

УДК 539.3

Багно О.М.

доктор фізико-математичних наук, провідний науковий співробітник,
Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України

ВПЛИВ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ НА ДИСПЕРСІЮ ХВИЛЬ У ПРУЖНОМУ ШАРІ, ЩО ВЗАЄМОДІЄ З В'ЯЗКИМ СТИСЛИВИМ РІДКИМ ШАРОМ

На основі тривимірних лінеаризованих рівнянь Нав'є – Стокса для шару в'язкої стисливої рідини та лінійних рівнянь класичної теорії пружності для твердого шару побудовано дисперсійні криві, а також досліджено поширення гармонічних хвиль у широкому діапазоні частот. Проаналізовано вплив в'язкості рідини, товщини пружного і рідкого шарів на фазові швидкості, коефіцієнти згасання та дисперсію мод для гідропружної системи з товстим рідким шаром. Показано, що в'язка рідина для ряду мод викликає зміну критичних частот, зміщення дисперсійних кривих, а також призводить до виникнення нових мод. Встановлено локалізаційні властивості квазілембовських мод. Числові результати наведено у вигляді графіків та дано їх аналіз.

Ключові слова: гармонічні хвилі, дисперсія хвиль, пружний шар, шар в'язкої стисливої рідини.

Вступ

Розвиток науки і техніки висуває нові підвищені вимоги до досліджень у галузі аерогідропружності й, зокрема, до вивчення розповсюдження хвиль у пружних тілах, що контактують з рідиною. Сутність їх полягає в необхідності повнішого врахування властивостей реальних твердих і рідких середовищ і на цій основі адекватного опису різноманітних явищ і механічних ефектів, характерних для динамічних процесів у гідропружних хвилеводах. Хвилі, що поширюються уздовж границі контакту пружного шару та шару рідини, належать до числа узагальнень ґрунтовно досліджених основних типів акустичних хвиль: Релея, Стоунлі, Лява та Лемба. Огляд робіт і аналіз результатів, отриманих у рамках класичної теорії пружності та моделі ідеальної стисливої рідини, наведено в [1]. Разом з тим, значне практичне використання поверхневих хвиль вимагає врахування властивостей, які притаманні реальним середовищам. До таких факторів належить в'язкість рідини. Задачі, які розглянуто, та результати, отримані з урахуванням цієї властивості рідини, наведено в [2–4].

Постановка задачі

Розглянемо задачу про поширення акустичних хвиль в гідропружній системі, що складається з шару ньютонівської в'язкої стисливої рідини та ізотропного пружного шару. Рішення отримаємо із залученням тривимірних лінійних рівнянь класичної теорії пружності для твердого тіла та лінеаризованих рівнянь Нав'є – Стокса для рідини, що знаходиться в стані спокою [5–9]. В рамках прийнятих моделей основні співвідношення для системи: пружне тіло – в'язка стислива рідина матимуть вигляд:

$$\mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = 0, \sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial u_j} + \frac{\partial u_j}{\partial u_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \nu^* \Delta \vec{v} + \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p - \frac{1}{3} \nu^* \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = 0, \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \frac{\partial p}{\partial \rho^*} = a_0^2; \quad (2)$$

$$p_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda^* \delta_{ij} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \mu^* \left(\frac{\partial v_i}{\partial v_j} + \frac{\partial v_j}{\partial v_i} \right), \lambda^* = -\frac{2}{3} \mu^*, a_0 = const, \quad (3)$$

де u_i – компоненти вектора переміщень твердого тіла; ρ – щільність матеріалу пружного шару; λ та μ – константи Ляме матеріалу твердого тіла; v_i – складові вектора збурень швидкості рідини; ρ^* та p – збурення щільності та тиску в рідині; ν^* та μ^* – кінематичний та динамічний коефіцієнти в'язкості рідини; ρ_0 та a_0 – щільність та швидкість звуку в рідині у стані спокою; p_{ij} та σ_{ij} – складові напружень відповідно в рідині та пружному тілі.

Рівності (1) описують поведінку пружного тіла. Малі коливання в'язкої стисливої рідини, що знаходиться в стані спокою та без врахування теплових ефектів, описують співвідношення (2)–(3).

Далі припустимо, що пружний шар займає об'єм: $-\infty < z_1 < \infty$, $-h_2 \leq z_2 \leq 0$, $-\infty < z_3 < \infty$ та контактує з шаром в'язкої стисливої рідини, що заповнює об'єм: $-\infty < z_1 < \infty$, $0 \leq z_2 \leq h_1$, $-\infty < z_3 < \infty$. Будемо вважати, що зовнішні сили, які діють на зазначені середовища, розподілені рівномірно уздовж осі oz_3 . Оскільки у цьому випадку хвиля, яка біжить у напрямку осі oz_1 , і збурення, що її викликають, не залежать від змінної z_3 , то задача буде плоскою і можна обмежитися вивченням процесу поширення хвиль у площині oz_1z_2 . Отже, зазначена задача зводиться до розв'язання системи рівнянь (1)–(3) при таких граничних умовах:

$$p_{21}|_{z_2=0} = \sigma_{21}|_{z_2=0}, p_{22}|_{z_2=0} = \sigma_{22}|_{z_2=0}; \quad (4)$$

$$\sigma_{21}|_{z_2=-h_2} = 0, \sigma_{22}|_{z_2=-h_2} = 0, p_{21}|_{z_2=h_1} = 0, p_{22}|_{z_2=h_1} = 0; \quad (5)$$

$$v_1|_{z_2=0} = \frac{\partial u_1}{\partial t}|_{z_2=0}, v_2|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t}|_{z_2=0}. \quad (6)$$

