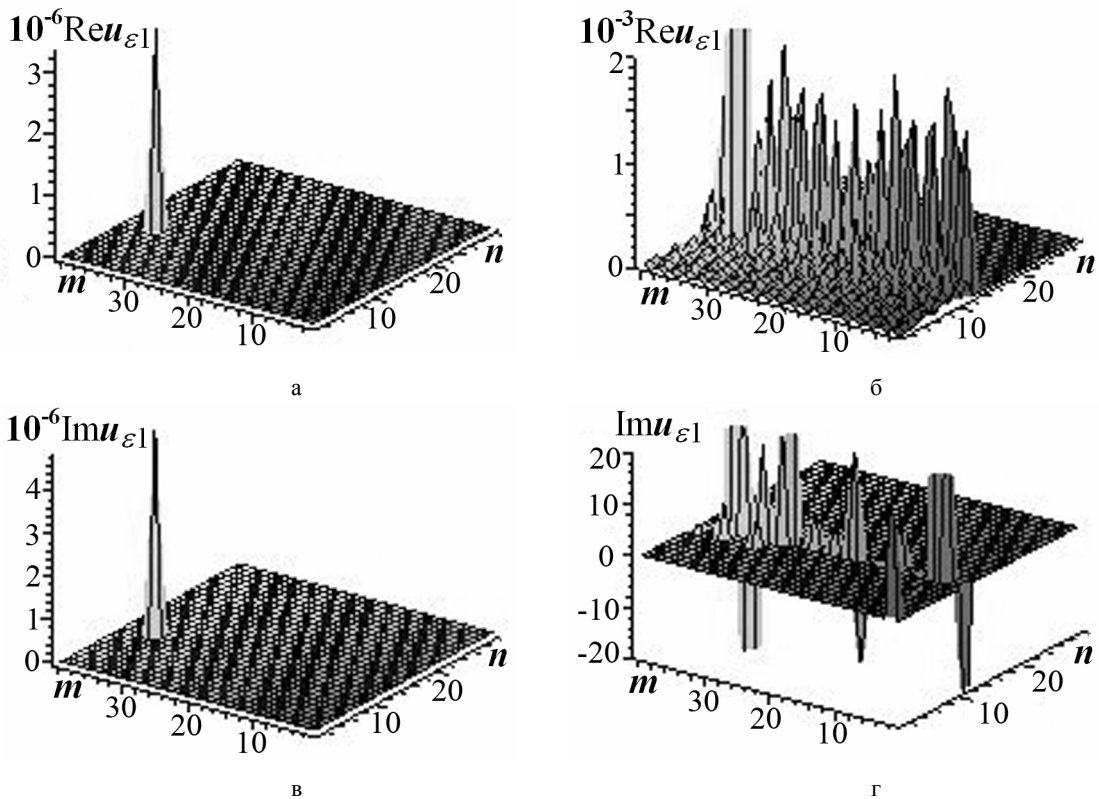


Рис. 2. Зависимости реальной (а, б)  $\text{Re}u_{\varepsilon 1}(z_2)$  и мнимой (в, г)  $\text{Im}u_{\varepsilon 1}(z_2)$  частей безразмерной функции смещения от целочисленных индексов  $n, m$  при  $j = 67$ ; б) фрагмент  $\text{Re}u_{\varepsilon 1}(z_2) \in [-1, 1000]$ ; г) фрагмент  $\text{Im}u_{\varepsilon 1}(z_2) \in [-20, 20]$ .

