УДК 512.56(2-8),519.766.24,

Крайнічук Г.В.

старший викладач кафедри математичного аналізу та диференціальних рівнянь Донецького національного університету

КЛАСИФІКАЦІЯ КВАЗІГРУПОВИХ ФУНКЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ $(3;3;0)$

У даній статті систематизовано результати класифікації узагальнених квазігрупових функційних рівнянь від двох, трьох та чотирьох функційних змінних. Класифіковано узагальнені квазігрупові функційні рівняння типу (3;3;0), в результаті отримано 6 класів, частково встановлена попарна парастрофно-первинна нерівносильність представників класів, а отже і самих класів.

Тотожності, які визначають оборотну функцію (квазігрупу) називаються первинними, відповідно перетворення функційних рівнянь за допомогою цих тотожностей називають також первинними. Два функційні рівняння називають первинно (парастрофно) рівносильними, якщо від одного до іншого можна перейти за допомогою скінченної кількості застосувань первинних перетворень. Типом (предметним типом) функційного рівняння від k предметних змінних називаємо набір $m_1, m_2, \ldots, m_k$, де m_i кількість появ у рівнянні i-тої предметної змінної.

Ключові слова: *квазігрупа, оборотна функція, парастроф, тотожність, функційне рівняння, первинне перетворення, парастрофно-первинна рівносильність.*

Вступ

Вивчення узагальнених функційних рівнянь над множиною оборотних двомісних функцій (квазігрупових бінарних операцій) довільної множини, як скінченної так і нескінченної, спричинено застосуваннями в математичній логіці, теорії кодування, універсальній алгебрі, геометрії, теорії планування експериментів тощо (див. [1], [3], [11], [22]).

В статті досліджуються лише функційні рівняння (загальне означення функційного рівняння наведено Я. Ацелем [3]), кожне з яких є рівністю двох термів другого порядку, що містять лише предметні та функційні змінні, причому всі предметні змінні зв'язані квантором загальності та задовольнять таким чотирьом умовам:
1) функційні змінні попарно різні (такі рівняння називають узагальненими);
2) не мають ні функційних, ні предметних сталих;
3) кожна предметна змінна має принаймні дві появи;
4) кожна функційна змінна є бінарною, тобто набуває значень в множині двомісних оборотних функцій (такі рівняння називають квазігруповими). Нагадаємо, що двомісна функція (бінарна операція) називається оборотною (квазігруповою), якщо вона оборотна по кожній своїй змінній.

Для класифікації квазігрупових функційних рівнянь використовуємо парастрофно-первинну еквівалентність, означення якої сформульоване Ф. Сохацьким [20] та уточнене А. Крапєжем [16]. Нагадаємо, що функційні рівняння називаються парастрофно-первинно рівносильними (перший термін парастрофно-рівносильними [20]), якщо одне рівняння з іншого можна отримати за скінченну кількість перейменувань функційних і предметних змінних та застосувань рівностей:

$$F({}^{\ell}F(x,y),y)=x, \quad F(x,{}^{r}F(x,y))=y, \quad {}^{r}F({}^{r}F)=F, \quad {}^{\ell}F({}^{\ell}F)=F,$$

які виконуються для всіх значень предметних змінних x, y та для всіх значень функційної змінної F в множині двомісних оборотних функцій.

В. Білоусов [7], А. Чебан [9], Я. Дуплак [10] в основному досліджували квадратичні рівняння, тобто ті, в яких кожна предметна змінна має точно дві появи. Проте, з огляду на застосування, великий інтерес викликають і неквадратичні квазігрупові функційні рівняння. Класифікацією неквадратичних квазігрупових рівнянь займалися В. Білоусов [6], А. Чебан[8], Ф. Сохацький [19], Р. Коваль [12]. Зокрема, Р. Коваль [12] класифікувала з точністю до парастрофно-первинної рівносильності узагальнені функційні рівняння від двох, трьох та частково чотирьох функційних змінних, які мають дві предметних змінних з різною кількістю їх появ. С. Крстіч [18], А. Крапєж [16] розглядали класифікацію квазігрупових функційних рівнянянь використовуючи методи теорії графів, тобто вивчення різних графів, де вершинами відповідних графів є функційні змінні, а ребрами графів є – предметні змінні.

В залежності від кількості появ різних предметних змінних у функційному рівнянні використовується поняття предметного типу. В [13] систематизовано результати класифікацію та розв'язування узагальнених квазігрупових функційних рівнянь типу $(2;2)$, $(3;2)$ та класифіковано узагальнені квазігрупові функційні рівняння типу $(4;2;0)$ від чотирьох функційних змінних (в матеріалах статті [13] вживається тип $(4;2)$).

Метою даної статті є дослідження узагальнених функційних рівнянь від двох, трьох та чотирьох функційних змінних, їх класифікації на неперехресні класи.

Завдання даного дослідження: класифікувати загальні функційні рівняння типу (3;3;0) та систематизувати результати з класифікації функційних рівнянь малої довжини за функційними змінними. Всього таких рівнянь з точністю до первинної рівносильності знайдено 6.