Надалі для вирішення задачі гідропружності скористаємося представленнями загальних розв'язків для пружних тіл і в'язкої стисливої рідини, запропонованими в роботах [5–9]

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1 \partial z_2}, u_2 = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \chi_1;$$

$$v_1 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_1 \partial t} + \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_2 \partial t}, v_2 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_2 \partial t} - \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_1 \partial t},$$

де введені потенціали χ_j є розв'язками таких рівнянь:

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{(\lambda + \mu)^2}{\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} \right] \chi_1 = 0;$$

$$\left[\left(1 + \frac{4\nu^*}{3a_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_2 = 0;$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \nu^* \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) \right] \chi_3 = 0.$$

Для аналізу поширення збурень, які гармонічно змінюються з часом, розв'язки системи рівнянь розшуковуються у класі біжучих хвиль

$$\chi_j = X_j(z_2) \exp[i(kz_1 - \omega t)] \quad (j = \overline{1, 3}),$$

де k ($k = (\beta + i\gamma)$) – хвильове число; γ – коефіцієнт згасання хвилі; ω – кругова частота; $i^2 = -1$.

Зауважимо, що обраний у даній роботі клас гармонічних хвиль, який є найбільш простим і зручним у теоретичних дослідженнях, не обмежує загальності отриманих результатів, оскільки лінійна хвиля довільної форми, як відомо, може бути представлена набором гармонічних складових. Далі розв'язуються дві задачі Штурма – Ліувілля на власні значення для рівнянь руху пружного тіла та рідини, а також знаходяться відповідні власні функції. Після підстановки розв'язків у граничні умови (4)–(6) отримуємо систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно сталих інтегрування. Виходячи з умови існування нетривіального розв'язку та прирівнюючи визначник системи до нуля, отримуємо дисперсійне рівняння

$$\det \| e_{mn}(c, \gamma, \lambda, \mu, \rho, \rho_0, a_0, \mu^*, \omega h_1/c_s, \omega h_2/c_s) \| = 0 \quad (m, n = \overline{1, 8}), \quad (7)$$

де c – фазова швидкість мод у гідропружній системі; h_1 – товщина шару рідини; h_2 – товщина пружного шару; c_s ($c_s^2 = \mu/\rho$) – швидкість хвилі зсуву в матеріалі пружного тіла.

Зауважимо, що особливість розповсюдження збурень у гідропружному хвилеводі зазначеної структури зумовлена наявністю в пружному тілі та рідині граничних поверхонь. Це значно ускладнює картину хвильового поля у ньому. Причиною цього є те, що у формуванні поля в гідропружній системі суттєву роль

відіграють не тільки наявність рідини, а також взаємодія хвиль з поверхнею пружного тіла, контактуючого з рідким середовищем, але й наявність вільних границь та їх взаємовплив. Взаємодія поздовжних та поперечних хвиль на граничних поверхнях, призводить до виникнення складного хвильового поля у гідропружній системі.

Відзначимо, що отримане дисперсійне рівняння (7) є найбільш загальним і з нього можна отримати співвідношення для ряду частинних випадків, які розглянуті в роботах [1, 2]. Зокрема, якщо a_0 спрямувати до нескінченності, то (7) переходить у рівняння для визначення параметрів мод у випадку взаємодії з в'язкою нестисливою рідиною. Якщо μ^* покласти рівним нулю, то з (7) отримаємо результати для гідропружної системи з ідеальною рідиною [1, 2]. При $\rho_0 = 0$ рівність (7) перейде в рівняння для визначення швидкостей хвиль Лемба [1]. Якщо додатково спрямувати h_2 до нескінченності, отримаємо співвідношення для визначення швидкостей поверхневих хвиль Релея [1]. При $\rho_0 \neq 0$ та $h_1 \rightarrow \infty$ рівність перейде у рівняння Стоунлі – Шольте [1].

Чисельні результати

У подальшому дисперсійне рівняння (7) розв'язувалося чисельно. При цьому розрахунки проводилися для системи: сталь – вода, яка характеризувалася такими параметрами: пружний шар – $\rho = 7800$ кг/м³, $\lambda = 9,26 \cdot 10^{10}$ Па, $\mu = 7,75 \cdot 10^{10}$ Па; шар рідини – $\rho_0 = 1000$ кг/м³, $a_0 = 1459,5$ м/с, $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 0,463021$, $\bar{\mu}^* = 0,001$. Результати обчислень наведено на рис. 1–11.

На рис. 1 для пружного шару, який не взаємодіє з рідиною, приведено залежності безрозмірних величин фазових швидкостей нормальних мод Лемба \bar{c} ($\bar{c} = c/c_s$) від безрозмірної величини товщини пружного шару \bar{h}_2 ($\bar{h}_2 = \omega h_2/c_s$). Номерами n_a позначено антисиметричні моди, а n_s – відповідно симетричні моди [10].

