

## СТАЦІОНАРНИЙ ТЕПЛОБМІН ТОНКИХ ПОЛОГИХ ІЗОТРОПНИХ ОБОЛОНОК, ЯКІ ЗНАХОДЯТЬСЯ ПІД ДІЄЮ ДЖЕРЕЛ ТЕПЛА, ЗОСЕРЕДЖЕНИХ ПО ДВОВИМІРНІЙ ОБЛАСТІ

Розв'язано стаціонарну задачу теплопровідності для тонких пологих ізотропних оболонок за дії джерел тепла, які рівномірно розподілені по двовимірній області. При цьому використано апроксимацію функції температури та її першої похідної за товщиною координатою частинними сумами рядів за поліномами Лежандра. Було розглянуто залежність температури від відстані до джерел тепла, а також від кривини оболонки при симетричному та несиметричному теплообміні.

**Ключові слова:** *полога оболонка, задача теплопровідності, стаціонарний теплообмін, поліноми Лежандра*

### 1. Вступ

При розв'язанні задач теплопровідності в пластинах та оболонках одним з основних є метод  $\{m, n\}$ -апроксимації [5], який полягає в розкладанні шуканих функцій в ряди за поліномами Лежандра, після чого трьохвимірне рівняння теплопровідності зводиться до розв'язувальної системи двовимірних рівнянь, що детально описано в [4]. За даною методикою визначено стаціонарне температурне поле анізотропних пластин [2] та ізотропних оболонок [3], які нагріваються зосередженими джерелами тепла. У даній роботі метод  $\{m, n\}$ -апроксимації використано для дослідження стаціонарного температурного поля у тонкій пологій ізотропній оболонці, яка нагрівається джерелами тепла, які розташовані вздовж довільної двовимірної області.

### 2. Постановка задачі

Текст основної частини — власне виклад матеріалу дослідження. Розглянемо тонку пологу ізотропну оболонку товщиною  $2h$  в декартовій системі координат  $(x, y, z)$ , яка нагрівається зосередженими джерелами тепла одиничної інтенсивності, рівномірно розподіленими по довільній двовимірній області  $\Omega$  стосовно серединної поверхні (рис. 1).

Через поверхні  $z = \pm h$  відбувається конвективний теплообмін з середовищем, температура якого відповідно  $\theta^\pm$ . Тепловий стан вважається локальним, тобто таким, що не поширюється до лінії зовнішнього кордону оболонки. Тому оболонка вважається нескінченною, і припускається, що шукані значення температури наближуються до нуля на нескінченності. Справедливість цього припущення перевіряється у чисельних дослідженнях.

### 3. Розв'язання

Спочатку знайдемо розв'язок аналогічної задачі для такої ж оболонки, але за дії зосередженого джерела тепла одиничної інтенсивності, яке розташовано у початку координат стосовно серединної поверхні. Рівняння теплопровідності із граничними умовами в цьому випадку мають наступний вигляд [4]

$$\Delta T + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + (k_1 + k_2) \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{1}{\lambda} W_0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=\pm h} \pm \frac{\alpha^\pm}{\lambda} (T|_{z=\pm h} - \theta^\pm) = 0, \quad (2)$$

$$T|_{x \rightarrow \pm\infty} = T|_{y \rightarrow \pm\infty} = 0,$$

де  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ,  $k_1, k_2$  — головні кривини серединної поверхні оболонки,  $T(x, y, z)$  — функція температури,  $\lambda$  — коефіцієнт теплопровідності,  $W_0(x, y, z)$  — об'ємна густина джерел тепла,  $\alpha^\pm$  — коефіцієнт теплообміну поверхні  $z = \pm h$  відповідно із навколишнім середовищем.