Допоміжні поняття та результати

В статті розглядаються операції, що визначені на одній і тій же множині, яку називатимемо *базовою, (носієм)* і позначатимемо через Q. Операція f називається *лівооборотною*, якщо довільний її правий зсув є підстановкою базової множини. Інакше кажучи, якщо рівняння $f(x;a)=b$ має єдиний розв'язок для всіх a, b із Q. Розв'язок цього рівняння позначають через ${}^{\ell}f(b;a)$. Очевидно, що ${}^{\ell}f$ є бінарною операцією, яку називають лівим діленням операції f і виконуються перша та друга тотожності з

$$\begin{aligned} &f({}^{\ell}f(x;y);y)=x, &&{}^{\ell}f(f(x;y);y)=x,\\ &f(x;{}^{r}f(x;y))=y, &&{}^{r}f(x;f(x;y))=y. \end{aligned} \tag{1}$$

Аналогічно визначається правооборотна операція і праве ділення ${}^{r}f$, для якого виконуються третя і четверта рівності із (1).

Функція f називається *оборотною* або *квазігруповою*, якщо вона є правооборотною і лівооборотною. При цьому тотожності (1) називаються *визначальними* або *первинними*, а групоїд $(Q;f)$ називається *квазігрупою*.

Для будь-якого $\sigma\in S_3:=\{\iota,s,\ell,r,s\ell,sr\}$, де $s:=(12)$, $\ell:=(13)$, $r:=(23)$, функція ${}^{\sigma}f$ називається σ-парастрофом функції f, якщо вона визначається таким співвідношенням:

$${}^{\sigma}f(x_{1\sigma};x_{2\sigma})=x_{3\sigma}\iff f(x_1;x_2)=x_3.$$

Якщо всі парастрофи оборотної функції збігаються, то функція називається *TS-квазігрупою*. Двомісна оборотна функція називається *ідемпотентною*, якщо для довільного елемента x виконується $f(x;x)=x$. Ідемпотентні TS-квазігрупи називають *квазігрупами Штейнера. Лупою* називають квазігрупу з одиничним елементом. *Лупа Штейнера* – це TS-квазігрупа з одиницею, парастрофи якої рівні між собою.

Функційне рівняння розуміється як формула, яка є рівністю двох термів, що містять лише предметні та функційні змінні. До того ж всі предметні змінні зв'язані кванторами загальності. Під *типом (предметним типом)* $(m_1;m_2;m_3)$ функційного рівняння розуміємо кількість повторень кожної різної предметної змінної. Зокрема, тип (3;3;0) означає, що функційне рівняння може мати щонайбільше три предметних змінних, в даному випадку перша і друга змінна мають по три появи, а третя змінна не має жодної появи.

Розв'язок функційного рівняння — це послідовність функцій (операцій), що визначені на множині, яка після підстановки замість функційних змінних їх значень із послідовності при лексикографічному порядку, перетворює дане рівняння в істинне висловлення. Лексикографічний порядок предметних змінних означає, що їх появи записуються відповідно до алфавітного порядку змінних.

Два функційних рівняння називають рівносильними на множині, якщо вони мають однакові множини розв'язків на цій множині. Два функційних рівняння називають рівносильними, якщо вони рівносильні на кожній множині.

Означення 1. ([20]) *Два функційних рівняння називаються* парастрофно-первинно рівносильними, *якщо одне з іншого можна отримати за скінченну кількість застосувань таких парастрофно-первинних перетворень:*
1) перейменування предметних змінних;
2) перейменування функційних змінних;
3) перетворення за комутуванням: заміна підтерма виду $F(\omega,\upsilon)$ термом ${}^{s}F(\upsilon,\omega)$;
4) перетворення за зовнішнім діленням: перехід від рівності виду
$F_1(\omega_1,\omega_2)=F_2(\upsilon_1,\upsilon_2)$ до рівності ${}^{r}F_1(\omega_1,F_2(\upsilon_1,\upsilon_2))=\omega_2$;
5) перетворення за внутрішнім правим (лівим) діленням через змінну x : заміна підтерма $F(x,\omega)$ на x і одночасно заміна всіх інших появ змінної x термом ${}^{r}F(x,\omega)$ (заміна підтерма $F(\omega,x)$ на x і одночасно заміна всіх інших появ змінної x термом ${}^{\ell}F(\omega,x)$), якщо x не має появи в термі ω ;
6) заміна частин рівняння: заміна рівняння $\omega=\upsilon$ на $\upsilon=\omega$.

Для скороченого запису парастрофно-первинну рівносильність позначатимемо знаком $\asymp$.

Перетворення за комутуванням, внутрішнє ділення на підтерм через змінну та зовнішнє ділення на деякий підтерм називають парастрофно-первинними перетвореннями рівняння. Два рівняння називають парастрофно-первинно рівносильними, якщо одне з іншого можна отримати за скінченну кількість кроків, парастрофно-первинних перетворень або перейменувань предметних чи функційних змінних [20].

Кажуть, що рівняння $\omega = \upsilon$ *зводиться до* рівняння $\omega^{'} = \upsilon^{'}$, якщо від одного до іншого можна перейти за скінченну кількість застосувань парастрофно-первинних перетворень 1)-6).

