УДК 519.6

**Хачатрян Р.А.**

**Доцент кафедры численного анализа и математического моделирования,
Ереванский государственный университет, Ереван, Армения**

# О НЕКОТОРЫХ ПРИЛОЖЕНИЯХ ТЕОРЕМЫ О НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ НА КОНУСЕ

В этой статье рассматривается задача математического программирования с негладкими ограничениями типа равенства, включая еще нефункциональное ограничение типа конуса. Получено правило множителей Лагранжа.

**Ключевые слова:** *касательный конус, шатер, выпуклость.*

Здесь приняты следующие обозначения:
$X^*$ – пространство, сопряженное ко пространству $X$.
$cl\{M\}$ –замыкание множества $M$.
$< x^*, x >$ – значение линейного непрерывного функционала $x^* \in X^*$ на элементе $x \in X$.
Через $KerA \equiv \{x \in Ax = 0\}$ обозначается ядро линейного непрерывного оператора $A : X \longrightarrow Y$, а через $ImA$ обозначается его образ.
$(KerA)^{\perp} \equiv \{x^* \in X^* / < x^*, x >= 0, \ \forall x \in KerA\}$ – аннулятор подпространства $KerA$.

**Определение 1.** *[7]. Выпуклый конус $K_M(x_0)$ называется конусом касательных направленый множества $M$ в точке $x_0$, если из включения $\overline{x} \in K_M(x_0)$ следует, что существует такая функция $\varphi(\lambda)$, что*

$$x_0 + \lambda\overline{x} + \varphi(\lambda) \in M$$

*при достаточно малых $\lambda \geqslant 0$ и $\lambda^{-1}\varphi(\lambda) \to 0$, когда $\lambda \downarrow 0$.*

**Определение 2.** *[5]. Конус $K$ называется шатром в точке $x_0 \in M$, если существует такое отображение $r$, определенное в некоторой окрестности $U$ нуля, что*

$$x_0 + \overline{x} + r(\overline{x}) \in M, \text{ если } \overline{x} \in K \bigcap U \text{ и}$$

$$\frac{r(\overline{x})}{\|\overline{x}\|} \to 0 \text{ при } \overline{x} \to 0.$$

*Шатер называется непрерывным, если отображение $r$ непрерывно.*

В дальнейшем важнейшим является следующая теорема, доказанным А. Арутюновым в статье [2].

**Теорема 1.** *[2] (Классическая теорема о неявной функции для конусов). Пусть*

1. *$X-$ топологическое пространство, $Y$ и $Z-$ банаховы пространства, $W-$ окрестность точки $(x_0, y_0)$ в $X \times Y$, $K \subseteq Y$ - выпуклый замкнутый конус и $y_0 \in K$;*
2. *$\psi-$ отображение из $W$ в $Z$, $\psi(x_0, y_0) = 0$. Оно непрерывно по совокупности переменных в некоторой окрестности $(x_0, y_0)$;*
3. *существует такой линейный непрерывный опертор $A : Y \to Z$, $AK + Lin\{Ay_0\} = Z$ (Условие Робинсона), что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\delta > 0$ и окрестность $U(x_0)$ обладающие тем свойством, что из условия $x \in U(x_0)$ и неравенств $\|y\prime - y_0\| < \delta$, $\|y'' - y_0\| < \delta$ следует неравенство:*

$$\|\psi(x, y') - \psi(x, y'') - A(y' - y'')\| < \varepsilon\|y' - y''\|.$$

*Тогда найдутся число $C > 0$, окрестность $V$ точки $x_0$ в $X$ и непрерывное отображение $\varphi : V \to K$ такие, что*
*a)* $\psi(x, \varphi(x)) = 0 \ \forall x \in V$;
*b)* $\|\varphi(x) - y_0\| \leqslant C\|\psi(x, y_0)\| \ \forall x \in V$.

Верно следующее утверждение.

**Теорема 2.** *Пусть*

1. $X$, $Y$ *банаховы пространства,* $K \subseteq X$ *-выпуклый замкнутый конус;* $x_0 \in K$;
2. $F(x)$ *- отображение строго дифференцируемо в* $x_0$, $F(x_0) = 0$, $F'(x_0)K = Y$.