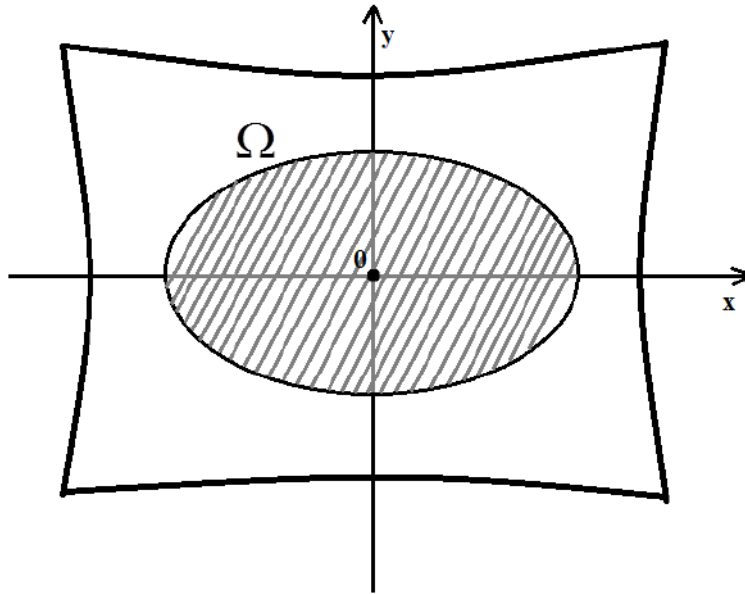


Рис. 1.

Перейдемо до безрозмірної системи координат  $(x_1, x_2, x_3)$ , яку визначено з точністю до величини  $h$ :

$$x_1 = \frac{x}{h}, x_2 = \frac{y}{h}, x_3 = \frac{z}{h}.$$

Після вводу нової функції  $Q(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial T(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3}$ , рівняння (1) та граничні умови (2) перепишемо у вигляді:

$$\Delta T + \frac{\partial Q}{\partial x_3} + (\bar{k}_1 + \bar{k}_2)Q = -\frac{1}{\lambda}W_0, \quad (3)$$

$$Q^\pm \pm Bi^\pm(T^\pm - \theta^\pm) = 0, \quad (4)$$

$$T|_{x_1 \rightarrow \pm\infty} = T|_{x_2 \rightarrow \pm\infty} = 0,$$

де  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ ,  $T^\pm = T(x_1, x_2, \pm 1)$ ,  $Q^\pm = Q(x_1, x_2, \pm 1)$ ,  $\bar{k}_1 = k_1 h$ ,  $\bar{k}_2 = k_2 h$ ,  $Bi^\pm = \frac{\alpha^\pm h}{\lambda}$ .

Для відшукування наближеного розв'язку задачі (3), (4) апроксимуємо функції  $T(x_1, x_2, x_3)$  та  $Q(x_1, x_2, x_3)$  відповідно до [4] по товщинній координаті частинними сумами

$$T(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k=0}^3 T_k(x_1, x_2)P_k(x_3), \quad (5)$$

$$Q(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k=0}^4 Q_k(x_1, x_2)P_k(x_3),$$

де  $P_k(x_3)$  – поліноми Лежандра:

$$P_k(x_3) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx_3^k} (x_3^2 - 1)^k, (-1 \leq x_3 \leq 1).$$

Густину  $W_0(x_1, x_2, x_3)$  моделювали відповідно до [1, 2] за допомогою двовимірної дельта-функції Дірака

$$W_0(x_1, x_2, x_3) = W_0^* \delta(x_1, x_2) f(x_3),$$

де  $W_0^*$  – розмірна константа,  $\delta(x_1, x_2)$  – функція Дірака,  $f(x_3)$  – функція, яка описує характер розподілу джерел тепла вздовж товщинної координати. Якщо вона парна, то маємо “плоске” джерело тепла, якщо непарна – “згинне”.