Лема 1. ([12]) *Якщо узагальнені функційні рівняння $\omega = \upsilon$ і $\omega^{'} = \upsilon^{'}$ від n предметних змінних та m функційних змінних є парастрофно-первинно рівносильними, то на довільній множині Q для довільного розв'язку $(f_1, \ldots, f_m)$ рівняння $\omega = \upsilon$ існує послідовність перестановок $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ множини $\{1,2,3\}$ та перестановки τ множини $\{1, \ldots, m\}$ такі, що вибірка $({}^{\sigma_{1\tau}} f_{1\tau}, \ldots, {}^{\sigma_{m\tau}} f_{m\tau})$ є розв'язком рівняння $\omega^{'} = \upsilon^{'}$.*

З Леми 1. випливає такий наслідок.

Наслідок 1. *Якщо функційні рівняння $\omega = \upsilon$ і $\omega^{'} = \upsilon^{'}$ типу $(3;3;0)$ є парастрофно-первинно рівносильними, то існують перестановки $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ множини Q та τ з множини $\{1,2,3,4\}$ такі, що для довільного розв'язку (f_1, f_2, f_3, f_4) рівняння $\omega = \upsilon$ вибірка $({}^{\sigma_{1\tau}} f_{1\tau}, {}^{\sigma_{2\tau}} f_{2\tau}, {}^{\sigma_{3\tau}} f_{3\tau}, {}^{\sigma_{4\tau}} f_{4\tau})$ є розв'язком рівняння $\omega^{'} = \upsilon^{'}$.*

Основні результати

В цій частині статті систематизовано результати класифікацій узагальнених квазігрупових функційних рівнянь від двох, трьох та чотирьох функційних змінних. Класифіковано узагальнені квазігрупові функційні рівняння типу (3;3;0), в результаті знайдено 6 класів, встановлена часткова попарна парастрофно-первинна нерівносильність представників кожного із класів.

Систематизація результатів класифікації

В цій частині статті систематизовано класифікації узагальнених функційних рівняннь від двох, трьох та чотирьох функційних змінних і всеможливими появами предметних змінних. Оскільки функційні рівняння квазігрупові, то кожна предметна змінна має принаймні дві появи. Звідси випливає таке зауваження.

Зауваження 1. *Якщо функційне рівняння має лише одну появу однієї із предметних змінних і таке рівняння має розв'язок на множині оборотних функцій деякої базової множини, то ця множина є одноелементною.*

Рівняння від однієї функційної змінної. В такому рівнянні три появи предметних змінних. Із Зауваження 1. випливає, що всі предметні змінні збігаються. Отже, узагальнене квазігрупове бінарне функційне рівняння від однієї функційної змінної має вигляд $F(x;x) = x$, розв'язком якого є ідемпотентні квазігрупи і тільки вони.

Рівняння від двох функційних змінних. Частково такі рівняння розглядали Р. Коваль [12] та А.Крапєж [17]. На відміну названих авторів, тут подано повну класифікацію всіх узагальнених функційних рівнянь від двох функційних змінних, а саме має місце така теорема.

Теорема 1. *З точністю до парастрофно-первинної рівносильності узагальнених квазігрупових функційних рівнянь від двох функційних змінних існує точно три*

$$F_1(x;x) = F_2(y;y), \tag{2}$$

$$F_1(x;y) = F_2(x;y), \tag{3}$$

$$F_1(x;x) = F_2(x;x). \tag{4}$$

Доведення. Якщо обидві функційні змінні знаходяться по одну сторону рівняння, то поділивши зовнішнім ділення на одну з них, отримаємо первинно-рівносильне рівняння, в якому функційні змінні знаходяться по різні сторони рівняння. Наприклад, нехай маємо рівняння

$$F_1(F_2(x;x);x) = x$$

Поділимо зовні на функцію F_1 та поміняємо частини рівняння місцями, в результаті отримаємо рівняння

$$F_1(x;x) = F_2(x;x).$$

У рівняннях, які задовольняють умові теореми, предметних змінних є чотири появи. Із зауваження 1 випливає, що всього предметних змінних може бути одна або дві. Якщо предметна змінна одна, то рівняння має предметний тип $(4;0)$ і таке рівняння має вигляд (4). Якщо предметних змінних дві, то рівняння має тип $(2;2)$. Якщо однакові предметні змінні знаходяться по одну сторону, то рівняння має вигляд (2). Якщо вони знаходяться по різні сторони рівняння, то в лівій частині рівняння першу предметну змінну позначимо через x, а другу через y. Таких рівнянь може бути два: (3) та

$$F_1(x;y)=F_2(y;x),$$

але це рівняння зводиться комутуванням до рівняння (3).