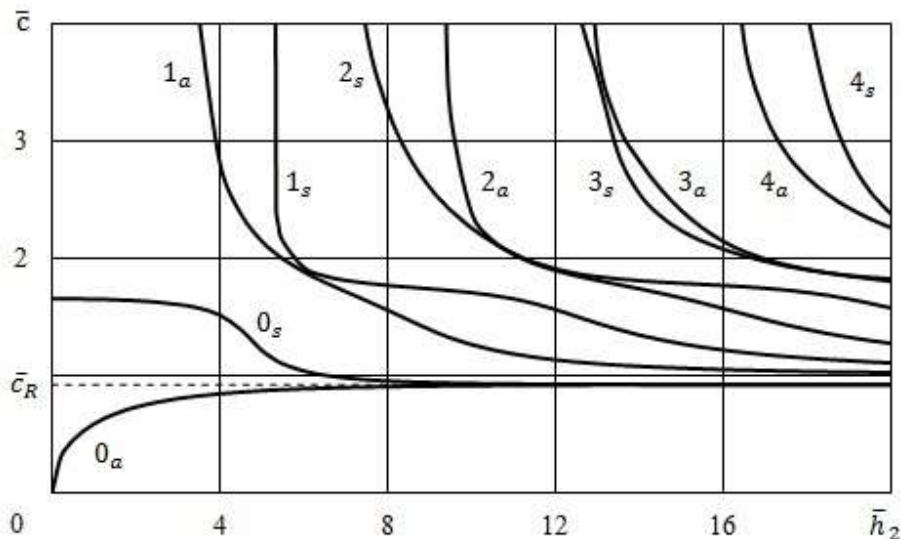


Рис. 1: Залежності безрозмірних величин фазових швидкостей \bar{c} нормальних хвиль Лемба від безрозмірної величини товщини пружного шару \bar{h}_2

На рис. 2–4 представлені дисперсійні криві для гідропружного хвильоводу, які показують залежності безрозмірних величин фазових швидкостей квазілембовських мод \bar{c} від безрозмірної величини товщини пружного шару \bar{h}_2 для товстого рідкого шару з товщиною \bar{h}_1 ($\bar{h}_1 = \omega h_1/c_s$), рівною 20 та $\bar{\mu}^* = 0,001$. На рис. 4 прихованою лінією позначена дисперсійна крива 16_i , яка є в частотному спектрі гідропружного хвильоводу з шаром ідеальної рідини та відсутня при взаємодії твердого шару з в'язким рідким шаром.

На рисунках 1, 3 та 4 прямими штриховими лініями позначені асимптоти, до яких прямують фазові швидкості відповідних мод.

На рис. 5–7 представлені залежності безрозмірних величин коефіцієнтів згасання квазілембовських мод $\bar{\gamma}$ ($\bar{\gamma} = \gamma/k_s$, k_s – хвильове число хвилі зсуву в матеріалі пружного шару) від безрозмірної величини товщини пружного шару \bar{h}_2 для товстого рідкого шару з товщиною \bar{h}_1 , рівною 20 та $\bar{\mu}^* = 0,001$.

Характер впливу в'язкості рідини ($\bar{\mu}^* = 0,001$) на швидкості мод у гідропружній системі ілюструють графіки на рис. 8–11, де представлені залежності відносних змін величин фазових швидкостей c^*

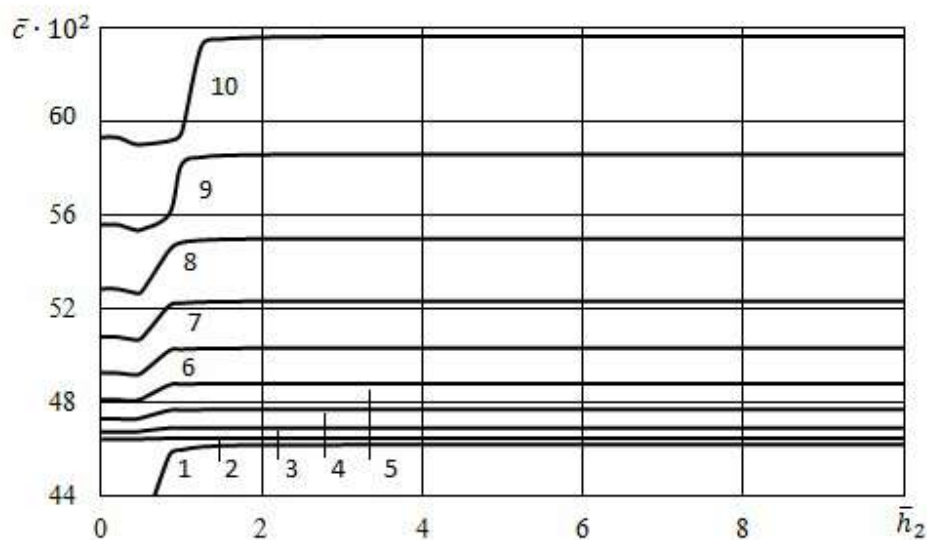


Рис. 2: Залежності безрозмірних величин фазових швидкостей \bar{c} квазілембовських мод 1–10 від безрозмірної величини товщини пружного шару \bar{h}_2

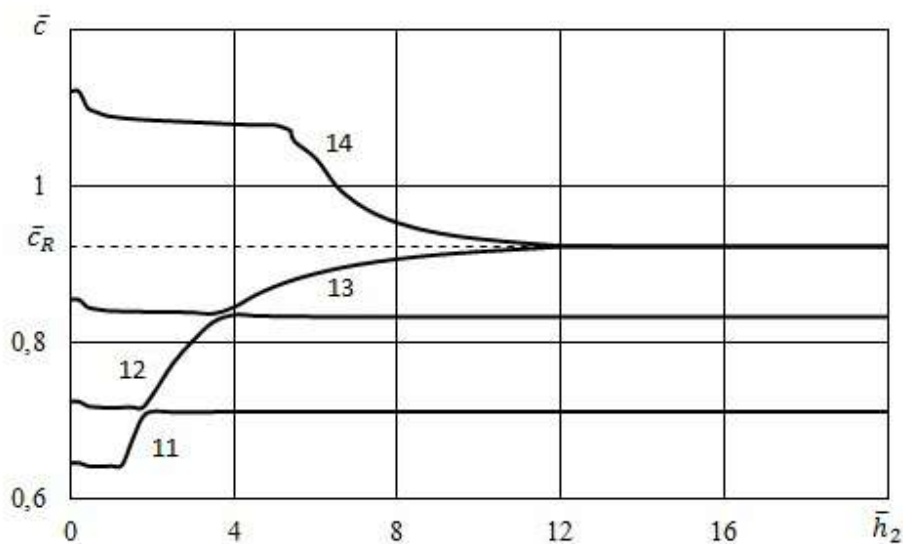


Рис. 3: Залежності безрозмірних величин фазових швидкостей \bar{c} квазілембовських мод 11–14 від безрозмірної величини товщини пружного шару \bar{h}_2