Відповідно до [3] отримуємо розв'язувальну систему диференціальних рівнянь відносно коефіцієнтів  $T_k(x_1, x_2)$ :

$$\Delta T_k + \sum_{m=0}^3 n_{km} T_m = -\delta_{k+1,j} \delta(x_1, x_2), k = 0, 1, 2, 3, \quad (6)$$

де  $\delta_{k+1,j}$  – символ Кронекера. При значенні параметру  $j = 1$  маємо найпростіше “плоске” джерело тепла, коли  $f(x_3) = 1$ , а при  $j = 2$  – найпростіше “згинне”, коли  $f(x_3) = x_3$ . Величини  $n_{km}$  мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} n_{00} &= \frac{-10}{\Delta^*} [2Bi^+ Bi^- + 15(Bi^+ + Bi^-) + (\bar{k}_1 + \bar{k}_2)(Bi^+ - Bi^-)], \\ n_{01} &= \frac{-28}{\Delta^*} \left[ 5(Bi^+ - Bi^-) - \frac{1}{2}(\bar{k}_1 + \bar{k}_2)(Bi^+ + Bi^- + 20) \right], \\ n_{02} &= \frac{-7}{\Delta^*} [2Bi^+ Bi^- + 15(Bi^+ + Bi^-) + (\bar{k}_1 + \bar{k}_2)(Bi^+ - Bi^-)], \\ n_{03} &= \frac{-18}{\Delta^*} \left[ 5(Bi^+ - Bi^-) - \frac{1}{2}(\bar{k}_1 + \bar{k}_2)(Bi^+ + Bi^- + 20) \right], \\ n_{10} &= \frac{-6}{\Delta^*} \left[ 70(Bi^+ - Bi^-) + \frac{1}{2}(\bar{k}_1 + \bar{k}_2)(2Bi^+ Bi^- + 15(Bi^+ + Bi^-)) \right], \\ n_{11} &= \frac{-42}{\Delta^*} [2Bi^+ Bi^- + 11(Bi^+ + Bi^-) + 20 + (\bar{k}_1 + \bar{k}_2)(Bi^+ - Bi^-)], \\ n_{12} &= \frac{-42}{\Delta^*} \left[ 7(Bi^+ - Bi^-) - \frac{1}{2}(\bar{k}_1 + \bar{k}_2)(Bi^+ + Bi^- + 30) \right], \\ n_{13} &= \frac{-27}{\Delta^*} [2Bi^+ Bi^- + 11(Bi^+ + Bi^-) + 20 + (\bar{k}_1 + \bar{k}_2)(Bi^+ - Bi^-)], \\ n_{20} &= \frac{-5}{\Delta^*} [14Bi^+ Bi^- + 105(Bi^+ + Bi^-) + 10(\bar{k}_1 + \bar{k}_2)(Bi^+ - Bi^-)], \\ n_{21} &= \frac{-10}{\Delta^*} \left[ 49(Bi^+ - Bi^-) + \frac{1}{2}(\bar{k}_1 + \bar{k}_2)(2Bi^+ Bi^- + 11(Bi^+ + Bi^-) + 20) \right], \\ n_{22} &= \frac{-70}{\Delta^*} \left[ Bi^+ Bi^- + 9(Bi^+ + Bi^-) + 45 + \frac{1}{2}(\bar{k}_1 + \bar{k}_2)(Bi^+ - Bi^-) \right], \\ n_{23} &= \frac{-45}{\Delta^*} [7(Bi^+ - Bi^-) - (\bar{k}_1 + \bar{k}_2)(Bi^+ + Bi^- + 20)], \\ n_{30} &= \frac{-14}{\Delta^*} \left[ 45(Bi^+ - Bi^-) + \frac{1}{2}(\bar{k}_1 + \bar{k}_2)(2Bi^+ Bi^- + 15(Bi^+ + Bi^-)) \right], \\ n_{31} &= \frac{-7}{\Delta^*} [18Bi^+ Bi^- + 99(Bi^+ + Bi^-) + 180 + 14(\bar{k}_1 + \bar{k}_2)(Bi^+ - Bi^-)], \\ n_{32} &= \frac{-7}{\Delta^*} [63(Bi^+ - Bi^-) + (\bar{k}_1 + \bar{k}_2)(2Bi^+ Bi^- + 18(Bi^+ + Bi^-) + 90)], \\ n_{33} &= \frac{-126}{\Delta^*} \left[ Bi^+ Bi^- + 8(Bi^+ + Bi^-) + 60 + \frac{1}{2}(\bar{k}_1 + \bar{k}_2)(Bi^+ - Bi^-) \right], \\ \Delta^* &= 2Bi^+ Bi^- + 25(Bi^+ + Bi^-) + 300. \end{aligned}$$