Покажемо, що всі рівняння з умови теореми попарно парастрофно-первинно нерівносильні. Розглянемо рівняння (2) і (3). Нехай f – довільна квазігрупа, яка не має ні лівого, ні правого, ні середнього нейтрального елементів (означення нейтральних елементів див. [21]) і пара таких квазігруп (f,f) є розв'язком рівняння (3). Прикладом є квазігрупа, яка не є лупою, наприклад $f(x;y)=2x+3y$ над Z_7. Якщо (2) $\asymp$ (3), то згідно Леми 1. для деяких σ, τ пара квазігруп $({}^{\sigma}f,{}^{\tau}f)$ є розв'язком рівняння (2). Але це неможливо, оскільки розв'язки рівняння (2) мають нейтральні елементи. Протиріччя доводить, що рівняння (2) і (3) парастрофно-первинно нерівносильні.

Нехай f – довільна ідемпотентна квазігрупа, тоді (f,f) є розв'язком рівняння (4). Якщо (2) $\asymp$ (4), то згідно Леми 1. для деяких σ, τ пара квазігруп $({}^{\sigma}f,{}^{\tau}f)$ є розв'язком рівняння (2). Оскільки ${}^{\sigma}f$, ${}^{\tau}f$ також ідемпотентні квазігрупи, то із (2) випливає, що $x=y$, тобто базова множина одноелементна. Отримане протиріччя показує, що рівняння (2) і (4) парастрофно-первинно нерівносильні.

Нехай маємо пару непарастрофних квазігруп f_1, f_2, в яких однакові головні діагоналі. Тоді (f_1,f_2) є розв'язком рівняння (4). Якщо (3) $\asymp$ (4), то згідно Леми 1. для деяких σ, τ пара квазігруп $({}^{\sigma}f_1,{}^{\tau}f_2)$ є розв'язком рівняння (3). Підставивши ці розв'язки у рівняння (3), в обох випадках отримуємо, що ці квазігрупи парастрофні, що суперечить їх вибору. Одним із прикладів таких квазігруп є $f_1(x;y)=2x+3y$ та $f_2(x;y)=x+4y$ над Z_7, яка немає нейтральних елементів Отже, рівняння (3) і (4) парастрофно-первинно нерівносильні. □

Рівняння від трьох функційних змінних. Розглянемо узагальнені квазігрупові функційні рівняння, в яких три функційних змінних. Якщо всі функційні змінні знаходяться в одній частині рівняння, то переходячи до парастрофів, отримаємо рівняння, в якому дві функційні змінні зліва, а одна — справа. Оскільки рівняння бінарні, то всього незалежних предметних змінних може бути п'ять. Тому такі рівняння можуть мати одну або дві незалежних предметних змінних. Отже, рівняння можуть бути одного із таких двох типів: $(5;0)$, $(3;2)$.

Легко бачити, що рівняння типу $(5;0)$ має вигляд:

$$F_1(x;F_2(x;x))=F_3(x;x).$$

Узагальнені функційні рівняння від трьох функційних змінних типу $(3;2)$ досліджувала Р. Коваль [12], яка встановила, що з точністю до парастрофно-первинної рівносильності їх є точно три:

$$F_1(x;F_2(x;y))=F_3(x;y);$$

$$F_1(F_2(x;x);y))=F_3(x;y);\ F_1(F_2(x;x);x)=F_3(y;y).$$

Розв'язки цих трьох рівнянь описано автором [13]. Перше рівняння знайдене В.Д. Білоусовим [4], ним же описана класифікація тотожностей з даного класу з умовами, коли всі функційні змінні у рівнянні є парастрофами однієї й тієї ж функції.

З вище викладеного випливає таке твердження.

Твердження 1. *Узагальнених квазігрупових функційних рівнянь від трьох функційних змінних з точністю до парастрофно-первинної рівносильності існує принаймні чотири: одне рівняння типу* $(5;0)$ *і три рівняння типу* $(3;2)$.

Рівняння від чотирьох функційних змінних

Розглянемо узагальнені квазігрупові функційні рівняння, в яких чотири функційних змінних. Оскільки рівняння бінарні, то всього незалежних предметних змінних може бути шість. Тому такі рівняння можуть мати одну, дві, або три незалежних предметних змінних. Отже, рівняння можуть бути одного із таких чотирьох типів: $(6;0;0)$, $(4;2;0)$, $(3;3;0)$, $(2;2;2)$.

Враховуючи різні розташування дужок та зовнішнє ділення термів, легко бачити, що рівняння типу $(6;0;0)$ з точністю до парастрофно-первинної рівносильності можуть мати принаймні один із виглядів:

$$F_1(x;F_2(x;x))=F_3(x;F_4(x;x)),\quad F_1(F_2(x;x);F_3(x;x))=F_4(x;x).$$

В [13] досліджено узагальнені функційні рівняння від чотирьох функційних змінних типу $(4;2;0)$, описано їх розв'язки і встановлено, що з точністю до парастрофно-первинної рівносильності їх є точно шість:

$$F_1(x;y) = F_2(x;F_3(x;F_4(x;y))), \quad F_1(y;y) = F_2(F_3(x;x);F_4(x;x)),$$
$$F_1(x;x) = F_2(y;F_3(y;F_4(x;x))), \quad F_1(y;y) = F_2(x;F_3(x;F_4(x;x))),$$
$$F_1(x;x) = F_2(F_3(x;y);F_4(x;y)), \quad F_1(x;x) = F_2(x;F_3(y;F_4(x;y))).$$

