УДК 517.5

Перевєрзєва Ю.В.

студентка 4 курсу спеціальності математика Донецького національного університету

ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ З УСЕРЕДНЕННЯМ ЗА МНОГОКУТНИКОМ

В роботі наведено теорему про середнє для функції спеціального виду у випадку многокутника з поліноміальною вагою.

Ключові слова: *теорема про середнє, правильний многокутник, похідні Коші.*

Вступ

Характеризація розв'язків диференціальних рівнянь в термінах різних інтегральних середніх вивчалась багатьма авторами (див. [1] - [5] та бібліографію в цих роботах). Постановка подібних задач має походження від класичного результату Какутані-Нагумо-Уолша-Прівалова про характеризацію гармонічних поліномів спетеня не вище $n-1, n \in \mathbb{N}$ в класі неперервних функцій на комплексній площині умовою середнього значення по вершинах всіх правильних n-кутників ($n \geqslant 3$).

В роботі М.О. Ріда (див. [2]) характеризується 2-аналітична функція.

Теорема 1. *Нехай* $f \in C(B)$, $B : |z| < 1$. *Тоді необхідною і достатньою умовою для того, щоб функція була 2-аналітична виду*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-3} \alpha_k z^k + \sum_{k=0}^{n-3} \beta_k \bar{z}^k,$$

α_k , β_k *– деякі сталі, є виконання рівняння*

$$\iint\limits_{P_n(z,r,\varphi)} (\zeta - z)^2 f(\zeta) d\xi d\eta = 0$$

для кожного $P_n(z, r, \varphi)$ *у* B , *де* $P_n(z, r, \varphi)$ *– замкнена область, що обмежена правильним многокутником* $p_n(z, r, \varphi)$ *з центром в точці* z *та радіусом* r *вписаного кола (*φ *– кут між горизонтальним променем справа від* z *та зовнішньою нормаллю в точці виходу проміня з многокутника,* $-\pi/n \leqslant \varphi < \pi/n$ *).*

В роботі О.Д. Трофименко [5] сформульовано достатню умову для виконання інтегрального рівняння по многокутнику з нульовою правою частиною.

Теорема 2. *Нехай* $L \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $L < (n+1)/2$ *і* $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{L-1} \alpha_k z^k + \sum\limits_{k=0}^{L-1} \beta_k \bar{z}^k$. *Тоді для кожного правильного* n*-кутника* $p_n(z, r)$ *з центром в точці* z *і радіусом вписаного кола* r *виконується рівність*

$$\iint\limits_{P_n(z,r)} (\zeta - z)^{n-L} f(\zeta) d\xi d\eta = 0.$$

У представленій роботі виявлено, що функція виду

$$f(z) = \sum_{k=0}^{h} \sum_{l=0}^{m-1} c_{k,l} z^k \bar{z}^l, \tag{1}$$

задовільняє інтегральному рівнянню із середнім значенням у випадку многокутника при повороті на кут $\alpha, 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$.

Основна частина

Теорема 3. *Нехай* $n, m, h \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant h \leqslant n - s$, $0 \leqslant s \leqslant m - 1$ *і функція* $f(z)$ *має вигляд (1). Тоді для кожного правильного* n*-кутника* $p_n(0, r)$ *з центром в точці* 0 *і радіусом* r *вписаного кола виконується рівність*

$$\iint\limits_{P_n(0,r)} w^s f(e^{i\alpha} w + e^{i\alpha} z) du dv = \sum_{p=s}^{h+s} \frac{n r^{2p+2} \lambda_p}{(2p+2)(p-s)! p!} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{p-s} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^{p} f(e^{i\alpha} z),$$

де

$$\lambda_p = \int\limits_{-\pi/n}^{\pi/n} \frac{1}{cos^{2p+2}t} dt.$$

Доведення. Почнемо з лівої частини вихідного рівняння.