Систему (6) було розв'язано за допомогою перетворення Фур'є, і за нульової температури навколишнього середовища її розв'язок має вигляд:

$$T_k(x_1, x_2) = \sum_{m=0}^3 S_{k,m} G_{0,0}(r\sqrt{c_{m+1}}), k = 0, 1, 2, 3, \quad (7)$$

де  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ,  $G_{0,0}(r\sqrt{c_{m+1}})$  – спеціальна функція [6], а  $S_{k,m}$  та  $c_{m+1}$  – величини, які залежать від критерію Біо  $Bi^\pm$ , безрозмірних кривин  $\bar{k}_1$  і  $\bar{k}_2$ , параметру  $j$  та величин  $n_{km}$ .

Було знайдено розв'язок стаціонарної задачі теплопровідності за дії зосередженого джерела тепла одиничної інтенсивності, яке розташовано у початку координат. Температура визначатиметься формулою (5), а коефіцієнти  $T_k(x_1, x_2)$  – на основі формули (7).

Для випадку локального нагріву, коли джерела тепла розташовані по двовимірній області  $\Omega$ , функція температури записується у вигляді:

$$T_{\Omega}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k=0}^3 T_{k\Omega}(x_1, x_2) P_k(x_3), \quad (8)$$

де коефіцієнти  $T_{k\Omega}(x_1, x_2)$  знаходяться за допомогою фундаментальних розв'язків (7), а також формули згортки [7] і після зведення до визначеного інтегралу мають вигляд:

$$T_{k\Omega}(x_1, x_2) = \iint_{\Omega} T_k(x_1 - t_1, x_2 - t_2) I(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \quad (9)$$

де  $I(t_1, t_2)$  – закон розподілення інтегральних характеристик температури в області локального нагріву. Для чисельних досліджень приймався рівним одиниці в цій області:

$$I(t_1, t_2) = \begin{cases} 1, & t_1, t_2 \in \Omega \\ 0, & t_1, t_2 \notin \Omega \end{cases}.$$

#### 4. Числові дослідження

Розглядалося два способи локального температурного нагріву: коли область  $\Omega$  є квадратом  $\{-a \leq x_1 \leq a, -a \leq x_2 \leq a\}$  та еліпсом, який задано рівнянням  $x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 = 1$ . Інтеграл (9) для обраних способів записується відповідно наступним чином:

$$T_{k\Omega}(x_1, x_2) = \int_{-a}^a dt_1 \int_{-a}^a T_k(x_1 - t_1, x_2 - t_2) dt_2, \quad (10)$$

$$T_{k\Omega}(x_1, x_2) = \int_{-a}^a dt_1 \int_{-b\sqrt{1-t_1^2/a^2}}^{b\sqrt{1-t_1^2/a^2}} T_k(x_1 - t_1, x_2 - t_2) dt_2. \quad (11)$$

Розглядався випадок із найпростішими “плоскими” джерелами тепла.

Досліджували температуру  $T_{\Omega}$  (8) на поверхні  $x_3 = 1$  із параметрами  $a = 3$  для першого способу нагріву та  $a = 3, b = 2$  для другого. У формулах (10), (11) інтеграли обчислювались методом Гауса, з використанням 20 вузлів.

##### 4.1. Дослідження залежності температури від відстані до джерел тепла

Розглядалась циліндрична оболонка із безрозмірними кривинами  $\bar{k}_1 = 0.05$ ,  $\bar{k}_2 = 0$ . На рисунках 2 та 3 показано залежність температури для першого та другого способів нагріву від координати  $x_2$  ( $x_1 = 0$ ). Суцільна лінія відповідає симетричному теплообміну ( $Bi^+ = Bi^- = 0.5$ ), а штрихова – верхньому односторонньому ( $Bi^+ = 0.5, Bi^- = 0$ ).