На другой граничной узловой плоскости  $j = 67$  поведение указанных функций такое, что рис. 1 переходит в рис. 2 и наоборот, что следует также из соотношений (1). Анализ указанного поведения показывает, что поле деформации в общем случае является стохастическим, комплексным. Ядро дислокации (плоскости особых точек) локализовано внутри области  $nOm$  параллельно оси  $Om$  вблизи  $n \approx 14$  (рис. 1, а; рис. 2, а, б). Смещения узлов в плоскостях особых точек (в ядре дислокации) имеют стохастические амплитуды. Это связано с выбором критического значения  $z_c = 2.813$ , не совпадающего с сосед-

ними узловими значеннями  $z(j)$ . Узлы решетки при  $n \in [1; 14]$  находятся в стохастическом возбужденном состоянии, при  $n > 14$  – в смещенном состоянии (смещения узлов практически постоянные со значениями  $\text{Re}u_{\varepsilon 1}(z_1) \approx -0.55$ , рис. 1,а;  $\text{Re}u_{\varepsilon 1}(z_2) \approx -0.48$ , рис. 2,б). Отличные от нуля значения  $\text{Im}u_{\varepsilon 1}(z_1)$  (рис. 1,б) локализованы практически в узкой области  $n \in [1; 3]$ , а  $\text{Im}u_{\varepsilon 1}(z_2)$  (рис. 2,г) – практически во всей области  $n \in [1; 14]$ , что свидетельствует о наличии эффективного затухания смещений указанных узлов решетки. Амплитуды смещений узлов решетки в ядре дислокации (рис. 2,а) существенно больше (реально наблюдается пик) соответствующих амплитуд (рис. 1,а).

Получены также зависимости функций  $\text{Re}u_{\varepsilon 1}(z_1)$ ,  $\text{Im}u_{\varepsilon 1}(z_1)$  и  $\text{Re}u_{\varepsilon 1}(z_2)$ ,  $\text{Im}u_{\varepsilon 1}(z_2)$  от целочисленных индексов  $n, m$  для внутренних узловых плоскостей  $j \in (1; N_3)$ , но в данной работе они не приводятся. Однако, далее анализ поведения поля деформации от  $j$  проводится в терминах усредненных функций по целочисленным индексам  $n, m$  (рис. 3).