$$\iint\limits_{P_n(0,r)} w^s f(e^{i\alpha}w + e^{i\alpha}z) dudv = \iint\limits_{P_n(0,r)} w^s \sum_{k=0}^{h}\sum_{l=0}^{m-1} c_{k,l} (e^{i\alpha}w + e^{i\alpha}z)^k (e^{i\alpha}\bar{w} + e^{i\alpha}\bar{z})^l dudv =$$

$$= \iint\limits_{P_n(0,r)} w^s \sum_{k=0}^{h}\sum_{l=0}^{m-1} c_{k,l} \left(\sum_{j=0}^{k} \mathrm{C}_k^j (e^{i\alpha}w)^j (e^{i\alpha}z)^{k-j}\right) \left(\sum_{p=0}^{l} \mathrm{C}_l^p (e^{i\alpha}\bar{w})^p (e^{i\alpha}\bar{z})^{l-p}\right) dudv;$$

при умові, що $w = \rho e^{i\varphi}$, маємо

$$\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=0}^{h}\sum_{l=0}^{m-1} c_{k,l} \int\limits_{2\pi(\nu-1)/n}^{2\pi\nu/n} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{r}{cos(\varphi-2\pi(\nu-1/2)/n)}} \rho^s e^{i\varphi s} \sum_{j=0}^{k} \mathrm{C}_k^j (\rho e^{i\varphi} e^{i\alpha})^j (z e^{i\alpha})^{k-j} \times$$

$$\times \sum_{p=0}^{l} \mathrm{C}_l^p (\rho e^{-i\varphi} e^{i\alpha})^p (\bar{z} e^{i\alpha})^{l-p} \rho d\rho.$$

Перетворюючи останній вираз, отримаємо

$$\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=0}^{h}\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{k}\sum_{p=0}^{l} c_{k,l} e^{i\alpha(k+l)} \mathrm{C}_k^j \mathrm{C}_l^p z^{k-j} \bar{z}^{l-p} \frac{r^{s+j+p+2}}{s+p+j+2} \times$$

$$\times \int\limits_{2\pi(\nu-1)/n}^{2\pi\nu/n} \frac{e^{(s+j-p)i\varphi}}{cos^{s+j+p+2}(\varphi - 2\pi(\nu-1/2)/n)} d\varphi.$$

Зробимо наступну заміну $t = \varphi - 2\pi(\nu-1/2)/n$. Тоді маємо

$$\sum_{k=0}^{h}\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{k}\sum_{p=0}^{l} c_{k,l} e^{i\alpha(k+l)} \mathrm{C}_k^j \mathrm{C}_l^p z^{k-j} \bar{z}^{l-p} \frac{r^{s+j+p+2}}{s+p+j+2} \times$$

$$\times \left(e^{i(s+j-p)\frac{\pi}{n}} + e^{i(s+j-p)\frac{3\pi}{n}} + ... + e^{i(s+j-p)\frac{\pi(2n-1)}{n}}\right) \int\limits_{-\pi/n}^{\pi/n} \frac{e^{(s+j-p)it}}{cos^{s+j+p+2}t} dt.$$

Продовжуючи міркування, отримаємо

$$\sum_{k=0}^{h}\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{p=0}^{l} \sum_{q\in\left[\frac{s-p}{n},\frac{k+s-p}{n}\right]\cap\mathbb{N}} (-1)^q c_{k,l} e^{i\alpha(k+l)} \mathrm{C}_k^{qn+p-s} \mathrm{C}_l^p z^{k-qn-p+s} \bar{z}^{l-p} \frac{r^{qn+2p+2}}{qn+2p+2} \times$$

$$\times \int\limits_{-\pi/n}^{\pi/n} \frac{e^{iqnt}}{cos^{qn+2p+2}t} dt.$$

Спираючись на значення q в останній сумі, отримаємо наступне.

Якщо $s > p$, то $q = 1$. В іншому випадку $q = 0$.

Отже, маємо окремі два доданки

$$\sum_{k=0}^{h}\sum_{l=0}^{m-1} (-1) c_{k,l} e^{i\alpha(k+l)} \sum_{p=0}^{s} n \mathrm{C}_k^{n+p-s} \mathrm{C}_l^p z^{k-n-p+s} \bar{z}^{l-p} \frac{r^{n+2p+2}}{n+2p+2} \int\limits_{-\pi/n}^{\pi/n} \frac{e^{int}}{cos^{n+2p+2}t} dt +$$

$$+\sum_{k=0}^{h}\sum_{l=s}^{m-1}\sum_{p=s}^{l}c_{k,l}e^{i\alpha(k+l)}n\mathrm{C}_k^{p-s}\mathrm{C}_l^{p}z^{k-p+s}\bar{z}^{l-p}\frac{r^{2p+2}}{2p+2}\int\limits_{-\pi/n}^{\pi/n}\frac{dt}{cos^{2p+2}t}dt.$$

Пглянемо у першому доданку на C_k^{n+p-s}.