($c^* = \frac{\bar{c}_i - \bar{c}_v}{\bar{c}_i}$, \bar{c}_i – фазова швидкість нормальних хвиль у гідропружній системі з ідеальною рідиною; \bar{c}_v – фазова швидкість мод у системі з в'язкою рідиною) від безрозмірної величини товщини пружного шару \bar{h}_2 . На цих рисунках наведено графіки для гідропружного хвильоводу, товщина шару рідини якого \bar{h}_1 дорівнює 20.

Аналіз числових результатів

З графіків, наведених на рис. 1, випливає, що швидкість нульової антисиметричної моди Лемба при зростанні товщини пружного шару \bar{h}_2 прямує до швидкості хвилі Релея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = c_R/c_s = 0,923008$) знизу, а швидкість нульової симетричної моди прямує до швидкості хвилі Релея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,923008$) зверху. Швидкості усіх вищих мод Лемба \bar{c} при збільшенні товщини пружного шару \bar{h}_2 прямують до швидкості хвилі зсуву в матеріалі пружного тіла \bar{c}_s [1, 10].

Графічний матеріал для гідропружної системи, наведений на рис. 2 і 3, показує, що при зростан-

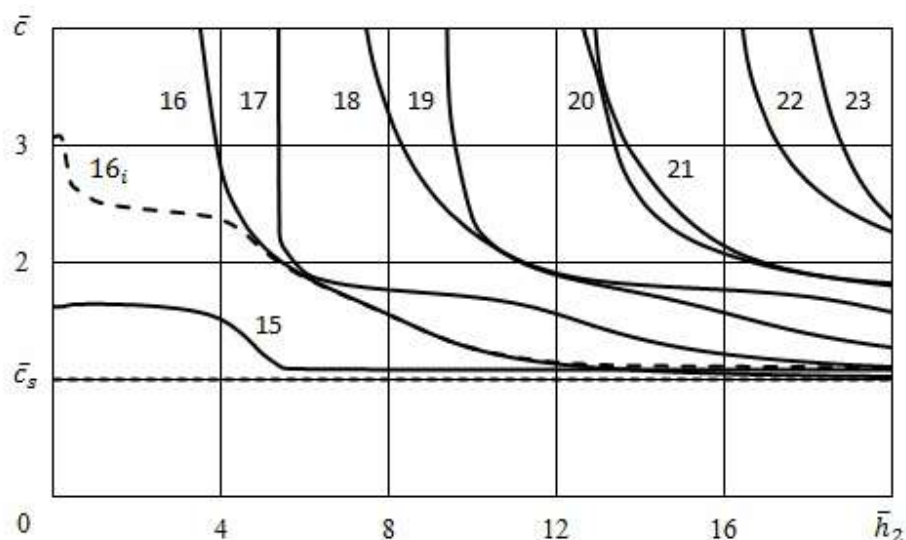


Рис. 4: Залежності безрозмірних величин фазових швидкостей \bar{c} квазілембовських мод 15–23 від безрозмірної величини товщини пружного шару \bar{h}_2

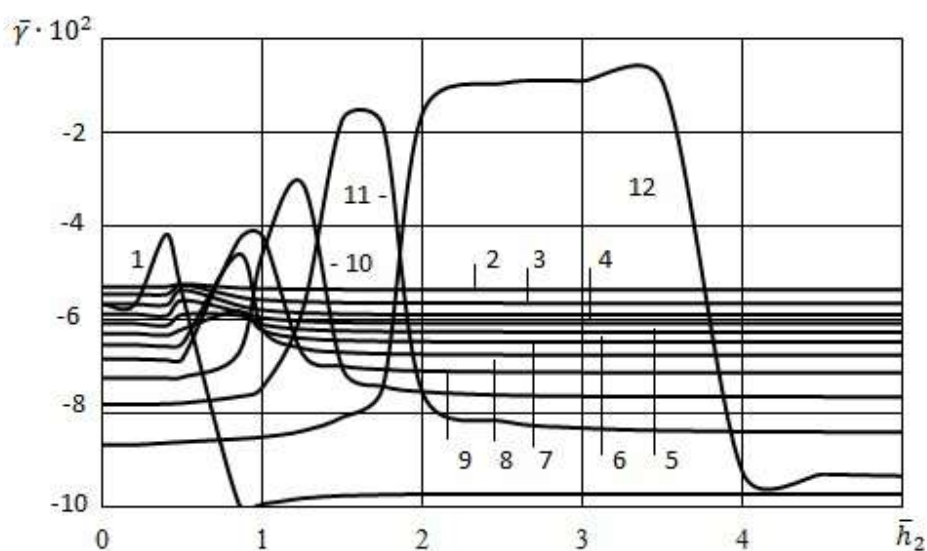


Рис. 5: Залежності безрозмірних величин коефіцієнтів згасання $\bar{\gamma}$ квазілембовських мод 1–12 від безрозмірної величини товщини пружного шару \bar{h}_2

ні товщини пружного шару \bar{h}_2 швидкість першої моди прямує знизу до швидкості хвилі Стоунлі \bar{c}_{st} ($\bar{c}_{st} = 0,461819$), яка дещо менша швидкості хвилі звуку в рідкому середовищі \bar{a}_0 ($\bar{a}_0 = 0,463021$). Величини фазових швидкостей мод 2–12 прямують до швидкостей хвиль, величини яких більші швидкості звукової хвилі в рідчині \bar{a}_0 ($\bar{a}_0 = 0,463021$), але менші швидкості квазірелеївської хвилі \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,923063$). Характерною особливістю дисперсійних кривих цих нормальних хвиль є наявність у них нульових частот замикання. Крім того, у міру зменшення довжини хвилі та віддалення від частот замикання вони стають практично бездисперсійними.