Узагальнені функційні рівняння від чотирьох функційних змінних типу $(2;2;2)$ досліджено Р. Коваль [12] та систематизовано А. Крапєжем [15]. Всього таких рівнянь з точністю до парастрофно-первинної рівносильності є точно п'ять:

$$F_1(F_2(x;y);z) = F_3(x;F_4(y;z))$$
$$F_1(x;x) = F_2(F_3(y;y);F_4(z;z)), \quad F_1(F_2(x;y);z) = F_3(F_4(x;y);z),$$
$$F_1(x;x) = F_2(F_3(y;z);F_4(y;z)), \quad F_1(x;x) = F_2(y;F_3(y;F_4(z;z))).$$

Перше рівняння є відомим узагальненим рівнянням асоціативності, його розв'язав В. Д. Білоусов [5]. Теорема про його розв'язки має назву "теорема про чотири квазігрупи", яка з повним доведення опублікована в [2]. Останнє рівняння, використовуючи методи теорії графів, знайшов і розв'язав А. Крапєж [15]. Решту рівнянь дослідила Р. Коваль [12].

Класифікація рівнянь типу $(3;3;0)$

В цьому пункті наведено класифікацію узагальнених квазігрупових функційних рівнянь типу (3;3;0). Такого типу рівняння досліджувала Р. Коваль [12], де не розрізнявся тип функційного рівняння за предметними змінними і не досліджувалася парастрофно-первинна нерівносильність рівнянь.

Теорема 2. *Кожне узагальнене бінарне квазігрупове функційне рівняння типу (3;3;0) парастрофно-первинно рівносильне одному з рівнянь:*

$$F_1(x;y) = F_2(F_3(x;y);F_4(x;y)), \tag{5}$$
$$F_1(x;F_2(x;y)) = F_3(F_4(x;y);y), \tag{6}$$
$$F_1(x;F_2(y;y)) = F_3(x;F_4(x;y)), \tag{7}$$
$$F_1(x;y) = F_2(F_3(x;x);F_4(y;y)), \tag{8}$$
$$F_1(x;F_2(x;x)) = F_3(y;F_4(y;y)), \tag{9}$$
$$F_1(x;F_2(y;y)) = F_3(y;F_4(x;x)). \tag{10}$$

Співвідношення між цими рівняннями виражено в такій постідовності (5), (6) $\stackrel{?}{\asymp}$ (7), (9), (8) $\stackrel{?}{\asymp}$ (10), де всі пари рівнянь виділені комами попарно парастрофно-первинно нерівносильні, а парастрофно-первинна нерівносильніть рівнянь (6) і (7), (8) і (10) нез'ясована.

Доведення. Всі рівняння розглядаємо з точністю до комутування підтермів. Кожне рівняння, що задовольняє умові теореми, має чотири функційних змінних та дві предметних змінних, кожна з яких має по три появи. Предметні змінні позначимо через x та y. Нагадаємо, якщо терм має вид $F(x;x)$, то його називають квадратом. Оскільки місць у рівнянні для предметних змінних шість, то всі такі рівняння можна поділити за довжиною підтермів (довжиною терма називають кількість появ предметних змінних в цьому термі, а довжиною рівняння називають суму довжин лівої і правої частини). Тому всі такі рівняння за довжиною можна поділити на три види: $1 = 5$, $2 = 4$, $3 = 3$, де $m = n$ означає, що ліва частина рівняння має m появ предметних змінних, а права – n появ. Вид $3 = 3$, в свою чергу, має вигляд $1 + 2 = 1 + 2$, який поділимо зовні на одиничний підтерм, отримаємо вид $2 = 4$. Вид $1 = 5$ може мати вигляди $1 = 1 + 4$ та $1 = 2 + 3$. Перший поділимо зовні на одиничний підтерм, а другий на терм довжини три, в обох випадках отримаємо вид $2 = 4$. Отже, всі функційні рівняння типу (3;3;0) зводяться до рівнянь виду $2 = 4$, які за розташуванням дужок можуть мати дві форми:

$$2 = 2 + 2 \quad (a); \qquad 2 = 1 + (1 + 2) \quad (b).$$

Спочатку розглянемо функційні рівняння, які не мають квадратів. Оскільки кожна предметна змінна має по три появи, то підтерми довжини два мають появи різних змінних, тому таке рівняння з розташуванням дужок (a) має вигляд (5), а з розташуванням дужок (b), поділивши зовні на одиничний підтерм рівняння має вигляд (6).

Нехай рівняння має один квадрат, позначимо його $F(y;y)$. Тоді таких рівнянь з розташуванням дужок (a) нема, а рівняння з розташуванням дужок (b), поділивши зовні на одиничний підтерм, має вигляд (7).