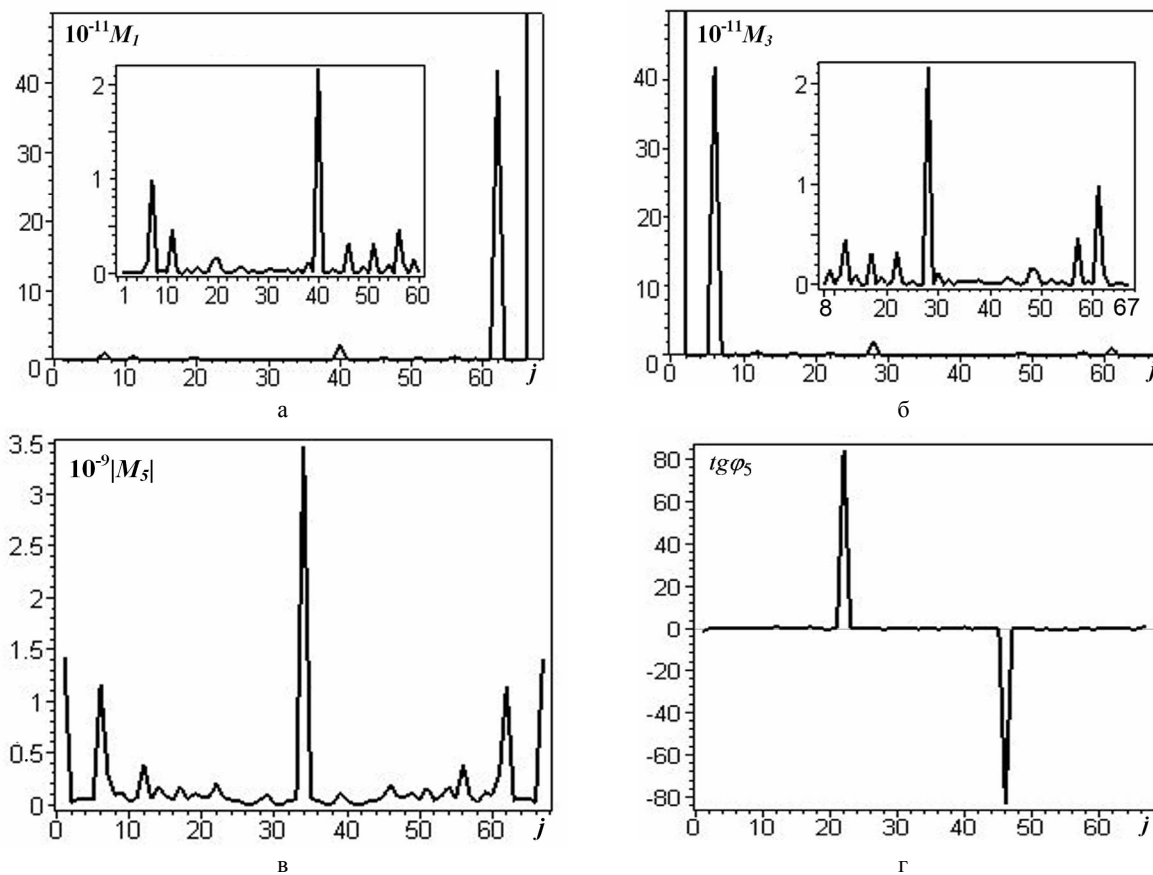


Рис. 3. Зависимости усредненных функций от целочисленного индекса  $j$  узловой плоскости:

а)  $M_1$ ; б)  $M_3$ ; в)  $|M_5|$ ; г)  $\text{tg} \varphi_5 = M_5'' / M_5'$ . Вставки даны на а) для  $j \in [1; 60]$  и на б) для  $j \in [8; 67]$ .

Данные рис. 3 можно интерпретировать как возможные собственные значения случайных величин  $M_1(j)$  (рис. 3,а),  $M_3(j)$  (рис. 3,б),  $|M_5(j)| = |M_6(j)|$  (рис. 3,в). Для граничных узловых плоскостей с  $j=1$  и  $j=67$  получены следующие значения усредненных функций (рис. 3,а,б,в)  $M_1(1) = M_3(67) = 7.886 \cdot 10^7$ ;  $M_1(67) = M_3(1) = 3.415 \cdot 10^{13}$ ;  $|M_5(1)| = |M_5(67)| = 1.409 \cdot 10^9$ . На внутренних узловых плоскостях наблюдаются основные (с максимальной амплитудой) пики: при  $j=40$  со значениями  $M_1(40) = 2.163 \cdot 10^{11}$  (рис. 3,а); при  $j=28$  –  $M_3(28) = 2.163 \cdot 10^{11}$  (рис. 3,б); при  $j=34$  –  $|M_5(34)| = M_5'(34) = 3.456 \cdot 10^9$  и  $M_5''(34) = 0$  (рис. 3,в), что свидетельствует об отсутствии эффективного затухания. Рис. 3,в и вставки (рис. 3,а; 3,б) демонстрируют наличие дополнительных пиков для других значений  $j$ . На рис. 3,г приведена зависимость  $\text{tg} \varphi_5 = M_5'' / M_5'$  от целочисленного индекса  $j$  узловой плоскости. Для граничных узловых плоскостей получены значения:  $j=1$ ,  $M_5' > 0$ ,

$M_5'' < 0$ ,  $\operatorname{tg}\varphi_5 = -1.39$ ,  $\varphi_5 = 125.70^\circ$ ;  $j = 67$ ,  $M_5' > 0$ ,  $M_5'' > 0$ ,  $\operatorname{tg}\varphi_5 = 1.39$ ,  $\varphi_5 = 54.30^\circ$ . На рис. 3,г наблюдаются пики на зависимости  $\operatorname{tg}\varphi_5(j)$  для индексов  $j = 22$  (со значениями  $M_5' > 0$ ,  $M_5'' > 0$ ,  $\operatorname{tg}\varphi_5 = 83.25$ ,  $\varphi_5 = 89.31^\circ$ ) и  $j = 46$  (со значениями  $M_5' > 0$ ,  $M_5'' < 0$ ,  $\operatorname{tg}\varphi_5 = -83.25$ ,  $\varphi_5 = 90.69^\circ$ ). Для остальных внутренних узловых плоскостей наблюдается стохастическое поведение  $\operatorname{tg}\varphi_5(j)$ , что связано со стохастической сменой знаков у функции  $M_5''$ , при этом  $|\operatorname{tg}\varphi_5(j)| < 1$  и  $0 < \varphi_5 < 45^\circ$  или  $135^\circ < \varphi_5 < 180^\circ$ . Полученные результаты свидетельствуют о стохастическом поведении фазы  $\varphi_5(j)$ .