З графіків рис. 3 та 4 також впливає, що швидкість моди 13 зі збільшенням товщини пружного шару \bar{h}_2 прямує до швидкості хвилі Релея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,923063$) знизу, а фазова швидкість моди 14 – до швидкості хвилі Релея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,923063$) зверху. Фазові швидкості всіх наступних мод вищого порядку зі зростанням товщини \bar{h}_2 прямують до швидкості хвилі зсуву в матеріалі пружного тіла \bar{c}_s (рис. 4).

З графічного матеріалу, представленого на рис. 5–7, безпосередньо, впливає, що для всіх мод існу-

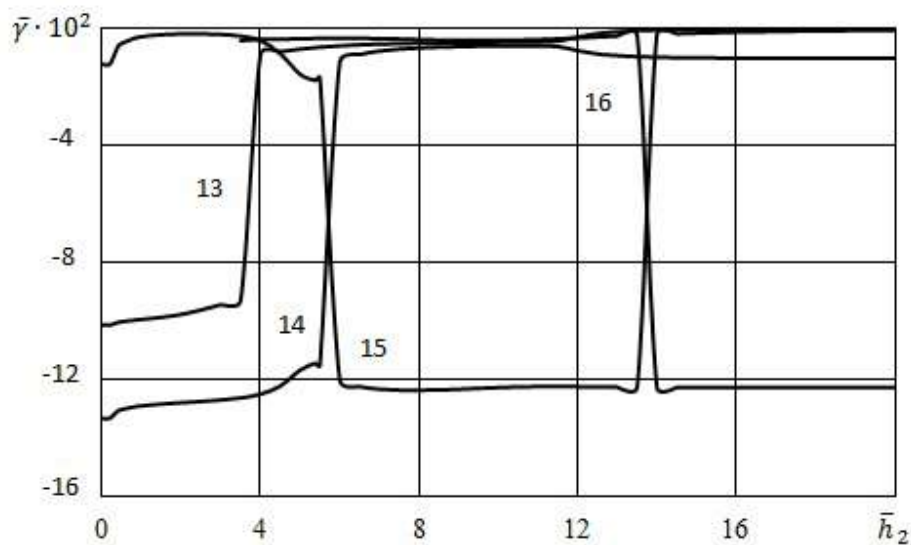


Рис. 6: Залежності безрозмірних величин коефіцієнтів згасання $\bar{\gamma}$ квазілембовських мод 13–16 від безрозмірної величини товщини пружного шару \bar{h}_2

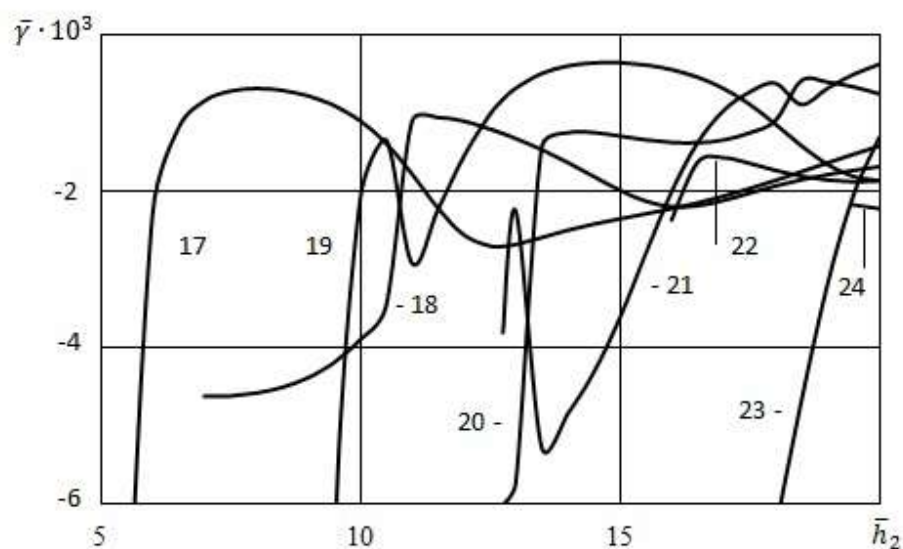


Рис. 7: Залежності безрозмірних величин коефіцієнтів згасання $\bar{\gamma}$ квазілембовських мод 17–24 від безрозмірної величини товщини пружного шару \bar{h}_2

ють пружні шари певної товщини, при яких моди поширюються як з найменшим, так і з найбільшим згасанням. З ростом товщини пружного шару для квазілембовських мод, починаючи з 13, характерно зменшення їх величин коефіцієнтів згасання і загального впливу в'язкої рідини на них.

Графіки, наведені на рис. 8–11, ілюструють вплив в'язкості рідини на фазові швидкості квазілембовських мод. Як випливає з них, для ряду мод існують товщини пружного шару (частоти), при яких в'язкість рідини не впливає на їх фазові швидкості.