За означенням біноміального коефіцієнту $n+p-s\leqslant k$, звідки отримаємо протиріччя.

Аналогічно у другому доданку $0\leqslant p-s\leqslant k$. Звідси $p\leqslant k+s$.

Тоді елементарними перетвореннями можна отримати наступне.

$$\iint\limits_{P_n(0,r)} w^s f(e^{i\alpha}w+e^{i\alpha}z)dudv=\sum_{k=0}^{h}\sum_{l=s}^{m-1}\sum_{p=s}^{\min\{l,k+s\}}c_{k,l}e^{i\alpha(k+l)}n\mathrm{C}_k^{p-s}\mathrm{C}_l^{p}z^{k-p+s}\bar{z}^{l-p}\frac{r^{2p+2}}{2p+2}\times$$

$$\times\int\limits_{-\pi/n}^{\pi/n}\frac{dt}{cos^{2p+2}t}dt.$$

Далі

$$\sum_{p=s}^{h+s}\sum_{k=p-s}^{h}\sum_{l=p}^{m-1}c_{k,l}n\mathrm{C}_k^{p-s}\mathrm{C}_l^{p}e^{i\alpha k}z^{k-p+s}e^{i\alpha l}\bar{z}^{l-p}\times$$

$$\times\frac{r^{2p+2}}{2p+2}\int\limits_{-\pi/n}^{\pi/n}\frac{dt}{cos^{2p+2}t}dt=$$

$$\sum_{p=s}^{h+s}\frac{nr^{2p+2}\lambda_p}{(2p+2)(p-s)!p!}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{p-s}\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\right)^{p}\left(\sum_{k=0}^{h}\sum_{l=0}^{m-1}c_{k,l}(e^{i\alpha}z)^k(e^{i\alpha}\bar{z})^l\right).$$

Отже, маємо

$$\iint\limits_{P_n(z,r)}(\zeta-z)^s f(e^{i\alpha}\zeta)d\xi d\eta=\sum_{p=s}^{h+s}\frac{nr^{2p+2}\lambda_p}{(2p+2)(p-s)!p!}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{p-s}\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\right)^{p}f(e^{i\alpha}z),$$

де

$$\lambda_p=\int\limits_{-\pi/n}^{\pi/n}\frac{1}{cos^{2p+2}t}dt.$$

Це і є шукана рівність. □

Висновки

В роботі розглянуто питання усереднень по вершинах правильних многокутників. Отримано твердження для множини гладких функцій у крузі на комплексній площині, що мають спеціальний вигляд. Слід відмітити, що функції виду (1) є m-аналітичними функціями.

Теорему 3 можна розглядати, як частину доведення на шляху отримання критерію для виконання інтегральної рівності, ліва частина якої є добутком натуральних степенів формальних похідних Коші.

Література

[1] *Привалов И.И.* Субгармонические функции. — М.: ОНТИ НКТП СССР, 1937. — 199 с.

[2] Reade M. O. A theorem of Fedoroff // Duke Math.J. — 1951. — №18. — P. 105–109.

[3] Ramsey T., Weit Y. Mean values and classes of harmonic functions // Math. Proc. Camb. Dhil. Soc. — 1984. — №96. — P. 501–505.

[4] *Volchkov V.V.* Integral Geometry and Convolution Equation. — Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, 2003. — 454 p.

[5] Трофименко О.Д. Деякі інтегральні рівності для певних класів поліномів // Труды ИПММ НАН Украины. — 2009. — №18. — С. 184–188.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С УСРЕДНЕНИЕМ ПО МНОГОУГОЛЬНИКУ

Переверзева Ю.В.

РЕЗЮМЕ

В работе представлена теорема о среднем для функции специального вида в случае многоугольника с полиномиальным весом.

Ключевые слова: теорема о среднем, правильный многоугольник, производные Коши.

INTEGRAL MEAN VALUE EQUATION OVER THE POLYGON

Perevierzieva Yu.V.

SUMMARY

A mean value theorem for special function in the case of polygon with polynomial weight is represented.

Key words: mean value theorem, regular polygon, Cauchy derivatives