З аналізу графіків випливає, що при наближенні до точки  $x_1 = 0, x_2 = 0$  температура зростає, наближаючись до нескінченності. Також, як і слід було очікувати, температура наближається до нуля при віддаленні від області нагріву. Характер залежності температури від відстані до області нагріву однаковий для симетричного та несиметричного теплообміну із навколишнім середовищем для обох способів нагріву.

##### 4.2. Дослідження залежності температури від кривини оболонки

На рисунках 4 і 5 відповідно для першого і другого способів нагріву показано залежності температури в циліндричній ( $\bar{k}_2 = 0$ ) і сферичній ( $\bar{k}_1 = \bar{k}_2$ ) оболонках від безрозмірного радіуса кривин оболонки  $\bar{R}_1$  при  $x_1 = 3.5$ ,  $x_2 = 3.5$  і несиметричному теплообміні  $Bi^+ = 0.05$ ,  $Bi^- = 0$ . Суцільними кривими зображено графіки для циліндричної оболонки, а штриховими – для сферичної оболонки.

З графіків випливає, що зі збільшенням радіуса кривини оболонки температура асимптотично наближаються до відповідних значень температур у пластині. Характер залежності однаковий як для циліндричної, так і для сферичної оболонки, для обох способу нагріву.

#### 5. Висновки

Розв'язано стаціонарну задачу теплопровідності для тонких пологих ізотропних оболонки при локальному нагріві за допомогою апроксимації функції температури та її першої похідної за товщиною

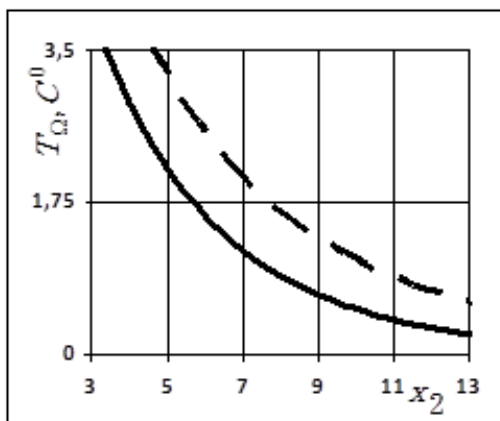


Рис. 2.

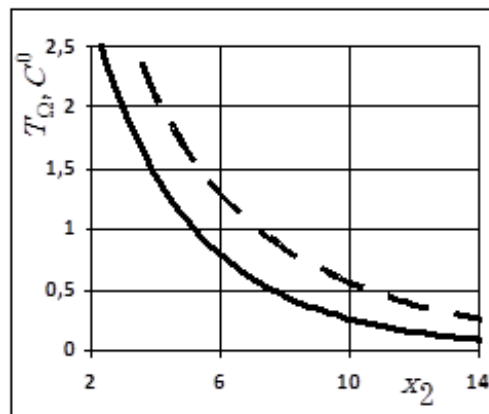


Рис. 3.

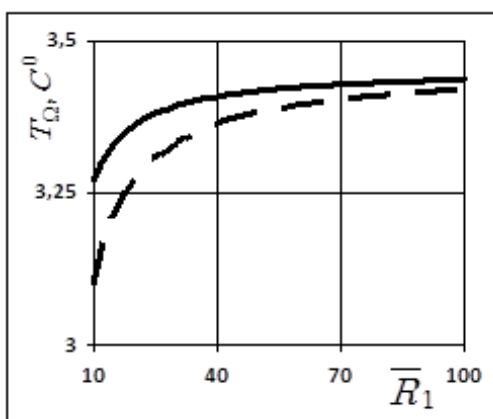


Рис. 4.

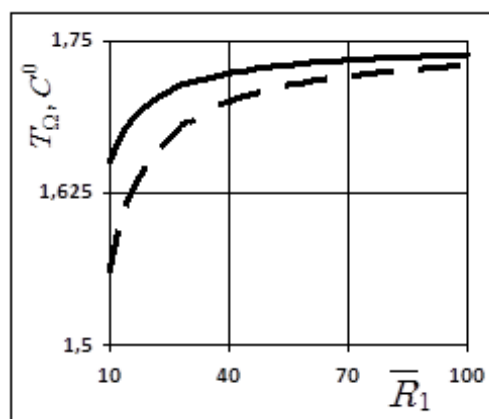


Рис. 5.