Вплив в'язкої рідини на хвильовий процес

Аналіз числових результатів показує, що в гідропружному хвилеводі рідина для ряду квазілембовських мод викликає зміну критичних частот та зміщення дисперсійних кривих в довгохвильову частину спектра. Це призводить до того, що в околі товщин пружного шару, при яких відбувається зародження мод, вплив рідини на величини фазових швидкостей цих мод стає значним.

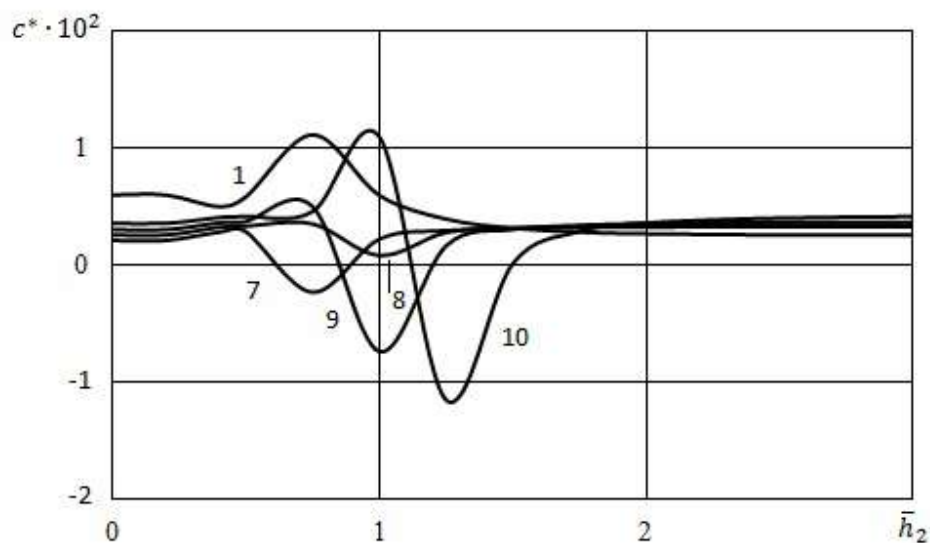


Рис. 8: Залежності відносних змін величин фазових швидкостей c^* мод 1, 7–10 від безрозмірної величини товщини пружного шару \bar{h}_2

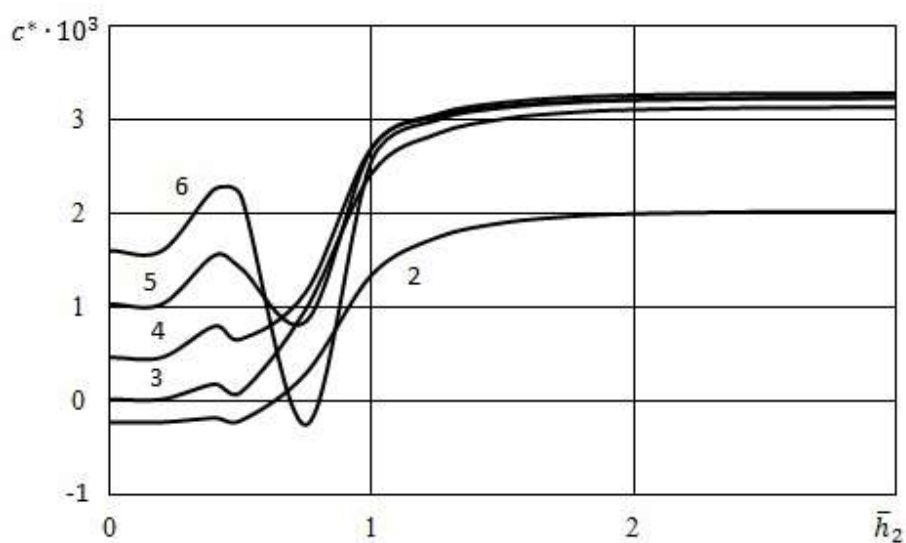


Рис. 9: Залежності відносних змін величин фазових швидкостей c^* мод 2–6 від безрозмірної величини товщини пружного шару \bar{h}_2

Вплив в'язкості рідини пов'язаний з її взаємодією зі зсувами, що виникають в пружно-рідинній системі при поширенні хвильових збурень. У тих точках мод, де переважаючими є зсувні зміщення на межі розділу середовищ, вплив в'язкості найбільший і величини коефіцієнтів загасання, а також відносні зміни величин фазових швидкостей приймають максимальне значення. У точках хвилі з малими поверхневими поперечними зміщеннями, відповідно, і вплив в'язкості найменший. Зі збільшенням товщини пружного шару у всіх модах (крім першої) переважають поперечні зміщення, амплітуда яких на поверхнях шару прямує до нуля в порівнянні з їх амплітудами в товщі шару, тобто рухи в модах високого порядку зміщуються від поверхні всередину шару і локалізуються в його товщі [1]. Наслідком цього є зменшення впливу в'язкої рідини на величини фазових швидкостей мод у короткохвильовій частині спектру.