На основе выражений (11)-(14) были получены усредненные функции  $f_{11}, r_{12}, r_{21}, f_{22}$  (рис. 4).

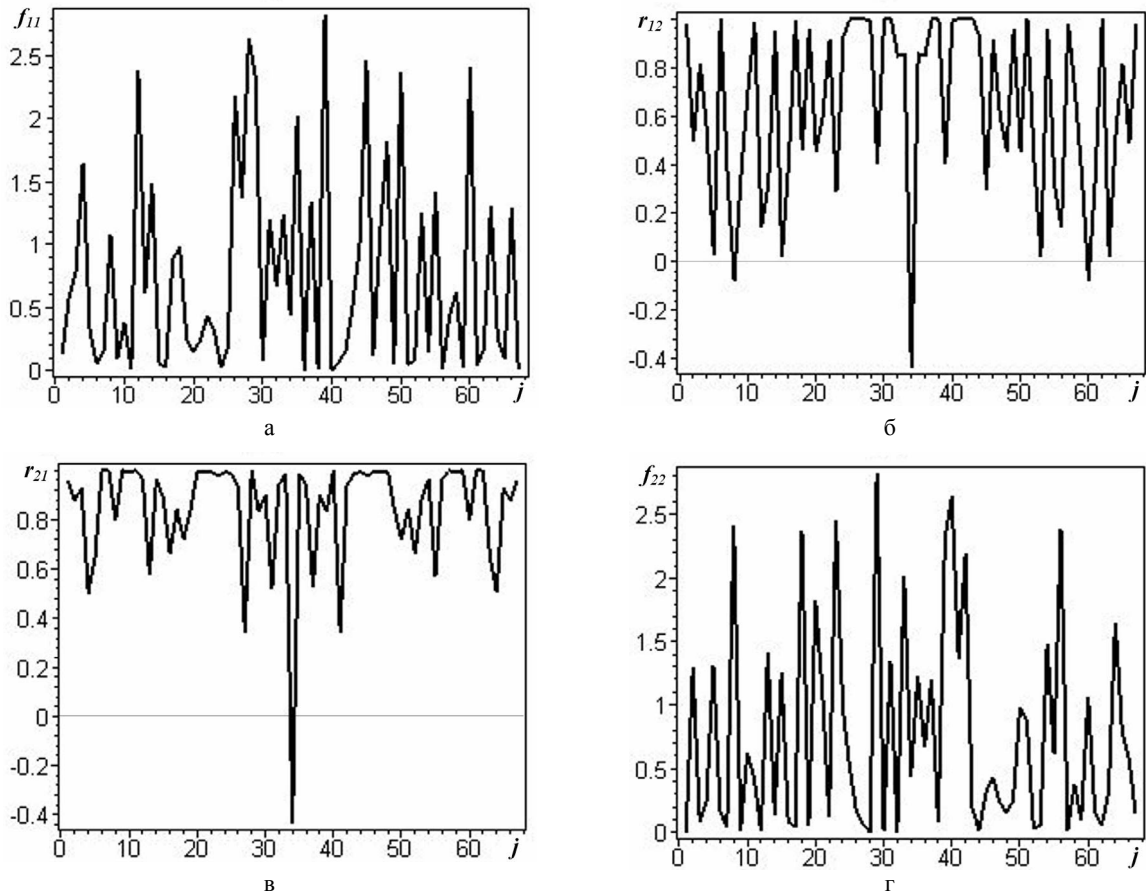


Рис. 4. Зависимости усредненных функций  $f_{11}, r_{12}, r_{21}, f_{22}$  от целочисленного индекса  $j$  узловой плоскости.