*Тогда выпуклый конус*

$$L \equiv KerF'(x_0) \bigcap K$$

*является* ***непрерывным шатром*** *для множества* $\Omega \equiv K \bigcap \{x/F(x) = 0\}$ *в точке* $x_0$.

**Proof.** При фиксированном $\overline{x} \in L$ рассмотрим уравнение

$$\psi(\overline{x}, r) \equiv F(x_0 + \overline{x} + r) = 0.$$

Имеем

1. $\psi(0, 0) = 0$;
2. отображение $\psi$ непрерывно в окрестности $(0, 0)$;
3. для любого $\varepsilon > 0$ найдются $\delta > 0$ и окрестность $U(0)$ обладающие тем свойством, что из условия $\overline{x} \in U(0) \cap P$ и неравенств $\|r\prime\| < \delta$, $\|r''\| < \delta$ следует неравенство:

$$\|\psi(\overline{x}, r') - \psi(\overline{x}, r'') - F'(x_0)(r' - r'')\| < \varepsilon \|r' - r''\|.$$

Поэтому выполнены все предположения теоремы 1. Значит, найдутся число $C > 0$, окрестность $V$ точки $x_0$ в $X$ и непрерывное отображение $r : V \to K$ такие, что
a) $\psi(x, r(\overline{x})) = 0 \; \forall \overline{x} \in V \cap L$;
b) $\|r(\overline{x})\| \leqslant C\|\psi(\overline{x}, 0)\| \; \forall \overline{x} \in V \cap L$.
Поскольку

$$\psi(\overline{x}, 0) = F(x_0) + F'(x_0)\overline{x} + o(\overline{x}) = o(\overline{x}),$$

то

$$\|r(\overline{x})\| \leqslant C\|\psi(\overline{x}, 0)\| \leqslant C\|o(\overline{x})\|.$$

Поэтому

$$F(x_0 + \overline{x} + r(\overline{x})) = 0, \; r(\overline{x}) = o(\overline{x}).$$

□

Отсюда следует следующий результат, обобщающий теорему Люстерника о касательном пространстве [6].

**Следствие1.** *Пусть выполнены предположения предыдущей теоремы и* $x_0 \in K$. *Тогда*

$$L \equiv KerF'(x_0) \bigcap K$$

*является конусом касательных направлений ко множеству* $\Omega \equiv K \bigcap \{x/F(x) = 0\}$ *в точке* $x_0$.

**Proof.** Действительно, пусть $\overline{x_0} \in P$.

Теперь применяя вышеуказанную теорему получим, что существует окрестность $V$ нуля и отображение $r : L \cap V \longrightarrow K$ такие, что

$$F(x_0 + \overline{x} + r(\overline{x})) = 0, \overline{x} \in L \bigcap V.$$

Так как $K$ - выпуклый конус, то для достаточно малых $\lambda > 0$ имеем

$$x_0 + \lambda\overline{x_0} + r(\lambda\overline{x_0}) \in K.$$

Следовательно,

$$x_0 + \lambda\overline{x_0} + r(\lambda\overline{x_0}) \in \Omega.$$

□

Рассмотрим теперь задачу с операторными ограничениями, включая еще нефункциональное ограничение.

$$f(x) \longrightarrow min, \; F(x) = 0, x \in K.$$

**Теорема 3.** *Пусть*

1. $x_0$ *- решение вышеуказанной задачи;* $f$ *дифференцируема в этой точке;*
2. $X, Y$ *банаховы пространства;* $K \subseteq X$ *- выпуклый замкнутый конус;*
3. $F : X \longrightarrow Y$ *- строго дифференцируемое в точке* $x_0$ *отображение и такое, что множество* $F'(x_0)K$ *замкнуто.*