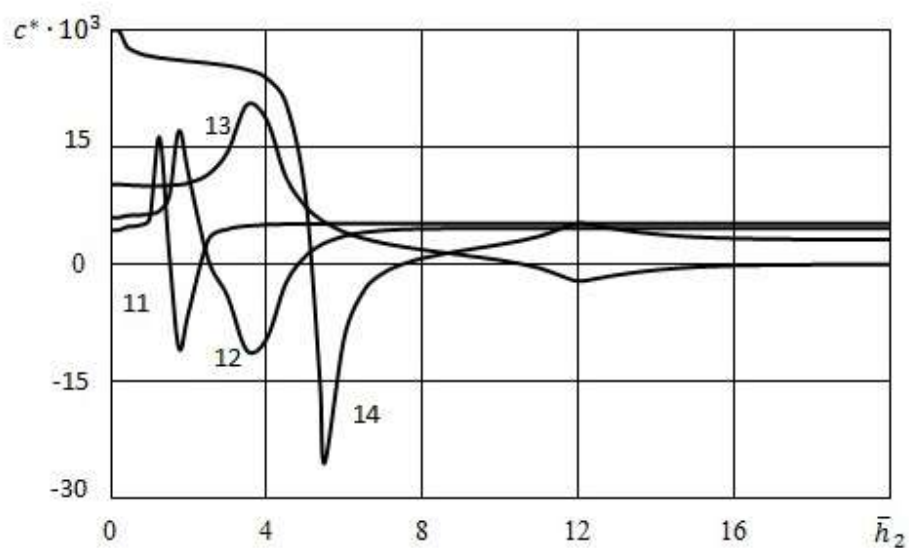


Рис. 10: Залежності відносних змін величин фазових швидкостей c^* мод 11–14 від безрозмірної величини товщини пружного шару \bar{h}_2

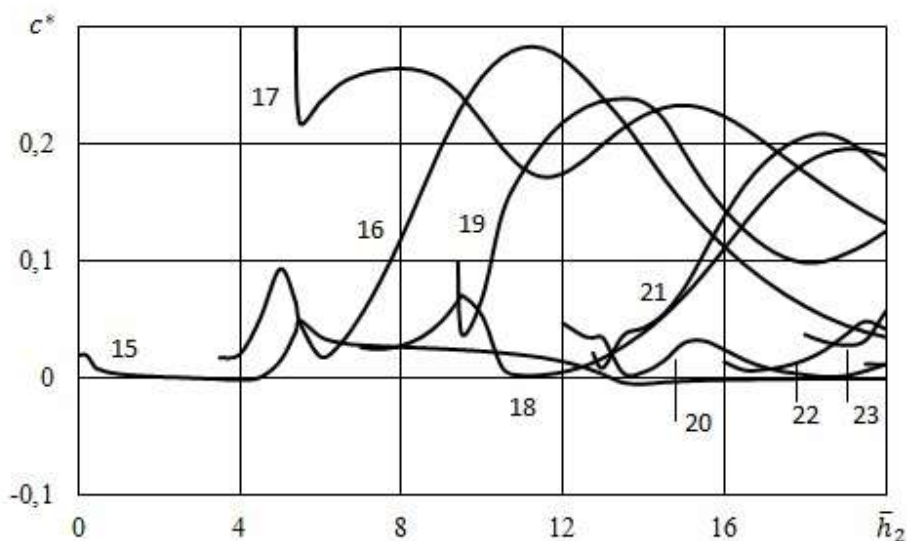


Рис. 11: Залежності відносних змін величин фазових швидкостей c^* мод 15–23 від безрозмірної величини товщини пружного шару \bar{h}_2

Особливості локалізації квазізембовських мод

Як відомо [4], фазова швидкість і структура хвилі Стоунлі при взаємодії твердого та рідкого півпросторів залежать від механічних властивостей гідропружної системи і визначаються співвідношенням між швидкістю звуку в рідкому і швидкістю хвилі Релея в твердому півпросторах. У роботі [4] показано, що якщо швидкість хвилі звуку в рідкому середовищі менша швидкості хвилі Релея, то хвиля Стоунлі локалізується в рідині. В іншому випадку ця хвиля поширюється в пружному півпросторі. До хвильового процесу в системі: шар рідини – пружний шар цей критерій також може бути застосований, оскільки нижча квазіповерхнева мода 1 є хвилею типу Стоунлі й граничне значення її швидкості зі збільшенням товщини прямує до швидкості хвилі Стоунлі. Відмінність полягає лише в тому, що в цій гідропружній системі порівнюються швидкості звукової хвилі в рідкому шарі зі швидкістю квазірелеївської хвилі, що розповсюджується уздовж вільної поверхні пружного шару.

Як уже зазначалося, механічні параметри гідропружної системи: сталь – вода такі, що швидкість поширення звукової хвилі в рідині \bar{a}_0 ($\bar{a}_0 = 0,463021$) менша швидкості квазірелеївської хвилі \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,923063$). Згідно роботи [4] при $\bar{c}_R > \bar{a}_0$ в короткохвильовій частині спектра глибина проникнення квазіповерхневої моди 1 в рідину значно більша глибини проникнення в пружне тіло. Тому мода 1, поширюючись уздовж границі контакту середовищ, локалізується, переважно, в приповерхневій області рідкого шару. Це відноситься і до мод 2–12, які також поширюються в рідині. Внаслідок того, що жодна з нижчих мод не проникає в тверде тіло, поверхня пружного шару, що межує з рідиною, залишається вільною від них. Цю область займає мода 13. Швидкість цієї моди, що розповсюджується уздовж границі контакту середовищ в приповерхневій області пружного шару, прямує до швидкості хвилі Релея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,923063$) знизу, як і в разі твердого шару, невзаємодіючого з рідиною. Швидкість моди 14, що поширюється в пружному шарі уздовж його вільної поверхні, прямує до швидкості хвилі Релея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,923063$) зверху. Швидкості всіх мод вищого порядку прямують до швидкості хвилі зсуву в матеріалі твердого тіла і, як зазначено вище, їх рухи локалізуються у товщі пружного шару. Таким чином, аналіз показує, що в даній пружно-рідинній системі не тільки перша мода, а й нижчі моди 2–12, що виникають в результаті взаємодії пружного шару з рідким шаром, не проникають в тверде тіло і поширюються уздовж границі контакту середовищ, переважно, в приповерхневій області рідини. Усі інші моди вищого порядку, як зазначалося раніше, поширюються в пружному шарі в його товщі. У цьому випадку хвилеводами для поширення нормальних хвиль і перенесення хвильової енергії служать як пружний, так і рідкий шари.