Функции  $f_{11}, f_{22}$  являются положительными и принимают значения в интервале  $(0; 2.9)$  во всей области изменения  $j$  (рис. 4,а,г). Функции  $r_{12}, r_{21}$  являются знакопеременными (рис. 4,б,в) и принимают значения в интервале  $(-0.44; 1.0)$ . Функция  $r_{12}$  становится отрицательной для трех внутренних узловых плоскостей с  $j = 8; 34; 60$  (в этом случае выполняется условие  $S_5 < |M_5|^2$ ), при этом  $r_{12}(8) = r_{12}(60) = -0.077$ ,  $r_{12}(34) = -0.437$ . Функция  $r_{21}$  становится отрицательной для одной внутренней узловой плоскости с  $j = 34$  (выполняется условие  $S_6 < |M_6|^2$ ), при этом  $r_{21}(34) = -0.437$ . Поведение функций  $r_{12}, r_{21}$  от  $j$  (рис. 4,б,в) демонстрирует изменение статистики с типа Ферми-Дирака на статистику типа Бозе-Эйнштейна для отдельных внутренних узловых плоскостей, что подтверждает теоретический вывод о наличии смешанной статистики внутри отрезка  $j \in [1; N_3]$ .

На основе выражений (16) были получены вероятности  $p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}$  (рис. 5), как функций от целочисленного индекса  $j$ . Найденные вероятности соответствуют возможным собственным значениям случайных величин  $M_1(j)$  (рис. 3,а),  $M_3(j)$  (рис. 3,б),  $|M_5(j)| = |M_6(j)|$  (рис. 3, в).