Нехай рівняння має два квадрати, тоді рівняння з розташуванням дужок (a) має вигляд (8). Справді, оскільки в рівнянні три терми довжини два, і два квадрати, то нехай обидва квадрати розташовані в правій частині рівняння, тому рівняння має вигляд (8). Якщо квадрати розташовані по різні сторони рівняння, то зовні поділимо на інший квадрат і отримаємо рівняння (8). Рівняннь з розташуванням дужок (b) з двома квадратами може бути два:

$$F_1(x;x) = F_2(x;F_3(y;F_4(y;y))), \quad F_1(x;x) = F_2(y;F_3(x;F_4(y;y))).$$

Кожне з них поділимо на одиничний терм зовні, отримаємо відповідно рівняння (9), (10).

Парастрофну нерівносильність рівнянь (5)-(10) зобразимо у вигляді таблиці, в якій в кожній із комірок наведемо приклад квазігрупи, що доводить парастрофну нерівносильність рівнянь, на перетині яких знаходиться дана комірка.

	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
(5)	Штейнера	Штейнера	Пункт 1.	Штейнера	Пункт 1.
(6)	$\times$	Не знайдено	Штейнера	Пункт 2.	Штейнера
(7)	$\times$	$\times$	Штейнера	Пункт 2.	Штейнера
(8)	$\times$	$\times$	$\times$	Штейнера	Не знайдено
(9)	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	Штейнера

Нехай $(Q;\cdot)$ – довільна неодноелементна квазігрупа Штейнера, тоді четвірка функцій $(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ є розв'язком рівнянь (5), (8), (10). Справді, підставимо цю четвірку функцій у кожне з цих рівнянь, отримаємо рівності:

$$xy = xy \cdot xy, \qquad xy = x^2y^2, \qquad xy^2 = yx^2,$$

які є тотожностями в квазігрупі Штейнера.

Підставимо четрівку функцій $(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ в кожне з рівнянь (6), (7), (9), в результаті отримаємо виконання відповідних тотожностей:

$$x \cdot xy = xy \cdot y, \quad xy^2 = x \cdot xy, \quad xx^2 = yy^2.$$

Ці тотожності можливі лише в одноелементних квазігрупах, тому згідно Наслідку 1., четвірка квазігруп $(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ не є розв'язком жодного з рівнянь (6), (7), (9). Це доводить попарну парастрофно-первинну нерівносильність відповідних пар рівнянь, на перетині яких в таблиці записано "Штейнера".

Щоб уникнути повторень попарної парастрофно-первинної нерівносильності рівнянь, у таблиці використовується значок $\times$. Записи в таблиці "Пункт 1." та "Пункт 2." означають, що доведення попарної парастрофно-первинної нерівносильності відповідних рівнянь знаходяться у відповідних частинах доведення теореми.

Пункт 1. Розглянемо парастрофно-первинну нерівносильність пар рівнянь (5), (8) та (5), (10).

Нехай f – TS-квазігрупа, тобто ${}^{\sigma}f = f$ для всіх $\sigma \in S_3$, h – довільна ідемпотентна не TS-квазігрупа. Тоді четвірка функцій (f,h,f,f) є розв'язком рівняння (5). Припустимо, що (5) $\asymp$ (8) та (5) $\asymp$ (10). Тоді, з Наслідку 1. випливає, що розв'язком (8) та (10) є принаймні одна із четвірок функцій:

$$({}^{\sigma}h,f,f,f); \qquad (f,{}^{\sigma}h,f,f); \qquad (f,f,{}^{\sigma}h,f); \qquad (f,f,f,{}^{\sigma}h) \tag{11}$$

для деякого $\sigma \in S_3$. Це означає виконання тотожностей для (8):

$${}^{\sigma}h(x;y) = f(f(x;x);f(y;y)) \text{ (i)}, \qquad f(x;y) = {}^{\sigma}h(f(x;x);f(y;y)) \text{ (ii)},$$

$$f(x;y) = f({}^{\sigma}h(x;x);f(y;y)) \text{ (iii)}, \qquad f(x;y) = f(f(x;x);{}^{\sigma}h(y;y)) \text{ (iv)}$$

та для рівняння (10):

$${}^{\sigma}h(x;f(y;y)) = f(y;f(x;x)) \text{ (v)}, \qquad f(x;{}^{\sigma}h(y;y)) = f(y;f(x;x)) \text{ (vi)},$$

$$f(x;f(y;y)) = {}^{\sigma}h(y;f(x;x)) \text{ (vii)}, \qquad f(x;f(y;y)) = f(y;{}^{\sigma}h(x;x)) \text{ (viii)}.$$

Для випадків (i), (ii), (v), (vii), додатково припустимо, що квазігрупа f – ідемпотентна, тобто є квазігрупою Штейнера. В усіх цих випадках отримаємо ${}^{\sigma}h = f$, що суперечить вибору операції h, оскільки вона не TS.

У решти випадках, додатково вважатимемо, що f – є лупою з нейтральним елементом e, тобто лупою Штейнера. В результаті отримаємо тотожності:

$$f(x;y) = f({}^{\sigma}h(x;x);e), \qquad f(x;y) = f(e;{}^{\sigma}h(y;y)),$$

$$f(x;{}^{\sigma}h(y;y)) = f(y;e), \qquad f(x;e) = f(y;{}^{\sigma}h(x;x)),$$

З кожної із цих формул випливає, що базова множина одноелементна, що суперечить її вибору. Ці протиріччя доводять парастрофно-первинну нерівносильність рівнянь (5), (8) та (5), (10).