*Тогда существуют число* $\lambda$ *и вектор* $y^* \in Y^*$, *не равные нулю одновременно, такие, что*

$$0 \in \lambda f'(x_0) + (F'(x_0))^* y^* - K^*.$$

**Proof.** Сначала рассмотрим случай, когда

$$F'(x_0)K = Y.$$

Тогда по следствии теоремы 2 выпуклый конус

$$L \equiv KerF'(x_0) \bigcap K$$

является конусом касательных направлений для множества $\Omega \equiv K \bigcap \{x/F(x) = 0\}$ в точке $x_0$. Поэтому

$$f'(x_0) \in P^* = (KerF'(x_0) \bigcap K)^* = cl\{KerF'(x_0))^{\perp} + K^*\} =$$

$$= cl\{Im(F'(x_0))^* + K^*\},$$

где $KerF'(x_0))^{\perp}$ – аннулятор подпространства $KerF'(x_0)$. Покажем, что множество

$$Im(F'(x_0))^* + K^*$$

замкнуто. Согласно теореме 1 существует непрерывное отображение $P(y)$ и число $C > 0$ такие, что

$$P(y) \in \{x \in K : F'(x_0)x = y\},\ \|P(y)\| \leqslant C\|y\|\ \forall y \in Y.$$

Пусть $x_k \in Im(F'(x_0))^* + K^*$ и $x_k \longrightarrow x_0$. Существуют последовательности $y_k$, $z_k$ такие, что

$$x_k = (F'(x_0))^* y_k + z_k,\ \ z_k \in K^*.$$

Так как $P(y) \in K$, то

$$< z_k, P(y) >\geqslant 0,$$

и следовательно,

$$< (F'(x_0))^* y_k, P(y) >\leqslant< x_k, P(y) > .$$

Отсюда, поскольку последовательность $x_k$ ограничена, то существует такое число $C_1 > 0$, что

$$< y_k, y >\leqslant \|x_k\|\|P(y)\| \leqslant C_1\|y\|.$$

Значит, последовательность $y_k$ линейных непрерывных функционалов ограничена. Поэтому из него можно выделить слабо сходящиеся подпоследовательность. Не нарушая общности предположим, что

$$y_k \rightharpoonup y_0.$$

Значит, $z_k \rightharpoonup z_0 \in K^*$. Таким образом,

$$x_0 = F'(x_0)^* y_0 + z_0.$$

Пусть $F'(x_0)K \neq Y$. Тогда, поскольку по предположению множество $F'(x_0)K$ замкнуто, то существует не тривиальный функционал $y^*$, такой, что $< y^*, F'(x_0)\overline{x} >\geqslant 0$. Отсюда $F'(x_0)^* y^* \in K^*$, и тем самым правило множителей автоматически выполняется, если выберем $\lambda = 0$. □

**Замечание 1.** *Пусть выпуклый замкнутый конус $K$ задан следующим образом:*

$$K = \{x \in x/Ax = 0, < x_i^*, x > \leqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, p, \}$$

*где $A : X \longrightarrow Y$ –линейный непрерывный оператор. Предположим также, что подпространство*

$$F'(x_0)KerA$$

*замкнуто. Тогда согласно лемме 6 [3] конус $F'(x_0)K$ замкнут.*

Рассмотрим теперь конечномерный случай и предположим, что

$$F(x) \equiv (f_1(x), \ldots, f_k(x)),\ x \in R^n.$$

В статье [4] доказан следующая теорема о касательном конусе, обобщающий результат Люстерника.

**Теорема 4.** *Пусть*

1. $F(x_0) = 0,$
2. *$F$ дифференцируемо в точке $x_0$ и непрерывно в некоторой окрестности этой точки и $ImF'(x_0) = R^k$.*
3. *$A \subseteq R^n$ –выпуклое множество такое, что $x_0 \in A$ и $intA \neq \emptyset$.*

*Тогда выпуклый конус*

$$L \equiv con(intA - x_0) \bigcap KerF'(x_0)$$

*является конусом касательных направлений ко множеству*

$$\Omega \equiv \{x/F(x) = 0\} \bigcap A$$

*в точке $x_0$.*

В этой статье показано, что если $A$ есть выпуклый замнкутый конус возможно с пустой внутренностью, то $K \bigcap \{x/F(x) = 0\}$ – шатер ко множеству $\Omega$.
А именно верна следующая:

**Теорема 5.** *Пусть*

1. *Пусть $F(x_0) = 0,\ x_0 \in K,$ где $K \subseteq R^n$ – выпуклый замкнутый конус;*
2. *$f_i,\ i = 1, 2, \ldots, k$ – дифференцируемые в точке $x_0$ функции и непрерывны в некоторой окрестности этой точки;*
3. $F'(x_0)K = R^k.$

*Тогда выпуклый конус $L \equiv K \cap KerF'(x_0)$ является* ***шатром*** *ко множеству $\Omega = \{x/F(x) = 0\} \cap K$ в точке $x_0$.*

**Proof.** Согласно теореме 1 существует непрерывное отображение $P : R^k \longrightarrow R^n$ и число $C > 0$ такие, что

$$P(y) \in K,\ \|P(y)\| \leqslant C\|y\|, F'(x_0)P(y) = y\ \forall y \in R^k.$$

Рассмотрим следующую систему уравнений в векторной форме:

$$q(\overline{x}, y) \equiv F(x_0 + \overline{x} + P(y)) = 0,\ \overline{x} \in L.$$

Имеем

1. $q(0, 0) = 0,$

2. $q(\overline{x}, y)$ – непрерывная вектор функция, удовлетворяющая условию:

$$q(\overline{x}, y) = y + r(\overline{x}, y),$$

причем

$$\|r(\overline{x}, y)\| \leqslant \overline{r}(\sqrt{\|\overline{x}\|^2 + \|y\|^2}).$$

Теперь, буквально повторяя доказательство теоремы 1.1 [7](гл.5, п. 1, стр. 191) (теорема о неявных функциях), получаем, что существуют окрестность нуля $V$ и такое отображение

$$y : KerF'(x_0) \cap V \longrightarrow R^k,\ y(\overline{x}) = o(\overline{x}),$$

что

$$q(\overline{x}, y(\overline{x})) = F(x_0 + \overline{x} + P(y(\overline{x}))) \equiv 0.$$

Положив теперь $\varphi(\overline{x}) \equiv P(y(Pr_K(\overline{x}))$, получим

$$\varphi(\overline{x}) = o(\overline{x}),\ x_0 + \overline{x} + \varphi(\overline{x}) \in \Omega$$

при достаточно малых $\overline{x} \in L$. □

**Литература**

[1] *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. — Наука, Москва. — 1979.
[2] *Арутюнов А.В.* Теорема о неявной функции без оприорных предположений нормальности // Ж. вычис. матем. и матем физ. — 2006. — Т.46. — №2. — С. 205–2015.
[3] *Аваков Е.Р., Арутюнов А.В., Измаилов А.Ф.* Необходимые условия экстремума в задаче математического программирования // Труды Мат. Инс. им. Стеклова. — 2007. — Т.256. — 6–30.
[4] *Арутюнов А.В., Винтер Р.Б.* Метод конечномерной аппроксимации в теории оптимального управления // Дифф. Уравнения. — 2003. — Т.39. — №1. — С. 1443-1451.
[5] *Болтянский В.Г.* Метод шатров в теории экстремальных задач // Успехи мат. наук. — 1975. — Т. 30. — №3. — С. 3–55.
[6] *Дмитрук А.В., Милютин. А.А., Осмоловский Н.П.* Теорема Люстерника в теории экстремума // УМН. — 1980. — Т. 33,. — №5. — С. 11–46.
[7] *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — Наука, Москва. — 1980.

## ON SOME APLICATIONS OF THE THEOREM ABOUT IMPLICIT FUNCTION ON THE CONE

**Khachatryan R.A.**

**SUMMARY**

In the article, the problem of mathematical programming with nonsmooth limitation of equality type including nonfunctional limitations of cone type is under concideration. The rule of Lagrange multipliers is obtained.

*Keywords: tangent cone, tent, convexity.*

## ПРО ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМИ ПРО НЕЯВНУ ФУНКЦІЮ НА КОНУСІ

**Хачатрян Р.А.**

**РЕЗЮМЕ**

У цій статті розглядається задача математичного програмування з негладкими обмеженнями типу рівності, включаючи нефункціональне обмеження типу конус. Отримано правило множників Лагранжа.

*Ключові слова: дотичний конус, тент, опуклість.*