координатою частинними сумами рядів за поліномами Лежандра. Розглянуто два способи локального нагріву, коли джерела тепла рівномірно розподілені по площі квадрата та еліпса. Досліджено залежність температури від кривини оболонки та від відстані до області локального температурного впливу при симетричному та несиметричному теплообміні для циліндричних та сферичних оболонок для обох способів нагріву.

### Література

- [1] Бондаренко Н. С. Влияние теплообмена на термоупругое состояние трансверсально-изотропной пластины, содержащей сосредоточенный “изгибный” источник тепла / Н. С. Бондаренко, А. С. Гольцев, В. П. Шевченко // Методи розв’язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. — 2009. — №10. — С. 27–33.
- [2] Бондаренко Н. С. Решение задачи теплопроводности для анизотропных пластин при сосредоточенных температурных воздействиях с использованием полиномов Лежандра / Н. С. Бондаренко, А. С. Гольцев // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2009. — Т. 52. — №4. — С. 216–226.
- [3] Добня К. М. Побудова та дослідження наближення третього порядку розв’язку рівняння теплопровідності тонких пологих оболонок за допомогою поліномів лежандра при стаціонарному теплообміні / К. М. Добня, О. Д. Дундар // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2016. — Т. 59. — №2. — С. 101–108.
- [4] Пелех Б. Л. Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек / Б. Л. Пелех, М. А. Сухорольский. — К.: Наук. думка, 1980. — 216 с.
- [5] Пелех Б. Л. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений / Б. Л. Пелех, В. А. Лазько. — К.: Наук. думка, 1982. — 296 с.
- [6] Хижняк В. К. Смешанные задачи теории пластин и оболочек: Уч. Пособие / В. К. Хижняк, В. П. Шевченко. — Донецк: Из-во Донецк. ун-та, 1980. — 126 с.
- [7] Шевченко В. П. Методы фундаментальных решений в теории ортотропных оболочек / В. П. Шевченко // Концентрация напряжений — К.: А.С.К., 1998. — С. 159–196.

**СТАЦИОНАРНЫЙ ТЕПЛООБМЕН ТОНКИХ ПОЛОГИХ ИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК,  
НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА,  
СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ПО ДВУМЕРНОЙ ОБЛАСТИ**

**РЕЗЮМЕ**

**Добвня Е.Н., Дундарь А.Д.**

Решена стационарная задача теплопроводности для тонких пологих изотропных оболочек под действием источников тепла, равномерно распределенных по двумерной области. При этом была применена аппроксимация функции температуры и её первой производной по толщинной координате частичными суммами рядов по полиномам Лежандра. Была рассмотрена зависимость температуры от расстояния до источников тепла, а также от кривизны оболочки при симметричном и несимметричном теплообмене.

*Ключевые слова:* пологая оболочка, задача теплопроводности, стационарный теплообмен, полиномы Лежандра.

**THE STATIONARY HEAT CONDUCTION PROBLEM FOR ISOTROPIC SHALLOW  
SHELLS UNDER THE INFLUENCE OF HEAT SOURCES WHICH ARE EVENLY  
CONCENTRATED ON THE TWO-DIMENTIONAL AREA**

**SUMMARY**

**Dovbnya Katerina, Dundar Oleksii**

The stationary heat conduction problem for thin isotropic shallow shells under the influence of heat sources which are evenly concentrated on the two-dimension area, was solved. The approximation of temperature function and of its first derivative by thickness coordinate of partial sums of series in Legendre polynomials was used. Temperature depending on the distance to heat sources and on the shell curvature was considered with symmetrical and asymmetrical heat transfer.

*Key words:* shallow shell, heat conduction problem, stationary heat exchange, Legendre polynomials.