Пункт 2. Розглянемо парастрофно-первинну нерівносильність пар рівнянь (6), (9) та (7), (9).

На неодноелементній множині Q розглянемо операцію f – лупу Штейнера, h – квазігрупу Штейнера. Четвірка функцій (f,h,f,h) є розв'язком рівняння (9). Справді, коли підставимо цю четвірку функцій в рівняння (9), отримаємо виконання тотожності.

Припустимо, що (6) $\asymp$ (9) та (7) $\asymp$ (9). З Наслідку 1. випливає, що розв'язком рівнянь (6) та (7) буде принаймні одна із четвірок функцій:

$$(h,h,f,f);\ (h,f,h,f);\ (h,f,f,h);\ (f,h,h,f);\ (f,h,f,h);\ (f,f,h,h). \qquad (12)$$

Це означає виконання відповідних тотожностей для (6):

$$(i_1):\ h(x,h(x;y)) = f(f(x;y);y); \quad (i_2):\ h(x,f(x;y)) = h(f(x;y);y);$$

$$(i_3):\ h(x,f(x;y)) = f(h(x;y);y); \quad (i_4):\ f(x,h(x;y)) = h(f(x;y);y);$$

$$(i_5):\ f(x,h(x;y)) = f(h(x;y);y); \quad (i_6):\ f(x,f(x;y)) = h(h(x;y);y),$$

та для рівняння (7):

$$(i_7):\ h(x,h(y;y)) = f(x;f(x;y)); \quad (i_8):\ h(x,f(y;y)) = h(x;f(x;y));$$

$$(i_9):\ h(x,f(y;y)) = f(x;h(x;y)); \quad (i_{10}):\ f(x,h(y;y)) = h(x;f(x;y));$$

$$(i_{11}):\ f(x,h(y;y)) = f(x;h(x;y)); \quad (i_{12}):\ f(x,f(y;y)) = h(x;h(x;y)).$$

Використавши тотальну симетричність квазігрупи h та лупи f, з кожної зтотожностей (i_1), (i_6), (i_7) та (i_{12}) випливає одноелементність Q, що суперечить її вибору.

Тотожності (i_2), (i_5), (i_8), (i_{11}) також спричинюють одноелеметність множини Q, для цього скоротимо відповідно: в (i_2) на $f(x;y)$, в (i_5) на $h(x;y)$, в (i_8) та в (i_{11}) скоротимо на x.

В (i_3), (i_4), (i_9), (i_{10}) покладемо $x=y$ та скористаємося властивостями квазігрупи та лупи Штейнера в результаті отримаємо одну із тотожностей:

$$h(x;e) = f(x;x) \quad \text{чи} \quad f(x;x) = h(e;x),$$

тобто $h(x;e)=e$ або $h(e;x)=e$. Це означає, що базова множина Q одноелементна.

Отримані протиріччя доводять парастрофно-первинну нерівносильність рівнянь (6) та (9), (7) та (9). □

Висновки

В класі двомісних оборотних функцій узагальнених функційних рівнянь:
— від двох функційних змінних існує точно три (одне рівняння предметного типу $(4;0)$ та два рівняння типу $(2;2)$);
— від трьох функційних змінних – принаймні чотири (одне рівняння типу $(5;0)$ та три рівняння предметного типу $(3;2)$);
— від чотирьох функційних змінних – принаймні 19, з них принаймні два – типу $(6;0;0)$, точно шість рівнянь типу $(4;2;0)$, точно п'ять – типу $(2;2;2)$ та принаймні шість рівнянь типу $(3;3;0)$.

Знайти та описати розв'язки функційних рівнянь предметних типів $(5;0)$, $(6;0;0)$ та $(3;3;0)$ є подальшою перспективою даного дослідження. Не з'ясованим залишається питання парастрофно-первинної нерівносильності таких пар узагальнених функційних рівнянь (6) і (7), (8) і (10).

Література

[1] *Aczel J.* Lectures on Functional Equations and their applications. — New York: Acad. press., —1966. — P. 510.

[2] *Aczél J., Belousov V.D., Hosszú M. Generalized associativity and bisymmetry on quasigroups*, Acta. Math. – Acad. Scient. Hung. **11**(1-2),(1960), 127 – 136 .

[3] *Ацель Я., Домбр Ж.* Функциональные уравнения с несколькими переменными / Перевод с англ. — Москва: Физматлит, 2003. — 432 с.

[4] *Belousov V.D.* Parastrophic-orthogonal quasigroups. // Quasigroups and Related Systems. — 13. — 2005. — P. 25-72.

[5] *Белоусов В.Д.* Ассоциативные системы квазигрупп // Успехи мат. наук. — 1958. — 13. — **3(81)**. — С. 243.

[6] *Белоусов В.Д.* Системы квазигрупп с обобщёнными тождествами. // УМН. — 1965. — Т. 20.— N 1(121). — С. 75-146.

[7] *Белоусов В.Д.* Уравновешенные тождества в квазигруппах. // Мат. сб. — 1966. — Т.70.— N 1(112). — С. 55-97.