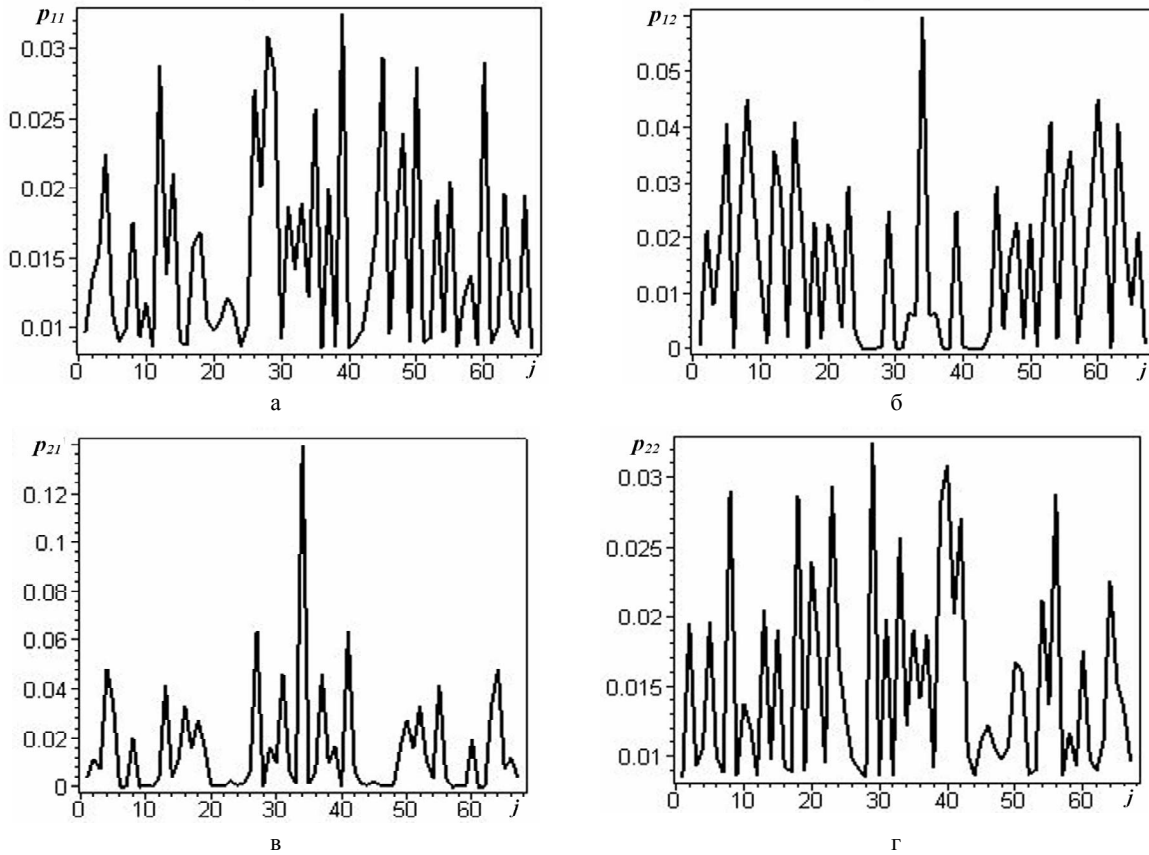


Рис. 5. Зависимости вероятностей  $p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}$  от целочисленного индекса  $j$  узловой плоскости.

Далее на основе выражений (17), (18), данных рис. 3 и рис. 5 выполняем дополнительное усреднение по переменной  $z$  и находим числовые характеристики: математические ожидания  $M_{1c} = M_{3c} = 3.376 \cdot 10^{11}$ ,  $M_{5c} = 3.065 \cdot 10^8$ ,  $M_{6c} = 5.350 \cdot 10^8$ ; среднеквадратические отклонения  $\sigma_{1c} = \sigma_{3c} = 31.560 \cdot 10^{11}$ ,  $\sigma_{5c} = 8.022 \cdot 10^8$ ,  $\sigma_{6c} = 11.840 \cdot 10^8$ . Аналогично получим математические ожидания  $J_{1c} = 34.22$ ,  $J_{5c} = J_{6c} = 34.00$ ,  $J_{3c} = 33.78$  и среднеквадратические отклонения  $\delta_{1c} = \delta_{3c} = 18.58$ ,  $\delta_{5c} = 21.33$ ,  $\delta_{6c} = 18.15$  для переменной  $j$ . Полученные числовые характеристики хорошо согласуются с поведением функций на рис. 3.

**Выводы.** Поле деформации фрактальной дислокации в общем случае является стохастическим, комплексным. Отклонения узлов в плоскостях особых точек (в ядре дислокации) имеют ярко выраженные стохастические амплитуды. Анализ поведения поля деформации в терминах усредненных функций по целочисленным индексам  $n, m$  выявляет наличие основных (с максимальной амплитудой) и дополнительных пиков на зависимостях усредненных функций от  $j$ , а также стохастическое поведение фазы  $\varphi_5(j)$ . Показано изменение статистики с типа Ферми-Дирака на статистику типа Бозе-Эйнштейна для отдельных внутренних узловых плоскостей, что подтверждает теоретический вывод о наличии смешанной статистики внутри отрезка  $j \in [1; N_3]$ . Числовые характеристики, полученные при дополнительном усреднении по переменной  $z$  (или  $j$ ), хорошо согласуются с характерным поведением усредненных функций.

#### РЕЗЮМЕ

Об'єктом дослідження є фрактальна дислокація. Розглядається модельний зразок кінцевих розмірів з об'ємною решіткою у вигляді прямокутного паралелепіпеда. Будується двухточечна модель на основі раніше запропонованої одноточечної моделі, в якій використовувалася теорія дробового обчислення і концепція фрактала. Досліджуються особливості поведінки поля деформації фрактальної дислокації і можливі кореляційні зв'язки. Встановлено яскраво виражена стохастична поведінка амплітуд і фази у усереднених функціях. Методом чисельного моделювання



показано зміну статистики з типу Фермі-Дірака на статистику типу Бозе-Ейнштейна для окремих внутрішніх вузлових площин. Це підтверджує теоретичний висновок про наявність змішаної статистики.

*Ключові слова:* фрактальна дислокація, комплексне поле деформації, двухточечная модель, статистичні властивості, змішана статистика.