Висновки

На основі тривимірних лінеаризованих рівнянь Нав'є – Стокса для в'язкої стисливої рідини та лінійних рівнянь класичної теорії пружності для твердого тіла розглянута задача про поширення гармонічних хвиль у пружному шарі, що контактує з рідким шаром. Розвинуто підхід, який базується на використанні представлень загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь руху пружного тіла та рідини. Отримано дисперсійне рівняння для загального випадку, коли товщини шарів пружного та рідкого шарів порівнянні з довжиною хвилі. Побудовано дисперсійні криві квазілембовських мод у широкому інтервалі частот. Проаналізовано вплив в'язкості рідини, товщини пружного та рідкого шарів на фазові швидкості та коефіцієнти згасання мод. Показано, що у випадку товстого рідкого шару та сильно жорсткого матеріалу пружного шару для ряду мод існують пружні шари певної товщини та певні частоти, для яких в'язкість рідини не впливає на їх фазові швидкості. Встановлено локалізаційні властивості квазілембовських мод. Розвинений підхід та отримані результати дозволяють для хвильових процесів встановити межі застосування моделі ідеальної стисливої рідини. Виявлені закономірності можуть бути використані при розробці ультразвукових неруйнівних методів визначення та контролю напружень в матеріалах і елементах конструкцій, а також у таких областях, як сейсмологія, сейсморозвідка та інших.

Публікація містить результати досліджень, проведених за грантової підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень за конкурсним проектом Ф71/80-2016.

Література

- [1] *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. — М.: Наука, 1981. — 288 с.
- [2] Гузь А.Н., Жук А.П., Багно А.М. Динамика упругих тел, твердых и жидких частиц в сжимаемой вязкой жидкости (Обзор) // Прикл. механика. — 2016. — 52, № 5. — С. 3–77.
- [3] Ottenio M., Destrade M., Ogden R.W. Acoustic waves at the interface of a pre-stressed incompressible elastic solid and a viscous fluid // Int. Journal of Non-Linear Mech. — 2007. — № 2(42). — P. 310–320.
- [4] Волькенштейн М.М., Левин В.М. Структура волны Стоунли на границе вязкой жидкости и твердого тела // Акуст. журнал. — 1988. — № 4(34). — С. 608–615.
- [5] Guz A. N. Aerohydroelasticity Problems for Bodies with Initial Stresses // Int. Appl. Mech. — 1980. — 16, N 3. — P. 175–190.
- [6] *Гузь А.Н.* Динамика сжимаемой вязкой жидкости. — К.: А.С.К., 1998. — 350 с.
- [7] Guz A.N. Compressible, Viscous Fluid Dynamics (review). Part 1 // Int. Appl. Mech. — 2000. — 36, N 1. — P. 14–39.
- [8] Guz A.N. The Dynamics of a Compressible Viscous Liquid (review). II // Int. Appl. Mech. — 2000. — 36, N 3. — P. 281–302.
- [9] *Guz A.N.* Dynamics of compressible viscous fluid. — Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2009. — 428 p.
- [10] *Гузь А.Н., Жук А.П., Махорт Ф.Г.* Волны в слое с начальными напряжениями. — К.: Наук. думка, 1976. — 104 с.

**ВЛИЯНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ НА ДИСПЕРСИЮ ВОЛН В УПРУГОМ СЛОЕ,
КОТОРОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВУЕТ С ВЯЗКИМ СЖИМАЕМЫМ ЖИДКИМ СЛОЕМ**

РЕЗЮМЕ

Багно О.М.

На основе трехмерных линеаризованных уравнений Навье - Стокса для слоя вязкой сжимаемой жидкости и линейных уравнений классической теории упругости для твердого слоя построено дисперсионные кривые, а также исследовано распространение гармонических волн в широком диапазоне частот. Проанализировано влияние вязкости жидкости, толщины упругого и жидкого слоев на фазовые скорости, коэффициенты затухания и дисперсию мод для гидроупругой системы с толстым жидким слоем. Показано, что вязкая жидкость для ряда мод вызывает изменение критических частот, смещение дисперсионных кривых, а также приводит к возникновению новых мод. Установлено локализационные свойства квази-лембовских мод. Числовые результаты приведены в виде графиков и дано их анализ.

Ключевые слова: гармоническая волна, дисперсия волн, упругий шар, шар вязкой сжимаемой жидкости.

**EFFECT OF A VISCOUS LIQUID ON THE DISPERSION OF WAVES IN AN ELASTIC
LAYER THAT INTERACTS WITH A VISCOUS COMPRESSIBLE LIQUID LAYER**

SUMMARY

Bagno O.M.

On the basis of the three-dimensional linearized Navier - Stokes equations for a layer of a viscous compressible fluid and linear equations of the classical elasticity theory for a solid layer, dispersion curves have been constructed, and the propagation of harmonic waves over a wide frequency range has been investigated. The effect of fluid viscosity, the thickness of the elastic and liquid layers on phase velocities, attenuation coefficients, and the mode dispersion for a hydroelastic system with a thick liquid layer is analyzed. It is shown that a viscous liquid for a number of modes causes a change in the critical frequencies, the displacement of the dispersion curves, and also leads to the appearance of new modes. Localization properties of quasi-lemma modes have been established. The numerical results are presented in the form of graphs and their analysis is given.

Key words: harmonic wave, wave dispersion, elastic ball, ball of viscous compressible fluid.