[8] *Чебан А.М.* Системы квазигрупп с обобщённым тождеством Бола // Вопросы теории квазигрупп и луп. — Кишинев. — 1971.— С. 165-175.

[9] *Чебан А.М.* Системы квазигрупп с обобщённым тождеством Муфанг // Мат.исследования. — Кишинев. — 1971. — Т. VI. вып. 3.— С. 180-187.

[10] *Duplak Jan* Identities and deleting maps on quasigroups // Math. Institute of the Czechoslovak Academy of Scien.— 1988. — Vol. 38(113).N 1.— P.1-7.

[11] *Глухов М.М.* О применениях квазигрупп в криптографии // Прикладная дискретная математика. — 2008. — N 2(2).— С. 28-32.

[12] *Коваль (Юрій) Р. Ф.* Класифікація функційних рівнянь малої довжини на квазігрупових операціях// Дисертація на здобуття наук. ступ. кандид. фіз.-мат. наук / Коваль (Юрій) Раїса Федорівна — Вінниця. — 2005.—133 с.

[13] *Крайнічук Г.В.* Класифікація та розв'язання квазігрупових функційних рівнянь типу (4;2) // Вісник ДонНУ, серія А: природничі науки. — 2015. — N 1-2. — С. 53-63.

[14] *Krapež A.* Strictly quadratic functional equations on quasigroups // Publ.Inst.Math. — 1981. — N 29(43). — P.125-138.

[15] *Krapež A.* Generalized quadratic quasigroup equations with three variables // Quasigroups and related systems. — 2009. — **17**. — P. 253–270.

[16] *Krapež A., Simić S. K., Tošić D. V.* Parastrophically uncancellable quasigroup equations// Aequat. Mathem. 79. — 2010. — P. 261-280.

[17] *Krapež A.* Cryptographically Suitable Quasigroups via Functional Equations // Conference: ICT Innovations 2012 - Secure and Intelligent Systems, At Ohrid, Macedonia, — 2012. — P. 1-10.

[18] *Krstic S.* Kvadratni kvazigrupni identiteti // PhD thesis. — University of Belgrade. — 1985.

[19] *Сохацький Ф.М.* Асоціати та розклади багатомісних операцій // Дисертація на здобуття наук. ступ. доктора фіз.-мат. наук: 01.01.06 / Сохацький Федір Миколайович. — Київ.— 2006. — 334 с.

[20] *Сохацький Ф.М.* Про класифікацію функційних рівнянь на квазігрупах // Український математичний журнал. — 2004. —Т. 56. N 9. — С. 1259-1266.

[21] *Sokhatsky F.M.* Parastrophic symmetry in quasigroup theory // Visnyk DonNU, A: natural Sciences. — 2016. — here.

[22] *Taylor M.A.* A generalization of a theorem of Belousov // Bull. London Math. Soc.— 1978. — 10, N 3. — P. 285-286.

КЛАССИФИКАЦИЯ КВАЗИГРУППОВЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА $(3;3;0)$

Крайничук Г.В.

РЕЗЮМЕ

В данной статье систематизированы результаты классификации обобщенных квазигруппових функциональных уравнений от двух, трех и четырех функциональных переменных. Классифицированы обобщенные квазигруповые функциональные уравнения типа (3,3,0), в результате получено 6 классов, частично установлена попарная парастрофно-первичная неравносильность представителей классов, а следовательно и самих классов.

Тождества определяющие оборотную функцию (квазигруппу) называются первичными, соответственно преобразования функциональных уравнений с помощью этих тождеств называются также первичными. Два функциональные уравнения называются первично (парастрофно) эквивалентными, если от одного уравнения к другому можно перейти с помощью конечного числа применений первичных преобразований. Типом (предметным типом) функционального уравнения от k предметных переменных называем набор вхождений $m_1, m_2, \ldots, m_k$, где m_i количество вхождений в уравнении i той предметной переменной.

Ключевые слова: квазигруппа, оборотная функция, парастроф, тождество, функциональное уравнение, первичное преобразование, парастрофно-первичная эквивалентность.

A CLASSIFICATION OF QUASIGROUP FUNCTIONAL EQUATIONS OF THE TYPE $(3;3;0)$

Krainichuk H.V.

SUMMARY

In this article, the results of the classification of generalized quasigroup functional equations with two, three, and four functional variables are systematized. Generalized quasigroup functional equations of the type $(3;3;0)$ are classified, as a result, 6 classes are obtained. Pairwise parastrophically-primary non-equivalence of representatives of classes, and therefore of the classes themselves, is partially established.

Identities that define the inverse function (quasigroup) are called primary. Conversions of functional equations using these identities are also called primary. Two functional equations are called primarily (parastrophically) equivalent, if you can go from one equation to another with the help of the finite number of applications of the primary transformations. A type (an individual type) of functional equation with k individual variables is called a kit $m_1, m_2, \ldots, m_k$, where m_i is the number of occurrences in the equation i – this individual variable.

Key words: quasigroup, invertible function, parastrophe, identitiy, functional equation, primary transformation, parastrophivally-primary equivalence.