## SUMMARY

The object of this study is the fractal dislocation. A model sample of a finite size with the volumetric lattice in the form of a rectangular parallelepiped is being considered. We are constructing a two-point model based on the previously proposed one-point model in which a theory of fractional calculus and the concept of fractal were used. The features of the behaviour of the fractal dislocation deformation field and the possible correlation connections are investigated. The strongly pronounced stochastic behaviour of amplitudes and a phase of average functions are established. The change of the statistics from Fermi-Dirac type to the statistics of Boze-Einstein type for separate internal nodal planes is shown by the method of numerical modeling. This confirms the theoretical conclusion that there is mixed statistics.

*Keywords:* fractal dislocation, complex deformation field, two-point model, statistical properties, mixed statistics.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Башаров А.М. Когерентный контроль квантовых корреляций в атомных системах / А.М. Башаров, А.А. Башкеев, Э.А. Маныкин // ЖЭТФ. – 2005. – Т. 127, вып. 3. – С. 536-550.
2. Мирошниченко Г.Г. Дискретное фотодетектирование для протоколов линейных оптических квантовых вычислений и коммуникаций / Г.Г. Мирошниченко // ЖЭТФ. – 2011. – Т. 139, вып. 6. – С. 1055-1065.
3. Скалли М.О. Квантовая оптика: Пер. с англ. / М.О. Скалли, М.С. Зубайри / Под ред. В.В. Самарцева. – М.: Физматлит, 2003. – 512 с.
4. Alexander S. Relaxation and nonradiative decay in disordered systems. I. One-fracton emission / S. Alexander, O. Entin-Wohlman, R. Orbach // Phys. Rev. B. – 1985. – Vol. 32, No 10. – P. 6447-6455.
5. Alexander S. Relaxation and nonradiative decay in disordered systems. II. Two-fracton inelastic scattering / S. Alexander, O. Entin-Wohlman, R. Orbach // Phys. Rev. B. – 1986. – Vol. 33, No 6. – P. 3935-3946.
6. Alexander S. Relaxation and nonradiative decay in disordered systems. III. Statistical character of Raman (two-quanta) spin-lattice relaxation / S. Alexander, O. Entin-Wohlman, R. Orbach // Phys. Rev. B. – 1987. – Vol. 35, No 3. – P. 1166-1173.
7. Неупругое рассеяние света на фрактальных колебательных модах в полимерах / В.А. Багрянский, В.К. Малиновский, В.Н. Новиков и др. // Физика твердого тела. – 1988. – Т. 30, вып. 8. – С. 2360-2366.
8. Рыжов В.А. Низкоэнергетические либрационные возбуждения в стеклообразном полиметилметакрилате / В.А. Рыжов // Физика твердого тела. – 2002. – Т. 44, вып. 12. – С. 2229-2233.
9. Алексеев В.А. Статистика мезоскопических ансамблей бозонов и фермионов / В.А. Алексеев // ЖЭТФ. – 2011. – Т. 139, вып. 6. – С. 1066-1073.
10. Nielsen M.A. Quantum Computation and Quantum Information / M.A Nielsen and I.L. Chuang. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. – 676 p.
11. Bouwmeester D. The Physics of Quantum Information / D. Bouwmeester, A. Ekert and A. Zeilinger. – Berlin: Springer-Verlag, 2000. – 314 p.
12. Шпак А.Н. Кластерные и наноструктурные материалы. Т. 1 / А.Н. Шпак, Ю.А. Куницкий, В.Л. Карбовский. – К.: издательский дом «Академперіодика», 2001. – 588 с.
13. Абрамов В.С. Фрактальная дислокация как один из неклассических структурных объектов в наноразмерных системах / В.С. Абрамов // Металлофизика и новейшие технологии. – 2011. – Т. 33, № 2. – С. 247-251.
14. Абрамов В.С. Поведение поля деформации фрактальной дислокации при наличии бифуркаций / В.С. Абрамов // Вісн. Донецьк. нац. ун-у. Сер. А: Природничі науки. – 2011. – № 2. – С. 23-29.
15. Штокман Х.-Ю. Квантовый хаос / Х.-Ю. Штокман. – М.: Физматлит, 2004. – 376 с.

*Поступила в редакцию 31.01.2012*